Προάγοντας την ιδέα των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία βασικών εννοιών του Λογισμού : Η χρήση του λογισμικού Autograph 3.0 σε ένα Παράδειγμα χειρισμού διαδοχικών προσεγγίσεων της εκθετικής συνάρτησης

Διονύσης Διακουμόπουλος
Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών
ddiakoum@math.uoa.gr

Περίληψη

Στην εργασία που ακολουθεί υποστηρίζεται ότι το θεωρητικό πλαίσιο των πολλαπλών (εξωτερικών) συστημάτων αναπαράστασης και της εναλλαγής-μετάφρασης από το ένα σύστημα στο άλλο, μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση βασικών εννοιών του Απειροστικού Λογισμού. Η ιδέα αυτή υλοποιείται πάνω σε ένα παράδειγμα-γεννήτορα (generic), το οποίο φιλοδοξεί κατά κάποιο τρόπο να συμβάλλει στην τρέχουσα αλλαγή παραδείγματος (κατά T. Kuhn) στον τομέα της διδασκαλίας της μαθηματικής ανάλυσης με τη βοήθεια υπολογιστικών μέσων. Το μαθηματικό περιεχόμενο του παραδείγματος βρίσκεται στην ιδέα της προσέγγισης της εκθετικής συνάρτησης, μέσω της παραγώγου, από μια γεωμετρική πρόοδο και στη συνέχεια από μια ακολουθία πολυωνυμικών συναρτήσεων. Η αφετηρία βρίσκεται σε μια ολιστική (global) συνθήκη για την αρχική συνάρτηση και η πορεία βασίζεται στον επαγωγικό συλλογισμό. Οι παραπάνω προσεγγίσεις μπορούν να κατασκευαστούν αυστηρά γεωμετρικά με χρήση και μόνο της αρχαίας μεθόδου του γνώμονα. Η κατάλληλη υλοποίηση του θέματος βασίστηκε στην υποστήριξη από το λογισμικό AUTOGRAPH 3.0, το οποίο επιτρέπει ενεργό χειρισμό παραμέτρων μέσα σε τύπους συναρτήσεων που παριστάνονται γραφικά, συνδυασμό στοιχειώδους γεωμετρίας και αναλυτικών μεθόδων πάνω στην ίδια οθόνη γραφικών, δυνατότητα ουσιαστικής αλληλεπίδρασης ανάμεσα στο χρήστη και το πρόγραμμα μεταβάλλοντας τις παραμέτρους με αποτέλεσμα την ενεργό οπτική αναπαράσταση κίνησης (animation) και τέλος κάποια συγκεκριμένη βάση για τη διατύπωση και τον έλεγχο εικασιών.

Λέξεις κλειδιά

Paradigm, αναπαράσταση, πολλαπλές αναπαραστάσεις, μετάφραση, εναλλαγή πεδίου, λογισμός, προσέγγιση, παράγωγος, AUTOGRAPH 3.0

Εισαγωγή

Η μελέτη βασίζεται στη θεωρία των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Παραθέτει μια βάση για την υποστήριξη της δυνατότητας εναλλαγής–μετάφρασης (translation) ανάμεσα σε αναπαραστάσεις, μέσα σε ένα πλαίσιο, το οποίο στη γενικότερη περίπτωση περιέχει Λεκτική, Αλγεβρική, Αριθμητική και Γραφική αναπαράσταση.

Στη μαθηματική εκπαίδευση, η διαθεσιμότητα και το ενδιαφέρον για μαθησιακά εργαλεία τεχνολογίας, όπως ο υπολογιστής ή ο μικροϋπολογιστής γραφικών συνεχίζουν να αναπτύσσονται και να δημιουργούν προκλήσεις σε σχέση με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Όπως έχει τονίσει και ο Kaput (1992), αυτές οι νέες τεχνολογίες ανασταίνουν “παλιές ερωτήσεις εποχής” που αφορούν σε εκπαιδευτικούς στόχους και κατάλληλες παιδαγωγικές στρατηγικές, σε πεποιθήσεις για τη φύση του υποκείμενου υλικού, τη φύση αυτών που μαθαίνουν, καθώς και της μάθησής τους. Η ανάπτυξη στην τεχνολογία των υπολογιστών, τόσο στον τομέα των υλικών (Hardware) και πολύ περισσότερο σε αυτόν του λογισμικού (Software), παρέχει επιπλέον δυνατότητες αξιοποίησης μέσω της υλοποίησης εξωτερικών αναπαραστάσεων μαθηματικών εννοιών, ειδικά στη διαδικασία της μάθησης προχωρημένων μαθηματικών. Έτσι αυτές μπορούν να παρουσιάζονται με ένα προσιτό τρόπο, μέσω μιας προσέγγισης με έμφαση στη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων.

