

Σχήματα δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών κατασκευών με τη χρήση ειδικού υπολογιστικού εργαλείου

Γιώργος Ψυχάρης

Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, ΕΚΠΑ

gpsych@ppp.uoa.gr

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται ερευνητικά αποτελέσματα που αφορούν τη χρήση ειδικού εργαλείου δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών κατασκευών στο πλαίσιο του πειραματισμού 13χρονων μαθητών για την επίτευξη της αυξομειώσής τους με βάση σχέσεις αναλογίας μεταξύ μεταβλητών μεγεθών. Τα παιδιά εργάστηκαν χρησιμοποιώντας ειδικά σχεδιασμένα υπολογιστικά εργαλεία συμβολικής και γραφικής αναπαράστασης των μεταβλητών μεγεθών, που παράλληλα μπορούσαν να τα χειριστούν ελέγχοντας με δυναμικό τρόπο την αριθμητική μεταβολή τους. Στα ευρήματα καταγράφεται η αξιοποίηση του δυναμικού χειρισμού ως πλαισίου αναγνώρισης και έκφρασης συσχετίσεων μεταξύ των μεταβλητών μεγεθών των γεωμετρικών κατασκευών.

Λέξεις κλειδιά

Μεγέθυνση-σμίκρυνση, δυναμικός χειρισμός, λόγος, αναλογία.

Εισαγωγή

Στο επίκεντρο της παρούσας έρευνας βρίσκεται η μελέτη του δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών κατασκευών όπως εμφανίζεται σε διαδικασίες αυξομειώσής τους από μαθητές της Α' γυμνασίου. Με τον όρο *αυξομείωση* αναφερόμαστε στη δυνατότητα μεγέθυνσης-σμίκρυνσης δυναμικά μεταβαλλόμενων γεωμετρικών σχημάτων, η κατασκευή των οποίων βασίζεται σε σχέσεις αναλογίας. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες χρησιμοποιώντας ειδικά σχεδιασμένα υπολογιστικά εργαλεία αναπαράστασης και χειρισμού των μεταβλητών μεγεθών των κατασκευών (Χελωνόκοσμος, <http://etl.ppp.uoa.gr>). Τα μεταβλητά μεγέθη αναπαριστάνονταν συμβολικά -μέσω προγραμματιστικής γλώσσας- και γραφικά, ενώ παράλληλα τα παιδιά μπορούσαν να τα χειριστούν ελέγχοντας με δυναμικό τρόπο την αριθμητική και γραφική μεταβολή τους (Kynigos, 2002). Αναφορικά με την περιγραφή της εξέλιξης της χρήσης ενός υπολογιστικού εργαλείου υιοθετούμε την έννοια του *σχήματος* (Vergnaud, 1998), που μπορεί να θεωρηθεί ως ψυχολογική συνισταμένη διαδικασιών ελέγχου του εργαλείου και 'ενορχηστρωμένων' (instrumented) ενεργειών για την εκπλήρωση συγκεκριμένων στόχων, που κατευθύνονται διπλά -εκπορεύονται και καταλήγουν- από το παιδί προς το υπολογιστικό εργαλείο και αντίστροφα (Guin & Touche, 1999).

Στην πλειονότητα των ερευνών τα προβλήματα μεγέθυνσης-σμίκρυνσης γεωμετρικών σχημάτων αποτελούν μεμονωμένα προβλήματα που εξετάζονται αποσπασματικά στο πλαίσιο μιας σειράς άλλων προβλημάτων λόγων και αναλογιών. Στην παρούσα έρευνα η μεγέθυνση-σμίκρυνση τίθεται στο επίκεντρο ως *διαδικασία* και γίνεται ο άξονας της μελέτης των δραστηριοτήτων που αναπτύσσουν οι μαθητές όταν επιχειρούν να κατασκευάσουν αυξομειούμενες γεωμετρικές κατασκευές με χρήση μεταβλητών, μεταξύ των οποίων υπάρχουν γραμμικές συναρτησιακές σχέσεις της μορφής $Y=mX$ (Karplus et al., 1983). Η δραστηριότητα που παρουσιάζουμε εδώ αποκαλείται *εξομάλυνση* (με την έννοια των Ainley et al., 2001) και αφορά την

εμπλοκή των μαθητών σε διορθωτικές ενέργειες, που είχαν ως αφετηρία τη γραφική αναπαράσταση των γεωμετρικών κατασκευών και ανέκυσαν στο πλαίσιο της αναζήτησης σχέσεων αναλογίας (Psycharis & Kynigos, 2004). Η συγκεκριμένη δραστηριότητα χρησιμοποιείται ως εργαλείο ανάλυσης της αλληλεπίδρασης των παιδιών με το υπολογιστικό περιβάλλον, αλλά και των νοημάτων για τις έννοιες του λόγου και της αναλογίας που αναπτύσσονται στο πλαίσιο της συγκεκριμένης αλληλεπίδρασης.

