Ο ρόλος φυσικών και υπολογιστικών εργαλείων σε διαδικασίες μαθηματικοποίησης

Στέφανος Κεΐσογλου Χρόνης Κυνηγός

Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Φ.Π.Ψ., Φιλοσοφική Σχολή Ε.Κ.Π.Α.

keisoglu@otenet.gr kynigos@ppp.uoa.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται επιλεγμένα ευρήματα διετούς έρευνας που αφορά σε διαδικασίες μαθηματικοποίησης όταν οι μαθητές επιχειρούν να αξιοποιήσουν εργαλεία μέτρησης πειραματιζόμενοι με υπολογιστικές προσομοιώσεις τους. Ο συνδυασμός φυσικών και υπολογιστικών εργαλείων δημιουργεί πλήθος από αναπαραστασιακά πλαίσια και εμείς μελετούμε τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές δομούν, με μαθηματικό τρόπο, τα πλαίσια αυτά. Επιπλέον μελετούμε τους τρόπους με τους οποίους συσχετίζουν-συντονίζουν δύο δομημένα πλαίσια μέσα από δράσεις τόσο οριζόντιας όσο και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης.

Λέξεις κλειδιά

Μαθηματικοποίηση, εργαλεία, πλαίσιο, δόμηση.

Εισαγωγή

Η μαθηματική κατανόηση θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μία διαδικασία κατασκευής η οποία δεν είναι ανεξάρτητη από τα εργαλεία τα οποία διαθέτει ο μαθητής. (Schliemann 2002). Τα μέσα τα οποία έχει στην διάθεση του ο μαθητής σε μία τυπική αίθουσα διδασκαλίας, δηλαδή ο πίνακας, το μολύβι, το τετράδιο, τα γεωμετρικά όργανα καθορίζουν το αναπαραστασιακό πλαίσιο μέσα στο οποίο καλείται να δημιουργήσει μαθηματικά νοήματα. Η εισαγωγή νέων αναπαραστασιακών εργαλείων, φυσικών ή υπολογιστικών, στην μαθησιακή διαδικασία παρέχει την δυνατότητα εμπλουτισμού του πλαισίου αυτού σε δύο επίπεδα. Καταρχήν οι αναπαραστάσεις γίνονται δυναμικές με αποτέλεσμα ο μαθητής να χειρίζεται και να μελετά φαινόμενα και όχι στατικές εικόνες. Από την άλλη παρέχεται η δυνατότητα σύνδεσης των αναπαραστάσεων άρα και των μαθηματικών πλαισίων τα οποία σχετίζονται με αυτές. Η εισαγωγή όμως νέων εργαλείων στην μαθησιακή διαδικασία δημιουργεί την ανάγκη για έρευνα του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές δημιουργούν μαθηματικά καθώς χειρίζονται τα εργαλεία αυτά. Η ανάγκη αυτή προκύπτει από σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα σύμφωνα με τα οποία δεν είναι εξασφαλισμένα εκ των προτέρων διδακτικά οφέλη από την χρήση φυσικών εργαλείων (Stacey e.a 2001) ή υπολογιστικών (Clement 2000). Οι ερευνητές συγκλίνουν όλο και περισσότερο στην άποψη ότι θα πρέπει να δοθεί έμφαση στις δραστηριότητες με τις οποίες θα εμπλακούν οι μαθητές καθώς θα χειρίζονται τα εργαλεία και στον τρόπο με τον οποίον θα ερμηνεύουν και θα συνδέουν τις αναπαραστάσεις που αυτά δημιουργούν. Η παρούσα έρευνα εντάσσεται στο πλαίσιο αυτής της προβληματικής και εστιάζει το ενδιαφέρον της σε διαδικασίες με τις οποίες οι μαθητές δομούν με μαθηματικό τρόπο πραγματικά προβλήματα καθώς χειρίζονται φυσικά και υπολογιστικά εργαλεία. Οι διαδικασίες αυτές προσδιορίζονται από τον όρο ‘μαθηματικοποίηση’.

Θεωρητικό πλαίσιο

Η έννοια της 'Μαθηματικοποίησης'

Με τον όρο μαθηματικοποίηση δηλώνουμε δραστηριότητες μέσω των οποίων εφαρμόζεται και αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση. Οι Treffers (1987) και Freudenthal (1991) έχουν προτείνει μία από τις πρώιμες διακρίσεις της μαθηματικοποίησης, την οριζόντια και την κατακόρυφη. Η οριζόντια αναφέρεται σε δραστηριότητες που προχωρούν από τον φυσικό κόσμο στον κόσμο των μαθηματικών ενώ η κατακόρυφη εξελίσσεται μέσα στον χώρο των μαθηματικών. Ο Freudenthal επισημαίνει μάλιστα ότι η διάκριση μεταξύ των δύο αυτών ειδών δεν είναι σαφής και ότι οι σημασίες τους για την μαθηματική εκπαίδευση είναι ισοδύναμες.