Στην εργασία που ακολουθεί γίνεται μια προσπάθεια παρέμβασης μέσω των εξωτερικών συστημάτων αναπαράστασης των μαθητών/τριών με τη βοήθεια και του υπολογιστή. Η διαπραγμάτευση πολλαπλών εξωτερικών συστημάτων και η ανάπτυξη ενός «δικτύου-πλέγματος συνδέσεων» ανάμεσα σε αυτά, όπως αναφέρεται και στη σχετική βιβλιογραφία (Kaput, 1992, 1999; Γαγάτσης et al, 2000), σαφώς επιδρά στη δομή των εσωτερικών συστημάτων αναπαράστασης αυτών που μαθαίνουν.

Όπως ισχυρίζεται η Dunham (2000), απαιτείται να γίνουν μελέτες για να διερευνήσουν τον τρόπο χρήσης του υπολογιστή από τον εξατομικευμένο μαθητή-φοιτητή, προς αναζήτηση απαντήσεων πάνω σε διάφορα σχετικά ερωτήματα όπως τι είδους μαθητές χρησιμοποιούν τον υπολογιστή, πώς τον χρησιμοποιούν, και πότε τον χρησιμοποιούν και για ποιο ακριβώς είδος δραστηριοτήτων. Λίγες μέχρι τώρα μελέτες σε αυτή τη σφαίρα εξετάζουν πώς χρησιμοποιείται ο υπολογιστής από μαθητές (για παράδειγμα ως εργαλείο εξερεύνησης, για σκοπούς επικύρωσης και/ή για γραφικές ή αριθμητικές αναπαραστάσεις). Επιπλέον ακόμα και αν αρκετά από τα αναμορφωμένα αναλυτικά προγράμματα για το λογισμό πράγματι ενσωματώνουν αυτό το είδος πολυ-αναπαραστατικής καθοδήγησης (NCTM Standars, 2000), η ακόλουθη μοντελοποίηση τέτοιων προσεγγίσεων όπως χρησιμοποιούνται από μαθητές-φοιτητές με εμπειρία και πρόσβαση σε υπολογιστή δεν βρίσκεται πάντα στο στόχαστρο της εξέτασης. Ως εκ τούτου η μελέτη που ακολουθεί συμπεριλαμβάνει μια ενδο-μαθηματική δομή Προβλήματος-Παραδείγματος, το οποίο ανάμεσα στις διάφορες έννοιες που προτείνει προς διαπραγμάτευση στους μαθητές, περιέλαμβάνει και αυτές του ορίου και της παραγώγου κάνοντας χρήση μιας οικογένειας συναρτήσεων (για την ακρίβεια δι-παραμετρικής ως προς h και k), με βάση τη συνάρτηση $f(x)=e^x$ (και γενικότερα $f(x)=a\cdot e^{kx}$). Η τελευταία ανήκει σε εκείνη την κατηγορία των συναρτήσεων, με τις οποίες οι μαθητές έχουν αποκτήσει μερική μόνον εξοικείωση, χωρίς να την έχουν συνδέσει με τις έννοιες της γεωμετρικής προόδου, του ορίου και της παραγώγου, τόσο σε σχολικό επίπεδο, όσο και σε αυτό του Απειροστικού Λογισμού ΙΙ.

Μέσα στους βασικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης-καθοδήγησης σε οποιοδήποτε επίπεδο βρίσκεται και η παροχή υποστήριξης προς τους μαθητές-φοιτητές για την με επακριβή τρόπο δομική κατασκευή εμπλουτισμένων νοητικών εικόνων εννοιών (concept-images) και κατανοήσεων από αυτούς. Και εάν η ισχύς αυτών των εικόνων προσμετράται από την οπτική απεικόνιση και το «πλέγμα συνδέσεων» των πολλαπλών αναπαραστάσεων (λεκτικής, αριθμητικής, αλγεβρικής, γραφικής), τότε ο ρόλος του υπολογιστικού μέσου και ο τρόπος με τον οποίο αυτό επιδρά πάνω στη διαδικασία, μέσω της οποίας οι μανθάνοντες αναπτύσσουν αυτές τις αναπαραστάσεις των εννοιών, καθίσταται εξαιρετικά σημαντικός.

