Αναπτύσσοντας μια αίσθηση για την περιοδικότητα

Κώστας Γαβρίλης   Χρόνης Κυνηγός
Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Φ.Π.Ψ., Ε.Κ.Π.Α.
gavr@sch.gr   kynigos@ppp.uoa.gr

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται μερικά από τα αποτελέσματα μιας ερευνητικής μελέτης για τα νοήματα τα σχετικά με την περιοδική μεταβολή, που ανέπτυξαν δυο μαθητές ηλικίας 14 ετών, που εργάστηκαν σε ένα logo-based υπολογιστικό περιβάλλον με σκοπό να διορθώσουν τον κώδικα του προγράμματος το οποίο προσομοίωνε ένα «κλόουν». Οι μαθητές ενεπλάκησαν σε μια ακολουθία δραστηριοτήτων κατά τη διάρκεια των οποίων μελέτησαν τις διαφορετικές κινήσεις του «κλόουν», κατασκεύασαν την καμπύλη των κινήσεων την οποία στη συνέχεια πύκνωσαν, λείαναν και επεκτείνανε και τέλος χρησιμοποίησαν μια αλγεβρική έκφραση των μεταβολών προκειμένου να διορθώσουν τον κώδικα του προγράμματος. Τα συμπεράσματα αυτής της μελέτης προτείνουν ότι αυτή η προσέγγιση μπορεί να είναι αποτελεσματική στην ενεργοποίηση νέων τρόπων για τη δημιουργία πλουσιότερων και βαθύτερων νοημάτων για την συμμεταβολή ποσοτήτων που αναπαριστώνται με πολλαπλούς τρόπους και, από ερευνητική άποψη, βοηθούν να εκτιμηθεί η καταλληλότητα των logo –based δυναμικών υπολογιστικών μέσων στην έρευνα της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Λέξεις Κλειδιά

Συνδέσεις, Περιοδική μεταβολή, Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Εισαγωγή

Σ' αυτή την εργασία παρουσιάζονται μερικά από τα αποτελέσματα της έρευνας που είχε σκοπό να φέρει στον προσκήνιο τα νοήματα που δημιουργούν οι μαθητές για την περιοδική μεταβολή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, όταν δρουν σε ένα κατάλληλα σχεδιασμένο υπολογιστικό περιβάλλον καθώς και τον τρόπο με τον οποίο συνδέουν τα αντικείμενα του περιβάλλοντος με τις εμπειρίες τους και τις γνώσεις τους για να εκφράσουν τα νοήματα αυτά.

Όπως οι Noss R., Heally L. & C. Hoyles, (1997) δηλώνουν, η δημιουργία νέων μαθηματικών νοημάτων προέρχεται είτε από τις συνδέσεις που γίνονται στο εσωτερικό των μαθηματικών θεωριών είτε από τη δράση σε εξωτερικά πλαίσια στα οποία περιέχεται και ο εμπειρικός κόσμος. Ωστόσο, μια από τις πηγές που δημιουργούν δυσκολίες στη δημιουργία των μαθηματικών νοημάτων και γενικότερα στη μάθηση των μαθηματικών είναι η φορμαλιστική τους πλευρά. Ενώ δηλαδή, χωρίς φορμαλισμό δεν υπάρχουν και δεν εκφράζονται μαθηματικά νοήματα, συχνά αυτή η απαίτηση εμφανίζεται ως ένα αξεπέραστο εμπόδιο στην δημιουργία νέων νοημάτων [Noss R., 1997]. Ερευνητικές αναφορές, σχετικές με την κατασκευή νοημάτων, συχνά εστιάζουν στο περιβάλλον στο οποίο δημιουργούνται και στον τρόπο αλληλεπίδρασης των μαθητών με αυτό, ενώ αρκετές φορές στο κέντρο αυτών των αναφορών είναι ο τρόπος με τον οποίο τα νοήματα δημιουργούνται και εκφράζονται στο ίδιο το περιβάλλον και εκτός αυτού (Kaput J., 1994, Noss R., Heally L. & C. Hoyles, 1997, Kynigos, C., & Psicharis, G., 2003).

Συνδέσεις. Οι συνδέσεις μεταξύ των εννοιών, στο πλαίσιο των γνωστικών θεωριών, εμφανίζονται ως συστατικά μέρη μοντέλων που περιγράφουν την δομή και την οργάνωση των εννοιών (Thagard P., 1992). Στις οργανώσεις αυτές παρατηρούνται συνδέσεις είδους, (δείχνουν ότι μια έννοια είναι είδος μιας άλλης), συνδέσεις περίπτωσης, (δείχνουν ότι κάποιο αντικείμενο είναι περίπτωση μιας έννοιας), συνδέσεις κανόνα, (εκφράζουν τις σχέσεις μεταξύ των εννοιών), συνδέσεις ιδιότητας, (δείχνουν ότι ένα αντικείμενο έχει μια ιδιότητα) και συνδέσεις μερών, (δείχνουν ότι ένα αντικείμενο είναι μέρος ενός συνόλου). Μια άλλη άποψη, που αναφέρεται στις συνδέσεις που οι μαθητές δημιουργούν σε σχέση με τις εξωτερικές και εσωτερικές αναπαραστάσεις που κατασκευάζουν και χειρίζονται, υποθέτει ότι οι συνδέσεις μεταξύ των εσωτερικών αναπαραστάσεων μπορούν να υποκινηθούν με την οικοδόμηση των συνδέσεων μεταξύ των αντίστοιχων εξωτερικών αναπαραστάσεων (Hiebert J. & Carpenter T., [1992]). Συνδέσεις μεταξύ των εξωτερικών αναπαραστάσεων μαθηματικών εννοιών μπορούν να κατασκευαστούν είτε μεταξύ των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης μιας έννοιας είτε μεταξύ σχετικών στοιχείων μέσα στην ίδια αναπαράσταση. Οι συνδέσεις αυτές αφορούν σχέσεις ομοιότητας, ή σχέσεις διαφοράς, μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων ή συνδέσεις που προέρχονται από την παρατήρηση επαναλαμβανόμενων μοτίβων και τακτικοτήτων μέσα στην ίδια μορφή αναπαράστασης (Noss R., Heally L. & C. Hoyles, 1997). Ωστόσο, μοντέλα όπως τα παραπάνω αναπαριστούν μόνο σε ένα βαθμό, τον τρόπο δημιουργίας νοημάτων από τους μαθητές που δρουν στο περιβάλλον τους. Δεν παρουσιάζουν, για παράδειγμα, τον τρόπο που εμπλέκονται στη δημιουργία νοημάτων οι πεποιθήσεις, οι επιθυμίες, οι προθέσεις και οι ηθικές δεσμεύσεις των μαθητών (Bruner J., 1997).

