Μορφές και επίπεδα αιτιολόγησης κατά τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων

Ευγενία Κολέζα, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια,

ΠΤΔΕ - Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ekoleza@cc.uoi.gr

Ελισσάβετ Καμπάνη, Καθηγήτρια ΜΕ, Διδάκτωρ

ΠΤΔΕ - Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

apoto@tee.gr

Περίληψη

Σκοπός της μελέτης αυτής είναι να διερευνήσει τις μορφές αιτιολόγησης που χρησιμοποιούν οι μαθητές της Α΄ Λυκείου κατά τη λύση προβλημάτων που αναφέρονται σε ισοσκελή τρίγωνα. Αναλύονται τα συστατικά μέρη της αιτιολόγησης με στόχο την κατανόηση και ακολούθως την κατηγοριοποίηση της μεγάλης ποικιλίας διαδικασιών που εμφανίζονται. Διερευνάται η υπόθεση ότι, η λειτουργία της αιτιολόγησης εξελίσσεται και η εξέλιξη είναι μη γραμμική. Εντοπίζονται παράγοντες που επηρεάζουν τη μορφή και την εξέλιξη της αιτιολόγησης και επισημαίνονται οι διδακτικές προεκτάσεις.

Λέξεις Κλειδιά

Γεωμετρικό Σχήμα, Νοερή απεικόνιση, Κατασκευή, Αιτιολόγηση.

Η ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Η αιτιολόγηση αποτελεί τη λειτουργία που επιχειρεί να τεκμηριώσει τη συνέπεια ανάμεσα στις υποθέσεις του προβλήματος, στη νοερή του απεικόνιση και στο γεωμετρικό σχήμα. Υπάρχουν διάφορα είδη αιτιολόγησης (Duval, 1998, σ.39), ενώ η διαφοροποίηση του πλήθους των διαδικασιών της αποτελεί προϋπόθεση για το συντονισμό των γνωστικών λειτουργιών του μαθητή.

Η αιτιολόγηση στη Γεωμετρία κινείται ανάμεσα σε δύο ακραίες συμπεριφορές. Την «ανώριμη» (προ – μαθηματική) και τη «μαθηματική συμπεριφορά» (Duval, 1998, σ.48). Αυτές διαφέρουν, πέρα από τη γλώσσα που χρησιμοποιούν, σε βασικά σημεία, ως προς τη χρήση των γεωμετρικών σχημάτων και το συλλογισμό και περιγράφονται συνοπτικά ως εξής:

- Στην προ - μαθηματική συμπεριφορά ο συλλογισμός στηρίζεται σε οπτικές σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του γεωμετρικού σχήματος και διατυπώνεται με όρους της καθημερινής γλώσσας, χωρίς ιδιαίτερες μαθηματικές εκφράσεις. Ο ρόλος του γεωμετρικού σχήματος είναι καθοριστικός, καθώς μέσα από αυτό γίνεται η αναγνώριση των στοιχείων που είναι σχετικά με το πρόβλημα (ο μαθητής το συγκρίνει με τη νοερή του απεικόνιση και αντιδρά στις ενδεχόμενες ασυμβατότητες μεταξύ των δύο).

- Στη μαθηματική συμπεριφορά, αντίθετα, ο συλλογισμός βασίζεται στην όλη δομή του αξιωματικού συστήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και σε κανόνες της Λογικής. Ο ρόλος του γεωμετρικού σχήματος είναι καθαρά ενδεικτικός και χρησιμοποιείται ευρετικά στα πλαίσια της λειτουργικής κατανόησης, η οποία «δεν δίνει τα βήματα και την οργάνωση του παραγωγικού συλλογισμού για την απόδειξη, αλλά αναδεικνύει σημεία – κλειδιά ή δίνει μια ιδέα που θα επιτρέψει στο μαθητή να επιλέξει τις απαιτούμενες προτάσεις που θα χρησιμοποιηθούν» (Duval, 1998, σ.48).

Διάφορες καταστάσεις λειτουργούν παράλληλα στο μυαλό του μαθητή, σε μια αργή και κοπιώδη προσπάθεια συντονισμού της οπτικής και της θεωρητικής συλλογιστικής. Η επιτυχημένη συσχέτιση των δύο είναι παράγοντας που οδηγεί στη μαθηματική κατανόηση. Στα πλαίσια του σχολείου (και όχι μόνο) η ικανότητα για αιτιολόγηση συνδέεται στενά με την κατανόηση, γι΄ αυτό ο τρόπος αιτιολόγησης σηματοδοτεί συνήθως το βαθμό κατανόησης. Η κοινή αυτή αντίληψη δεν είναι πάντα ασφαλής. Πολλές φορές, «η απόδειξη μπορεί να μην εγγυάται τη γνώση, και η εγγύηση της γνώσης να είναι άλλη από την απόδειξη (για παράδειγμα, η νοερή απεικόνιση)» (Rodd 2000, σ. 242).