Θεωρητικό πλαίσιο

Η ιστορική πορεία

Ο όρος Παράδειγμα (paradigm), όπως ετέθη από τον T. Kuhn (1962, 1970) μετά την πρώτη έκδοση της Δομής των Επιστημονικών Επαναστάσεων και υπό το βάρος των κριτικών ως προς ορισμένα σημεία εννοιολογικής ασάφειας, έχει χρησιμοποιηθεί κυρίως με δύο έννοιες :

α) Αντιστοιχεί στο σύνολο των πεποιθήσεων, μεθόδων, τεχνικών κ.λ.π. που ασπάζεται μια επιστημονική κοινότητα (η σφαιρική έννοια του όρου).
β)Παραπέμπει σε ένα ειδικό στοιχείο αυτού του συνόλου, τις παραδειγματικές λύσεις συγκεκριμένων προβλημάτων, που χρησιμοποιούνται ως πρότυπα από την κοινότητα (μια έννοια που πλησιάζει στη νεοελληνική έννοια της λέξης «παράδειγμα»).
Με αυτό το χαρακτήρα του όρου «Παράδειγμα» και υπό το βάρος αφενός μεν των ερευνητικών αποτελεσμάτων που δείχνουν ιδιαίτερες δυσκολίες στην κατανόηση θεμελιωδών εννοιών του απειροστικού λογισμού, αφετέρου δε της θεωρητικής και τεχνολογικής εξέλιξης στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών, δεν θα ήταν παράλογο να αποδεχθούμε την ύπαρξη τουλάχιστον κάποιων ενδείξεων για την επιχειρούμενη κατά την εποχή μας πορεία αλλαγής επιστημονικού Παραδείγματος στο αντίστοιχο πεδίο.

Το Παράδειγμα –Γεννήτορας (generic) :
Ο όρος generic χρησιμοποιείται για να δηλώσει ταυτόχρονα ‘κοινό και βασικό’. Ένα παράδειγμα-γεννήτορας αναπαριστά μια κατάσταση που θα μπορούσε να αποτελεί ένα γενικό μέρος μιας δεδομένης δραστηριότητας, σε αντίθεση με την αναφορά σε ή την απαίτηση για εξειδικευμένα δεδομένα ως προς αυτή τη δραστηριότητα. Είναι βασικό με την έννοια ότι αποτελεί ένα απλό παράδειγμα που απεικονίζει επεξηγηματικά το περιεχόμενο του κειμένου και είναι κοινό γιατί δυνητικά μπορεί να τροφοδοτήσει (διδάσκοντες ή/και διδασκόμενους/νες) με τη γένεση άλλων παραδειγμάτων που μοιράζονται το κοινό πεδίο που καθορίζεται από τα χαρακτηριστικά της υπό μελέτη έννοιας (Yerushalmy, 2005).
Η πεποίθηση ότι το Παράδειγμα δεν αποτελεί παρά μόνο μια αρχική διατύπωση υποκείμενη σε δυνητικές αλλαγές και διαψεύσεις (Lacatos, 1976) χρησιμοποιώντας μια καλά ορισμένη δομή, κατά κάποιο τρόπο διευκολύνει την πολυπλοκότητα της επιλογής ενός αρχικού παραδείγματος. Εντούτοις η επιλογή του παραδείγματος που εμφανίζεται πρώτο διατηρεί πάντα ισχυρή ενέργεια κατά την αλληλεπίδραση με τις νοητικές κατασκευές. Η γενική μας μεθοδολογική στρατηγική είναι να αρχίσουμε με ένα απλό παράδειγμα που δεν αρκείται σε μια άμεση απάντηση, αλλά που θα βοηθούσε στο να τεθούν κάποια πλαίσια διαπραγμάτευσης.
Τέλος την έννοια του θεωρητικού πλαισίου, όπως διατυπώνεται στη διδακτορική διατριβή της Marrongelle (2001) την περιγράφει ο Maxwell (1996) ως: Μία τυποποίηση αυτού που νομίζουμε ότι συμβαίνει σε σχέση με τα φαινόμενα που μελετούμε, μια θεωρία υπό διερεύνηση ως προς το τι συμβαίνει και για πιο λόγο. Η λειτουργία αυτής της θεωρίας είναι παροχή πληροφοριών στο μέρος του σχεδιασμού που υπολείπεται, να βοηθήσει στον προσδιορισμό των στόχων, την ανάπτυξη και την επιλογή σχετικών ερευνητικών ερωτήσεων και μεθόδων και να αναγνωρίσει τις δυνατές απειλές-αμφισβητήσεις ως προς την αξιοπιστία των συμπερασμάτων μας.