Ένας χρήσιμος προσδιορισμός της μαθηματικοποίησης προκύπτει από τον Wheeler, (1982) ο οποίος την ορίζει ως διαδικασία μέσω της οποίας ''τοποθετούμε μία δομή πάνω σε μία άλλη δομή ''. Η μαθηματική δομή πρέπει να προσαρμοστεί στην κατάσταση προβλήματος και κατά συνέπεια θεωρεί την μαθηματικοποίηση ως κατασκευή η οποία μπορεί να ανιχνευθεί κυρίως σε καταστάσεις λύσης προβλήματος, δηλαδή σε καταστάσεις που ανάγουν κάτι το οποίο δεν διαθέτει προφανές μαθηματικό περιεχόμενο σε κάτι το οποίο διαθέτει.

Νεώτεροι ερευνητές (Rasmussen e.a 2000) θεωρούν ότι η οριζόντια μαθηματικοποίηση έχει την έννοια της επεξεργασία ενός προβλήματος, όχι κατ'ανάγκη πραγματικού, ώστε αυτό να καταστεί προσφορότερο σε περαιτέρω ανάλυση και λύση. Μερικές δράσεις που χαρακτηρίζουν την επεξεργασία αυτή είναι ο πειραματισμός, η εικασία και η ταξινόμηση μέσα στο πλαίσιο. Δράσεις που χαρακτηρίζουν την κατακόρυφη μαθηματικοποίηση είναι η χρήση και σύνδεση αφηρημένων μαθηματικών οντοτήτων (π.χ συμβολικών παραστάσεων), η γενίκευση, η τυποποίηση, χωρίς όμως να περιορίζεται μόνο σε αυτές.

Λαμβάνοντας υπ όψιν τις προηγούμενες κατευθύνσεις ορίζουμε την οριζόντια μαθηματικοποίηση ως εκείνη την διαδικασία μέσω της οποίας ο μαθητής επιχειρεί να προσαρμόσει μία μαθηματική δομή πάνω σε μία κατάσταση προβλήματος. Η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση σχετίζεται με την μελέτη της ίδιας της μαθηματικής δομής η οποία πλέον μπορεί να οδηγήσει στην λύση του προβλήματος.

Μία σημαντική συνιστώσα, την οποία λαμβάνουμε υπ όψιν και επιχειρούμε να αναδείξουμε στην έρευνα, είναι το πλαίσιο μέσα στο οποίο καλείται ο μαθητής να αντιμετωπίσει την κατάσταση προβλήματος (φυσικό, εικονικό). Η συνιστώσα αυτή οδηγεί το ενδιαφέρον μας και σε διαδικασίες μέσω των οποίων οι μαθητές συντονίζουν ή μάλλον συσχετίζουν τις δομές με την σημασία που αποδίδουν στον όρο αυτό οι Markman and Gentner(1993). Ιδιαίτερη σημασία αποδίδουμε στην υπόθεση των παραπάνω ερευνητών ότι το υποκείμενο καταρχήν αναγνωρίζει μία εν γένει ομοιότητα δομών σε δύο πλαίσια και στην συνέχεια επιχειρεί δομική συσχέτιση (structural alignment).

Προσδιορίζοντας τον όρο δομική συσχέτιση, μέσα στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας, θεωρούμε ότι αυτός αναφέρεται σε νοητικές δραστηριότητες μέσω των οποίων ο μαθητής συνδέει δύο αναπαραστασιακά πλαίσια. Η σύνδεση αυτή βασίζεται στο μαθηματικό περιεχόμενο των πλαισίων και όχι απλά στα αντικείμενα και τις ιδιότητες που περιέχουν τα πλαίσια. Αυτή ακριβώς η συσχέτιση αποτελεί μία ιδιαίτερη μορφή οριζόντιας μαθηματικοποίησης, η οποία όμως δεν διαφέρει ριζικά από αυτήν που αναφέρεται σε διαδικασίες δόμησης ενός συγκεκριμένου πλαισίου.

Συγκεκριμένα όταν ο μαθητής επιχειρεί να συσχετίσει ένα δομημένο πλαίσιο Α με ένα άλλο Β τότε θα αποδώσει πρώτα μαθηματική δομή στο Β και στην συνέχεια θα επιχειρήσει δομική συσχέτιση μεταξύ των δύο πλαισίων.

Συνοψίζοντας θα μπορούσαμε να διακρίνουμε δύο μορφές οριζόντιας μαθηματικοποίησης στις οποίες δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση, την διαδικασία δόμησης ενός αναπαραστασιακού πλαισίου Α και την διαδικασία συσχέτισης της δομής του πλαισίου Α με την δομή ενός άλλου πλαισίου Β. Με τον όρο 'δόμηση ενός πλαισίου' προσδιορίζουμε την δημιουργία μαθηματικού περιεχομένου μέσα στο πλαίσιο το οποίο περιεχόμενο θα χαρακτηρίζεται πλέον ως 'δομή του πλαισίου'.

Εργαλεία και μαθηματικοποίηση.

