Αποκοπή-Επικόλληση και Ανάλυση σε δομικές μονάδες. Δυο τεχνικές υπολογισμού του εμβαδού ως στρατηγικές επίλυσης προβλήματος

Ιωάννης Παπαδόπουλος * και Ιωάννα Μαμωνά-Downs **

Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Τμήμα Εκπαιδευτικής και Κοινωνικής Πολιτικής

ypapadop@otenet.gr * mamona@uom.gr **

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζεται ένα μέρος μιας ευρύτερης έρευνας που σχετίζεται με την αντίληψη της έννοιας του εμβαδού από μαθητές δημοτικού σχολείου όπως αυτή ανιχνεύεται μέσα από δραστηριότητες με μη κανονικά σχήματα. Το ενδιαφέρον του εστιάζεται στις δυσκολίες που κομίζουν δυο στρατηγικές υπολογισμού του εμβαδού αυτών των σχημάτων, αυτές της αποκοπής-επικόλλησης και της ανάλυσης σε δομικές μονάδες, στον τρόπο με τον οποίο προσπαθούν οι μαθητές να υπερκεράσουν τις δυσκολίες αυτές, όπως και στο εύρος των δεξιοτήτων που εμφανίζεται να έχουν οι μαθητές.

Λέξεις κλειδιά

Επίλυση προβλήματος, εμβαδόν, εξεικόνιση, αποκοπή-επικόλληση, ανάλυση σε δομικές μονάδες.

Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή θα εξετάσουμε δυο δραστηριότητες, την «αποκοπή-επικόλληση» και την «ανάλυση σε δομικές μονάδες» που αφορούν σε βασικές αρχές στη διατήρηση του εμβαδού. Οι βασικές αρχές διατήρησης του εμβαδού είναι διαισθητικά προφανείς στα παιδιά και κάθε φορά που καταγίνονται με προβλήματα εμβαδού αυτόματα τις θεωρούν ως δεδομένες. Έτσι αυτό που απομένει για τους μαθητές είναι ουσιαστικά μόνο το πώς στην πράξη θα χειριστούν αυτές τις δραστηριότητες ώστε να φθάσουν στο αποτέλεσμα που επιδιώκουν.

Η μαθηματική θεμελίωση αυτών των δυο δραστηριοτήτων σε ιδιότητες διατήρησης του εμβαδού, τις καθιστά δυνατές και σημαντικές τεχνικές υπολογισμού του εμβαδού επιπέδων σχημάτων. Κατά συνέπεια αποτελούν αντικείμενο εκπαιδευτικής έρευνας που στοχεύει στο κατά πόσο οι μαθητές του δημοτικού σχολείου είναι ικανοί να τις χρησιμοποιήσουν συνθετικά ώστε να συγκροτήσουν αποτελεσματικές στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων εμβαδού. Κοινό χαρακτηριστικό αυτών των στρατηγικών είναι το ότι έχουν την απαρχή τους στην εξεικόνιση (*visualization*). Η εξεικόνιση αποτελεί μια σημαντική διεργασία για την ευκλείδεια γεωμετρία αφού γενικά η μάθηση και η ανάπτυξή της συντελείται κατά μεγάλο βαθμό μέσα από εξεικονιστικές νοητικές στρατηγικές. Η εξεικόνιση ως απαρχή στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων προσανατολίζει τους μαθητές προς μια διαδικασία λύσης μέσα από επί μέρους βήματα όπως: α) Ανάλυση μιας δομής σε υποδομές και μονάδες, β) Δημιουργία βοηθητικών κατασκευών, γ) Μετασχηματισμός της όλης δομής σε μια άλλη δομή και δ) ανασύνθεση (Hershkowitz, et al., 2001).

Η άφιξη στη λύση μέσα από τέτοιες στρατηγικές επίλυσης θεωρείται ιδιαιτέρως σημαντική στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, λόγω ακριβώς του ότι οι μικροί μαθητές βασίζονται σε μεγαλύτερο βαθμό απ' ότι οι ενήλικες στην αξιοπιστία των όσων βλέπουν ή των προϊόντων της φαντασίας τους. Τα παιδιά δεν εγείρουν συνήθως θέμα νομιμότητας. Δεν αμφιβάλουν για την εγκυρότητα των διαισθητικών τους παρατηρήσεων και μια τυπική απόδειξη για κάτι τους φαίνεται μάλλον άχρηστη. Τη θεωρούν ως μια επιχειρηματολογία για το προφανές (Clements & Battista, 1992; Arcavi, 2003).

Σε ένα τέτοιο πλαίσιο, η εργασία αυτή θα προσπαθήσει να συνεισφέρει μέσα από την παρουσίαση των στρατηγικών της «αποκοπής-επικόλλησης» και της «ανάλυσης σε δομικές μονάδες», στο πως αυτές αντανακλούν συγκεκριμένες πτυχές τόσο της επίλυσης προβλήματος γενικά όσο και της εξεικονιστικής επιχειρηματολογίας (*visual reasoning*) ειδικότερα.