Η περιοδική μεταβολή.

Αν και η έννοια της περιοδικής μεταβολής υπάρχει σε πολλά φυσικά φαινόμενα και διατρέχει ένα μεγάλο μέρος του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, ελάχιστες μελέτες έχουν καταγραφεί σε σχέση με την κατανόησή της από τους μαθητές (Shama G., 1998). Η έρευνα που περιγράφεται από τον G. Shama έδειξε ότι οι περισσότεροι ερωτηθέντες μαθητές (93%) θεωρούν τα περιοδικά φαινόμενα ως δυναμικά εξαρτώμενα από τον χρόνο και την κίνηση και ακόμα ότι κατανοούν την έννοια της μαθηματικής περιοδικότητας απλά ως μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία. Αυτό δημιουργεί μια σειρά από παρανοήσεις: Την υιοθέτηση ως περιοδικό ένα μη περιοδικά επαναλαμβανόμενο μοτίβο, ή τον χαρακτηρισμό μιας μεταβολής που περιγράφεται από μια γραφική παράσταση ως περιοδική παρόλο που δεν είναι από μαθηματική άποψη, ή την θεώρηση του επαναλαμβανόμενου τμήματος (περιόδου) ως εξαρτώμενου από την έναρξη του φαινομένου ή την αρχή των αξόνων στο γράφημα ή ότι εκτείνεται μεταξύ των σημείων μηδενισμού ή ακραίων σημείων του γραφήματος ή μεταξύ δυο σημείων ασυνέχειας της καμπύλης.

Οι Dreyfus T. and Eisenberg T. (1980) δηλώνουν, ενώ οι περισσότεροι σπουδαστές των μαθηματικών αποκτούν εύκολα μια διαισθητική κατανόηση της έννοιας της περιοδικής μεταβολής μιας πραγματικής συνάρτησης, δυσκολεύονται να εφαρμόσουν τον μαθηματικό της ορισμό ακόμη και στις πιο στοιχειώδεις περιοδικές συναρτήσεις, όπως είναι η $f(\chi)$ = ημχ και να διατυπώσουν μια απόδειξη γιατί την περιοδικότητα. Ακόμα, όταν εμπλέκονται σε προβλήματα που απαιτούν μια βαθιά γνώση της περιοδικής μεταβολής, όπως η λύση απλών τριγωνομετρικών εξισώσεων (Bagni, G.T., 1997) ή όταν καλούνται να συσχετίσουν τη γραφική παράσταση με την αλγεβρική έκφραση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (Wenzelburger, E., 1992), δυσκολεύονται να συμπεριλάβουν την περιοδικότητα στις απαντήσεις τους ή να τη συνδέσουν σωστά με την εξίσωση και τη γραφική της παράσταση.

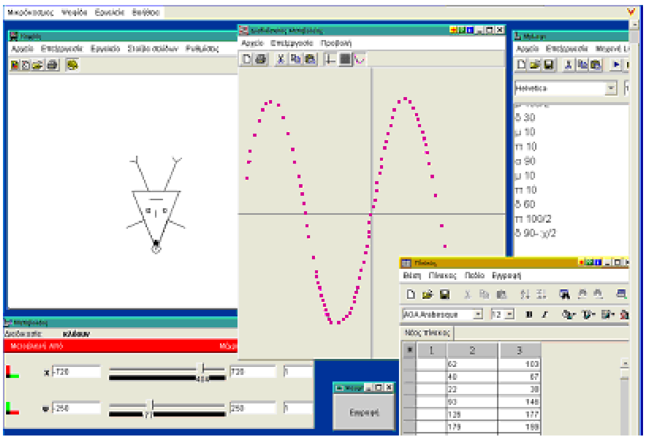
Τα παραπάνω δηλώνουν ότι οι μαθητές που εμπλέκονται σε δραστηριότητες που τους επιτρέπουν να επεξεργαστούν μόνο στατικές γραφικές αναπαραστάσεις (ακολουθίες αντικειμένων ή γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων) χωρίς να τις αντιστοιχούν με ρητό τρόπο σε κάποιο περιοδικό φαινόμενο, δεν καταφέρνουν να συσχετίσουν όλα τα στοιχεία που συγκροτούν μια περιοδική μεταβολή με την αναπαράστασή της. Ακόμα, η έλλειψη από την διαπραγμάτευση καθοριστικών στοιχείων, όπως ο άμεσος χειρισμός ενός φαινόμενου από τους μαθητές, η ενεργός κατασκευή της γραφικής παράστασης και η πολλαπλή αναπαράσταση των δεδομένων από την διαδικασία, να είναι ικανές συνθήκες στην κατασκευή ολοκληρωμένων νοημάτων για την περιοδικότητα (Pratt D., 1995, Nemirovsky, et all., 1998).