Το ερευνητικό μας ενδιαφέρον εστιάζεται στον ρόλο των εργαλείων, φυσικών και υπολογιστικών, σε διαδικασίες μαθηματικοποίησης. Τα εργαλεία, κατά κάποιο τρόπο, αποτελούν τους μεταφορείς των κοινωνικών και πολιτισμικών σχημάτων της γνώσης (Wertsch 1994). Τα φυσικά εργαλεία μετρήσεως μίας απόστασης ή ενός απομακρυσμένου ύψους, για παράδειγμα, φέρουν ενσωματωμένο μαθηματικό περιεχόμενο το οποίο υπαγορεύει την κατασκευή τους και αναδεικνύεται με την λειτουργία τους. Το πρόβλημα της μέτρησης ενός απομακρυσμένου ύψους, σύμφωνα με τις ιστορικές ενδείξεις, λύθηκε μέσα από μία διαδικασία μαθηματικοποίησης στην οποία η χρήση εργαλείων ήταν μείζονος σημασίας αφού αναπτύχθηκαν μαθηματικά εργαλεία κατάλληλα να αξιοποιήσουν τα φυσικά εργαλεία.

Τα υπολογιστικά εργαλεία τώρα μέσα από την δυνατότητα πολλαπλών, δυναμικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών εννοιών προσφέρουν ευκαιρίες στον μαθητή να συνδέσει τις αναπαραστάσεις αυτές, να πειραματιστεί και να ελέγξει υποθέσεις, να γενικεύσει εν ολίγοις να μαθηματικοποιήσει μία κατάσταση προβλήματος.

Ο συνδυασμός των δύο αυτών εργαλείων, φυσικών και υπολογιστικών, δίνει την δυνατότητα δημιουργίας ενός μαθησιακού περιβάλλοντος με ικανό πλήθος από αναπαραστασιακά πλαίσια τα οποία ο μαθητής καλείται να δομήσει με μαθηματικό τρόπο και να συνδέσει. Στην παρούσα έρευνα ο συνδυασμός αυτός υλοποιείται μέσω υπολογιστικών προσομοιώσεων των φυσικών εργαλείων

Συνοψίζοντας επισημαίνουμε δύο σημαντικές δυνατότητες που εισάγουν τα εργαλεία σε ένα μαθησιακό περιβάλλον, την δυνατότητα πειραματισμού και την συνύπαρξη πολλών αναπαραστασιακών πλαισίων.

Ερευνητικά ερωτήματα και σχεδιασμός της έρευνας.

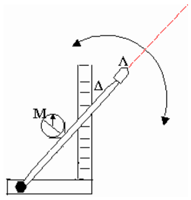
Τα ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσης εργασίας είναι δύο:

- Ποιες δράσεις μαθηματικοποίησης διευκολύνονται ή προκαλούνται καθώς οι μαθητές εργάζονται σε μαθησιακό περιβάλλον που συνδυάζει ένα φυσικό εργαλείο μέτρησης και μια προσομοίωσή του;
- Ειδικότερα με ποιον τρόπο οι μαθητές διαχειρίζονται την αποτυχία συσχέτισης δύο αναπαραστασιακών πλαισίων, μέσα στο συγκεκριμένο περιβάλλον, και τι μαθηματικά δημιουργούν μέσω αυτής;

Σχεδιασμός και μεθοδολογία της έρευνας.

Καταρχήν κατασκευάστηκε ένα φυσικό εργαλείο μετρήσεων.

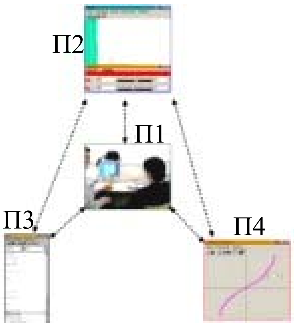


Το εργαλείο

Το εργαλείο αποτελείται από μία ορθή γωνία και έναν δείκτη Δ ο οποίος στο άκρο φέρει ένα μικρό λέιζερ Λ.

Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει να είναι σταθερός ο δείκτης είτε να περιστρέφεται οπότε το φορητό μοιρογνωμόνιο Μ μετρά την γωνία του δείκτη ως προς το οριζόντιο επίπεδο.

Στην συνέχεια επελέγη το λογισμικό 'Χελωνόκοσμος' το οποίο βασίζεται στην λειτουργία ψηφίδων, και διαθέτει δυνατότητα προγραμματισμού (Kynigos κ.α. 1997).



Τα πλαίσια

Το λογισμικό αυτό χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία μίας προσομοίωσης του φυσικού εργαλείου οπότε οι μαθητές είχαν στην διάθεσή τους τέσσερα διαφορετικά αναπαραστασιακά πλαίσια. Συγκεκριμένα Π1 ήταν το πλαίσιο του φυσικού χώρου και του εργαλείου, Π2 (καμβάς-μεταβολέας) ήταν το πλαίσιο της γεωμετρικής προσομοίωσης του εργαλείου και της δέσμης φωτός που εκπέμπει, Π3(ψηφίδα Logo) ήταν το πλαίσιο του κώδικα που κατασκευάζει την προσομοίωση αυτή. Τέλος Π4 (δισδιάστατος μεταβολέας) ήταν ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία του οποίου έχουν συντεταγμένες τις τιμές των μεταβλητών που ο χρήστης έχει ορίσει στον μεταβολέα.