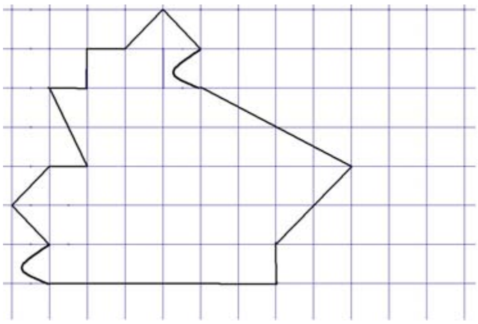
Αποκοπή και Επικόλληση έναντι Ανάλυσης σε Δομικές Μονάδες

Η ταυτότητα των δυο στρατηγικών

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται ένα μέρος μιας ευρύτερης έρευνας, η οποία εστιάστηκε στην αντίληψη της έννοιας του εμβαδού από μαθητές του δημοτικού σχολείου, όπως αυτή προσδιορίστηκε μέσα από τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές προσέγγισαν λύσεις σε προβλήματα εμβαδού μη κανονικών σχημάτων, που έχουν ως απαρχή τους τη διατήρηση του εμβαδού. Στο κομμάτι λοιπόν αυτό, μελετήθηκε η επιχειρηματολογία των μαθητών όταν έχουν να αντιμετωπίσουν δραστηριότητες στις οποίες ζητείται το εμβαδόν μη κανονικών σχημάτων. Κατηγοριοποιώντας τις στρατηγικές τους, φάνηκε πως στη συντριπτική πλειοψηφία αυτές οι στρατηγικές είτε βασίζονται αποκλειστικά στην εξεικόνιση είτε έχουν ως απαρχή τους την εξεικόνιση. Στη δεύτερη περίπτωση εντάσσονται και οι στρατηγικές της αποκοπής-επικόλλησης (*cut and paste*) και της ανάλυσης σε δομικές μονάδες (*decomposition*) στις οποίες θα αναφερθούμε διεξοδικά. Όταν μιλάμε για αποκοπή-επικόλληση αναφερόμαστε στην τακτική των παιδιών να μεταφέρουν (είτε νοερά στο περιβάλλον της τάξης είτε με «εικονικά» απτό τρόπο στο περιβάλλον του εργαστηρίου της πληροφορικής) κάποιες περιοχές του σχήματος από την αρχική τους θέση και να τις προσαρτούν σε κάποια άλλη ώστε να δημιουργείται ένα νέο σχήμα με το ίδιο εμβαδόν με το αρχικό, του οποίου όμως θα είναι πιο εύκολος ο υπολογισμός του. Το μόνο κριτήριο για αυτές τις μετακινήσεις είναι ποια περιοχή ταιριάζει που. Το εμβαδόν του νέου σχήματος προσεγγίζεται είτε με τη βοήθεια πλέγματος είτε με τη χρήση γνωστών τύπων υπολογισμού του εμβαδού όταν ο μετασχηματισμός καταλήγει σε ένα οικείο στα παιδιά σχήμα (τρίγωνο, τετράγωνο, ορθογώνιο κλπ). Η ανάλυση σε δομικές μονάδες έγκειται στην αναζήτηση από τα παιδιά μιας θεμελιώδους μονάδας που επαναλαμβάνεται μέσα στο σχήμα, ενώ ο υπολογισμός γίνεται σε δυο στάδια. Αρχικά με απαρίθμηση αυτών των θεμελιωδών μονάδων μέτρησης που όμως δεν καλύπτουν όλο το σχήμα και στη συνέχεια με υπολογισμό των «ελλιπών» μονάδων που απέμειναν. Η ιδέα που βρίσκεται πίσω και από τις δυο στρατηγικές – δηλ. η διατήρηση του εμβαδού - υλοποιείται με διαφορετικά κριτήρια στις δυο περιπτώσεις. Στην αναζήτηση περιοχών που ταιριάζουν στη μια και στην αναζήτηση επαναλαμβανόμενων μοτίβων στην άλλη. Μεταξύ των δυο στρατηγικών υπάρχει μια σχέση επικάλυψης. Η αποκοπή-επικόλληση υπεισέρχεται και στην ανάλυση σε δομικές μονάδες, αφού η δεύτερη, μετά τον εντοπισμό και την καταμέτρηση των δομικών μονάδων, εφαρμόζει αποκοπή-επικόλληση για τις «ελλιπείς» μονάδες που απομένουν.

Η ταυτότητα των δραστηριοτήτων

Οι δραστηριότητες διεκπεραιώθηκαν από μαθητές της Ε’ και Στ’ Δημοτικού σε δημόσιο σχολείο της Θεσσαλονίκης. Οι μαθητές κάθε τάξης ήταν χωρισμένοι σε δυο ομάδες από τις οποίες η μια δούλεψε στο παραδοσιακό περιβάλλον της τάξης (χαρτί-μολύβι) και η άλλη σε υπολογιστικό περιβάλλον. Στις προθέσεις μας ανάμεσα στα άλλα ήταν να εντοπίσουμε ταυτόχρονα στοιχεία που διαφοροποιούν τις προσεγγίσεις των μαθητών στα δυο περιβάλλοντα (τάξης – εργαστηρίου). Προκειμένου να μεταφερθούν οι συγκεκριμένες δραστηριότητες στο υπολογιστικό περιβάλλον επιλέχτηκε η χρήση του MSPaint ως πιο πρόσφορου λογισμικού ώστε οι μαθητές να μπορούν να εφαρμόσουν αποκοπή και επικόλληση. Οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί την έννοια του εμβαδού όπως και τους τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού γνωστών σχημάτων (τρίγωνα, τετράγωνα κλπ). Η θεματική ιδέα ήταν ο υπολογισμός εμβαδών μη κανονικών σχημάτων και οι δραστηριότητες χαρακτηρίζονται ως «μη-τετριμμένες» με την έννοια ότι δεν υπάρχουν τέτοιου είδους δραστηριότητες στα σχολικά εγχειρίδια και εξασφαλίζουν από τη μια την αποφυγή απλής ανάκλησης γνωστών τρόπων επίλυσης ενώ από την άλλη προσφέρονται σε μια δυναμική προσέγγιση σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον (βλ. Εικόνες 1 και 2).