Το πλαίσιο της Έρευνας

Η έρευνα που παρουσιάζεται εδώ πραγματοποιήθηκε σ' ένα δημόσιο Λυκείου και με αυτήν εγκαινιάστηκε το μόλις αποκτηθέν εργαστήριο υπολογιστών. Στην έρευνα συμμετείχαν 21 μαθητές της Α' Λυκείου, εντελώς άπειροι στη χρήση υπολογιστικών περιβαλλόντων για τη μάθηση των μαθηματικών ή άλλων μαθημάτων, χωρισμένοι σε 10 ομάδες των δυο ή τριών μαθητών και 2 τελειόφοιτοι μαθητές Γυμνασίου. Καθώς οι μαθητές ήταν εντελώς άπειροι στη χρήση του συγκεκριμένου προγράμματος (Χελωνόκοσμος) και της σχετικής γλώσσας προγραμματισμού (logo), υιοθετήθηκε μια ιδιαίτερη μεθοδολογία έρευνας, όπως θα αναλυθεί παρακάτω. Η εργασία που παρουσιάζουμε εδώ αναφέρεται στα δεδομένα ενός ζεύγους μαθητών.

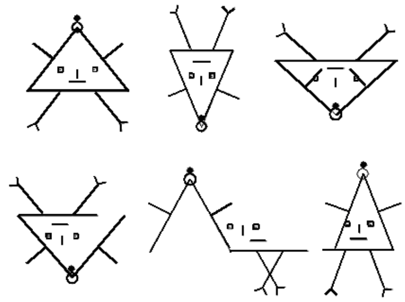
Το περιβάλλον του «κλόουν» και οι δραστηριότητες των μαθητών.

Οι μαθητές κλήθηκαν να εργαστούν σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον που σχεδιάστηκε έτσι ώστε να ενσωματώνει μαθηματικές δομές, διδακτικές προθέσεις και μαθησιακές καταστάσεις μέσω των οποίων αναδύονται και εκφράζονται οι δομές αυτές και ευνοούνται οι συνδέσεις τους με τις εμπειρίες και τις γνώσεις του μαθητή. Συγκεκριμένα, οι μαθητές κλήθηκαν να εργαστούν σε ένα μη ολοκληρωμένο πρόγραμμα με το όνομα "κλόουν"(εικόνα 1), στον υπολογιστικό περιβάλλον του Χελωνόκοσμου (http://etl.ppp.uoa.gr), που συνδυάζει εργαλεία συμβολικής έκφρασης, μέσω προγραμματιστικής γλώσσας, και εργαλεία δυναμικού χειρισμού μεταβλητών ποσοτήτων (Kynigos, 2002).



Εικόνα 1:Ο «κλόουν» και η καμπύλη στην οποία είναι καλά σχηματισμένος

Ο «κλόουν» σχηματίζεται από την κίνηση της χελώνας στον καμβά με βάση τις εντολές του προγράμματος. Οι δυο μεταβλητές του προγράμματος χ και ψ αντιστοιχούσαν στην γωνία της κορυφής και στην πλευρά της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου, με τις ίσες πλευρές σταθερές, που σχηματίζει τη μορφή του «κλόουν». Έτσι σχηματίζεται σωστά όταν οι τιμές που δίνονται στις δυο μεταβλητές είναι κατάλληλες ώστε να κλείνει το τρίγωνο (εικόνα 2). Οι μαθητές κλήθηκαν (1) να παράγουν και να περιγράψουν όλες τις δυνατές κινήσεις του κλόουν και (2) να διορθώσουν το πρόγραμμα ώστε ο κλόουν να σχηματίζεται πάντοτε σωστά.



Εικόνα 2: Διάφορες μορφές του «κλόουν». Στην πρώτη σειρά κάθε κλόουν είναι σωστά σχηματισμένος. Στη δεύτερη όχι.

Οι μαθητές, κλήθηκαν να εργαστούν στο πρόγραμμα με μια συγκεκριμένη ακολουθία χωρισμένη σε τέσσερις φάσεις: (1) Κατασκευή της καμπύλης του κλόουν, (2) επεξεργασία των αριθμητικών δεδομένων από την κατασκευή της καμπύλης, (3) διόρθωση του προγράμματος ώστε να είναι πάντοτε καλά σχηματισμένος και (4) λύση ενός πραγματικού προβλήματος ή κατασκευή ενός παρόμοιου θέματος στο ίδιο περιβάλλον. Εδώ αναφερόμαστε στις δυο πρώτες φάσεις. Στη πρώτη φάση, οι μαθητές μπορούσαν να εισάγουν ταυτόχρονα τιμές στις δυο μεταβλητές του προγράμματος μέσω ενός δυσδιάστατου μεταβολέα ή μεμονωμένα σε κάθε μεταβλητή μέσω δυο γραμμικών μεταβολέων. Μπορούσαν να επιλέξουν ένα σημείο στην επιφάνεια του δυσδιάστατου μεταβολέα και να το σύρουν σε μια θέση, ώστε να σχηματιστεί καλά ο κλόουν (οι συντεταγμένες του σημείου αντιστοιχούν στις δυο μεταβλητές χ και ψ). Στη συνέχεια επιλέγοντας και άλλα σημεία σε κατάλληλες θέσεις μπορούσαν να σχηματίσουν την καμπύλη των κινήσεων του κλόουν. Μπορούσαν ακόμα να επιλέγουν έναν από τους δυο γραμμικούς μεταβολείς και να εισάγουν διάφορες τιμές της αντίστοιχης μεταβλητής έχοντας την τιμή της άλλης μεταβλητής σταθερή. Τέλος, πιέζοντας κάθε φορά το κουμπί με το όνομα «Εγγραφή» εισήγαγαν τις τιμές των δυο μεταβλητών σε ένα πίνακα τιμών. Στη δεύτερη φάση, διαπραγματευτήκαν τις αριθμητικές τιμές του πίνακα. Τρέχοντας ένα μικρό πρόγραμμα – που δεν ήταν ενταγμένο στο υπό διόρθωση πρόγραμμα – μπορούσαν να επανασχεδιάζουν στον καμβά τη γραφική παράσταση των σημείων του πίνακα. Έτσι είχαν την ευκαιρία να διορθώσουν τα υπάρχοντα σημεία ή να εμπλουτίσουν τον πίνακα με νέα σημεία, συνδέοντας καθένα από αυτά με τα σωστά σημεία της καμπύλης, καθοδηγούμενοι από τα νοήματα που είχαν σχηματίσει για τη μορφή της καμπύλης και τη συμμεταβολή των δυο μεταβλητών που αναπαριστούσε Στο δικτυακό τόπο http://lyk-gl-neron.att.sch.gr/Ekped_logismiko/Kloun/Index.htm υπάρχει μια πληρέστερη περιγραφή.