Από γνωστικής άποψης, οι μορφές αιτιολόγησης διακρίνονται ανάλογα με τη μορφή παρουσίασης και τον τρόπο οργάνωσης των πληροφοριών (Duval, 1998, σ.45). Με βάση τους δύο αυτούς άξονες μπορούν να ομαδοποιηθούν οι διαδικασίες αιτιολόγησης σε τρεις προσεγγίσεις: την οπτική, την ευρετική και τη θεωρητική (Καμπάνη, 2003, σ. 228).

Η **Οπτική Προσέγγιση** υιοθετείται από μαθητές με προ - μαθηματική συμπεριφορά, οι οποίοι δε γνωρίζουν και συνεπώς δε χρησιμοποιούν θεωρητικές προτάσεις. Ο συλλογισμός τους βασίζεται στη νοερή απεικόνιση και στην κατασκευή. Κύριο μέλημά τους είναι η πιστή «μετάφραση» στο χαρτί της εσωτερικής τους αναπαράστασης. Καθοριστικός παράγοντας είναι η «ακρίβεια» της κατασκευής.

Στην οπτική προσέγγιση η αιτιολόγηση γίνεται με έναν απλοϊκό τρόπο. Οι μαθητές δε «βλέπουν το λόγο» για τον οποίο θα πρέπει να αιτιολογήσουν κάτι διαφορετικά από το πώς οι ίδιοι το αντιλαμβάνονται, δηλαδή μέσα από το σχήμα. Έτσι οι συλλογισμοί τους δομούνται με κύριο άξονα τη σύγκριση νοερής εικόνας – γεωμετρικού σχήματος, ενώ η γλώσσα που χρησιμοποιούν είναι η καθημερινή γλώσσα, που περιγράφει τα σχήματα και αντλεί τα επιχειρήματά της από αυτά.

Η **Ευρετική Προσέγγιση** είναι η γέφυρα ανάμεσα στη συγκεκριμένη αντιληπτική και στην αφηρημένη σκέψη. Ο συλλογισμός συνεχίζει να βασίζεται στη νοερή απεικόνιση και στην κατασκευή αποκτά όμως, συνθετότερο χαρακτήρα, ενώ παράλληλα αρχίζει να αναπτύσσεται μια μορφή θεωρητικού λόγου.

Η αιτιολόγηση εξακολουθεί να αντλεί επιχειρήματα από όσα βλέπει ή κατασκευάζει ο μαθητής, αλλά με μια διαφορετική ποιότητα. Συγκεκριμένα, η ευρετική προσέγγιση υποδηλώνεται από την δυνατότητα του μαθητή να αναδιοργανώνει οπτικά το σχήμα, έτσι ώστε να βλέπει άλλες φόρμες, τις οποίες δεν είχε δει με την πρώτη ματιά. Ο Duval (1998) ονομάζει τη δυνατότητα αυτή σχηματική αλλαγή (figural change) ή λειτουργική κατανόηση (σ.44).

Ο μαθητής, κατά τον Duval (2002), «ξεκινώντας από το δοσμένο σχήμα, μπορεί να αναπτύξει αρκετές σειρές σχημάτων. Μία από αυτές τις σειρές θα οδηγήσει στη σύλληψη της λύσης. Εξωτερική μαρτυρία, από την οποία αντιλαμβανόμαστε την ύπαρξη λειτουργικής κατανόησης, είναι η ικανότητα του μαθητή να σκέφτεται να σχεδιάσει μερικά ακόμα στοιχεία στο δοθέν σχήμα». Με άλλα λόγια, η ικανότητα του μαθητή να φέρει μια βοηθητική ευθεία σηματοδοτεί την λειτουργική κατανόηση του σχήματος.

Οι μαθητές που υιοθετούν την ευρετική προσέγγιση προσπαθούν να ενισχύσουν το συλλογισμό τους και με επιχειρήματα θεωρητικής φύσης. Έτσι, ο συλλογισμός αποκτά σταδιακά ένα θεωρητικό χαρακτήρα και, καθώς εμπεριέχει ακόμα ελλιπή ή λανθασμένα στοιχεία, χαρακτηρίζεται ατελής θεωρητικός λόγος. Τέλος, η ευρετική προσέγγιση σηματοδοτείται από τη χρήση γεωμετρικών οργάνων και οδηγιών κατασκευής [1]. Μια τέτοια χρήση, φαίνεται πως, εγγυάται στους μαθητές την ορθότητα της λύσης, συνεπώς η επίκλησή της συνιστά αιτιολόγηση.

Η **Θεωρητική Προσέγγιση** υιοθετείται από μαθητές με μαθηματική συμπεριφορά [2]. Εδώ έχει συντελεστεί σε μεγάλο βαθμό το πέρασμα από το υποκειμενικό στο αντικειμενικό. Οι αιτιολογήσεις δε βασίζονται σε ό,τι οι μαθητές βλέπουν ή κατασκευάζουν, αλλά σε μια αντικειμενική πραγματικότητα έξω από αυτούς και συγκεκριμένα, στο σώμα των προτάσεων που αποτελεί τη γεωμετρική θεωρία.