Υπολογίστε το εμβαδόν του σχήματος. Βοηθά ο μετασχηματισμός του σε ένα γνωστό σας σχήμα σε αυτόν τον υπολογισμό; Γιατί; Γιατί όχι;

Εικόνα 1. Δραστηριότητα μαθητών Ε’ Δημοτικού

Ο νομός Σερρών σε αυτόν το χάρτη είναι σχεδιασμένος με κλίμακα 1:1.500.000. Υπολογίστε πόση περίπου είναι η πραγματική επιφάνεια του νομού.

Εικόνα 2. Δραστηριότητα μαθητών της Στ’ Δημοτικού

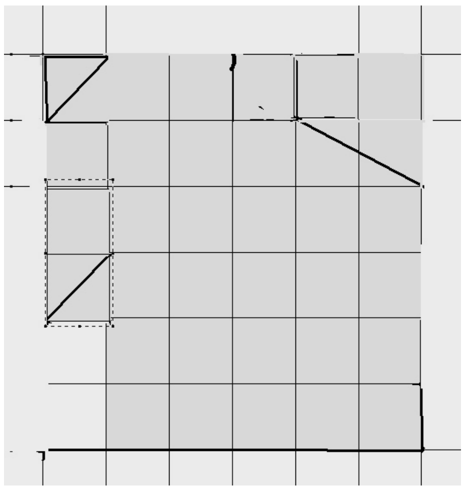
Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων είναι προσανατολισμένος προς την ικανότητα ανάλυσης σύνθετων αντικειμένων στα πρωτογενή και στοιχειώδη τους σχήματα που σύμφωνα με τους Hershkowitz, Parzysz και Van Dormolen αυτή η ικανότητα αποτελεί ένα από τα κύρια συστατικά της εξεικονιστικής επιχειρηματολογίας και σκέψης (Hershkowitz et al., 1998). Οι δραστηριότητες παρουσιάζονται προσαρμοσμένες στην παρουσία πλέγματος. Το πλέγμα αποτελεί κατ’ εξοχήν χρήσιμο εργαλείο σε δραστηριότητες υπολογισμού εμβαδού που βασίζονται στη χρήση αποκοπής-επικόλλησης ή ανάλυσης σε δομικές μονάδες. Καθιστά το σύνθετο σχήμα πιο διαχειρίσιμο γιατί επιτρέπει από τη μια την ασφαλή παρέμβαση από μέρους των μαθητών σε επίπεδο λήψης αποφάσεων σχετικά με τις απαραίτητες μετακινήσεις περιοχών και από την άλλη παρέχει έναν οδηγό για ένα αριθμητικό αποτέλεσμα όταν δεν είναι παρούσες οι τυπικές μονάδες μέτρησης επιφανειών. Αξίζει όμως να τονιστεί ότι στην περίπτωσή μας, αυτό δεν είναι κάτι οικείο για τη σχολική πρακτική. Οι μαθητές δεν διαθέτουν καμιά εμπειρία σχετική με τέτοιου είδους δραστηριότητες ώστε να εφαρμόσουν γνωστές στρατηγικές από την περιοχή αυτή όπως η απαρίθμηση μοναδιαίων τετραγώνων, ο μετασχηματισμός σε γνωστό σχήμα κ.α.

Δυσκολίες και υπερκέραση των δυσκολιών κατά την εφαρμογή αποκοπής-επικόλλησης και ανάλυσης σε δομικές μονάδες.

Η παρατήρηση των παιδιών κατά τη διάρκεια της προσπάθειάς τους να εφαρμόσουν τις δυο παραπάνω στρατηγικές οδήγησε σε μια καταγραφή των δυσκολιών που οι στρατηγικές κομίζουν, όπως αυτές διαμορφώνονται μέσα από το πλαίσιο των συγκεκριμένων δραστηριοτήτων. Η καταγραφή παρουσιάζει και το εύρος των δεξιοτήτων που εμφανίζονται από μέρους των μαθητών όπως επίσης και το πώς υπερκεράστηκαν οι δυσκολίες αυτές σε κάθε περίπτωση.

Δυσκολίες από την παρουσία καμπύλων γραμμών

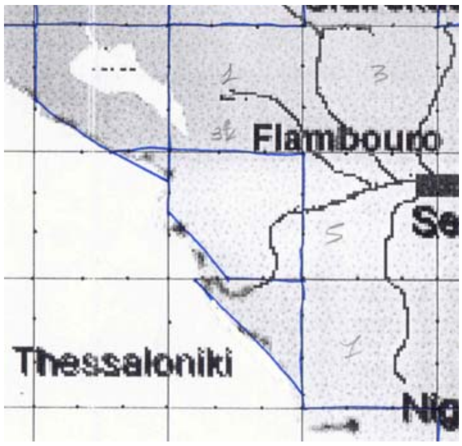
Η πιο βασική πηγή δυσκολίας για τους μαθητές υπήρξε το γεγονός ότι το σχήμα δεν αποτελούνταν μόνο από ευθύγραμμα τμήματα αλλά και από καμπύλες γραμμές. Ανάλογα με το πόσο πολύπλοκη φαινόταν η παρουσία αυτών των καμπύλων γραμμών διαφορετικός ήταν τόσο ο βαθμός που δυσκολεύτηκαν τα παιδιά όσο και ανάλογος ο αριθμός των διαφορετικών προσεγγίσεων ή προσπαθειών για τον υπερκερασμό αυτών των δυσκολιών. Στην περίπτωση που το πλέγμα δημιουργούσε περιοχές με καμπύλες γραμμές πλήρως αλληλοσυμπληρούμενες (όπως η πρώτη δραστηριότητα) η επιλογή της μεθόδου αποκοπής-επικόλλησης ήταν σχεδόν μονόδρομος. Στην περίπτωση όμως που η παρουσία των καμπύλων γραμμών αύξανε κατά πολύ το βαθμό πολυπλοκότητας (όπως στη δεύτερη δραστηριότητα) άρα και τη δυσκολία που δημιουργούσε στους μαθητές η εφαρμογή της προηγούμενης στρατηγικής (αφού τώρα δεν είναι εύκολο να βρεθούν περιοχές που να ταιριάζουν απόλυτα) παρατηρείται μια στροφή των μαθητών προς την ανάλυση σε δομικές μονάδες.