Οι όροι Αναπαράσταση και Σύστημα Αναπαράστασης
Ως προς την έννοια της αναπαράστασης, αν και οι συμπεριφοριστές θα επιθυμούσαν διακαώς να απαλλαγούν από αυτή (Vergnaud, 1998), εντούτοις υπάρχουν δύο τουλάχιστον απλοί λόγοι που συνηγορούν στη θεώρησή της ως σημαντικής για επιστημονική μελέτη : Αφενός μεν όλοι μας έχουμε την εμπειρία αναπαραστάσεων ως ένα χείμαρρο εσωτερικών εικόνων, χειρονομιών και λέξεων, αφετέρου δε οι λέξεις και τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε για την επικοινωνία δεν αναφέρονται άμεσα στην πραγματικότητα, παρά σε αναπαριστανόμενες οντότητες.
Τόσο οι εξωτερικές αναπαραστάσεις (που αντιστοιχούν στο επίπεδο του σημαίνοντος) και είναι υλικά σημειωτικά συστήματα, όσο και οι εσωτερικές (που αντιστοιχούν στο επίπεδο του σημαινόμενου) και αποτελούν υποτιθέμενες νοητικές

κατασκευές θεωρούνται οργανωμένες στα αποκαλούμενα συστήματα αναπαράστασης (Goldin and Shteingold, 2001). Αυτά αποτελούν πολιτισμικά τεχνήματα (artifacts) που δεν μπορούν να διαχωριστούν από αυτό που κανονικά αποκαλούμε «το μαθηματικό τους περιεχόμενο» (Γαγάτσης και Σπύρου, 2004).

Η ανωτέρω διάκριση εσωτερικών-εξωτερικών συστημάτων κατά κανένα τρόπο δεν θα πρέπει να παραπέμπει σε κάποιο φιλοσοφικό δίπολο του τύπου πνεύμα-ύλη, αλλά μάλλον στη αντίστοιχη διάκριση ανάμεσα στους όρους ‘εικόνα της έννοιας’ (concept-image) και ‘ορισμός της έννοιας’ (concept-definition) (Tall and Vinner,1981; Vinner and Dreyfus, 1989), όπως υπογραμμίζει η Edwards (1998), με τον πρώτο όρο να ορίζεται ως η συνολική γνωστική δομή που συνδέεται με την έννοια και περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες και τις συνδεόμενες με αυτήν ιδιότητες και διαδικασίες.

Είναι γενικότερα αποδεκτή από τους ερευνητές η ύπαρξη ισχυρής αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα συστήματα εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων, καθώς τα εξωτερικά επηρεάζουν στη διαμόρφωση των εσωτερικών, ενώ αυτά με τη σειρά τους βρίσκουν τη φυσική τους έκφραση-υλοποίηση (instantiation) μέσω των εξωτερικών.

Ανάμεσα στα πολλά ερωτήματα που μπορούν να διαμορφωθούν σε σχέση με τον όρο ‘Αναπαράσταση’, τόσο από την επιστημολογική-φιλοσοφική όσο και από την ψυχολογική θεώρηση, μερικά που σχετίζονται με το θέμα μας είναι : Ποια η διαφορά στην εμπειρία ανάμεσα σε μια εσωτερική και μία εξωτερική αναπαράσταση; Η εξωτερική αναπαράσταση διαμορφώνεται σε προσωπικό ή σε κοινωνικό επίπεδο ή και στα δύο; Τι είδους αλληλεπίδραση (τόσο σε οριζόντιο όσο και σε κατακόρυφο επίπεδο) διαμορφώνεται για εσωτερικά-εξωτερικά συστήματα αναπαραστάσεων;

Η μετάφραση ή εναλλαγή (translation) ανάμεσα σε αναπαραστάσεις (Janvier,Girardon & Morand, 1993) είναι το αποτέλεσμα του φαινομένου της συνωνυμίας (δύο διαφορετικές εξωτερικές αναπαραστάσεις αντιστοιχούν στην ίδια εσωτερική).