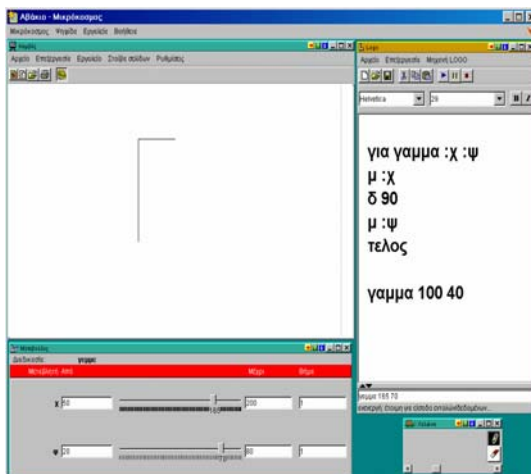
Οι πλέον συνηθισμένες στρατηγικές των μαθητών για την επίλυση των προβλημάτων μεγέθυνσης-σμίκρυνσης είναι οι προσθετικές, σύμφωνα με οποίες όμοιο σχήμα προς ένα αρχικό προκύπτει όταν προστεθούν στα μήκη των πλευρών του κατάλληλα μήκη, μέχρι αυτά να εξισωθούν με εκείνα των αντίστοιχων πλευρών του αρχικού σχήματος (Tourniaire & Pulos, 1985, Hart, 1984). Από την άλλη, έχουν επισημανθεί οι ποιοτικές διαφοροποιήσεις που χαρακτηρίζουν τις στρατηγικές και τις ικανότητες που επιδεικνύουν οι μαθητές στα συγκεκριμένα προβλήματα όταν εργάζονται σε υπολογιστικά περιβάλλοντα με διασυνδεδεμένες γραφικές και συμβολικές αναπαραστάσεις (Noss & Hoyles, 1996). Οι Noss και Hoyles (1996) διακρίνουν ότι στη διασύνδεση αυτή συναντώνται δύο κρίσιμες παράμετροι που διέπουν τις διαδικασίες μεγέθυνσης-σμίκρυνσης: η δυνατότητα αλγεβρικής έκφρασης σχέσεων (μέσω προγραμματισμού) και η ταυτόχρονη επιβεβαίωση του γεωμετρικού αποτελέσματος στην οθόνη. Ο ρόλος της δυνατότητας δυναμικού χειρισμού ενός σχήματος, που απουσιάζει όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν στατικά μέσα αναπαράστασης, είναι εκείνος στον οποίο εστιάζεται η παρούσα έρευνα.

Τα υπάρχοντα ερευνητικά αποτελέσματα αναφορικά με το δυναμικό χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων επικεντρώνονται στον έλεγχο της μορφής τους, όπως υλοποιείται μέσα από τη δυνατότητα συρσίματος (dragging) των γεωμετρικών τους στοιχείων (π.χ. μιας κορυφής) και την ταυτόχρονη παρατήρηση των αλλαγών στο σχήμα ενόσω συμβαίνουν. Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν το ρόλο του δυναμικού χειρισμού ως κρίκου διασύνδεσης της εμπειρικής και της θεωρητικής βάσης των μαθηματικών, που μπορεί έτσι να θεωρηθούν συμπληρωματικές παρά αντιθετικές (Mariotti, 2000). Σε αυτό το πλαίσιο κεντρικό ρόλο κατέχει η ανάδραση του υπολογιστή (Hoelz, 1996), ενώ στην εξεικόνιση των γραφικών αλλαγών αναγνωρίζεται η δυνατότητα ανακάλυψης των λογικών περιορισμών και εμποδίων που διέπουν μια γεωμετρική κατασκευή (Arzarello et al., 1998). Στην παρούσα έρευνα επιδιώκουμε να μελετήσουμε τον κιναισθητικό έλεγχο του σχήματος μέσα από το δυναμικό χειρισμό των γεωμετρικών του στοιχείων χωρίς την απουσία της συμβολικής έκφρασης, η σημασία της οποίας επισημαίνεται ως κεφαλαιώδης στα θέματα που αφορούν τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών (Cobb et al., 2000).

Το πλαίσιο της έρευνας

Το μεθοδολογικό πλαίσιο της έρευνας (για λεπτομερέστερη αναφορά βλ. στο Ψυχάρης, 2005) οριοθετήθηκε από εθνογραφικές μεθόδους για τη φυσική παρατήρηση ανθρώπινων δραστηριοτήτων, που λαμβάνουν χώρα σε πραγματικό χρόνο (Goetz & LeCompte, 1984). Ο σχεδιασμός της εκπαιδευτικής δραστηριότητας (task) στην οποία βασίστηκε η έρευνα εντάσσεται στο κατασκευαστικό ρεύμα (constructionism, Kafai & Resnick, 1996), το οποίο ανέδειξε την παιδαγωγική αξία της κατασκευής μοντέλων από τα παιδιά, που μπορεί να γίνουν αντικείμενο διαπραγμάτευσης και επικοινωνίας.

Στην έρευνα, που πραγματοποιήθηκε σε ένα γυμνάσιο, συμμετείχαν δύο τμήματα της Α' γυμνασίου (Α1 και Α2) και οι δύο αντίστοιχοι καθηγητές μαθηματικών. Οι μαθητές εργάζονταν ανά δύο σε συνεργαζόμενες ομάδες στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου κατά τη διάρκεια ενός δίωρου μαθήματος κάθε εβδομάδα στο οποίο δίδασκαν οι συμμετέχοντες καθηγητές. Οι δεκατρείς ομάδες παιδιών κάθε τμήματος κλήθηκαν να κατασκευάσουν μια γραμματοσειρά με όλα τα κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου με μεταβλητό μέγεθος, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη γραφή λέξεων ή φράσεων διαφορετικών μεγεθών. Γι' αυτό το λόγο τα γράμματα έπρεπε να αυξομειώνονται με τον ίδιο τρόπο όταν τοποθετούνται το ένα δίπλα στο άλλο. Έτσι, ζητήθηκε από τα παιδιά στην κατασκευή κάθε γράμματος να χρησιμοποιήσουν όσο το δυνατόν λιγότερες μεταβλητές, με απώτερο στόχο τη χρήση μιας μεταβλητής, μέσω της αλλαγής της οποίας να επιτυγχάνεται η ζητούμενη αυξομείωση. Σύμφωνα με τη δραστηριότητα, που ονομάστηκε Κατασκευή Δυναμικής Γραμματοσειράς (ΚΔΓ), κάθε ομάδα ανέλαβε την κατασκευή δύο γραμμάτων, ενώ σε επόμενο στάδιο οι ομάδες αντάλλαξαν τα γράμματά τους με σκοπό τη δοκιμή της συμμεταβολής τους. Η δραστηριότητα ΚΔΓ προέβλεπε την εμπλοκή των παιδιών στο εννοιολογικό πεδίο λόγου και αναλογίας χωρίς άμεση αναφορά σε αυτό, αλλά αποδίδοντας έμφαση στην διαπλοκή στόχου και χρήσης (Ainley & Pratt, 2002) των γεωμετρικών σχημάτων, οι κατασκευαστικές απαιτήσεις των οποίων βρίσκονταν σε άμεση συνάφεια με τις λειτουργικότητες των υπολογιστικών εργαλείων.