Εικόνα 3. Απώλεια επιφάνειας (εδώ 2 τετραγωνικές μονάδες) κατά τη φάση του μετασχηματισμού λόγω κενών και επικαλύψεων.

Έτσι στην περίπτωση της δεύτερης δραστηριότητας καταγράφηκαν οι εξής προσπάθειες για να ξεπεραστεί η δυσκολία που δημιούργησαν οι καμπύλες γραμμές:

- **Κατά προσέγγιση αποκοπή-επικόλληση.** Κάποιοι μαθητές δυσκολεύτηκαν να προσδιορίσουν περιοχές που να ταιριάζουν απόλυτα ώστε να δημιουργήσουν πλήρη μοναδιαία τετράγωνα και έτσι να φτάσουν στον υπολογισμό του εμβαδού. Κατά συνέπεια επέλεξαν περιοχές που να ταιριάζουν όσο γίνεται περισσότερο και με εφαρμογή αποκοπής-επικόλλησης δεν απέφυγαν κενά και επικαλύψεις χάνοντας έτσι σημαντικό κομμάτι της πραγματικής επιφάνειας. Κενά και επικαλύψεις παρατηρήθηκαν και στην δραστηριότητα 1 με αποτέλεσμα την απώλεια επιφάνειας (βλ. εικόνα 3).
- Ένα πολύ μεγάλο μέρος των μαθητών αντιμετωπίζοντας τη δυσκολία να εφαρμόσει με ακρίβεια τη αποκοπή-επικόλληση εξέλαβε ως χρήσιμο εργαλείο την παρουσία σημείων στο πλέγμα που επιτρέπουν τη διαίρεση της τετραγωνικής μονάδας σε υποδιαιρέσεις της, με νέα δομική μονάδα ένα μικρότερο τετράγωνο (ένα από τα εννέα στα οποία μπορεί να διαιρεθεί κάθε μεγάλο τετράγωνο). Πραγματοποίησε λοιπόν αυτήν την **ανάλυση στις μικρότερες δυνατές δομικές μονάδες** πράγμα που επέτρεψε στο μαθητή να φτάσει με μεγαλύτερη προσέγγιση στο πραγματικό εμβαδόν και να εφαρμόσει στη συνέχεια αποκοπή-επικόλληση μόνο για τις πολύ μικρές καμπύλες περιοχές που περισσεύουν.
- Κάποιοι πραγματοποίησαν **ανάλυση σε δομικές μονάδες σε δύο επίπεδα**. Για εκείνο το μέρος του σχήματος που έδινε τέτοια δυνατότητα διατήρησαν ως θεμελιώδη μονάδα τα μεγάλα τετράγωνα. Στο υπόλοιπο θεώρησαν ως θεμελιώδη μονάδα την υποδιαίρεση του αρχικού τετραγώνου και προχώρησαν στη συνέχεια και αυτοί σε αποκοπή-επικόλληση για τα καμπύλα μέρη.
- Τέλος υπήρξαν και αυτοί που προκειμένου να εφαρμόσουν είτε τη μια είτε την άλλη μέθοδο και να εξαλείψουν την επιμέρους δυσκολία που δημιουργούσαν οι καμπύλες γραμμές, προέβησαν σε **αντικατάσταση των καμπύλων με ευθύγραμμα τμήματα** δημιουργώντας κατά προσέγγιση ένα νέο μη κανονικό σχήμα που το περίγραμμά του αποτελούνταν πια μόνο από ευθύγραμμα τμήματα (βλ. εικόνα 4). Η αντικατάσταση αυτή με τη σειρά της δημιούργησε μια ακόμη δυσκολία στους μαθητές. Λόγω ακριβώς του ότι δημιουργήθηκαν μη κανονικά σχήματα θα έπρεπε να αφιερώσουν επιπλέον χρόνο είτε στο χωρισμό τους σε απλούστερα υποσχήματα είτε στην επιλογή μιας από τις δυο στρατηγικές για μια εκ νέου προσέγγιση του υπολογισμού του εμβαδού.

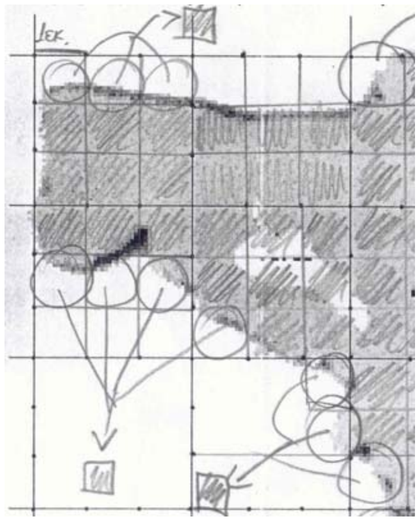


Εικόνα 4. Αντικατάσταση καμπύλων γραμμών με ευθύγραμμα τμήματα.