Τα ερωτήματα της έρευνας

Η έρευνα διεξήχθει με σκοπό να προκύψουν απαντήσεις στα εξής ερωτήματα:

- Ποιες γνώσεις και εμπειρίες χρησιμοποίησαν οι μαθητές για να επεξεργαστούν τις πληροφορίες που αντλούσαν από το σύνθετο περιβάλλον του «κλόουν»;
- Ποια νοήματα δημιούργησαν σχετικά με την περιοδική συμμεταβολή των δυο μεταβλητών ποσοτήτων κατά την διάρκεια της εργασίας τους και πώς εμπλούτισαν ή μετέβαλαν αυτά στην πορεία;

Η μέθοδος έρευνας

Οι μαθητές συμμετείχαν οικιοθελώς στο πρόγραμμα «κλόουν», το οποίο διεξήχθη εκτός του επίσημου προγράμματος του σχολείου αλλά στο πλαίσιο της λειτουργίας του, με την έγκριση του διευθυντή και του συλλόγου των εκπαιδευτικών και με σκοπό τα αποτελέσματα να αποτελέσουν υλικό για την ιστοσελίδα του σχολείου. Στην έρευνα συμμετείχε μια ομάδα δυο μαθητών από άλλο σχολείο και γι' αυτήν την ομάδα υποβάλλεται η έκθεση. Στο πλαίσιο της έρευνας, συνεργάστηκα με όλες τις ομάδες ως συμμετέχων παρατηρητής, ως έμπειρος γνώστης του πρόγραμμα «Χελωνόκοσμος» και ως υπεύθυνος του εργαστηρίου. Για τη συλλογή των δεδομένων, βιντεοσκόπησα και μαγνητοφώνησα όλες τις εργασίες της ομάδας με την δέσμευση της μη δημοσίευσης των ονομάτων τους ή άλλων προσωπικών δεδομένων που θα έκαναν γνωστή την αντιστοιχία προσώπου και άποψης. Ως μονάδες ανάλυσης των δεδομένων της ομάδας αναφοράς χρησιμοποιήθηκαν (1) οι ενέργειές τους στην οθόνη του υπολογιστή και το νόημα που έδωσαν σ' αυτές, (2) οι ερμηνείες που έδωσαν για τα αποτελέσματα των ενεργειών τους, (3) οι προβλέψεις που έκαναν προκειμένου να εμπλουτίσουν την καμπύλη του κλόουν, (4) οι εκφράσεις και οι άλλες αναφορές που χρησιμοποίησαν κατά την διάρκεια της διερεύνησης και (5) οι γνώσεις και οι εμπειρίες που χρησιμοποίησαν για να παράγουν την καμπύλη του κλόουν, να την πυκνώσουν, να την λειάνουν, να την επεκτείνουν και τέλος να διορθώσουν τον κώδικα του προγράμματος.

Αποτελέσματα και Συζήτηση

Οπτική επεξεργασία: Από την ευθεία και την παραβολή στην επαναληπτική μεταβολή.

Στη πρώτη φάση, στη διάρκεια της εύρεσης των κατάλληλων σημείων στον δυσδιάστατο μεταβολέα οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν τη μορφή της καμπύλης με τη βοήθεια των ήδη τοποθετημένων σημείων. Όσο το πεδίο ορισμού των μεταβλητών χ και ψ είναι [25, 100] και [35, 140] αντίστοιχα διατυπώνουν την άποψη ότι η καμπύλη είναι μια ευθεία αν και αποτυγχάνουν να αιτιολογήσουν την άποψη αυτή. Ωστόσο, όταν μεταβάλουν το πεδίο ορισμού των δυο μεταβλητών χ και ψ πρώτα σε [0,360] και σε [0,300] αντίστοιχα και στη συνέχεια σε [-360, 360] και [-300,300] μεταβάλλουν άποψη για τη μορφή της καμπύλης δηλώνοντας ότι τελικά είναι παραβολή. Η επέκταση του πεδίου ορισμού των δυο μεταβλητών σε αρνητικές τιμές δικαιολογήθηκε διαισθητικά από την κίνηση της χελώνας, «αριστερά» για τις αρνητικές τιμές της γωνίας ή «πίσω» για τις αρνητικές τιμές της πλευράς. Η πρώτη τους ιδέα για την περιοδικότητα της καμπύλης διατυπώθηκε όταν βρήκαν μερικά σημεία της καμπύλης να ανήκουν στο 3ο τεταρτημόριο και συνέδεσαν την καμπύλη με σχετικές εικόνες από την εμπειρία τους.

Ερευνητής (Ε): Τι καμπύλη τελικά δημιουργείται τώρα;

Μαθητής1(Μ1): [καθώς δείχνει με το ποντίκι του όλη την καμπύλη που αισθητοποιούν τα σημεία των δυο τεταρτημορίων] Σαν κυματομορφή μοιάζει.