Η μέθοδος της έρευνας ήταν η μελέτη περίπτωσης και μπορεί να χαρακτηριστεί έρευνα δράσης με συμμετοχική παρατήρηση. Επελέγησαν 22 μαθητές, 10 της Γ΄ Γυμνασίου και 12 της Α΄ Λυκείου, οι οποίοι εξεδήλωσαν ενδιαφέρον χωρίς να ληφθεί υπ όψιν η σχολική τους επίδοση. Οι παραπάνω μαθητές προέρχονται από το ίδιο σχολείο και αποτελούν μέρος των μαθητών των τμημάτων στα οποία ο ερευνητής διδάσκει. Για καθαρά μεθοδολογική σκοπιμότητα οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου ενεπλάκησαν με την έρευνα λίγο πριν διδαχτούν στο σχολικό πρόγραμμα την έννοια της ομοιότητας των επιπέδων σχημάτων. Η έννοια αυτή είναι κεντρική για την αξιοποίηση του εργαλείου οπότε μελετήθηκαν οι δραστηριότητες των μαθητών όταν δεν είχαν στην διάθεσή τους το μαθηματικό αυτό πλαίσιο.

Η όλη έρευνα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως ημιδομημένη με την έννοια του ότι ήταν χωρισμένη σε δύο βασικές φάσεις Φ1 και Φ2 κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχούσε και σε διαφορετική χρήση του εργαλείου. Στην Φ1 οι μαθητές χρησιμοποιούσαν το εργαλείο με σταθερό δείκτη και είχαν δυνατότητα μετακίνησης του εργαλείου πάνω στο θρανίο. Στην Φ2 ο δείκτης ήταν ελεύθερος να περιστραφεί αλλά το εργαλείο δεν μπορούσε να μετακινηθεί. Σε κάθε φάση οι μαθητές είχαν στην διάθεσή τους στην αρχή μόνο το φυσικό εργαλείο και το βασικό ερώτημα (κατάσταση προβλήματος) αφορούσε στον τρόπο αξιοποίησης ώστε να μετρηθεί ένα απομακρυσμένο ύψος στο Π1. Στην συνέχεια εκτός από το φυσικό εργαλείο είχαν στην διάθεσή τους και μία προσομοίωσή του μέσω της οποίας μπορούσαν να πειραματιστούν αλλάζοντας τις παραμέτρους της προσομοίωσης. Εδώ το ερώτημα αφορούσε στο πως μετασχηματίζεται η κατάσταση προβλήματος μέσα στα Π2, Π3, Π4 και πως μπορεί να αντιμετωπιστεί.

Η υλοποίηση δεν ήταν αυστηρά καθορισμένη ούτε από άποψη χρόνου αλλά ούτε και από άποψη δομής. Οι μαθητές ήταν χωρισμένοι σε 11 ομάδες των δύο ατόμων και κάθε ομάδα απασχολήθηκε 7-8 ώρες κατά την διάρκεια δύο σχολικών περιόδων (ετών) στο εργαστήριο υπολογιστών του Λυκείου. Οι δραστηριότητες κάθε ομάδας βιντεοσκοπήθηκαν, μαγνητοφωνήθηκαν ενώ οι μαθητές κρατούσαν σημειώσεις σε ένα τετράδιο σε όλη την διάρκεια της έρευνας. Τα δεδομένα της έρευνας προέκυψαν από την απομαγνητοφώνηση της διαπραγμάτευσης που έλαβε χώρα σε κάθε ζεύγος σε συνδυασμό με την εικόνα που είχαμε στην διάθεσή μας από την βιντεοσκόπηση. Μία άλλη πηγή δεδομένων ήταν τα τετράδια τα οποία χρησιμοποίησαν τα ζεύγη και οι σημειώσεις που κράτησαν και τέλος οι σημειώσεις του ερευνητή που αφορούσαν στην παρουσία των μαθητών και τις επιδόσεις τους κατά την διάρκεια του συμβατικού μαθήματος μέσα στην τάξη.

Μαθηματικοποίηση και εργαλεία

Ο ρόλος του φυσικού εργαλείου.

Η χρήση του φυσικού εργαλείου επέτρεψε στους μαθητές να πραγματοποιήσουν πειράματα στον φυσικό χώρο και να προχωρήσουν σε μία ποικιλία από δράσεις μαθηματικοποίησης.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο δύο μαθήτριες, σε ένα από τα ζεύγη της Γ΄ Γυμνασίου, επιχειρούν να επιβάλλουν μαθηματική δομή στο Π1 καθώς δεν διαθέτουν, δηλαδή δεν έχουν διδαχθεί ακόμη, το πλαίσιο της ομοιότητας. Εδώ οι δράσεις μαθηματικοποίησης έχουν κατεξοχήν οριζόντιο χαρακτήρα χωρίς όμως να απουσιάζουν οι κατακόρυφες δράσεις.

Οι μαθήτριες Μ1 και Μ2 έχουν αναγνωρίσει δύο τρίγωνα στον φυσικό χώρο, ένα για το εργαλείο και ένα άλλο το οποίο αποκαλούν ‘νοητό’ και το οποίο σχηματίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών του εργαλείο και τον τοίχο. Καθώς κινούν μπρος πίσω το εργαλείο παρατηρούν και σχολιάζουν την μεταβολή του ύψους στο οποίο εστιάζει το λέιζερ. Η απόδοση δομής πραγματοποιείται σε δύο φάσεις.