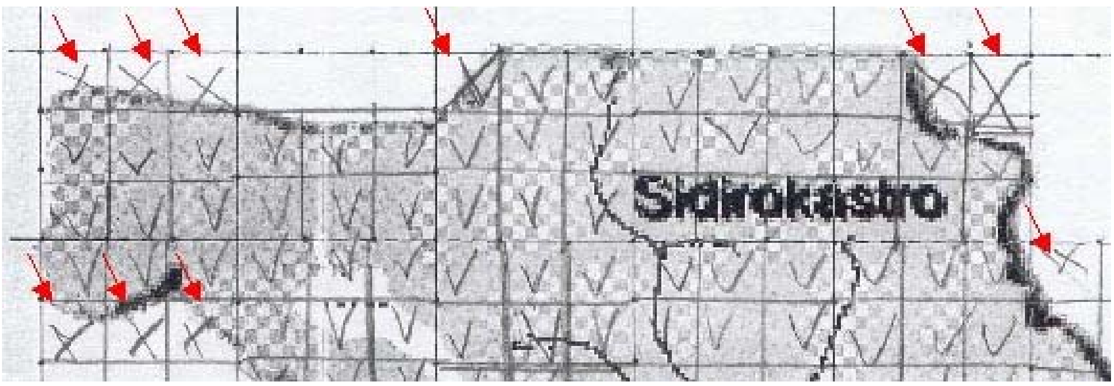
Στην πλειονότητα των παραπάνω περιπτώσεων, το αριθμητικό αποτέλεσμα στο οποίο έφτασαν πολλοί από τους μαθητές αρχικά δε φάνηκε να συνοδεύεται από καμιά μονάδα μέτρησης. Βέβαια οι μαθητές χρησιμοποίησαν ως οδηγό τα μοναδιαία τετράγωνα που σιωπηρά τους υποδείκνυε το πλέγμα και έτσι κατέληξαν σε έναν αριθμό. Δεδομένου όμως ότι το διδακτικό συμβόλαιο – όρος καθιερωμένος από τον Brousseau- της διδασκαλίας των εμβαδών στη σχολική πραγματικότητα προβλέπει ότι ένα εξαγόμενο που αφορά εμβαδόν πρέπει να συνοδεύεται από τυπικές μονάδες μέτρησης, οι μαθητές δεν είχαν μια αίσθηση πληρότητας ως προς την ορθότητα του υπολογισμού τους. Αισθάνθηκαν την ανάγκη να «μεταφράσουν» κάπως αυτές τις ανεπίσημες μονάδες του πλέγματος ικανοποιώντας με αυτόν τον τρόπο την ανάγκη που ένιωθαν για χρήση τυπικών μονάδων μέτρησης ώστε το αποτέλεσμά τους να είναι «σωστό». Έτσι ή «βάφτισαν» αυθαίρετα τα μοναδιαία τετράγωνα του πλέγματος τετραγωνικά δεκατόμετρα (ακόμη και τετραγωνικά μέτρα σε κάποιες περιπτώσεις) ή στην περίπτωση που κατανοούσαν ότι αυτό αποτελεί αυθαιρεσία προχώρησαν στον υπολογισμό του εμβαδού του ενός μοναδιαίου τετραγώνου με τη χρήση τύπου (αφού πρώτα μέτρησαν με χάρακα τη μια του πλευρά) και στη συνέχεια προχώρησαν στον υπολογισμό του όλου εμβαδού εκφρασμένου τώρα σε τετραγωνικά εκατοστά. Μετέφρασαν λοιπόν ένα ήδη σωστό αποτέλεσμα σε ένα ισοδύναμό του λόγω της δυσκολίας που τους προξενούσε η παρουσία μονάδων του πλέγματος που όμως δεν δηλώνονταν ως τέτοιες και έτσι παραβιαζόταν το διδακτικό συμβόλαιο.

Δυσκολία στη διαχείριση των «ελλιπών» τετραγώνων.

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου της ανάλυσης σε δομικές μονάδες, στη δεύτερη δραστηριότητα, με την οποία οι μαθητές προσέγγισαν με μεγαλύτερη ακρίβεια το πραγματικό εμβαδόν, ενδιαφέρον παρουσίασε το πώς αντιμετώπισαν τη δυσκολία που τους δημιούργησε η παρουσία των πολύ μικρών καμπύλων περιοχών που δεν αποτελούν πλήρη μοναδιαία τετράγωνα ούτε μετά την υποδιαίρεση της αρχικής τετραγωνικής μονάδας. Κάποιοι συνδύασαν 2, 3 ή 4 τέτοια «ελλιπή»



Εικόνα 5. Οι περιοχές που λαμβάνονται υπόψη για τον υπολογισμό του τελικού εμβαδού.