Ερευνητής: Σαν κυματομορφή; Τι είναι αυτό;

Μαθητής1: Όταν μετατρέπουμε τον ήχο μέσα στον υπολογιστή σε ψηφιακά...(δεν μπορεί να το διατυπώσει καλύτερα)

Η μορφή του κύματος χρησιμοποιείται και από δέκα τα ζεύγη των μαθητών ως το πρώτο εμπειρικό στοιχείο που συνδέεται με την καμπύλη του «κλόουν». Αυτή η μορφή, σε όλες τις ομάδες και σε όλη τη διαπραγμάτευση συνυπάρχει με την μορφή της παραβολής. Στη συνέχεια οι μαθητές ερωτώνται αν μπορούν να δώσουν τιμές στο χ μεγαλύτερες από 360^o ή μικρότερες από -360^o. Η απάντησή τους είναι, ναι, και τη δικαιολογούν καθώς θεωρούν ότι έτσι η χελώνα μπορεί να κάνει περισσότερες από μια στροφές. Η διεύρυνση του πεδίου ορισμού για τη μεταβλητή χ πυκνώνει τα σημεία και δημιουργεί χώρο για νέα. Η διασυνδεσιμότητα των δυο ψηφίδων – του δυσδιάστατου μεταβολέα που προσομοιώνει ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και του καμβά – τους επιτρέπει να αναπτύσσουν νοήματα κατά την επέκταση της καμπύλης προς τις δυο κατευθύνσεις και σε σχέση με τα τεταρτημόρια. Για πρώτη φορά δείχνουν με το ποντίκι τους την καμπύλη να επεκτείνεται και προς τις δυο κατευθύνσεις της μεταβλητής χ, καθοδηγούμενοι από την κυματοειδή μορφή. Ωστόσο, αν και συνδέουν την κυματοειδή μορφή με την καμπύλη δεν μπορούν να απομακρυνθούν από τη καμπύλη της παραβολής. Η επέκταση του πεδίου ορισμού και προς τις δυο κατευθύνσεις εμφανίζει ένα νέο στοιχείο να εμπλέκεται στα νοήματά τους. Η έννοια της επανάληψης.

Ε: Τελικά τι καμπύλη πάει να σχηματιστεί;

Μ1: Θα είναι ίδια με την άλλη καμπύλη (δείχνει το κομμάτι στο 1ο τεταρτημόριο από 0 έως 360). Άρα θα είναι (παύση);

Ε: Τι παραβολή;

Μ1: Ναι παραβολή

Ε: Παραβολή θα είναι; (με αμφιβολία)

Μ1:Ναι,μου φαίνεται. Δεν θάναι;

Στη συνέχεια προτείνεται στους δυο μαθητές να παίξουν ένα παιγνίδι, όπου καθένας καλείται εναλλάξ να προβλέψει τη θέση ενός σημείου της καμπύλης και στη συνέχεια να το επιβεβαιώσει με τον «κλόουν». Έτσι, έχουν την ευκαιρία να εμπλουτίσουν την καμπύλη με περισσότερα σημεία και να χρησιμοποιήσουν την νοητική εικόνα που έχουν για τη μορφή της (κυματοειδή μορφή) ως χωρικό πλαίσιο καθοδήγησης. Στο τέλος του παιγνιδιού ο ερευνητής επαναφέρει το ίδιο ερώτημα.

Ε: Τελικά, τι καμπύλη πάει να σχηματιστεί;

Μ1: Έτσι, έτσι (την δείχνει με το ποντίκι του)

Ε: Και για ένα ψ πόσα χ θα βρούμε;

Μ2: ένα, δυο, τρία,... έξη (μετράει τα σημεία της καμπύλης που είναι στο ίδιο ύψος).

Ε: Και από την άλλη μεριά;

Μ1: Έξη

Ε: Και αν μεγαλώσουμε ακόμα περισσότερο το χ. Αν το πάμε στο 20000.

Μ2: Στο 20 χιλιάδες; 12; Πολλά.

Ο εμπλουτισμός της καμπύλης με νέα σημεία εμπλουτίζει και το νόημα που έχουν για την επαναληπτικότητα. Οι μαθητές διαπιστώνουν ότι υπάρχουν σημεία που εμφανίζονται στο ίδιο ύψος της καμπύλης (έχουν το ίδιο ψ) και σ' αυτά σχηματίζεται η ίδια μορφή του «κλόουν». Δηλαδή, παρατηρούν τη μορφή του κλόουν στις θέσεις αυτές και διαπιστώνουν ότι το ισοσκελές τρίγωνο, έχει το ίδιο άνοιγμα γωνίας και το ίδιο μήκος βάσης. Η συζήτηση για την επαναληπτικότητα των κινήσεων του κλόουν στην καμπύλη του κλόουν αναδεικνύει το ιδιαίτερο νόημα που έχουν δώσει σ' αυτή.

Ε: Τι σημαίνει επαναλαμβάνεται; Εδώ δεν έχουν το ίδιο χ.

Μ1: Ναι δεν έχουν την ίδια τιμή στο χ σε όλες τις περιπτώσεις.

Ε: Τι είδους καμπύλη είναι.

Μ2: Επαναλαμβανόμενη.

Ε: Τι σημαίνει επαναλαμβάνεται. Όπως στο ρολόι που επαναλαμβάνουν την ώρα οι δείκτες;

Μ2 Επαναλαμβάνονται

Ε: Αλλά σε τι διαφέρει το ρολόι από αυτό.

Μ1: Εδώ (το ρολόι) κάνει κυκλική κίνηση

Ε: Ναι μεν κάνει κυκλική κίνηση αλλά δείχνει τις ίδιες ώρες. Ξαναδείχνει την ίδια τιμή. Ενώ στην καμπύλη του κλόουν οι τιμές του χ συνεχίζουν ν' αυξάνουν αλλά παρόλα αυτά συνεχίζουν να έχουν τις ίδιες κινήσεις.