Σχήμα 1: Το γάμμα με δύο μεταβλητές.

Κύριο χαρακτηριστικό του απασχολούμενου υπολογιστικού περιβάλλοντος (Kynigos, 2002) είναι η δυνατότητα πολλαπλής -αριθμητικής και γραφικής- αναπαράστασης των μεταβαλλόμενων μεγεθών και ο δυναμικός χειρισμός των αριθμητικών τιμών τους με τη χρήση ενός ειδικού εργαλείου δυναμικού χειρισμού -που εμφανίζεται με τη μορφή μιας λωρίδας κύλισης- για κάθε μεταβλητή. Το σύρσιμο με το ποντίκι κάθε λωρίδας κύλισης -που αποκαλείται μεταβολέας- οδηγεί στην αλλαγή των αριθμητικών τιμών κάθε μεταβλητής. Ταυτόχρονα το αποτέλεσμα των

αριθμητικών αλλαγών εμφανίζεται στη γραφική αναπαράσταση του σχήματος μέσα από τη δυναμική αύξηση-ελάττωση του αντίστοιχου μεγέθους. Στην οθόνη μαζί με τη γραφική αναπαράσταση και το μεταβολέα εμφανίζεται και ένα πεδίο συμβολικής έκφρασης όπου κάθε κατασκευή περιγράφεται μέσα από μια διαδικασία (ή κώδικα) κατασκευής με τη γλώσσα Logo. Στο σχήμα 1 η μεταβλητή χ αντιστοιχεί στο κατακόρυφο μήκος του γάμμα και η ψ στο οριζόντιο. Η κατασκευή ενός αυξομειούμενου σχήματος με μία μεταβλητή επιτυγχάνεται με τη συσχέτιση δύο μεταβλητών και τη συναρτησιακή έκφραση της μιας σε σχέση με την άλλη. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του γάμμα η μεταβλητή ψ θα μπορούσε να αντικατασταθεί από τη σχέση $\chi/3$. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι με τη χρήση προσθετικών σχέσεων το σχήμα εμφανίζεται να χαλάει κατά την αυξομείωσή του.

Οι μαθητές του συγκεκριμένου σχολείου ήταν εξοικειωμένοι με τη χρήση της Logo από προηγούμενα έτη όπως και με τη χρήση μεταβλητών. Στην έναρξη της

δραστηριότητας έγινε η εισαγωγή τους στη χρήση του μεταβολέα μέσα από απλά παραδείγματα μεταβλητών κατασκευών όπως τετραγώνου, ορθογωνίου και κύκλου. Η εφαρμογή της δραστηριότητας πραγματοποιήθηκε για δύο ώρες την εβδομάδα σε κάθε τμήμα και απλώθηκε χρονικά σε διάστημα τριών μηνών. Ο ερευνητής είχε το ρόλο του συμμετοχικού παρατηρητή. Σε κάθε τμήμα επιλέχτηκε μία ομάδα δύο μαθητών (ομάδα εστίασης) των οποίων τα λεγόμενα και οι ενέργειες καταγράφηκαν λεπτομερώς με μία κάμερα, ενώ με μια δεύτερη κάμερα καταγράφηκαν επεισόδια από το σύνολο των ομάδων της τάξης αλλά και τις παρεμβάσεις του διδάσκοντα. Όλα τα δεδομένα απομαγνητοφωνήθηκαν για την ανάλυση.

Η μέθοδος ανάλυσης

Στην ανάλυση λήφθηκε υπόψη η συσχέτιση των συνθηκών (γιατί) και των αλληλεπιδράσεων (πώς) (Strauss & Corbin, 1998) που συνόδευσαν το χάλασμα του σχήματος και τις μετέπειτα διορθωτικές ενέργειες των παιδιών. Ο ερευνητής 'διάβασε' κάθε μετακίνηση του μεταβολέα ως ένα συμβάν που ήταν αναπόσπαστα συνδεδεμένο με το πριν (αιτία) και το μετά (αποτέλεσμα). Μονάδα ανάλυσης ήταν το επεισόδιο, που ορίστηκε ως ένα απόσπασμα δράσεων και αλληλεπιδράσεων που εκτυλίσσεται σε συνεχή χρόνο γύρω από ένα συγκεκριμένο θέμα. Η εξαγωγή των επεισοδίων βασίστηκε σε τρία κριτήρια:

- Το "αρχικό κριτήριο" ή "κίνητρο" της διόρθωσης, που αφορούσε τις συνθήκες του χαλάσματος.
- Το "σημείο εστίασης" των παιδιών μέσω των λεγομένων και των ενεργειών τους, που δεν ταυτιζόταν πάντα με την πραγματική αιτία του χαλάσματος του σχήματος. Το στοιχείο αυτό συσχετίζει τις ενέργειες των παιδιών με βάση το ατομικό κίνητρο της εμπλοκής στη διορθωτική διαδικασία.
- Τη "νοηματική αλυσίδα" του πλέγματος 'λόγος και αναλογία' που συνοδεύει τις διορθωτικές ενέργειες των παιδιών και έπεται της μετακίνησης του μεταβολέα ή αναδύεται κατά τη διάρκειά της. Ο όρος χρησιμοποιείται για να υπογραμμιστεί τόσο η στενή διασύνδεση μεταξύ νοημάτων και διορθωτικών ενεργειών, όσο και η συνοχή που έχουν τα αναδυόμενα νοήματα ως μέρη μιας ακολουθίας ενεργειών όπου το επόμενο εξαρτάται από το προηγούμενο.

Τα παραπάνω κριτήρια οριοθέτησαν το πλαίσιο μελέτης της εμφάνισης και της εξέλιξης των διορθωτικών ενεργειών των μαθητών και επέτρεψαν την εξαγωγή επεισοδίων διαφορετικής έκτασης που 'φώτιζαν' τις πτυχές της κατασκευαστικής διαδικασίας τόσο σε επίπεδο νοημάτων και όσο και σε επίπεδο χρήσης εργαλείων.