Εικόνα 6. Οι περιοχές που αγνοούνται και δεν λαμβάνονται υπόψη για τον υπολογισμό του τελικού εμβαδού

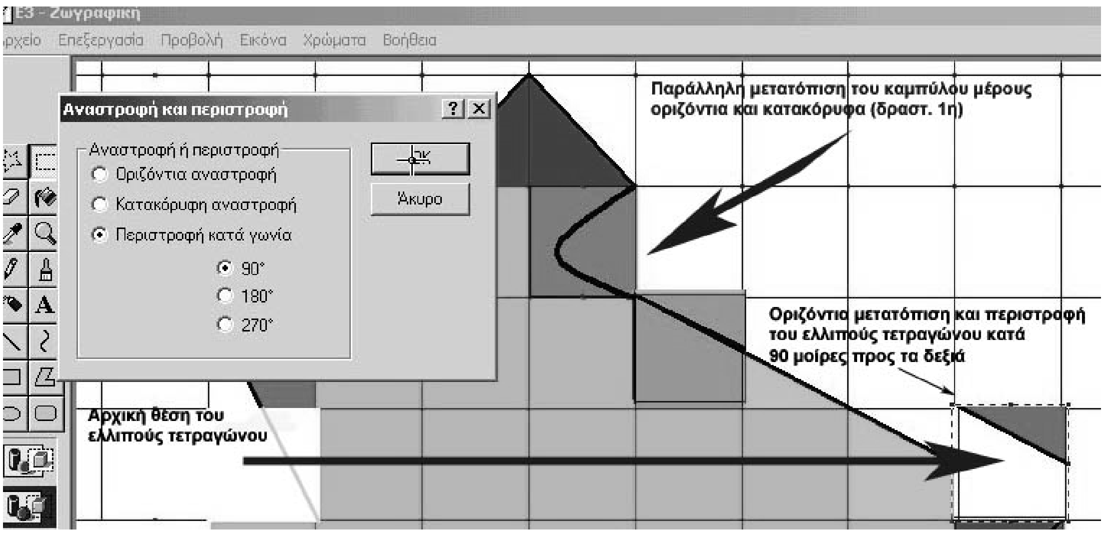
τετράγωνα που κατά προσέγγιση δίνουν ένα μικρό μοναδιαίο τετράγωνο (βλ. εικόνα 5).

Άλλοι όμως είχαν ως κριτήριο κατά την ενασχόλησή τους με αυτά τα μη πλήρη μικρά μοναδιαία τετράγωνα, το αποτέλεσμα μιας σύγκρισης. Συνέκριναν το μέρος της επιφάνειας του μοναδιαίου τετραγώνου που καταλαμβάνει το σχήμα με αυτό που περισσεύει. Αν το πρώτο ήταν μικρότερο του δεύτερου τότε το τετράγωνο αγνοούνταν και δεν λαμβανόταν καθόλου υπόψη για τον υπολογισμό του τελικού εμβαδού (βλ. εικόνα 6).

Στη δεύτερη περίπτωση αυτή η απόκλιση από το πραγματικό εμβαδόν ήταν μεγαλύτερη απ' ότι στην πρώτη.

Δυσκολίες κατά την παράλληλη μετατόπιση – περιστροφή.

Κατά την εφαρμογή των δυο στρατηγικών οι μαθητές χρειάστηκε να μεταφέρουν περιοχές του ενός σχήματος η «ελλιπή» τετράγωνα σε άλλες περιοχές και πολλές φορές με διαφορετικό προσανατολισμό. Στην περίπτωση που η μετακίνηση αυτή αποτελούσε απλά μια παράλληλη μετατόπιση οριζόντια, κατακόρυφα ή και προς τις δυο διευθύνσεις τα πράγματα φάνηκε να μη δυσκολεύουν ιδιαίτερα (όπως για παράδειγμα το καμπύλο μέρος του σχήματος στην πρώτη δραστηριότητα). Υπήρξε όμως αποκαλυπτική η δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές προκειμένου να



Εικόνα 7. Δυσκολία κατά την επιλογή είδους περιστροφής

περιστρέψουν κατά 90^o, 180^o ή 270^o προς τα δεξιά τη μετακινούμενη περιοχή ώστε να ταιριάζει ακριβώς στη νέα της θέση. Η δυσκολία αυτή ήταν ιδιαίτερα εμφανής στο περιβάλλον του εργαστηρίου όπου οι μαθητές έπρεπε να δηλώσουν στον υπολογιστή το είδος στροφής (βλ. εικόνα 7). Βέβαια αξίζει εδώ να αναφερθεί και μια δυσκολία την οποία δεν κομίζουν οι δυο στρατηγικές αλλά το γεγονός ότι ένα λογισμικό δεν μπορεί να ικανοποιεί όλες τις επιθυμητές ενέργειες που θα θέλαμε να διαθέτει (Dagdilelis & Papadopoulos, 2004). Για παράδειγμα, σε κάποιες περιπτώσεις τα παιδιά εξέφρασαν την επιθυμία να πραγματοποιήσουν με τη βοήθεια του λογισμικού στροφή κατά συγκεκριμένο αριθμό μοιρών που να μην είναι πολλαπλάσιο του 90, πράγμα το οποίο δεν μπορούσε να τους προσφέρει το συγκεκριμένο λογισμικό (MS Paint).

Δυσκολίες στη συγκράτηση και νοερή καταγραφή.

Πρόκειται για τη δυσκολία που εξέφρασαν τα παιδιά στην προσπάθειά τους να διατηρούν νοερά τις μετακινήσεις των περιοχών (ποιο κομμάτι πήγε που) και ταυτοχρόνως να πραγματοποιούν τον μερικό υπολογισμό του εμβαδού μετά από κάθε τέτοια μετακίνηση έτσι ώστε να μην έχει παραλειφθεί κάτι στο τελικό αποτέλεσμα και/ή να μην έχει μετρηθεί δυο φορές το ίδιο. Η συγκεκριμένη δυσκολία αφορά μόνο στα παιδιά που δούλεψαν στο περιβάλλον της τάξης. Η πραγματοποίηση αυτής της διαδικασίας στο εργαστήριο παρουσιάζει το πλεονέκτημα ότι οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα της οπτικοποίησης κάθε τους ενέργειας και έναν έλεγχο πάνω στο τι πάει που και ακόμη παραπάνω τη δυνατότητα αναίρεσης μιας λανθασμένης τους ενέργειας μέσα από τα εργαλεία αποκοπής, επικόλλησης, περιστροφής ή του διαφορετικού χρωματισμού (Papadopoulos, 2004).