Στην πρώτη φάση οι μαθήτριες αποφασίζουν να πραγματοποιήσουν μετρήσεις στις διαστάσεις του εργαλείου. Η χρήση του φυσικού εργαλείου στρέφει την προσοχή τους στην σχέση των γωνιών των δύο τριγώνων.

Μ2: Οπότε το τρίγωνο όμως…. Το νοητό τρίγωνο έχει ίδιες γωνίες με το εργαλείο, αυτή είναι η σχέση του εργαλείου με το τρίγωνο…. Είναι ένα μέρος του..

Μ1: Ή μέρος ή μικρογραφία……

Εδώ οι μαθήτριες έχουν προβάλλει πάνω στα αντικείμενα του Π1 το αρχέτυπο πλαίσιο της ομοιότητας που είναι η ομοιότητα της μορφής, δηλαδή αυτή που βασίζεται στην ισότητα των γωνιών και την σχέση σμίκρυνσης-μεγέθυνσης.

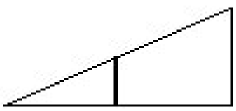
Στην συνέχεια κατασκευάζουν στο τετράδιό τους ένα ορθογώνιο τρίγωνο και μετρούν τις διαστάσεις του εργαλείου. Το σχήμα αυτό συνοψίζει τις διαπιστώσεις και οδηγεί τις μαθήτριες στην ανάκληση και χρήση ενός νέου μαθηματικού πλαισίου, αυτού της κλίσης.

Μ1: Εγώ πιστεύω ότι ο λόγος πρέπει να είναι ίσος…

Ερευνητής: Αυτό γιατί το λέτε;

Μ1: Εγώ πιστεύω ότι επειδή δεν μεταβάλλεται η κλίση αφού η γωνία μένει σταθερή, δεν θα μεταβάλλεται και ο λόγος γιατί αν υποθέσουμε ότι μεταβάλλεται η κλίση…

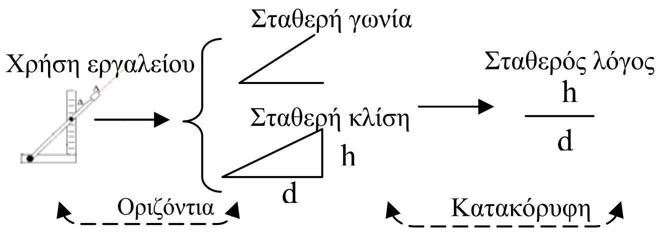
Μ2: Αλλάζει το ύψος και αφού αλλάζει το ύψος που είναι είτε αριθμητής είτε παρονομαστής, θα αλλάζει ο λόγος.



Σύνθεση τριγώνων

Είναι αξιοσημείωτο ότι παρόλη την συσχέτιση των δύο τριγώνων, του φυσικού εργαλείου και του νοητού, οι μαθήτριες χαράσσουν στο τετράδιό τους μόνο ένα ορθογώνιο τρίγωνο μέσω του οποίου αναπαριστούσαν και τα δύο προηγούμενα. Αυτό οφείλεται στο ότι δεν διαθέτουν ακόμη την δομή των ομοίων τριγώνων η οποία φαίνεται ότι συνθέτει τα δύο τρίγωνα στο αρχέτυπο σχήμα της ομοιότητας των ορθογωνίων τριγώνων.

Η έννοια της σμίκρυνσης (μικρογραφία) και η σταθερότητα της κλίσης είναι ασύνδετες και δεν συγκροτούν ακόμη ένα ενιαίο μαθηματικό πλαίσιο. Θα μπορούσαμε όμως να παρατηρήσουμε ότι το πλαίσιο αυτό έχει ήδη αρχίσει να δημιουργείται, να αναδύεται μέσα από την εμπειρία της σμίκρυνσης (μικρογραφία) αλλά και της έννοιας της κλίσης.



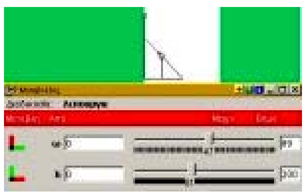
Στο σημείο αυτό οι μαθήτριες έχουν προβεί σε μία κατακόρυφη μορφή μαθηματικοποίησης αφού συνδέουν αφηρημένες οντότητες όπως την έννοια της γωνίας με αυτήν του σταθερού λόγου.

Συνοψίζοντας στην διπλανή εικόνα θα μπορούσαμε να διακρίνουμε την δόμηση του πλαισίου Π1 από τις μαθήτριες μέσα από την προβολή πάνω σε αυτό της έννοιας της κλίσης και της σταθερότητας του λόγου των πλευρών ορθογωνίων τριγώνων.

Τα υπολογιστικά εργαλεία.

Τα υπολογιστικά εργαλεία συγκροτούν τα τρία αναπαραστασιακά πλαίσια Π2, Π3, Π4 μέσω των οποίων δημιουργείται και ελέγχεται η προσομοίωση του φυσικού εργαλείου.