Αποτελέσματα

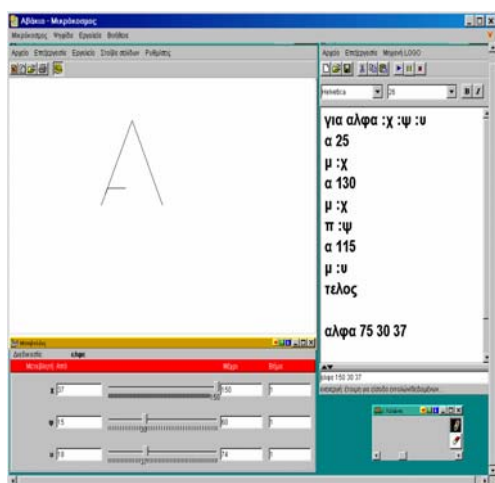
Χρησιμοποιούμε τον όρο *εξομάλυνση* για την περιγραφή της δραστηριότητας σύμφωνα με την οποία, τα παιδιά, μη αποδεχόμενα τις μορφές του υπό κατασκευή γράμματος, προσπαθούσαν να το τροποποιήσουν με βάση μια αποδεκτή από τα ίδια φόρμα. Στις περισσότερες περιπτώσεις τα παιδιά ξεκίνησαν με την κατασκευή ενός σταθερού σχήματος, που ο ερευνητής ονόμασε *πρότυπο*, το οποίο επιχείρησαν να αυξομειώσουν στη συνέχεια με τη χρήση μεταβλητών. Η χρήση περισσότερων από μία μεταβλητών σε μια κατασκευή χαρακτηρίστηκε από τον πειραματισμό των παιδιών με το μεταβαλλόμενο σχήμα, ενώ η χρήση μιας μεταβλητής αποτέλεσε την ένδειξη της μετάβασης στο αυξομειούμενο σχήμα.

Εξομάλυνση και αναγνωριστική μετακίνηση

Οι *αναγνωριστικές μετακινήσεις* αφορούσαν ως επί το πλείστον περιπτώσεις αρχικής χρήσης του μεταβολέα που συνδυάστηκαν με την αναγνώριση του τρόπου

λειτουργίας του. Στο απόσπασμα που ακολουθεί οι μαθητές (Ομάδα εστίασης-A1) έχουν κατασκευάσει άλφα με χρήση τριών μεταβλητών για τα μήκη του σχήματος.

Στη διαδικασία που φαίνεται στο σχήμα, ο πρώτος μεταβολέας αντιστοιχεί στη μεταβλητή χ , ο δεύτερος στην ψ και ο τρίτος στην υ . Στην οθόνη έχει κατασκευαστεί το πρότυπο του άλφα και οι τρεις μεταβολείς βρίσκονται στις σχετικές τιμές: $\chi=75$, $\psi=30$, $\upsilon=37$. Ο M1 κινεί για πρώτη φορά το μεταβολέα χ και το σχήμα χαλάει.



Σχήμα 2: Το χάλασμα του άλφα με τη μετακίνηση του μεταβολέα χ .

417. E: Τώρα εδώ, όπως κινείς τον πρώτο μεταβολέα, τι συμβαίνει;

418. M1: Μεγαλώνει η πλευρά ... [Δείχνοντας τα πλάγια τμήματα του άλφα] Αυτό εδώ.

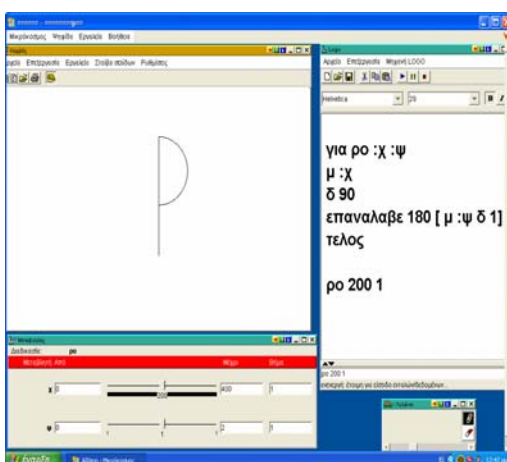
419. M2: [Στον M1] Πήγαινε το στο 150 [Βάζει το μεταβολέα χ στο 150].

420. M1: [Το σχήμα χαλάει] Αλλά πρέπει να μεγαλώσω και αυτά εδώ πέρα [ενν. τα ψ , υ].

Με το χάλασμα του σχήματος ανακύπτει η ανάγκη μετακίνησης και όλων των υπολοίπων μεταβλητών μεγεθών (γραμμή 420). Στις επακόλουθες διορθωτικές ενέργειες των παιδιών δόθηκε προτεραιότητα στη σχεδίαση μιας αποδεκτής φόρμας του νέου μεγαλύτερου μεγέθους γράμματος, που εκπορεύτηκε από την ανάγκη να κλείσει το σχήμα. Η αλλαγή στις τιμές των υπολοίπων μεταβλητών δεν έγινε με βάση κάποια σχέση αναλογίας και έτσι δεν προέκυψε σχήμα όμοιο με το αρχικό. Εδώ, καταγράφουμε τη βαθμιαία εστίαση των μαθητών στην ύπαρξη αλληλεξάρτησης των εμπλεκόμενων μεγεθών και όχι στο είδος της.

Εξομάλυνση και μετακίνηση συσχέτισης

Οι μετακινήσεις συσχέτισης αναδύθηκαν κατά τη μετάβαση από την κατασκευή του προτύπου στις δυναμικά μεταβαλλόμενες κατασκευές. Ο πειραματισμός των παιδιών χαρακτηρίστηκε από τις προσπάθειές τους να διακρίνουν σχέσεις που διέπουν την αλληλεξάρτηση των εμπλεκόμενων μεγεθών αποτρέποντας, παράλληλα, το χάλασμα



Σχήμα 3: Το ρο με δύο μεταβλητές.