Δυσκολία στη διάκριση μεταξύ πλέγματος - σχήματος.

Η ένταξη των σχημάτων μέσα στο πλέγμα έκανε για κάποιους μαθητές τα όρια μεταξύ σχήματος και πλέγματος ασαφή. Μερικοί απ’ αυτούς δυσκολεύτηκαν να ξεχωρίσουν μέσα στο μοναδιαίο τετράγωνο του πλέγματος εκείνο το μέρος του που ανήκει στο σχήμα και κατά συνέπεια θα πρέπει να ληφθεί υπόψη στον υπολογισμό του εμβαδού. Αντ’ αυτού οι συγκεκριμένοι μαθητές κατά τη φάση της απαρίθμησης των πλήρων μοναδιαίων τετραγώνων περιελάμβαναν στην αρίθμησή τους και τα «ελλιπή» τετράγωνα ως πλήρη με αποτέλεσμα να φτάνουν σε ένα αποτέλεσμα που ήταν πολύ μεγαλύτερο από το αναμενόμενο. Άλλοι, υπολόγισαν το εμβαδόν όλου του παραλληλογράμμου πλαισίου (όλο το πλέγμα μαζί με το μη κανονικό σχήμα).

Είναι οι στρατηγικές αυτές μονόδρομος;

Κλείνοντας την ενότητα αυτή των δυσκολιών αξίζει να αναφερθεί το γεγονός πως υπήρξαν μαθητές που απέρριψαν και τις δυο στρατηγικές παρόλο που το γενικό πλαίσιο των δραστηριοτήτων τις υποδείκνυε σιωπηρά. Αντ’ αυτού προτίμησαν στην πρώτη δραστηριότητα να αναζητήσουν μέσα στο αρχικό σχήμα γνωστά τους υποσχήματα, να εφαρμόσουν τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού τους και με πρόσθεση να φτάσουν στο τελικό εμβαδόν. Την ίδια στρατηγική εφάρμοσαν και στη δεύτερη δραστηριότητα αφού πρώτα προηγήθηκε η αντικατάσταση των καμπύλων γραμμών με ευθύγραμμα τμήματα.

Μια τέλος επίσης ιδιαίτερη αντιμετώπιση που αξίζει να μνημονεύσουμε ήταν αυτή ενός μαθητή που προσπάθησε να βρει το εμβαδόν του μη κανονικού σχήματος υπολογίζοντας το «συμπλήρωμά» του. Υπολόγισε στη δεύτερη δραστηριότητα το εμβαδόν όλου του πλέγματος και στη συνέχεια προσπάθησε να υπολογίσει το εμβαδόν της περιοχής εκτός του σχήματος, ώστε από την αφαίρεσή τους να προκύψει το εμβαδόν του νομού, χωρίς να εφαρμόσει καμιά από τις δυο στρατηγικές.

Συμπεράσματα

Σε αυτήν την εργασία παρουσιάσαμε δύο στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων εμβαδού στη στοιχειώδη Γεωμετρία που στηρίζονται στην έννοια της διατήρησης του εμβαδού. Στην Ανάλυση σε δομικές μονάδες, χωρίζουμε ένα επίπεδο σχήμα σε μικρότερα σχήματα στη βάση ενός επαναλαμβανόμενου σχηματικού μοτίβου που εκλαμβάνεται ως μονάδα· τότε το εμβαδόν ολόκληρου του σχήματος ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των υποσχημάτων που το απαρτίζουν. Στην Αποκοπή-Επικόλληση αποκόβουμε, φυσικά ή νοερά, ένα μέρος του σχήματος και το προσαρτούμε ξανά σε μια παρακείμενη περιοχή του, πράξη που μπορεί να επαναληφθεί πολλές φορές. Το αρχικό και το τελικό σχήμα θα έχουν το ίδιο εμβαδό.

Οι μαθητές του δημοτικού σχολείου που ήταν τα υποκείμενα στην έρευνά μας φάνηκε να αποδέχονται εύκολα την ιδέα της διατήρησης του εμβαδού που εμπλέκεται στις δύο αυτές στρατηγικές. Γι' αυτούς ήταν πιο σημαντικό να αποφασίσουν πώς θα χειριστούν στην πράξη αυτές τις δύο στρατηγικές με ακρίβεια και αποτελεσματικότητα παρά πώς θα κάνουν συνειδητή χρήση της έννοιας της διατήρησης του εμβαδού που φάνηκε να τους είναι κατά κάποιο τρόπο προφανής. Έτσι στην εργασία αυτή εστιάσαμε την προσοχή μας στις όψεις της επίλυσης προβλήματος που συνδέονται με αυτές τις δραστηριότητες και εξετάσαμε σε ποιο βαθμό οι μαθητές είχαν την ευχέρεια να τις διαχειριστούν.

Είχαμε μια ειδική περίπτωση ανάλυσης σε δομικές μονάδες όπου τα σχήματα των οποίων ζητούνταν το εμβαδόν ήταν σχεδιασμένα σε τετραγωνικό πλέγμα. Παρόλο που το συγκεκριμένο περιβάλλον των προβλημάτων περιορίζει την ελευθερία των μαθητών στη διαδικασία επίλυσης, καθώς σιωπηρά επιβάλλει μια συγκεκριμένη βάση για τη μέτρηση του εμβαδού, οι μαθητές επέδειξαν μια καθόλου ευκαταφρόνητη γκάμα προσεγγίσεων επίλυσης σ' αυτό το περιβάλλον.