Χαρακτηριστικό της μαθηματικής συμπεριφοράς είναι πως, το άτομο για να κατανοήσει μια μαθηματική πρόταση αισθάνεται την ψυχολογική ανάγκη να πειστεί για την αλήθεια της με κάποια μαθηματική αιτιολόγηση. Στη συνέχεια χρησιμοποιεί την ίδια μαθηματική αιτιολόγηση για να πείσει και τους άλλους. Αυτή η «ανάγκη για απόδειξη», σύμφωνα με το Rodd (2000), σχετίζεται με την αυξανόμενη ζήτηση για αυστηρότητα καθώς ο μαθητής εξελίσσεται (σ. 225).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Επιχειρώντας να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αιτιολογούν τις λύσεις τους και τη μεγάλη ποικιλία των διαδικασιών που εμφανίζονται στη λειτουργία της αιτιολόγησης, παρακολουθήσαμε μία ομάδα είκοσι μαθητών και μαθητριών της Α΄ Λυκείου, από τέσσερα διαφορετικά Λύκεια της Αθήνας, κατά τη διάρκεια ενός σχολικού έτους.

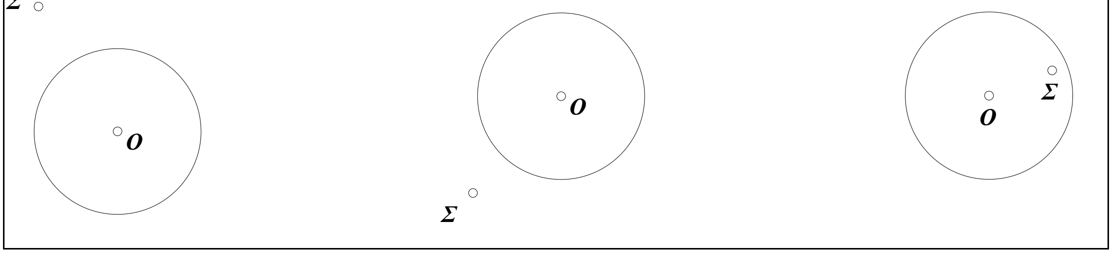
Η επιλογή των μαθητών έγινε με βάση ένα προκαταρτικό ερωτηματολόγιο και μετά από κωδικοποίηση των απαντήσεων ως προς συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (ορισμός ισοσκελούς τριγώνου, βασική του ιδιότητα, οδηγίες κατασκευής του, ικανότητα για νοερή απεικόνιση και αιτιολόγηση). Η επιλογή έγινε με κριτήριο την αντιπροσωπευτικότητα των απαντήσεων ως προς αυτά τα χαρακτηριστικά.

Σχεδιάσαμε επτά προβλήματα κατασκευών (που αναφέρονται στο ισοσκελές τρίγωνο). Συναντήσαμε το κάθε παιδί ιδιαιτέρως τρεις φορές στη διάρκεια του χρόνου (αμέσως μετά τη διδασκαλία του ισοσκελούς, δύο μήνες αργότερα και τέλος, αφού διδάχθηκαν τα παραλληλόγραμμα). Δώσαμε στο μαθητή σταδιακά να λύσει μια σειρά από προβλήματα, ζητώντας του ταυτόχρονα να περιγράφει τις σκέψεις του. Η όλη διαδικασία ηχογραφήθηκε. Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυση των ευρημάτων αναφέρονται σε δύο από τα προβλήματα αυτά, τα ακόλουθα.

Πρόβλημα 1

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και σημείο Σ. Στην κάθε περίπτωση, φτιάξε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΣΑΒ, όπου τα Α και Β είναι σημεία του κύκλου. Φρόντισε τα τρίγωνα που φτιάχνεις να είναι διαφορετικά.

Γράψε αναλυτικά τον τρόπο κατασκευής και δικαιολόγησε γιατί τα τρίγωνα είναι ισοσκελή.



Πρόβλημα 2

Ξεκινώντας από το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, φτιάξε όσα ισοσκελή τρίγωνα μπορείς. Σε κάθε περίπτωση, γράψε το κατασκευαστικό σενάριο που ακολούθησες και εξήγησε γιατί το τρίγωνο που έφτιαξες είναι ισοσκελές. Ποια, από τις κατασκευές που περιγράφεις στα σενάριά σου, θεωρείς καλύτερη και γιατί;

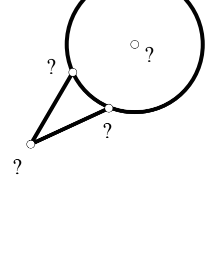
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

Η ικανότητα κάθε μαθητή να αιτιολογεί τη λύση του αναλύθηκε με άξονες: (α) το πού βασίζεται ο συλλογισμός του (αν βασίζεται σε εικόνες, στις κατασκευές του ή σε θεωρητικές προτάσεις) και (β) το είδος της γλώσσας που χρησιμοποιεί στα επιχειρήματά του (φυσική γλώσσα, ατελής θεωρητικός λόγος, θεωρητικός λόγος).