του σχήματος. Σε μια κατασκευή του ρο (Ομάδα 9-A2) οι μετακινήσεις συσχέτισης των μεταβολέων νοηματοδοτήθηκαν μέσα από τη διατήρηση των λόγων των εμπλεκόμενων μεταβλητών μεγεθών του σχήματος. Τα παιδιά έχουν κατασκευάσει το πρότυπο του γράμματος με τη διαδικασία που φαίνεται στο διπλανό σχήμα για τις τιμές $\chi=400$ και $\psi=2$. Με τη μετακίνηση των μεταβολέων σχηματίζονται διαφορετικά μοντέλα του γράμματος στα οποία δεν είναι πάντα εμφανές οπτικά αν το ημικύκλιο πέφτει ακριβώς στο μέσο του κατακόρυφου τμήματος, ιδιότητα που τα παιδιά θεωρούν ότι ικανοποιείται στο πρότυπο. Η

επισημάνση του ερευνητή για το αν η 'τομή στο μέσο' διατηρείται και σε

διαφορετικού μεγέθους μοντέλα του γράμματος πυροδοτεί διαδικασίες εξομάλυνσης του σχήματος από τα παιδιά με σκοπό την κατασκευή κι άλλων μοντέλων με την ίδια ιδιότητα.

14: M1: Και όταν είναι στο 200 σημαίνει ότι είναι στη μέση.

15: E: Είναι στη μέση; Πού το ξέρεις;

16: M1: Επειδή είναι το μισό του 400.

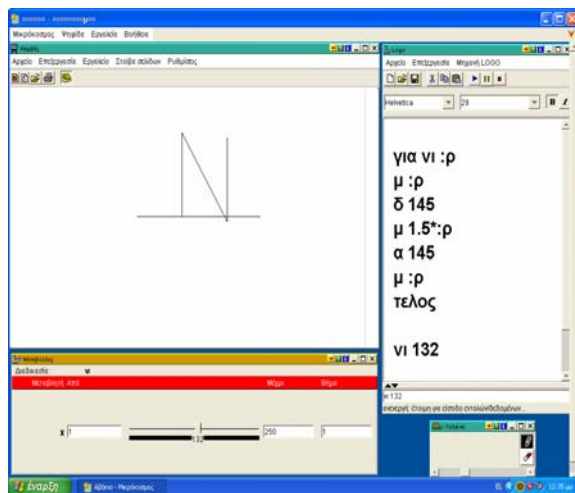
17: E: Και το ημικόκλιο πώς ξέρεις ότι πέφτει στη μέση;

18: M1: Θα το βάλουμε στη μέση. Από 0 μέχρι 2 αρχίζει. Άρα θα το βάλουμε ακριβώς στο 1 [ενν. το μεταβολέα ψ].

Ο M1 εκφράζει τη διατήρηση της ιδιότητας 'τομή στο μέσο' μέσα από τη μετακίνηση των μεταβολέων στα μισά των αρχικών τιμών, που αντιστοιχούν στα μέσα των λωρίδων κύλισης και των δύο μεταβολέων (Σχήμα 3). Η συσχέτιση των μεταβλητών είναι κλιμακωτή και ο λόγος ομοιότητας του αρχικού και του νέου μοντέλου του ρο είναι το $\frac{1}{2}$. Η διασύνδεση της γεωμετρικής ιδιότητας με τις αριθμητικές αλλαγές από τον M1 φαίνεται στη χρήση της λέξης 'μέση': ο ερευνητής τη χρησιμοποιεί αναφερόμενος στο σχήμα (γραμμή 17) και ο M1 στην κατακόρυφη τοποθέτηση των μεταβολέων στο μέσο των αντίστοιχων λωρίδων κύλισης (γραμμή 18). Με αυτό τον τρόπο οι λειτουργικότητες του μεταβολέα εμφανίζονται ως μέσο μετασχηματισμού για την περιγραφή συγκεκριμένων ιδιοτήτων του γεωμετρικού σχήματος.

Εξομάλυνση και μετακίνηση ελέγχου

Οι μετακινήσεις ελέγχου αναδύθηκαν στο πλαίσιο της εξοικείωσης των παιδιών με τη χρήση των υπολογιστικών εργαλείων και χαρακτηρίστηκαν από ποιοτικές διαφοροποιήσεις στην πρόσληψη των γεωμετρικών και αλγεβρικών χαρακτηριστικών των ζητούμενων γεωμετρικών κατασκευών. Στις μετακινήσεις της κατηγορίας αυτής οι διορθωτικές ενέργειες των παιδιών εμπλουτίστηκαν από στοιχεία ελέγχου συγκεκριμένων στόχων ή υποθέσεων.



Σχήμα 4: Το vi με μία μεταβλητή.

Ένα στοιχείο που χαρακτήρισε την εξέλιξη της συγκεκριμένης κατηγορίας μετακινήσεων ήταν η διαρκής αλληλοδιαπλοκή συνθετότερων πεδίων ελέγχου που βασίστηκαν σε ενδείξεις και συμπεράσματα προηγούμενων μετακινήσεων. Σε μια κατασκευή του vi (Ομάδα εστίασης-A2) τα παιδιά έχουν θεωρήσει ότι το πλάγιο μήκος είναι μιάμιση φορά το κατακόρυφο, βασισμένα σε μεμονωμένες συγκρίσεις ζευγών που προηγήθηκαν με τη χρήση δύο μεταβλητών για τα μήκη της κατασκευής. Στο απόσπασμα που ακολουθεί τα παιδιά

δοκιμάζουν τη χρήση μοναδικής μεταβλητής χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική σχέση $1,5 \cdot \rho$ για την έκφραση του πλάγιου μήκους του γράμματος. Η μετακίνηση του μεταβολέα οδηγεί στη διαπίστωση ότι το πλάγιο μήκος δεν εφαρμόζει ακριβώς στην οριζόντια γραμμή που είχαν σχεδιάσει τα παιδιά στη βάση του γράμματος.