Εδώ οι μαθητές έπρεπε να μεταφέρουν την κατάσταση προβλήματος από το Π1 στο Π2. Για τις ανάγκες της μεταφοράς αυτής ήταν αναγκαίο πρώτα να δομήσουν το Π2 και στην συνέχεια και να συνδέσουν τις δομές τους, ή καλύτερα να τις συντονίσουν.

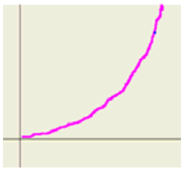


Το πλαίσιο Π2

Η μεταφορά της κατάστασης προβλήματος από τον φυσικό χώρο Π1 στον Π2 πραγματοποιείται όταν οι μαθητές μετασχηματίζουν το πρόβλημα της μέτρησης ενός ύψος στον τοίχο σε πρόβλημα αναζήτησης της σχέσης μεταξύ των μεγεθών που μεταβάλλονται(γωνία ω και ύψος h) ώστε να κατασκευάζεται το μεγάλο τρίγωνο στην οθόνη.

Οι μαθητές των ομάδων από την Α΄ Λυκείου είχαν μεγαλύτερη ευελιξία ιδιαίτερα στην πρώτη φάση (Φ1) αφού είχαν διδαχθεί την έννοια της ομοιότητας ορθογωνίων τριγώνων μέσω της οποίας κυρίως αξιοποιείται το φυσικό εργαλείο στην φάση αυτή. Στην δεύτερη φάση όμως (Φ2) όπου οι δύο μεταβλητές που έπρεπε να συνδεθούν ήταν η γωνία ω του δείκτη και το ύψος εστίασης h δεν υπήρχε το πλεονέκτημα αυτό. Τα υπολογιστικά εργαλεία έδωσαν την ευκαιρία στους μαθητές να κάνουν πειράματα με τις τιμές των μεταβλητών, δηλαδή του ύψους και της γωνίας, και κυρίως να μεταβάλλουν τις τιμές πέρα και έξω από τα όρια των δυνατοτήτων του φυσικού εργαλείου. Η προσπάθεια σύνδεσης των πλαισίων Π2 και Π4(δισδιάστατος μεταβολέας) σε όλα τα ζεύγη των μαθητών είχε ως αφετηρία την μεταφορά της κατάστασης προβλήματος από το ένα πλαίσιο στο άλλο.

Το πρόβλημα τώρα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής: « Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων οι συντεταγμένες των οποίων κατασκευάζουν το μεγάλο τρίγωνο». Το πλαίσιο Π2 έχει ήδη δομηθεί μέσω της κατασκευής ομοίων τριγώνων. Η δομή αυτή είναι η κατάλληλη αφού μέσω αυτής μπορεί να λυθεί το αρχικό πρόβλημα.



Η νέα καμπύλη

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η προσπάθεια των μαθητών Δ και Α, σε ένα από τα ζεύγη της Α΄ Λυκείου, να εντοπίσουν το είδος της καμπύλης που δημιουργούν τα σημεία στον δισδιάστατο μεταβολέα. Εδώ πλέον τα δύο μεγέθη ήταν η γωνία και το ύψος οπότε τα σημεία δεν ανήκαν σε μία ευθεία και οι μαθητές επιχειρούν να αποδώσουν στην καμπύλη μία από τις γνωστές σε αυτούς δομές.

Ερευνητής: Τι σχέση νομίζετε ότι συνδέει τα δύο ποσά;

Α: Πρέπει να έχει τετράγωνο μέσα.

Δ: Γιατί βγήκε έτσι;

Α: Γιατί είναι παραβολή

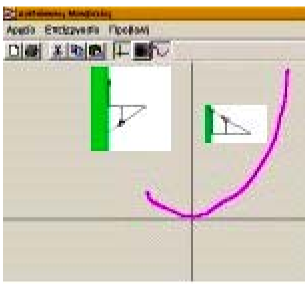
Ερευνητής: Μπορούμε να το ελέγξουμε;

Δ: Μπορούμε να δούμε από εδώ και κάτω, πριν το 0, αν στρίβει είναι η χ^3.

Α: Να βάλουμε αρνητικές ποσότητες, για να δούμε........-150..

Εδώ οι μαθητές προβάλλουν πάνω στην καμπύλη, επομένως και στο Π4, δύο διαφορετικές δομές, αυτήν της παραβολής $\psi=\chi^2$ και αυτήν της $\psi=\chi^3$. Οι δύο δομές έχουν πλέον χαρακτηριστικά συνάρτησης ενώ η αναζήτηση της κατάλληλης δομής πραγματοποιείται με τρεις τρόπους.

α) Έλεγχος της δομής $\psi=\chi^2$ Οι μαθητές κατασκευάζουν το αριστερό τμήμα της υποτιθέμενης παραβολής και παρατηρούν την συμπεριφορά της προσομοίωσης στο Π2. Το πείραμα αυτό είχε σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση μίας ‘δομικής απόκλισης’, δηλαδή έλλειψης συντονισμού των δομών των δυο πλαισίων.