Στην Οπτική Προσέγγιση κατατάσσονται όσοι μαθητές κατανοούν αντιληπτικά το σχήμα, όπως φαίνεται από το είδος αιτιολόγησης που χρησιμοποιούν, δηλαδή επιχειρήματα της μορφής:

- «*φαίνεται στο σχήμα*» σχετικά με μια σχέση που ισχύει (καθετότητα, ισότητα κλπ),
- «*είναι ισοσκελές γιατί το κατασκεύασα να είναι*», «*ισχύει από κατασκευή*» ή «*τα ‘φερα όλα εγώ*», δηλαδή περιγραφή του τρόπου με τον οποίο κατασκεύασαν το γεωμετρικό σχήμα. Η περιγραφή γίνεται με φυσικό λόγο και μπορεί να περιλαμβάνει τα βήματα της κατασκευής, ώστε κάποιος να μπορεί να την επαναλάβει.
- «*αν τα μετρήσουμε θα δούμε ότι πράγματι είναι ίσα.....*». Παρόλο που η μέτρηση δεν αποτελεί απόδειξη (καθώς δεν ξεπερνά ποτέ το στάδιο του «περίπου» που καθορίζουν οι κατασκευαστικές συνθήκες) είναι ιδιαίτερα ισχυρό εργαλείο για τα παιδιά, γεγονός που αποδεικνύεται από μια σειρά ενέργειές τους. Για παράδειγμα, οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν τη μέτρηση για δική τους επιβεβαίωση, προτού επιχειρήσουν να διατυπώσουν κάποιο συλλογισμό, επιμένουν στα αποτελέσματά της, ακόμα και αν βρεθούν υπό το φως αντίθετων στοιχείων [3], ή επανέρχονται στη μέτρηση κάθε φορά που βρίσκουν δυσκολία με άλλες αποδεικτικές μεθόδους.

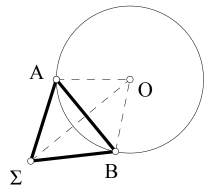
Παράδειγμα αιτιολόγησης βασισμένης στην οπτική προσέγγιση είναι το ακόλουθο. Ο μαθητής αντλεί τα επιχειρήματά του από το γεωμετρικό σχήμα και τον τρόπο που αυτό κατασκευάστηκε (1^{ο} πρόβλημα).



Μ. Θα φτιάξω δύο τμήματα ..... δύο ίσα ΣΑ = ΣΒ, θα πάρω τα Α και Β ......πάνω στον κύκλο όπως μου ζητάει .... αυτό είναι το τρίγωνο ΣΑΒ
Ερ. Γιατί το ΣΑΒ είναι ισοσκελές;
Μ. Μα, φαίνεται στο σχήμα.....
Ερ. Πώς θα το δικαιολογούσες;
Μ. Είναι ισοσκελές γιατί το κατασκεύασα να είναι, πήρα ΣΑ = ΣΒ

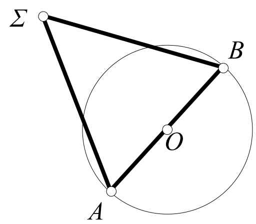
Τα ευρήματα της έρευνας αναδεικνύουν δύο μειονεκτήματα, σχετικά με τις οπτικές προσεγγίσεις, που επηρεάζουν την ικανότητα των μαθητών για λύση προβλήματος:

1. Από το σχήμα δεν διακρίνεται ποιες από τις εμφανιζόμενες σχέσεις έχουν γενική ισχύ. Δηλαδή, δεν φαίνεται αν μια σχέση ισχύει ειδικά στη συγκεκριμένη περίπτωση ή αν ισχύει γενικά, σε ολόκληρη την ομάδα καταστάσεων της οποίας το γεωμετρικό σχήμα είναι ένας αντιπρόσωπος. Στο επόμενο παράδειγμα ($1^{ο}$ πρόβλημα), ο μαθητής δεν γνωρίζει τη γενικότητα της πρότασης πως, «η κάθετος από το κέντρο του κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της» [4].



Μ. Θα πάρω τα Α και Β πάνω στον κύκλο έτσι, ώστε η ΣΟ να είναι κάθετη στην ΑΒ, και μάλιστα να είναι η μεσοκάθετος ...
Ερ. Πώς θα το πετύχεις αυτό;
Μ. ;;;;;;;;;; δεν ξέρω.......................
Μετά θα ενώσω το Σ με τα Α και Β και θα έχω το ισοσκελές.
Ερ. Γιατί θα είναι ισοσκελές το ΣΑΒ;
Μ. Αν μετρήσω τις πλευρές ΣΑ =ΣΒ.

Για να γίνει μια τέτοια διάκριση πρέπει ο μαθητής να έχει την ικανότητα να μετασχηματίζει δυναμικά το σχήμα στο μυαλό του, κρατώντας σταθερά τα στοιχεία που δίνει το πρόβλημα, ώστε να διαπιστώσει τα αναλλοίωτα. Η ικανότητα αυτή, όπως φαίνεται από την παρούσα έρευνα, δεν είναι πάντα ανεπτυγμένη σε παιδιά 15 ετών. Στο παράδειγμα που ακολουθεί ($1^{ο}$ πρόβλημα), μια μαθήτρια έχει την ικανότητα να μετασχηματίσει δυναμικά το σχήμα και να κατανοήσει το λάθος της.