98. M1: Το ίδιο πράγμα είναι και ακόμα χειρότερα. [ενν. το χάλασμα].

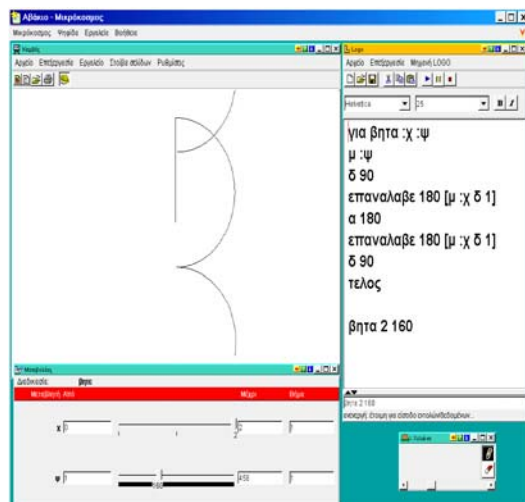
99. E: Μήπως λοιπόν αυτό δεν είναι μιάμιση φορά;

100. M1: Είναι ένα και 45.

Στο παραπάνω απόσπασμα σημειώνουμε ότι η πρόβλεψη του M1 για την τιμή που αντιστοιχεί στο πλάγιο τμήμα προηγείται της δοκιμής της αντίστοιχης σχέσης. Τέτοιες προσπάθειες πρόβλεψης αφενός αναδεικνύουν την εμπειρία της προηγηθείσας μετακίνησης των μεταβολέων όσο και την ανάγκη ελέγχου της μεταβολής για τη διόρθωση των γραφικών δυσχερειών. Με τη δυνατότητα χρήσης μιας σχέσης δημιουργήθηκε το έδαφος για την περαιτέρω επέκταση των διορθωτικών ενεργειών στην προσέγγιση του κατάλληλου πολλαπλασιαστικού παράγοντα για τον οποίο θα μπορούσε να αποφευχθεί το χάλασμα του σχήματος. Εδώ, η διαδικασία πειραματισμού εκτυλίσσεται αναδεικνύοντας τη δυναμική φύση της δημιουργίας πεδίων πειραματισμού για μετέπειτα ακριβέστερες συσχετίσεις.

Εξομάλυνση και μετακίνηση προσέγγισης

Οι μετακινήσεις προσέγγισης σχετίστηκαν με την ακρίβεια στην έκφραση και τον υπολογισμό μέτρων μεγεθών και διέτρεξαν το σύνολο της εργασίας των παιδιών εμφανιζόμενες σε διαφορετικά στάδια της κατασκευαστικής διαδικασίας. Οι συγκεκριμένες μετακινήσεις ανέκυπταν πάντοτε αλληλένδετες με ένα προηγούμενο σχήμα μετακίνησης και χαρακτηρίζονταν από την περισσότερο εξειδικευμένη χρήση του μεταβολέα και των προσφερόμενων λειτουργικοτήτων του (αλλαγή ορίων μεταβολής, χρήση δεκαδικών κ.λπ.).



Σχήμα 4: Το χάλασμα του βήτα για $\chi=2$.

Στη διαδικασία κατασκευής του βήτα (Σχήμα 4) η μεταβλητή ψ αντιστοιχεί στο ύψος του γράμματος και η μεταβλητή χ στο βήμα του ημικυκλίου. Το συγκεκριμένο γράμμα δόθηκε κατά τη διαδικασία ανταλλαγής στην ομάδα εστίασης του τμήματος A2 από μια ομάδα που το κατασκεύασε αρχικά για τιμές προτύπου $\chi=1$ και $\psi=100$. Στο επεισόδιο που ακολουθεί ο M2 κινεί το μεταβολέα χ με όρια τιμών 0 έως 2 και βήμα 1. Ο μεταβολέας αρχικά βρισκόταν στην τιμή 1. Με τη μετακίνηση στο 0 τα ημικύκλια εξαφανίζονται και με μετακίνηση στο 2 το σχήμα χαλάει (τα ημικύκλια βγαίνουν εκτός του κατακόρυφου

μήκους ενώ μέρος του σχήματος εμφανίζεται εκτός οθόνης, βλ. σχήμα 4) και τα παιδιά διορθώνουν τα όρια τιμών της μεταβλητής χ μεταξύ 0 και 1. Η νέα μετακίνηση του μεταβολέα στις δύο συγκεκριμένες τιμές οδηγεί στην εξαφάνιση του σχήματος και στην κατασκευή του προτύπου. Έτσι δημιουργείται το πλαίσιο ελέγχου της αλλαγής της 'απότομης' μεταβολής του ημικυκλίου με την εισαγωγή δεκαδικού αριθμού για το βήμα της μεταβολής.

304. M2: Κύριε δεν παίρνει δεκαδικούς;

305. E: Για δοκιμάστε.

306. M1: [Στον M2] Πιο μικρό απ' το 1 [ενν. βήμα μεταβολής στο μεταβολέα χ].

307. M2: Να βάλω μηδέν κόμμα 2. Με τελεία γίνεται;

308. E: Ναι.

Η χρήση δεκαδικών ανακλύπει μέσα από την ανάγκη κατασκευής μικρότερου ημικυκλίου σε συνδυασμό με την εστίαση στα αριθμητικά χαρακτηριστικά του μεταβολέα. Στην εξέλιξη της προσεγγιστικής διαδικασίας συμπεριλήφθηκαν και περαιτέρω αλλαγές στο βήμα μεταβολής με χρήση δύο δεκαδικών ψηφίων, που κατέληξαν στην τιμή 0,01. Στο επεισόδιο αυτό η μετακίνηση προσέγγισης ανέκυψε ως εξέλιξη της αναγνωριστικής μετακίνησης του μεταβολέα που καθοδηγήθηκε από την ανάγκη καθορισμού των ορίων και του βήματος της μεταβολής των ημικυκλίων.