Οι Goldin και Shteingold (2001) ως προς τη σχέση αναπαραστάσεων και κατανόησης, διαβεβαιώνουν ότι η εννοιολογική κατανόηση συνίσταται στη δύναμη και την ευελιξία των εσωτερικών αναπαραστάσεων, συμπεριλαμβανομένου και του πλούτου των σχέσεων-διασυνδέσεων ανάμεσα στα διάφορα είδη αναπαραστάσεων.

Τα υπολογιστικά μέσα ως διανοητικά εργαλεία (Kaput, 1999) μέσα στην επιστημολογία του κονστρουκτιβισμού παρέχουν τη δυνατότητα :

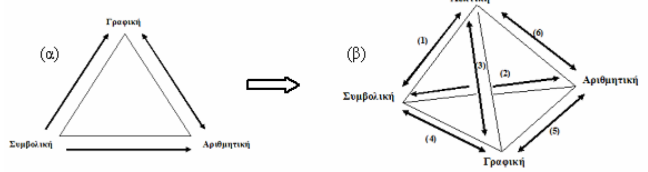
α) Εναλλαγής ανάμεσα σε συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων.

β) Ισχυροποίησης των γνωστικών δομών των μανθανόντων ώστε να σχεδιάζουν τις δικές τους γνωστικές αναπαραστάσεις αντί να απορροφούν αδιαμαρτύρητα τις αναπαραστάσεις που κάποιοι άλλοι έχουν συλλάβει εκ των προτέρων για αυτούς.

γ) Παροχής ισχυρής υποστήριξης για βαθιά αναστοχαστική δράση που είναι απαραίτητη για τη νοηματικά εμπλουτισμένη μάθηση.

Από τον κανόνα των τριών στον κανόνα των τεσσάρων

Το κίνημα για την αναμόρφωση του λογισμού όπως προκύπτει και από τις προτάσεις για τα NCTM Standards 2000 (Jones, 1998), δίνει έμφαση στην προσπάθεια να εξισορροπήσουν οι ικανότητες των μαθητών στη χρήση και την ερμηνεία πληροφορίας σε αριθμητική, γραφική και συμβολική μορφή με την ίδια ευκολία. Το αρχικό έναυσμα αυτής της ιδέας ήταν «Ο Κανόνας των Τριών», σύμφωνα με τον οποίο κάθε θέμα μπορεί να παρουσιαστεί γεωμετρικά, αριθμητικά και αλγεβρικά (Εικόνα 1α).