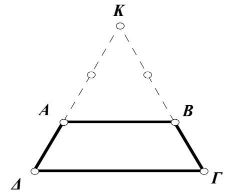
Μ. Θα φτιάξω ένα τρίγωνο που τα Α, Β να βρίσκονται πάνω στη διάμετρο.
Ερ. Φέρνεις μία διάμετρο ΑΒ.... και τι κάνεις τώρα;
Μ. Τι κάνω τώρα; (ενώνει το Σ με τα Α, Β)
Ερ. Γιατί πιστεύεις πως αυτό το τρίγωνο είναι ισοσκελές;
Μ. Είναι ισοσκελές.
Ερ. Πώς είσαι σίγουρη;
Μ. .... δεν είμαι σίγουρη, μου πέρασε (το σβήνει)
Ερ. Γιατί;
Μ. Γιατί αν έφερνα αλλιώς τη διάμετρο θα έβγαινε αλλιώς το τρίγωνο, δε θα έβγαινε ισοσκελές.

2. Στο γεωμετρικό σχήμα όλες οι πληροφορίες εμφανίζονται με την ίδια βαρύτητα, δηλαδή δεν είναι προφανές (από το σχήμα) ποια είναι τα δεδομένα και ποια τα ζητούμενα του προβλήματος. Αυτό αποτελεί σοβαρό μειονέκτημα στην πορεία προς το θεωρητικό λόγο, όπου πρέπει σαφώς να καθορίζονται οι γνωστές από τις ζητούμενες πληροφορίες.

Στην Ευρετική Προσέγγιση κατατάσσονται όσοι μαθητές αρχίζουν να εντάσσουν στο συλλογισμό τους επιχειρήματα θεωρητικής φύσης. Ο λόγος τους μπορεί να χαρακτηριστεί «ατελής θεωρητικός» γιατί εμφανίζει αδυναμίες (α) ως προς την πληρότητα και (β) ως προς την οργάνωση των πληροφοριών. Συχνά, αυτοί οι μαθητές χρησιμοποιούν «ψευδόπροτάσεις», διαστρεβλώνοντας θεωρητικές προτάσεις που δεν θυμούνται ή δεν έχουν κατανοήσει καλά. Για παράδειγμα, η επόμενη μαθήτρια δημιουργεί μια ψευδό πρόταση για να αιτιολογήσει πως το τρίγωνο που κατασκεύασε (2^o πρόβλημα) είναι ισοσκελές.

(η μαθήτρια έχει προεκτείνει τις ίσες πλευρές ΑΔ, ΒΓ του ισοσκελούς τραπεζίου κατά το διπλάσιό τους και -με κάποιες αβαρίες- έχει σχηματίσει ένα τρίγωνο ΚΓΔ)

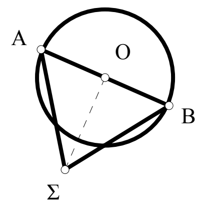
Μ. Το ΒΓ είναι το 1/3 της ΚΓ, οπότε αν πάρουμε το θεώρημα που λεει ότι, αν ένα σημείο στη μια πλευρά (τριγώνου) είναι στη μέση και το ενώσουμε με το αντίστοιχο σημείο της άλλης πλευράς, αυτή θα είναι παράλληλη στη βάση (θεώρημα) .... Οπότε, αν πάρουμε αυτό το σημείο πιο πάνω ή πιο κάτω και πάρουμε ένα αντίστοιχο στην άλλη πλευρά θα ισχύει το ίδιο (ψευδοθεώρημα).



Μαθητές που έχουν ευρετική προσέγγιση δε γνωρίζουν πάντα το ακριβές περιεχόμενο των όρων που περιέχονται στις προτάσεις που χρησιμοποιούν. Η ασάφεια συνδέεται άμεσα με το θέμα της μετατροπής από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο, καθώς και με τις δυσκολίες που δημιουργούνται λόγω της μη ταυτότητας δύο διαφορετικών αναπαραστάσεων του ίδιου αντικειμένου.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί (1^o πρόβλημα), η μαθήτρια μεταφράζει λάθος την λεκτική σε σχηματική αναπαράσταση. Αναφέρεται στην ιδιότητα της μεσοκαθέτου όμως εννοεί τη διάμεσο, γεγονός που αποκαλύπτεται μόνο όταν την κατασκευάζει. Έτσι, χρησιμοποιεί αντί της πρότασης p (: κάθε σημείο της <u>μεσοκαθέτου</u> ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος), την ψευδό –p (:κάθε σημείο της <u>διαμέσου</u> ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος).