Δομική απόκλιση

Συγκεκριμένα η δομή του Π2, δηλαδή η κατασκευή των ομοίων τριγώνων, φαίνεται να συντονίζεται με το δεξί τμήμα της καμπύλης κάτι το οποίο δεν συμβαίνει με το αριστερό. Εδώ οι μαθητές έχουν προβάλλει πάνω στο Π4 το μαθηματικό πλαίσιο της παραβολής και πραγματοποιούν οριζόντια μαθηματικοποίηση αφού κάνουν χρήση των εργαλείων και πειραματίζονται με αυτά.

β) Έλεγχος της δομής $\psi=\chi^3$. Όταν η δομή της παραβολής απεδείχθη ότι αποκλίνει από αυτήν του Π2 οι μαθητές δοκιμάζουν μία συνάρτηση ανωτέρου βαθμού η οποία, οπτικά τουλάχιστον, παραπέμπει σε αυτήν που έχει δημιουργηθεί στο πλαίσιο Π4. Ο έλεγχος για την καταλληλότητα της συνάρτησης αυτής γίνεται από τους μαθητές μέσα από έναν συνδυασμό κατακόρυφης και οριζόντιας επεξεργασίας. Συγκεκριμένα καταφεύγουν στον μεταβολέα της προσομοίωσης και προσδιορίζουν ένα κατάλληλο ζεύγος τιμών για την γωνία ω και το ύψος h με πρόθεση να τα αντικαταστήσουν στον τύπο της συνάρτησης.

Δ: και αν είναι $\alpha\chi^3$;

Α: αν είναι αχ^3 βρίσκουμε το α

Δ: χ είναι η γωνία;

Α: και ψ το ύψος.

Δ: για γωνία 90^0 το ύψος θα είναι 90^3

Α: θα δούμε(βρίσκει το αποτέλεσμα με τον calculator του υπολογιστή) 729.000!

Ερευνητής: Εκεί θα πάει;

Α: Όχι στις 90^0 πάει ..πάει στο άπειρο

Στο απόσπασμα αυτό μπορούμε να αναγνωρίσουμε την οριζόντια επεξεργασία της κατάστασης προβλήματος από τους μαθητές καθώς πειραματίζονται με το μοντέλο της ψ=χ^3 και συσχετίζουν και την γωνία με την μεταβλητή χ και ο ύψος με την ψ. Επιπλέον η κατακόρυφη επεξεργασία συντελείται καθώς επιχειρούν να προσδιορίσουν ένα ζεύγος τιμών της συνάρτησης κάνοντας χρήση του τύπου της. Οι ενέργειες των μαθητών έχουν και πάλι σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση απόκλιση μεταξύ της δομής ψ=χ^3, που προσπαθούν οι μαθητές να επιβάλλουν στο πλαίσιο Π4, και στον χώρο Π1 του φυσικού εργαλείου. Η απόκλιση αυτή προκύπτει μέσω της συμπεριφοράς του φυσικού εργαλείου η οποία υποδεικνύει την ιδιότητα που θα πρέπει να έχει η κατάλληλη συνάρτηση, δηλαδή στις 90^0 να απειρίζεται.

γ) Συνδυασμός συμβόλων. Οι μαθητές βρίσκονται πλέον μπροστά σε αδιέξοδο αφού έχουν εξαντλήσει όλο το απόθεμα μαθηματικών μοντέλων (συναρτήσεων) που διέθεταν. Αποφασίζουν να καταφύγουν στον κώδικα και εκεί παρατηρούν ότι οι δύο κάθετες πλευρές του μικρού τριγώνου συμβολίζονται με :α και :β, είναι μεταβλητές και εξαρτώνται από την γωνία ω, ενώ η απόσταση d από τον τοίχο είναι σταθερή και ίση με 50. Κάνουν χρήση του τετραδίου και γράφουν:

Δ: Άμα από εδώ μέχρι εδώ είναι 50 τότε εφω=h/50 άρα h=50.εφω άρα h=50:β/:α

Α: Κάτσε να το κάνουμε στον κώδικα.

Ερευνητής: Η μεταβλητή ποια είναι τώρα;

Α: Το ω

```
για ύψος :h
χελώνα1
μ :h
τέλος
```

Αρχικός

→

```
για ύψος :ω
χελώνα1
μ 50*:β/:α
τέλος
```

Τελικός

Αντικαθιστώντας στον κώδικα το h με την παράσταση 50:β/:α και ενεργοποιώντας το νέο πρόγραμμα διαπιστώνουν ότι στο Π2 δημιουργούνται όμοια τρίγωνα. Η μεταβλητή h (αρχικός κώδικας) δεν υφίσταται πλέον αφού έχει συνδεθεί με την ω (τελικός κώδικας).

Εδώ οι μαθητές δημιουργούν έναν συντονισμό μεταξύ των δομών των πλαισίων Π2 και Π3 και συμπεραίνουν ότι η ζητούμενη συνάρτηση είναι η 50.β/α δηλαδή η 50εφω. Η νέα συνάρτηση προκύπτει μέσα από μία κατακόρυφη διαδικασία η οποία πραγματοποιείται καθώς οι μαθητές κάνουν χρήση συμβόλων (symbolization) γεγονός που ευνοείται από την φύση του πλαισίου Π3, δηλαδή του κώδικα.