Εικόνα 1

Ένα παραδοσιακό αναλυτικό πρόγραμμα για τα μαθηματικά θα μπορούσε να μελετήσει και να αναπτύξει αλγορίθμους που διευκολύνουν τις μονόδρομες (!) σχέσεις που υποδεικνύονται από τις παρακάτω διαδρομές του σχήματος της Εικόνας 1(α), ανάμεσα στις τρεις μορφές αναπαραστάσεων.
Αρκετές δεξιότητες αναπτύσσονται με στόχο είτε τον υπολογισμό αριθμητικών δεδομένων όταν δίνεται ένας τύπος με σύμβολα, είτε τη σχεδίαση μιας γραφικής παράστασης που συνδέεται με αυτό τον τύπο. Επίσης υπάρχουν ασκήσεις για την εξαγωγή αριθμητικών πληροφοριών από τη γραφική παράσταση ή τη γραφική παράσταση αριθμητικών δεδομένων. Πράγματι ο πλούτος της διπλής διαδρομής (Γραφική$\leftrightarrow$Αριθμητική) έχει ενισχυθεί με νέες τεχνολογίες (π.χ. μικροϋπολογιστής γραφικών) και την καλπάζουσα προσπάθεια για εισαγωγή τεχνικών με γραφικά και στρατηγικών στην περιγραφική στατιστική . Η ανάλυση παλινδρόμησης (Regression analysis) που είναι διαθέσιμη στη νέα γενιά υπολογιστών, μπορεί να εμπλέξει τους μαθητές ώστε επίσης να εφαρμόσουν τη μετάβαση από την αριθμητική ή τη γραφική μορφή στη συμβολική.
Καθώς η αναμόρφωση του λογισμού πέρασε στην επόμενη φάση της και σε συμφωνία με τα NCTM Standards του 2000, μια νέα εστίαση πάνω στη μαθηματική γραφή έκανε την εμφάνισή της με προφανή τρόπο. Τα γραπτά κείμενα για τη μάθηση των μαθηματικών, μαθηματικά περιοδικά και γραπτές αναφορές έγιναν αντικείμενα κοινής χρήσης στα μαθήματα των μαθηματικών. Ήταν προφανές ότι «Ο Κανόνας των Τριών» είχε πράγματι μετατραπεί στον «Κανόνα των Τεσσάρων» : Κάθε θέμα οφείλει να παρουσιαστεί αριθμητικά, γραφικά, συμβολικά και λεκτικά.
Αυτή η νέα θεώρηση παρουσιάζεται με τη βοήθεια ενός τρισδιάστατου διαγράμματος (τετραέδρου) που δείχνει τις έξι αμφίδρομες(!!) διαδρομές της Εικόνας 1(β).
Κατά την παραδοσιακή διδασκαλία των μαθηματικών, αναμένεται από τους μαθητές να ερμηνεύσουν τη διαδρομή Λεκτική$\rightarrow$ Συμβολική (τα σαφώς προτιμούμενα προβλήματα-ιστορίες). Στις μέρες μας αποδίδεται εξίσου σημαντική έμφαση στη λεκτική ερμηνεία και εξήγηση - και οι δύο επεξηγούν την απόκριση στο πρόβλημα (απάντηση στην ερώτηση του προβλήματος με μια πρόταση σε φυσική γλώσσα) και τη μεθοδολογία επίλυσης προβλήματος που χρησιμοποιείται από το μαθητή.
Η εξοικείωση και με τις έξι αμφίδρομες διαδρομές (1)-(6) παρέχει δυνατότητες για πληρέστερη κατανόηση της υπό μελέτη έννοιας. Οι ασκήσεις και τα προβλήματα που δίδονται θα πρέπει να ισορροπούν ανάμεσα σε διάφορες παραμέτρους, ώστε να αναπτύσσουν και να ισχυροποιούν δεξιότητες μετάβασης από κάθε κορυφή του τετραέδρου σε κάθε μια άλλη. Οι μαθητές θα πρέπει να συνειδητοποιήσουν αυτή τη δομή και να είναι ικανοί να καθορίσουν ποια διαδρομή χρησιμοποιεί μια άσκηση ή ερώτηση. Η σύγχρονη βιβλιογραφία υποστηρίζει ότι όταν οι αναπαραστάσεις εφαρμόζονται σε αντιθετικά ζεύγη επιτυγχάνεται καλύτερη κατανόηση.
Η Ευκλείδεια κατασκευή που ακολουθεί και υλοποιείται με τη βοήθεια του λογισμικού AUTOGRAPH 3.0 επιτρέπει, όπως σημειώνει ο Hedegus (2004), μια σημειωτική διαμεσολάβηση (Pea, 1993; Brousseau, 1997) ανάμεσα στο αντικείμενο και το χρήστη, ο οποίος προσπαθεί να αποδώσει νόημα στο προϋπάρχον σενάριο.

Το Παράδειγμα - Η έννοια της προσέγγισης : Από τη γεωμετρική πρόοδο στην εκθετική συνάρτηση μέσω της παραγώγου με τη βοήθεια της αποκαλούμενης μεθόδου του Euler

Συνοπτική περιγραφή και Στόχοι – Κύρια σημεία

Τα ακόλουθα κύρια σημεία, χωρίς απαραίτητα να τηρείται η γραμμική παράθεση, βρίσκονται μέσα στους βασικούς στόχους επεξεργασίας του προβλήματος που ακολουθεί :

-Οι προηγούμενες τυπικές γνώσεις των μαθητών (γεωμετρική πρόοδος, εκθετική συνάρτηση, μαθηματική επαγωγή, όριο, παράγωγος, γραμμική προσέγγιση)

-Μια ολιστική (global) συνθήκη που δίδεται λεκτικά για μια συνάρτηση g (η οποία εκφράζει κάποια μεταβολή) και είναι ότι ο ρυθμός μεταβολής της κάθε στιγμή είναι πάντα ίσος με (ή γενικότερα ανάλογος προς) την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης

-Η τοπική γραμμική προσέγγιση μέσω της παραγώγου καθώς και η ‘ολιστική’ προσέγγιση μιας συνάρτησης

-Η καθαρά γεωμετρική κατασκευή με τη βοήθεια της αρχαίας μεθόδου των γνωμόνων

-Ο επαγωγικός συλλογισμός

-Η γραφική υλοποίηση - παρέμβαση μέσω του λογισμικού AUTOGRAPH 3.0 με δυνατότητα χειρισμού των παραμέτρων