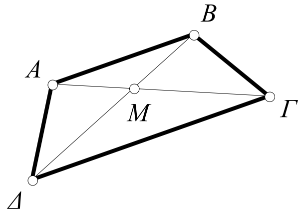
Μ. Θα φέρω τη διάμετρο ΑΒ, η ΣΟ θα είναι μεσοκάθετος και ξέρω πως κάθε σημείο της μεσοκαθέτου απέχει το ίδιο από τα Α και Β... άρα το ΣΑΒ θα είναι ισοσκελές.
(κάνει την κατασκευή)
Ερ. Πώς ξέρουμε ότι η ΣΟ είναι μεσοκάθετος;
*Μ. Αφού περνάει από το Ο το μέσο της ΑΒ! (δηλαδή είναι διάμεσος)***.**



Σύμφωνα με τα στοιχεία της έρευνας, η ελλιπής οργάνωση των πληροφοριών δημιουργεί δυσλειτουργίες στο θεωρητικό συλλογισμό. Ο μαθητής θέλει και προσπαθεί να χρησιμοποιήσει τις λογικές δομές που διδάσκεται ή βλέπει στο βιβλίο, αλλά δεν μπορεί πάντα να εγκαταστήσει μια λογική σχέση ανάμεσα στις προτάσεις που χρησιμοποιεί.

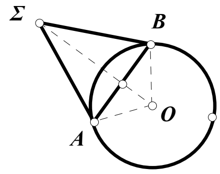
Η συνηθέστερη λογική δομή που χρησιμοποιείται στην αιτιολόγηση της ευρετικής προσέγγισης είναι η συνεπαγωγή δηλαδή, η δομή: «αν ....τότε» δίχως οι δύο προτάσεις να έχουν πάντα λογική σύνδεση. Η δομή χρησιμοποιείται και σε περιπτώσεις δύο άσχετων προτάσεων, όπου τις περισσότερες φορές η πρώτη πρόταση δηλώνει κάτι που ισχύει (από υπόθεση ή είναι προφανές), ώστε να υπάρχει μια επίφαση αλήθειας, ενώ η δεύτερη είναι το ζητούμενο συμπέρασμα, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα (2^o πρόβλημα).

Μ.Αυτό είναι ισοσκελές (ΜΔΓ)
Ερ. Τι σε κάνει να πιστεύεις πως είναι ισοσκελές;
Μ. Αφού το τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε οι διαγώνιοι του είναι ίσες και διχοτομούνται.
Ερ. ………
Μ. Τι, δεν είναι έτσι;
Ερ. Διχοτομούνται τι σημαίνει;
Μ. (αναθεωρεί) Οι διαγώνιοι είναι ίσες, ΑΓ =ΒΔ άρα και τα ΜΓ = ΜΔ.



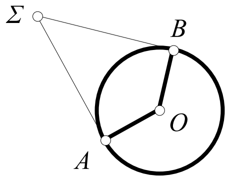
Τις δυσκολίες στην οργάνωση των πληροφοριών συνειδητοποιεί ένας άλλος μαθητής που μονολογεί ($1^{ο}$ πρόβλημα):

Μ. προσπαθώ τώρα να συνδυάσω πολλά στοιχεία, ότι η ΣΟ είναι κάθετη στην ΑΒ, ότι ΑΟ=ΟΒ, ότι είναι η ΟΑ ακτίνα του κύκλου. Προσπαθώ να σκεφτώ πώς να συνδυάσω…… (ώστε να δείξω) ότι το Σ ισαπέχει από το Α και Β.............



Στα πρώιμα στάδια δημιουργίας του θεωρητικού λόγου παρουσιάζονται αδυναμίες στην κατανόηση της θέσης δεδομένων και ζητουμένων, ώστε να γίνει η σύνδεσή τους στη σωστή κατεύθυνση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα λανθασμένους συλλογισμούς που οφείλονται κυρίως σε αντιστροφή της κατεύθυνσης, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί ($1^{ο}$ πρόβλημα). Η μαθήτρια θέλει να δείξει ότι το τρίγωνο ΣΑΒ είναι ισοσκελές, όμως ασυνείδητα υποθέτει ότι αυτό ισχύει και το χρησιμοποιεί σαν υπόθεση.

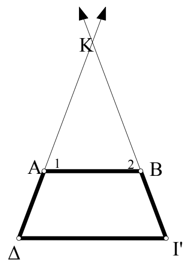
(Η μαθήτρια κατασκευάζει το ισοσκελές τρίγωνο, φέρνοντας τις εφαπτόμενες ΣΑ, ΣΒ του κύκλου).
Μ. Το ΣΑΒ είναι το ζητούμενο ισοσκελές, επειδή ΣΑ=ΣΒ
Ερ. Τι σε κάνει να το πιστεύεις;
Μ ....πάντως είναι, τώρα ακριβώς δεν ξέρω γιατί.
Άμα φέρω κάθετη από το Σ στο Ο...
Ερ. Ναι, εννοείς να ενώσεις το Σ με το Ο;
Μ. Να φέρω κάθετη από το Σ στο ΑΒ, αυτή θα περνάει και από το μέσο του
(προϋποθέτει ότι το ΣΑΒ είναι ισοσκελές και χρησιμοποιεί τη βασική ιδιότητα)
… και θα συγκρίνω τα τρίγωνα και θα βρω ότι έχουν δύο ίσες πλευρές
άρα θα έχουν και την τρίτη πλευρά, άρα θα είναι ισοσκελή.