Συζήτηση: Στη φάση αυτή η αίσθηση που απέκτησαν οι μαθητές για την καμπύλη του «κλόουν» καθώς και τα νοήματα, τα σχετικά με την περιοδική μεταβολή, που δημιούργησαν κατά τη διάρκεια της κατασκευής της, βασίστηκαν αποκλειστικά στην οπτική διαπραγμάτευση που έκαναν και στον τρόπο που συνέδεσαν τις οπτικές πληροφορίες με τις εμπειρίες τους. Έτσι στα νοήματα που δημιούργησαν για την μορφή της καμπύλης του κλόουν συνυπήρχαν η μορφή της παραβολής, η κυματοειδής μορφή και η επαναληπτικότητα. Αν και δεν κατάφεραν να δικαιολογήσουν (αλγεβρικά) την μορφή της παραβολής, δεν μπόρεσαν να μετακινηθούν από την αντίληψη αυτή. Φαίνεται ότι τα νοήματα αυτά εξουσιάζονται από τις συνδέσεις περίπτωσης (διαδοχικές παραβολές) και ομοιότητας (μοιάζει με παραβολή) που προκλήθηκαν από τις χωρικές συνδέσεις των σημείων και ενσωματώθηκαν στις νοητικές εικόνες που έχουν από την εμπειρία τους. Και αυτό είναι αναμενόμενο καθώς η έρευνα έχει δείξει ότι η γραμμική και η τετραγωνική μεταβολή εξουσιάζουν τις απόψεις των μαθητών για τις μεταβολές (Schwarz, B., Hershkowitz R., 1999). Η ιδιότητα της επανάληψης που εμφανίζεται σ' αυτή τη φάση φαίνεται ότι δεν είναι ικανή να διαφοροποιήσει το είδος των συνδέσεων ή να δημιουργήσει μια συγκρουσιακή κατάσταση με τις πεποιθήσεις των μαθητών και τα νοήματα που αναπτύσσονται.

Αριθμητική επεξεργασία: Κανόνες για την επαναληπτικότητα.

Στη φάση αυτή οι μαθητές διαπραγματεύονται τις αριθμητικές τιμές των σημείων της καμπύλης που έχουν δημιουργήσει και εγγράψει σε πίνακα τιμών. Καλούνται να διορθώσουν τα λάθος σημεία της καμπύλης που προέκυψαν από τον οπτικό χειρισμό και τις ατέλειες του εργαλείου και να εμπλουτίσουν την καμπύλη με νέα. Οι μαθητές έχουν δυο τρόπους για να εργαστούν. Είτε να χρησιμοποιήσουν τους μεταβολείς και το σχήμα του «κλόουν», είτε να χρησιμοποιήσουν τη μορφή της καμπύλης και την ιδιότητα της επαναληπτικότητας. Στη δεύτερη περίπτωση μπορούν να αναζητήσουν μοτίβα στις εγγραφές του πίνακα τιμών, καθοδηγούμενοι από τα νοήματα που έχουν δημιουργήσει και με τη βοήθεια αυτών να διορθώσουν λάθος τιμές ή να προσθέσουν νέες εγγραφές.

Αρχικά, εργάζονται στον δυσδιάστατο μεταβολέα και καλούνται να βρουν για ψ=80 τα σημεία που ο «κλόουν» είναι καλά σχηματισμένος και να παρατηρήσουν τις τετμημένες αυτών. Διαπιστώνουν ότι αν και στο διάστημα [-1080, 1080] υπάρχουν έξη σημεία στα οποία σχηματίζεται καλά, σε δυο μόνο σημεία σχηματίζεται η ίδια μορφή του κλόουν τα οποία έχουν ίσες τεταγμένες και τετμημένες που διαφέρουν κατά 720. Αιτιολογούν την διαφορά των δυο τιμών με το γεγονός ότι η χελώνα στη μια περίπτωση κάνει επιπλέον δυο περιστροφές των 360^o. Εδώ η επαναληπτικότητα συνδέεται πιο στενά με την κυκλική μεταβολή. Ακόμα, διαπιστώνουν ότι δυο τιμές που έχουν την ίδια τεταγμένη και τετμημένες που διαφέρουν κατά 360^o, σχηματίζουν δυο μορφές που ενώ έχουν το ίδιο άνοιγμα γωνίας και την ίδια βάση, σχηματίζονται διαφορετικά. Στη συνέχεια, καλούνται να επιβεβαιώσουν τον κανόνα σχηματισμού των σημείων βρίσκοντας νέα τα οποία προκύπτουν από τα προηγούμενα όταν προσθέτουν ή αφαιρούν στις τετμημένες τους 720. Καλούνται να διευρύνουν το πεδίο μεταβολής της γωνίας ώστε να μπορεί να βρεθεί ένα ακόμα σημείο με την ίδια τιμή για το ψ. Η διαδικασία της πρόβλεψης του ζητούμενου σημείου και της τοποθέτησής του στη σωστή θέση χρησιμοποιείται ξανά για να φέρει στην επιφάνεια ποιοτικές πτυχές της νοητικής εικόνας της καμπύλης που έχουν σχηματίσει. Διαπιστώνεται ότι οι μαθητές δεν μπορούν να προβλέψουν με αρκετή ακρίβεια τη θέση του σημείου και ότι χρειάζεται να κάνουν αρκετές κινήσεις στο ύψος των 80 μονάδων για να τοποθετήσουν το σημείο στην κατάλληλη θέση. Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουν ακόμα δημιουργήσει σαφείς χωρικές συνδέσεις μεταξύ των σημείων της καμπύλης. Αυτό επιβεβαιώνεται όταν τρέχουν ένα μικρό πρόγραμμα με το οποίο εμφανίζουν τις εγγραφές του πίνακα τιμών σε σύστημα αξόνων.