Εξομάλυνση και μετακίνηση επικύρωσης

Οι μετακινήσεις επικύρωσης αναδύθηκαν ως περισσότερο εξελιγμένες μορφές των μετακινήσεων ελέγχου και, συνήθως, εμφανίστηκαν αλληλοδιαπλεκόμενες με προηγούμενες κατηγορίες μετακινήσεων. Η ανάπτυξη εικασιών και υποθέσεων προς επικύρωση εμφανίστηκαν στο πλαίσιο της εξοικείωσης των παιδιών με τον έλεγχο των κατασκευαστικών χαρακτηριστικών των γραμμάτων αλλά και των προϋποθέσεων επίτευξης της αυξομειώσής τους. Η συναρτησιακή έκφραση της σχέσης μιας μεταβλητής με βάση μια άλλη μεταβλητή στάθηκε η δυσκολότερη μορφή συσχέτισης ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που τα εμπλεκόμενα αριθμητικά μεγέθη δεν έδιναν ακέραια πηλίκα. Σε αρκετές περιπτώσεις η διαδικασία αυτή διευκολύνθηκε από προηγούμενες συσχετίσεις μεγεθών με ακέραια πηλίκα. Σε μια κατασκευή του βήτα η ομάδα του προηγούμενου επεισοδίου πέτυχε την αυξομειώσή της μέσα από την επέκταση των διαδικασιών διαμέρισης με ακέραια πηλίκα, που είχε ήδη ακολουθήσει με επιτυχία σε προηγούμενη κατασκευή του ξι (τρεις παράλληλες οριζόντιες γραμμές, η μεσαία εκ των οποίων ήταν μικρότερη από τις άλλες δύο που ήταν ίσες και συμβολίστηκαν με χ). Στην κατασκευή αυτή το μεσαίο μήκος είχε συμβολιστεί με $\chi/2$, σχέση που προέκυψε από τη διαίρεση των σταθερών τιμών 100 και 50, που είχαν τα δύο μεγέθη στο αντίστοιχο πρότυπο του ξι. Οι τιμές του προτύπου του βήτα που κατασκεύασαν τα παιδιά μετά την ενσωμάτωση δεκαδικών στις τιμές της μεταβλητής ψ ήταν $\chi=0$, 44 και $\psi=100$. Στην αυξομειούμενη κατασκευή η μεταβλητή χ αντικαταστάθηκε από τη σχέση $\psi/227,3$ αφού στρογγυλοποιήθηκε το αποτέλεσμα της διαίρεσης $100:0,44 = 227,2727272 \dots$

Ο Μ1 μετακινεί το μοναδικό μεταβολέα χ και το γράμμα αυξομειώνεται.

221. M1: [Στον E.] Είδατε;

222. E: Α πολύ ωραία. Ναι, αλλά πώς βρήκατε το νούμερο στο διαιρέτη;

223. M2: Διαιρέσαμε το 100 με το 0,44 και βγαίνει 227,3.

Ο Μ1 μετακινεί το μοναδικό μεταβολέα ως ένδειξη επιβεβαίωσης της επέκτασης της κατασκευαστικής στρατηγικής διαμέρισης και σε περιπτώσεις μη ακέραιων αριθμητικών συσχετίσεων. Με αυτή την έννοια το συγκεκριμένο επεισόδιο είναι ενδεικτικό της διαφοροποίησης του τρόπου χρήσης του μεταβολέα ως συνδέσμου υποστήριξης στρατηγικών καθοδηγούμενων από ιδιότητες και σχέσεις και όχι από διαισθητικές οπτικές ή συγκεκριμένου τύπου αριθμητικές τιμές.

Συζήτηση

Στην ανάλυση που προηγήθηκε η μελέτη των διορθωτικών ενεργειών των παιδιών αντιμετωπίστηκε ως ένα πεδίο απεικόνισης των τροποποιήσεων και του χειρισμού των υπό διαμόρφωση σχέσεων αναλογίας που πραγματοποιούνταν συμβολικά, μέσω των αλλαγών στον κώδικα της κατασκευής, αλλά και γραφικά, μέσω της αξιολόγησης