-Η αλγεβρική επεξεργασία και η σύνδεσή της με τη γραφική αναπαράσταση

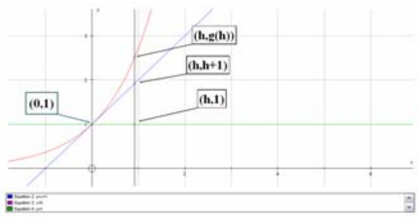
-Η επικύρωση της δεδομένης συνθήκης μέσω οριακών διαδικασιών

-Η συμβολή του υπολογιστικού μέσου τόσο στην εναλλαγή-μετάφραση ανάμεσα στα διάφορα συστήματα αναπαράστασης, όσο και στη διατύπωση και τον έλεγχο εικασιών

Διαπραγμάτευση – Επεξεργασία - Υλοποίηση

Από τη μετάφραση της λεκτικής περιγραφής σε αλγεβρική αναπαράσταση προκύπτει η σχέση $g'(x) = g(x)$ (ή γενικότερα $g'(x) = k \cdot g(x)$). Θα προχωρήσουμε αποδεχόμενοι και μια επιπλέον αρχική συνθήκη όπως η $g(0) = 1$ (ή γενικότερα $g(0) = a$). Για διευκόλυνση στους υπολογισμούς και τις απαιτήσεις τις γραφικής παράστασης θα συνεχίσουμε με τις απλούστερες από αυτές.

Στο πρώτο βήμα για την προσέγγιση μπορούμε να οδηγηθούμε μέσω της γραφικής αναπαράστασης, όπως φαίνεται (Εικόνα 2) και στο μικτόγραμμο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(0,1), \mathrm{B}(h,1+h)$ και $\Gamma(h, g(h))$, όπου για h κοντά στο 0 (και θετικό) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα σημεία Β και Γ σχεδόν ταυτίζονται, με την εφαπτομένη να αποτελεί τη γραμμική προσέγγιση της καμπύλης στην περιοχή του $x = 0$

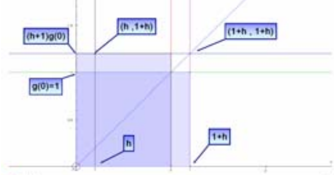


Εικόνα 2

Η αντίστοιχη αλγεβρική-αναλυτική αναπαράσταση, ερμηνεύοντας τον παράγωγο αριθμό στο 0 ως όριο, όπου για h πάρα πολύ μικρό και θετικό ($h \to 0^+$) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \approx \frac{g(h) - g(0)}{h}$ και άρα

η $g(h) \approx g(0) + g'(0) \cdot h \overset{g'=g}{=} (1+h) \cdot g(0) \overset{g(0)=1}{=} 1+h$ επικυρώνει το συμπέρασμα της προηγούμενης εικόνας.

Τον τρόπο κατασκευής του σημείου με συντεταγμένες $(h, (1+h) \cdot g(0))$ και εδώ $(h, 1+h)$ αφού $g(0) = 1$, δίνει το ακόλουθο σχήμα (Εικόνα 3) που βασίζεται στην αρχαία μέθοδο του γνώμονα, και υλοποιείται αλγεβρικά με τη σχέση εμβαδών $(h+1) \cdot g(0) = 1 \cdot g(h)$



Εικόνα 3

Με τη βοήθεια του γενικού τύπου της παραγώγου παίρνουμε αρχικά τον γενικό προσεγγιστικό-αναδρομικό τύπο :

$$g(x+h) \approx g'(x)\cdot h + g(x) = g(x)\cdot h + g(x) = (h+1)\cdot g(x)$$

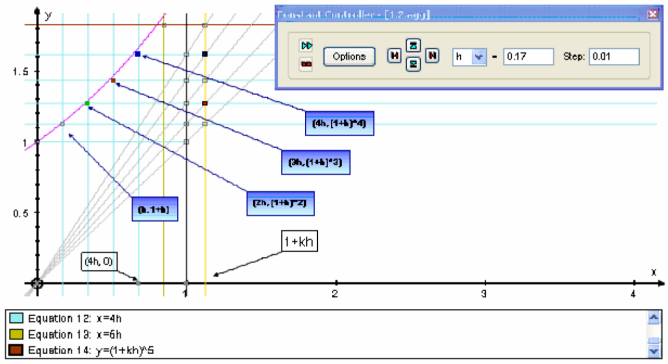
Επαγωγικά για $x = h, 2h, 2h, 3h, 4h, ...$ έχουμε

$$g(2h) = (h+1)\cdot g(h) = (h+1)^2$$

....