Οι προσεγγίσεις των μαθητών που εντοπίσαμε στην έρευνα πεδίου ήταν:

Στην Ανάλυση σε δομικές μονάδες: Α) Η εκλέπτυνση του πλέγματος που επιτρέπει μια καλύτερη εκτίμηση του εμβαδού της προς μέτρηση περιοχής του επιπέδου με την συνακόλουθη προσαρμογή της μονάδας μέτρησης. Β) Η προσέγγιση του καμπύλου περιγράμματος της περιοχής με ευθύγραμμα τμήματα που επιτρέπει την καλύτερη διαχείριση των "ελλιπών τετραγώνων". Γ) Η εκτίμηση της συνεισφοράς στο εμβαδόν των "ελλιπών" τετραγώνων με τον συνυπολογισμό αυτών που με το μάτι φαίνεται να καλύπτουν πλέον του μισού ενός τμήματος της περιοχής και την αντίστοιχη εξαίρεση αυτών που καλύπτουν λιγότερο του μισού. Δ) Η συγκέντρωση των "ελλιπών τετραγώνων" που με το μάτι φαίνεται ότι το άθροισμα των εμβαδών τους δημιουργεί μια τετραγωνική μονάδα. Στην εργασία σχολιάσαμε σε τι έκταση οι μαθητές ακολούθησαν αυτές τις προσεγγίσεις κατά αξιόπιστο τρόπο.

Στην Αποκοπή-Επικόλληση οι μαθητές είχαν να εφαρμόσουν μια τεχνική που αποδείχθηκε εύκολα κατανοήσιμη από αυτούς αλλά απαιτούσε κάποιο σχεδιασμό για την αποτελεσματική εφαρμογή της. Κάθε μία πράξη αποκοπής-επικόλλησης πρέπει να εκτιμηθεί στο πλαίσιο μιας ακολουθίας τέτοιων πράξεων μέσω των οποίων θα επιτευχθεί ο μετασχηματισμός είτε σε μια περιοχή γεωμετρικά αναγνωρίσιμη, είτε σε μια περιοχή που το εμβαδόν της μπορεί εύκολα να υπολογιστεί.

Αυτό συνεπάγεται τη δεξιότητα αυτού που είναι γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία ως *executive control*. Του πως δηλαδή στην ουσία ο μαθητής ελέγχει συνειδητά τη διαδικασία επίλυσης των δραστηριοτήτων. Στην έρευνά μας εντοπίσαμε ότι οι μαθητές υστερούν και στο να φέρνουν σε πέρας μεμονωμένες ενέργειες της αποκοπής-επικόλλησης αλλά και στον συντονισμό πολλαπλών εφαρμογών της.

Οι δύο στρατηγικές αντανακλούν ενδιαφέρουσες λεπτές αποχρώσεις τόσο στην εξεικονιστική επιχειρηματολογία, όσο και γενικά στην επίλυση προβλήματος.

Στην ανάλυση δομικών μονάδων όταν κανείς απαριθμεί τα τετράγωνα του πλέγματος στο οποίο έχει σχεδιασθεί μια περιοχή δεν την μεταβάλλει με τα υπολογιστικά μέσα. Όμως με την αποκοπή-επικόλληση η περιοχή μετασχηματίζεται. Επομένως, όσον αφορά την εξεικόνιση στην πρώτη περίπτωση ο λύτης σέβεται την αρχική εικόνα, στη δεύτερη η εκτίμηση του εμβαδού εξαρτάται από τον μετασχηματισμό της.

Όσον δε αφορά γενικά στην επίλυση προβλήματος η κατάσταση υποδεικνύει τη διαφοροποίηση μεταξύ της χρησιμοποίησης ενός εργαλείου που αναλύει άμεσα ένα σύστημα (στην Ανάλυση σε δομικές μονάδες) και του μετασχηματισμού ενός συστήματος σε ένα άλλο, μέσω της επίκλησης της γνώσης της διατήρησης του εμβαδού στην αποκοπή-επικόλληση, για να λυθεί το πρόβλημα. Οι γνωστικές και μεταγνωστικές διαστάσεις αυτών των δύο προοπτικών πρέπει να εξετασθούν περαιτέρω και στο γεωμετρικό πλαίσιο αυτής της εργασίας αλλά και σε ευρύτερο πλαίσιο.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. In *Educational Studies in Mathematics* 52 (3), 215-241.

Clements, D.H., Battista, M.T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning, (pp 420-464)*. New York: Macmillan.

Dagdiles, V.; Papadopoulos, I. (2004). An open problem in the use of software for educational purposes. In Elspeth McKay (Ed.). *Proceedings of the International Conference on Computers in Education, ICCE 2004,* pp. 919-924, Melbourne, Australia.

Hershkowitz, R.; Parzysz, B.; Van Dormolen, J. (1998) Space and Shape. In Bishop, A.;Clements, D.;Kilpatrick, J; Laborde, C. (Eds), *International Handbook of Mathematics education* (pp 161-204), London, Kluwer.

Hershkowitz, R.;Arcavi, A.;Bruckheimer, M. (2001) Reflections on the status and nature of visual reasoning – the case of matches. In *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 32 (2), 255-265.

Papadopoulos, I., (2004) Geometry Problem-Solving in a Computational Environment. Advantages and Reservations. Paper presented at the 10th International Congress on Mathematical Education (ICME-10),TSG 18, Copenhagen, Denmark, *http://www.icme-organisers.dk/tsg18/*