Ε: Μπορείτε να βρείτε ποια κομμάτια της καμπύλης είναι αυτά που δείχνουν ότι επαναλαμβάνεται κάθε 720;

Μ1: Είναι τα σημεία αυτά ..(δείχνει το τμήμα Α της καμπύλης του σχήματος 3).

Ε: Τα σημεία αυτά που τα ξαναβρίσκουμε:

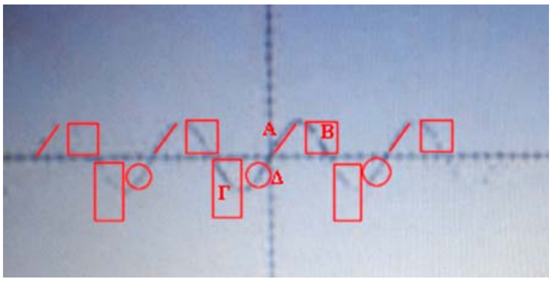
Μ1: Εδώ. Τα ξαναβρίσκουμε και εδώ, και εδώ και εδώ (δείχνει τα υπόλοιπα τμήματα Α).

Ε: Μετά;

Μ1 Αυτά τα σημεία (δείχνει το τμήμα Β) τα βρίσκουμε εδώ και εδώ και εδώ.

Ε: Τα από κάτω;

Μ1: Αυτό με αυτό και με αυτό (δείχνει το τμήμα Γ)



Εικόνα 3: Οι μαθητές δείχνουν με το ποντίκι τους μεμονωμένα τμήματα της καμπύλης Α, Β, Γ και Δ που επαναλαμβάνονται κάθε 720^o.

Όταν καλούνται να ερμηνεύσουν τις μορφές του «κλόουν» σε δυο σημεία που έχουν το ίδιο ύψος και ανήκουν στις δυο περιοχές Α και Β (εικόνα 3), διαπιστώνουν ότι οι γωνίες τους έχουν άθροισμα 360^o. Έτσι ανακαλύπτουν και διατυπώνουν ένα δεύτερο κανόνα για τη χωρική διευθέτηση των τμημάτων της καμπύλης. Στη συνέχεια εμπλέκονται στη διαδικασία εμπλουτισμού της καμπύλης του «κλόουν» με νέα σημεία και στη διόρθωση αυτών που υπάρχουν στις εγγραφές. Χρησιμοποιούν τον κανόνα της επαναληπτικότητας της καμπύλης και τα υπάρχοντα σημεία για να την εμπλουτίσουν με νέα σημεία. Διορθώνουν σημεία που δεν ανήκουν στην καμπύλη επεμβαίνοντας στις τιμές της τετμημένης τους. Χρησιμοποιούν τους κανόνες των 720 και των 360 για να «μεταφέρουν» σημεία από μια περιοχή σε μια άλλη, ώστε να εμπλουτίσουν με νέα σημεία περιοχές της καμπύλης που έχουν λίγα σημεία. Ακόμα, ανακαλύπτουν τον νόμο του 180.

Ε: Ποιος είναι ο νόμος των 180;

Μ2: Προσθέτουμε στο χ 180 για να πάμε από τη μια μεριά της καμπύλης στην άλλη και το ψ παραμένει το ίδιο.

Αυτή η χωρική διαπραγμάτευση των τμημάτων της καμπύλης επιβεβαιώνει την αντίληψή μας ότι η κατασκευή πλούσιων χωρικών συνδέσεων μεταξύ των σημείων της καμπύλης ευνοεί την ανάπτυξη νοημάτων σχετικών με την συναρτησιακή αντίληψη της μεταβολής (διαφορετικά χ συνδυάζονται με το ίδιο ψ). Η συναρτησιακή αντίληψη για τη μεταβολή ενισχύεται όταν επιβεβαιώνουν τους κανόνες των 720, 360 και 180 με την βοήθεια των μεταβολέων, βάζοντας ως βήμα μεταβολής των τιμών της γωνίας το 720 στη μια περίπτωση των 360 στην άλλη και 180 στην τρίτη.

Η αντιστοίχηση των κανόνων επανάληψης με τα τμήματα της καμπύλης βοήθησαν τους μαθητές να συγκροτήσουν ένα πληρέστερο νόημα για την επαναληπτικότητα της μεταβολής, καθώς: α) διαπίστωσαν ότι οποιοδήποτε τμήμα της καμπύλης μπορεί να επαναλαμβάνεται όταν στις τετμημένες των σημείων του προστεθεί ο αριθμός 720, β) διατύπωσαν την άποψη ότι η καμπύλη συγκροτείται πλήρως από την επανάληψη του τμήματος που ορίζεται από τις τιμές της γωνίας που ανήκουν στο [0, 720].

Ε: Ποιο κομμάτι πρέπει να επαναλάβουμε για να πάρουμε όλη την καμπύλη.

Μ2: Πρέπει να επαναλάβουμε το κομμάτι αυτό (δείχνει το τμήμα της καμπύλης μεταξύ 0ο και 720ο)

Ε: Ποια είναι λοιπόν η βασική ιδιότητα της καμπύλης;

Μ1:Ότι επαναλαμβάνεται ανά 720.

Ε: Πως σχηματίζεται αυτή η καμπύλη.

Μ1: Από κομμάτια που επαναλαμβάνονται

Ε: Από κομμάτια ή από ένα κομμάτι;

Μ2: Από ένα κομμάτι.