Στην ευρετική προσέγγιση παρατηρείται συχνά οι μαθητές να παίρνουν ως υπόθεση, όχι αυτήν που δίνει το πρόβλημα, αλλά σχέσεις που «φαίνονται στο σχήμα».

Προϋποθέσεις για τη θεωρητική προσέγγιση είναι η γνώση της ορολογίας, των απαιτούμενων θεωρητικών προτάσεων και η ικανότητα για παραγωγικούς, λογικούς, συλλογισμούς. Οι μαθητές που έχουν μια τέτοια προσέγγιση στην ουσία γνωρίζουν πώς να λειτουργούν μέσα στο αξιωματικό σύστημα. Επιπλέον έχουν αναπτύξει και άλλες, σύνθετες, ικανότητες που διευκολύνουν τη λύση προβλήματος, όπως η ικανότητα εντοπισμού μιας γενικής μορφής (pattern imagery), την οποία επαναλαμβάνουν σε κάθε δυνατή παραλλαγή ή η ικανότητα ανάκλησης σχετικών προβλημάτων που είχαν λύσει στο παρελθόν και τους διευκολύνουν να αντιμετωπίσουν τη δεδομένη κατάσταση.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί ($2^{ο}$ πρόβλημα), η μαθήτρια γνωρίζει τις ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου και τις συνδυάζει με το ζητούμενο. Η γλώσσα που χρησιμοποιεί είναι επίσης πιο θεωρητική με σωστή χρήση της ορολογίας.



Μ. (σκέφτεται φωναχτά) Ισοσκελές τραπέζιο, τότε οι γωνίες που πρόσκεινται σε κάθε βάση είναι ίσες, έτσι αν προεκτείνω τις μη παράλληλες πλευρές του θα φτιάξω όχι ένα αλλά δύο ισοσκελή τρίγωνα. (κατασκευάζει)

Εδώ, το ΚΑΒ και το ΚΓΔ είναι ισοσκελή τρίγωνα γιατί έχουν τις γωνίες στη βάση ίσες. Η Γ=Δ προφανώς από το τραπέζιο και η $Α_1=Β_1$ *αφού η Α=Β από το τραπέζιο.*

Στη θεωρητική προσέγγιση, η νοερή απεικόνιση και η κατασκευή έχουν ρόλο βοηθητικό στην αιτιολόγηση. Αυτό γίνεται φανερό από το γεγονός ότι οι μαθητές κατασκευάζουν τις νοητικές τους εικόνες στο χαρτί και, στην περίπτωση ακόμα που οι κατασκευές δεν είναι απόλυτα ακριβείς, θεωρούν πως οι διάφορες ιδιότητες ισχύουν, καθώς υποστηρίζονται από μια γενικά παραδεκτή θεωρία. Λειτουργεί, δηλαδή, αυτόματα μια διαδικασία εξιδανίκευσης του σχήματος και η προσπάθεια μετατίθεται στον εντοπισμό του κατάλληλου θεωρητικού επιχειρήματος που θα αιτιολογήσει την αλήθεια.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η έρευνα μας βοήθησε να κάνουμε συνειδητές και να καταγράψουμε αρκετές από τις ασυνείδητες διαδικασίες αιτιολόγησης που χρησιμοποιούν οι μαθητές. Ακολούθως, οι διαδικασίες αιτιολόγησης κατηγοριοποιήθηκαν σε τρεις προσεγγίσεις, ενώ μία συνοπτική σύγκρισή τους γίνεται στον Πίνακα 2 που ακολουθεί. Η διαφοροποίηση γίνεται ανάλογα με το πού βασίζεται ο συλλογισμός του μαθητή και ανάλογα με το είδος της γλώσσας που αυτός χρησιμοποιεί στα επιχειρήματά του.

προσέγγιση	**ΟΠΤΙΚΗ**	**ΕΥΡΕΤΙΚΗ**	**ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ**
ο συλλογισμός βασίζεται	νοερή απεικόνιση κατασκευή	νοερή απεικόνιση (σύνθετη) κατασκευή (σύνθετη) θεωρητικές προτάσεις	θεωρητικές προτάσεις
διαδικασίες αιτιολόγησης	επιχειρηματολογία με <u>φυσικό λόγο</u> που βασίζεται στο σχήμα στη μέτρηση σε περιγραφή του τρόπου κατασκευής	επιχειρηματολογία με <u>φυσικό ή ατελή θεωρητικό λόγο</u> που βασίζεται σε οπτική αναδιοργάνωση του σχήματος (1D ή 2D) οδηγίες κατασκευής θεωρητικές προτάσεις (αληθείς / ανενεργές / ψευδοπροτάσεις)	επιχειρηματολογία με <u>θεωρητικό λόγο</u> που βασίζεται σε παραγωγικούς λογικούς συλλογισμούς

Πίνακας 2: Οι τρεις προσεγγίσεις στην αιτιολόγηση.