του εκάστοτε αναπαριστώμενου και δυναμικά χειριζόμενου γεωμετρικού αποτελέσματος. Οι γραφικές δυσχέρειες, ως ένδειξη της μη επιτυχούς κατασκευαστικής προσπάθειας, πυροδότησαν με ποικίλους τρόπους το ενδιαφέρον των μαθητών και την ανάπτυξη ερμηνειών σχετικά με την εξήγηση του χαλάσματος του σχήματος, την κατάστροψη διορθωτικών στόχων και την ανάπτυξη αντίστοιχων στρατηγικών. Σε όλα τα ενδεικτικά παραδείγματα που προηγήθηκαν το αρχικό κίνητρο των μετακινήσεων διασυνδέθηκε με το χάλασμα του σχήματος. Στην εξέλιξη των διορθωτικών ενεργειών εξομάλυνσης το σημείο εστίασης των μαθητών, ενώ εκπορεύτηκε από το γραφικό αποτέλεσμα, διευρύνθηκε ώστε να περιλάβει και συμβολικές πτυχές της αναγνώρισης και της έκφρασης των απαραίτητων συσχετίσεων για την αυξομείωση κάθε γράμματος, ενώ η κατασκευαστική διαδικασία εμφανίστηκε αλληλένδετη με την ανάπτυξη νοημάτων για τις έννοιες λόγου και αναλογίας. Σε αυτό το πλαίσιο η συνολική θεώρηση των μετακινήσεων δίνει μια εικόνα ανέλιξης από το απλούστερο στο συνθετότερο, στην οποία ο ρόλος του εργαλείου δυναμικού χειρισμού αναδεικνύεται κρίσιμος στην εξέλιξη των κατασκευαστικών πρακτικών των μαθητών από οπτικές προς μαθηματικοποιημένες εκδοχές. Στην αναγνωριστική μετακίνηση τα διορθωτικά κριτήρια βασίστηκαν στην οπτική αναγνώριση της αλληλεξάρτησης των μεγεθών της κατασκευής χωρίς τη διάκριση σχέσεων αναλογίας. Στη μετακίνηση συσχέτισης τα παιδιά έδειξαν να αποκτούν έλεγχο της διορθωτικής διαδικασίας με βάση συγκεκριμένα κριτήρια (διπλασιασμός και υποδιπλασιασμός των μηκών) που απηχούσαν στην προσπάθεια εξεύρεσης της σχέσης των μηκών για τα οποία κατασκευάζονται όμοια μοντέλα του ίδιου σχήματος. Στη μετακίνηση ελέγχου η εξομάλυνση εμπλουτίστηκε από στοιχεία συνδυαστικής επεξεργασίας των αλγεβρικών και των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κατασκευής μέσα από τον έλεγχο συγκεκριμένων υποθέσεων που βασίστηκαν σε ενδείξεις και συμπεράσματα προηγούμενων μετακινήσεων. Η πολλαπλασιαστική έκφραση της σχέσης κατακόρυφου πλάγιου μήκους του νι, παρότι βασίστηκε σε συμπεράσματα μεμονωμένων δοκιμών, αποτέλεσε τη βάση για την εξέλιξη της διορθωτικής διαδικασίας με βάση την επιλογή κατάλληλου αριθμητικού συντελεστή. Η αναγνωριστική μετακίνηση των μεταβολών στο βήτα, διαμεσολαβούμενη από τη σταδιακή διαχείριση των αριθμητικών χαρακτηριστικών του μεταβολέα (τιμών και βήματος), εξελίχθηκε σε προσεγγιστική διαδικασία ελέγχου της μεταβολής των ημικυκλικών μερών του σχήματος. Στη συνέχεια της κατασκευής του ίδιου γράμματος η εστίαση των παιδιών επικεντρώθηκε στη συγκρότηση σχέσεων με βάση την επέκταση της στρατηγικής διαμέρισης και με αυτή την έννοια η μετακίνηση επικύρωσε τη γενίκευση της εφαρμογής της και στην περίπτωση μη ακέραιων πηλίκων. Αν εκλάβουμε ως απλούστερο σχήμα χρήσης του μεταβολέα τη μετακίνηση αναγνώρισης μπορούμε περιγραμματικά να διακρίνουμε στα συγκεκριμένα σχήματα την εξέλιξη της μετακίνησης των παιδιών από τη συσχέτιση, στην έκφραση και τον έλεγχο σχέσεων, στην ακριβέστερη προσέγγιση της μεταβολής μεγεθών και στην επικύρωση αναδυόμενων συσχετίσεων και στρατηγικών ως ενδείξεις περισσότερο εστιασμένων χρήσεων που διασυνδέθηκαν με τα μαθηματικά χαρακτηριστικά των κατασκευών όπως έγιναν αντιληπτά από τα παιδιά και εκφράστηκαν μέσα από το δυναμικό χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων.

Σημειώσεις

Η έρευνα χρηματοδοτήθηκε σε διαφορετικά χρονικά στάδια από τους παρακάτω φορείς:

(α) Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ): Υποτροφία στη Διδακτική Μαθηματικών, Πρόγραμμα Υποτροφιών Εσωτερικού. (β) Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (ΓΓΕΤ): Πρόγραμμα Υποτροφιών Προσανατολισμένης Έρευνας (ΥΠΕΡ) «Η Δημιουργία και

τα Χαρακτηριστικά Μαθησιακών Περιβαλλόντων στα Μαθηματικά με τη χρήση Δικτυακού και Διερευνητικού Λογισμικού». Κωδικός έρευνας: 97ΥΠ-48, 1999-2002.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Ainley, J. & Pratt, D. (2002) Purpose and utility in pedagogic task design. In *Proceedings of the 26th PME Conference*, Norwich, England, Vol. 2, 17-24.
- Ainley, J., Pratt, D. & Nardi, E. (2001) Normalising: Children's activity to construct meanings for trend. In *Educational Studies in Mathematics*, 45: 131-146.
- Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Robutti, O., Paola, D. & Gallino, G. (1998) Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry. In *Proceedings of the 22nd PME Conference*, Stellenbosch, South Africa, Vol. 2., 32-39.
- Cobb, P., Yackel, E. & McClain, K. (Eds.) (2000) *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*, Lawrence Erlbaum Associates.
- Goetz, J. P. & LeCompte, M. D. (1984) *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*, Academic Press, London.
- Guin, D. & Trouche, L. (1999) The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. In *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3 (3), 195-227.
- Hart, K. M. (1984) *Ratio: Children's Strategies and Errors*, Windsor: NFER-Nelson.
- Hoelz, R. (1996) How does 'dragging' affect the learning of geometry. In *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1.2, 169-187.
- Kafai, Y. & Resnick, M. (1996) *Constructionism in Practice: Designing, Thinking and Learning in a Digital World*, Lawrence Erlbaum Association.
- Karplus, R., Pulos, S. & Stage, E. K. (1983) Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.) *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*, Academic Press, New York.
- Kynigos C. (2002) Generating cultures for mathematical microworld development in a multi-organisational context. In *Journal of Educational Computing Research*, Baywood Publishing Co. Inc. (1 and 2), 183-209.
- Mariotti, M. A. (2000) Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. In *Educational Studies in Mathematics*, 44: 25-53.
- Noss, R. & Hoyles, C. (1996) *Windows on Mathematical Meanings*, Kluwer.
- Psycharis, G. & Kynigos, C. & (2004) Normalising geometrical constructions: A context for the generation of meanings for ratio and proportion. In *Proceedings of the 28th PME Conference*, Bergen, Norway, Vol. 4, 65-72.
- Strauss, A. & Corbin, J. (1998) *Basics of Qualitative Research*, Sage Publications.
- Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985) Proportional Reasoning: A review of the literature. In *Educational Studies in Mathematics*, 16(2), 181-204.
- Vergnaud, G. (1998) A comprehensive theory of representation for mathematics education. In *Journal of Mathematical behavior*, 17 (2), 167-181.
- Ψυχάρης Γ. (2005) *Ανάπτυξη νοημάτων για τις έννοιες λόγου και αναλογίας σε προβλήματα αυξομείωσης γεωμετρικών κατασκευών με χρήση ειδικών εργαλείων υπολογιστικής τεχνολογίας*, Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, ΕΕΤ, Τμήμα ΦΠΨ.