Συζήτηση. Η αριθμητική διαπραγμάτευση των τιμών των δυο μεταβλητών, βοήθησε να διατυπωθεί περισσότερο συγκροτημένα η επαναληπτικότητα της μεταβολής. Οι κανόνες που διατυπώθηκαν και επιβεβαιώθηκαν πολλαπλά (και με την χωρική τοποθέτηση στο σχήμα της καμπύλης αλλά και με τον σχηματισμό του «κλόουν») βοήθησαν να αναπτυχθούν χωρικές συνδέσεις μεταξύ τμημάτων της καμπύλης. Ο εμπλουτισμός της καμπύλης με νέα σημεία, με τη χρήση των αριθμητικών κανόνων, συνετέλεσε ώστε οι διάφορες συνδέσεις αυτές να οργανωθούν σε ένα ενιαίο σχήμα το οποίο αποτελεί την νοητική εικόνα του μαθηματικού νοήματος της περιοδικότητας.

Επίλογος

Στο άρθρο αυτό παρουσιάστηκε ο τρόπος με τον οποίο δυο άπειροι μαθητές δημιούργησαν νοήματα για την περιοδική μεταβολή καθώς και ο τρόπος με τον οποίο ευνοήθηκε η εξέλιξη των νοημάτων αυτών μέσα σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον μάθησης στο οποίο κυριαρχούν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις, οι πλούσιοι σημειωτικοί πόροι, ο δυναμικός χειρισμός των αντικειμένων και η κοινωνική αλληλεπίδραση. Το πλαίσιο αυτό ευνόησε τους μαθητές να κάνουν εννοιολογικές συνδέσεις των αντικειμένων της διαπραγμάτευσης με τις γνώσεις τους και τις εμπειρίες αλλά και συνδέσεις στο εσωτερικό των αναπαραστάσεων (χωρικές) με αποτέλεσμα να μην παρατηρηθούν οι δυσκολίες για την συγκρότηση της περιοδικής μεταβολής στο βαθμό που περιγράφουν οι ερευνητικές αναφορές που αναφέρθηκαν στην αρχή. Τα δεδομένα της έρευνα που παρουσιάσαμε εδώ υποβάλλουν την ιδέα μιας διαφορετικής προσέγγισης των μεταβολών, μέσω της ενεργούς κατασκευής μιας αναπαράστασης της μεταβολής (Pratt D., 1995) σε ένα περιβάλλον μάθησης που ευνοεί μια αναπτυξιακή προσέγγιση στην δημιουργία και ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων. Το γεγονός ότι μαθητές με ελάχιστες εμπειρίες και γνώσεις για την περιοδικότητα και τις τριγωνομετρικές μεταβολές, μπόρεσαν πρώτα να αναπτύξουν βαθιά νοήματα για αυτές πολύ πριν έλθουν σε επαφή με την αλγεβρική τους έκφραση (στο τέλος αντικατέστησαν τη μεταβλητή ψ με την παράσταση 200ημ(χ/2) που δημιούργησαν με τη γεωμετρική διαπραγμάτευση του κλόουν) μας παρακινεί να εργαστούμε προς αυτή την κατεύθυνση καθώς το υπολογιστικό περιβάλλον του Χελωνόκοσμου φαίνεται να είναι κατάλληλο εργαλείο, που μπορεί να μας βοηθήσει να μάθουμε περισσότερα για τον τρόπο δημιουργίας και ανάπτυξης νοημάτων με μαθηματικό περιεχόμενο από τους μαθητές.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Bagni, G.T. (1997), Trigonometric functions: learning and didactical contract, D'Amore, B. & Gagatsis, A. (Eds.), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, Thessaloniki, 3-10.

Clement, J (1989) The concept of variation and misconceptions in Cartesian graphing. In *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11(2)77-87

Dreyfus T. and Eisenberg T. (1980) On teaching periodicity *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol*., 1980, VOL. 11, NO. 4, 507-509

Hiebert J., Carpenter T., (1992). "Learning And Teaching With Understanding", In *Handbook of Research on Mathematics Teaching*, edited by D. A. Grouws. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Macmillan.

Kaput, J. (1989). "Linking representations in the symbolic systems of algebra". In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp.167- 194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput J., (1994). "Democratizing access to calculus: New routes to old roots". In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 77–156). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kynigos, C. (2002). Generating Cultures for Mathematical Microworlds Development in a Multi-Organizational Context. In *Educational Computing Research, Baywood Publishing Company*, Inc. 2, vol 27 (1&2) (185-211).

Kynigos, C., and Psicharis, G. (2003). "13 Year-Olds' Meanings Around Intrinsic Curves With A Medium For Symbolic Expression And Dynamic Manipulation". In Neil A. Pateman et All, (Eds.), *Proceedings of the 27th Psychology of Mathematics Education Conference* (3, 165-172), Honolulu, HI.

Nemirovsky, R., Tierney, C., Wright, T. (1998), "Body Motion and Graphing". Cognition and Instruction. 16(2).

Noss R., (1997). "Meaning Mathematically with Computers", in Nunes T. and Bryant P. (eds), *Learning and Teaching Mathematics, An International Perspective*. Psychology Press Ltd.

Noss, R., Healy, L., Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. In *Educational Studies in Mathematics* 33, 203–233

Pratt D. (1995) Passive and active graphing: A study of two learning sequences. *Proccedings of the 19th International Conference for the Phychology of Mathematics Education*. Brazil, 2, 210-217

Shama G., (1998). "Understanding Periodicity As A Process With A Gestalt Structure", *Educational Studies in Mathematics* 35: 255–281,

Schwarz, B., Hershkowitz R., (1999). Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools. In *Journal for Research in Mathematics Education* (1999). Vol. 30. No. 4. 362-389

Thagart P, (1992). '*Conceptual Revolutions*' Pub, Princeton University Press.

Wenzelburger, E. (1992), "The Learning of Trigonometric Functions in a Graphical Computer Environment". *Proceedings of PME 16*, Vol. Ill, pp. 106-113.