Διατυπώσαμε συγκεκριμένους άξονες, με βάση τους οποίους ο δάσκαλος μπορεί να παρακολουθεί το τη φάση εξέλιξης στην οποία βρίσκεται η αιτιολόγηση ενός μαθητή. Οι άξονες είναι: ο τρόπος κατανόησης του σχήματος (Πίνακας 1) και η γλώσσα που χρησιμοποιεί ο μαθητής στην αιτιολόγησή του.

ΟΠΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ	ΕΥΡΕΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ
Αντιληπτική κατανόηση (εξερευνά το σχήμα μέσα από κινήσεις των ματιών και περιορίζεται στα φυσικά χαρακτηριστικά του)	**Λειτουργική κατανόηση** (περιλαμβάνει συγκεκριμένους νοητικούς χειρισμούς που μετασχηματίζουν ή τροποποιούν το δοθέν σχήμα, διατηρώντας ταυτόχρονα τις ιδιότητές του)	**Διαλεκτική κατανόηση** (αφορά σε λεκτικές διαδικασίες που καθορίζουν επακριβώς κάποιες ιδιότητες του σχήματος)

Πίνακας 1: Σύγκριση των τρόπων κατανόησης του σχήματος στις διαφορετικές προσεγγίσεις (διαδικασίες αιτιολόγησης)

Επίσης, διερευνήθηκαν οι αδυναμίες που εμφανίζει η αιτιολόγηση και μπορεί να οφείλονται στην πληρότητα των πληροφοριών. Είδαμε πως, μεγάλα προβλήματα στην επικοινωνία ανάμεσα σε δάσκαλο και μαθητή προκαλούνται από την ασάφεια στη χρήση των όρων. Ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιεί λεκτικά τη σωστή ορολογία (γεγονός φανερό), δίχως να τη συνδέει με την, αντίστοιχα σωστή, εικόνα (γεγονός κρυφό, που συμβαίνει στο νου του) ή αντίστροφα. Ο μόνος τρόπος για να καταλάβει ο δάσκαλος την αναντιστοιχία στο μυαλό του μαθητή είναι να του ζητήσει να κατασκευάσει το σχήμα.

Οι αδυναμίες στην αιτιολόγηση μπορεί να οφείλονται ακόμα και στην οργάνωση των πληροφοριών. Η δυνατότητα χρήσης των θεωρητικών προτάσεων, ο τρόπος σύνδεσης των προτάσεων μεταξύ τους, ή η εμφάνιση ψευδό προτάσεων, αποτελούν δείκτες που αποκαλύπτουν στο δάσκαλο την ποιότητα οργάνωσης των πληροφοριών στο νου του μαθητή.

Η δυνατότητα του δάσκαλου να αντιλαμβάνεται επακριβώς το είδος και τις αδυναμίες στην αιτιολόγηση του μαθητή του, ώστε να μπορεί να τις συζητά μαζί του, δηλαδή η δυνατότητα να αναγνωρίζει και να απομακρύνει τα εμπόδια, αρκεί. Η εξέλιξη ακολουθεί με φυσικό τρόπο. Ο μαθητής, συνειδητοποιώντας και αναπτύσσοντας μια μεταγνωστική ματιά στις πράξεις του, θα προχωρήσει φυσιολογικά προς τη θεωρητική προσέγγιση.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Σημείωση 1: Παραδείγματος χάριν, οδηγίες για την κατασκευή της μεσοκαθέτου ή της διχοτόμου με κανόνα και διαβήτη.

Σημείωση 2: Μια συμπεριφορά χαρακτηρίζεται μαθηματική, όταν ο συλλογισμός βασίζεται στην όλη δομή του αξιωματικού συστήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και σε κανόνες της Λογικής.

Σημείωση 3: Συγκεκριμένα υπάρχουν μαθητές που, διαπιστώνοντας πως η λύση που έδωσαν είναι λάθος, μετράνε προσεκτικά τα στοιχεία του σχήματος (πχ ίσες πλευρές), βρίσκουν κάποια μικρή απόκλιση και αποδίδουν το λάθος στο γεγονός ότι δεν κατασκεύασαν με μεγάλη ακρίβεια το γεωμετρικό σχήμα, δηλαδή στη λανθασμένη απόδοση της νοητικής τους εικόνας και όχι στους ελλιπείς συλλογισμούς τους.

Σημείωση 4: Πόρισμα που συνοδεύει τη βασική ιδιότητα του ισοσκελούς τριγώνου ότι «Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής» στο βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, σελ.45, έκδοση 2001.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Duval, R. (1998), Geometry from a Cognitive Point of View, in C. Mammana and V. Villani (eds) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Press, the Netherlands.

Duval, R. (2002), *Representation, Vision and Visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning*, άρθρο στο διαδίκτυο.

Fischbein, E. (1982), *Intuition and Proof*, For the Learning of Mathematics, 3(2), 9-18, 24.

Καμπάνη, Ε., (2003), *Οι Αναπαραστάσεις στην Επίλυση Μαθηματικών Προβλημάτων*, Διδακτορική Διατριβή.

Rodd, M.M. (2000), *On Mathematical Warrants: proof does not always warrant, and warrant may be other than proof*, Mathematical Thinking and Learning, 2(3), 221-244.