Διαπραγμάτευση

Αν θα έπρεπε να χαρακτηρίσουμε τα μαθηματικά που δημιούργησαν οι μαθητές κατά την διάρκεια της έρευνας θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον όρο ‘ημιεμπειρικά μαθηματικά’ με την σημασία που αποδίδει στον όρο η Λακατοσιανή αντίληψη για την μαθηματική γνώση. «Τα άτυπα σχεδόν εμπειρικά μαθηματικά δεν αναπτύσσονται με την μονότονη προσθήκη αναμφισβήτητων θεωρημάτων αλλά με την βελτίωση υποθέσεων, με την *δοκιμή* και την *κριτική*, με την λογική των *αποδείξεων και των ανασκευών*»(Lakatos 1996 σελ. 23). Η νέα μαθηματική γνώση προέκυψε σταδιακά μέσα από σύνθεση και αναδιοργάνωση των ήδη υπαρχόντων γνώσεων από τους μαθητές καθώς χρησιμοποιούσαν και πειραματίζονταν με τα εργαλεία του περιβάλλοντος.

Από τα δεδομένα της έρευνας προέκυψαν ισχυρές ενδείξεις ότι το συγκεκριμένο μαθησιακό περιβάλλον ευνοεί και υποστηρίζει δράσεις μαθηματικοποίησης, πειραματισμό, δημιουργία και έλεγχο εικασιών, χρήση συμβόλων και κυρίως δόμηση και συσχέτιση αναπαραστασιακών πλαισίων. Στα αποσπάσματα που παρατέθηκαν αναδεικνύεται ο τρόπος με τον οποίο η ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων, για τις μαθήτριες, και η συνάρτηση της εφαπτομένης, για τους μαθητές, αναδύθηκαν μέσα από μία αναδιοργάνωση των ήδη υπαρχόντων μαθηματικών πλαισίων.

Σε κάθε περίπτωση η αναδιοργάνωση προέκυψε από την δυνατότητα που παρέχουν τα εργαλεία τόσο για πειραματισμό και έλεγχο υποθέσεων (οριζόντια μαθηματικοποίηση) όσο και στην σύνδεση αφηρημένων και συμβολικών οντοτήτων (κατακόρυφη μαθηματικοποίηση).

Η αποκλειστική χρήση του φυσικού εργαλείου, χωρίς την παρουσία της προσομοίωσης, φαίνεται να περιορίζει τους μαθητές σε γεωμετρικές κυρίως έννοιες ενώ η παρουσία της προσομοίωσης επιτρέπει την επέκταση του γεωμετρικού πλαισίου και την σύνδεσή του με ένα συναρτησιακό πλαίσιο.

Ένα μεθοδολογικό εργαλείο το οποίο δημιουργήσαμε για τις ανάγκες της συγκεκριμένης έρευνας ήταν η έννοια της δομικής απόκλισης η οποία προέκυπτε όταν το μαθηματικό πλαίσιο το οποίο χρησιμοποιούσαν οι μαθητές δεν ήταν κατάλληλο. Η έννοια αυτή, αναγόμενη στην κοινή διδακτική πρακτική μίας τυπικής αίθουσας διδασκαλίας, θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως μαθηματικό λάθος. Το λάθος όμως αυτό δεν οδηγεί σε αδιέξοδο αφού τα εργαλεία δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές να το εντοπίσουν άμεσα και να το χρησιμοποιήσουν δημιουργικά.

Η συσχέτιση δύο δομών και η δομική απόκλιση θα μπορούσαν να αποτελέσουν έναν θεματικό πυρήνα περαιτέρω διερεύνησης και ενίσχυσης (ή αποδυνάμωσης) των ενδείξεων που προέκυψαν για τον ρόλο τους σε διαδικασίες μαθηματικοποίησης. Αυτό δηλαδή που χρήζει επιπλέον διασάφηση είναι ο ιδιαίτερος τρόπος με τον οποίο συμβάλουν οι δύο έννοιες στην δημιουργία νέας μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές όταν αυτοί διαθέτουν φυσικά και υπολογιστικά εργαλεία.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Clement, D. (2000): ‘‘ From exercises and tasks to problems and projects. Unique contributions of computers to innovative mathematics education’’ *Journal of mathematical behavior* 19 9-47 Pergamon Press

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kynigos, C., Koutlis, S. and Hadzilacos, T. (1997). Mathematics with component oriented exploratory software, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 2(3): 229–250.

Lakatos, I. (1991)‘‘Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery’’ Cambridge. University press.

Markman, A. B., & Gentner, D. (1993). Structural alignment during similarity comparisons. *Cognitive Psychology, 25*, 431-467.

Rasmussen, C. L., Zandieh, M., King, K. D., and Teppo, A. (October, 2000).E Advanced mathematical thinking: Aspects of students mathematical activity. Paper presented at the 22nd annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education o North American Chapter. Tucson, AZ.

Stacey, K. Helme, S. Archer, S. Condon, C. (2001): The effect of epistemic fidelity and accessibility on teaching with physical materials: A comparison of two models for the teaching decimal numeration'' *Educational Studies in Mathematics* 47: 199-221

Treffers, A. (1987). Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction the Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Wheeler, David (1982), "Mathematization Matters," *For the Learning of Mathematics*, 3,1; 45 - 47.