$$g(nh) = (h+1)\cdot g((n-1)h) = (h+1)^n \quad (\Sigma)$$

Η τελική κατασκευή που προκύπτει από τη σύνθεση και την επαγωγική εφαρμογή των παραπάνω (για τη γενικότερη περίπτωση όπου $g'(x) = k\cdot g(x)$) μαζί με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $(x) = e^{k\cdot x}$ παρουσιάζεται στην διπλανή Εικόνα4. Υποδείξεις για το χειρισμό αυτής της τελευταίας αναπαράστασης δίδονται στην παράγραφο της Συζήτησης που θα ακολουθήσει.



Εικόνα 4

Στη συνέχεια επανερχόμαστε στην περαιτέρω επεξεργασία της αλγεβρικής αναπαράστασης :

Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε n ίσα τμήματα πλάτους $h = \frac{1}{n}$, ($h\cdot n = 1$).

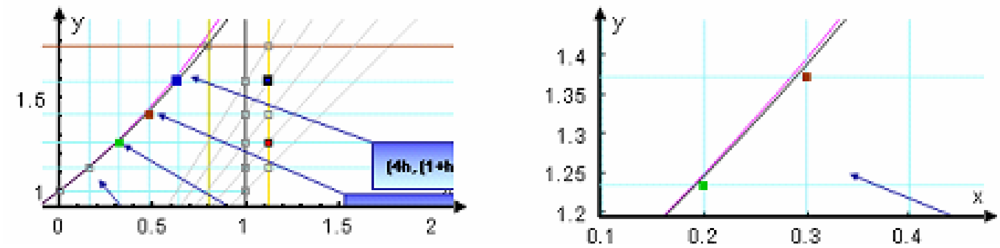
Και έτσι από την παραπάνω σχέση (Σ) προκύπτει $g(1) = (1+\frac{1}{n})^n$

Με $h = \frac{2}{n}$ είναι $g(2) = (1+\frac{2}{n})^n$

Και γενικότερα με $h = \frac{m}{n}$ έχουμε $g(m) = (1+\frac{m}{n})^n$.

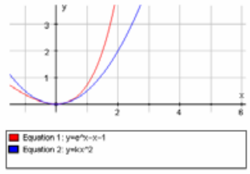
Υπενθυμίζουμε ότι όλα τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν αν το h είναι πάρα πολύ μικρό, δηλαδή όταν $h \to 0$ ή $n \to +\infty$, συνεπώς στην τελευταία σχέση ουσιαστικά υποκρύπτεται το $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n$.

Η προσθήκη της παραμετρικής οικογένειας συναρτήσεων $g_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$ στην προηγούμενη γραφική αναπαράσταση της Εικόνας4 δίνει μια άλλη ποιότητα προσέγγισης (συνεχούς αυτή τη φορά) για την εκθετική συνάρτηση, η οποία μπορεί επίσης να μελετηθεί με τη βοήθεια του Constant Controller του λογισμικού AUTOGRAPH 3.0 για τις διάφορες τιμές του n. Ένα στιγμιότυπο παρουσιάζεται στην Εικόνα 5 :



Εικόνα 5

Η παραγώγιση της οικογένειας συναρτήσεων $g_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$ με το $n \to +\infty$ επικυρώνει κατά κάποιο τρόπο την δοθείσα συνθήκη $g'(x) = g(x)$, με την οποία ξεκινήσαμε. Τέλος η γραφική παράσταση της διαφοράς $\Delta(x) = e^x - (x+1)$ και ο συσχετισμός της με τη γραφική αναπαράσταση της παραμετρικής οικογένειας των παραβολών $y = a \cdot x^2$, μπορεί να οδηγήσει στην εικασία :



Εικόνα 6

$\Delta(x) \sim \frac{x^2}{2}$ κοντά στο 0 (Εικόνα 6).

Συζήτηση

Η χρήση του λογισμικού

Στο πρόγραμμα, με τη βοήθεια ενός πολύ απλού μηχανισμού, του Constant Controller, ο μαθητής μπορεί να μεταβάλλει τις τιμές των παραμέτρων k και h (ή και να δει σε animation) σε διάστημα και με βήμα, τα οποία καθορίζει ο ίδιος, έτσι ώστε με τη βοήθεια υποδείξεων του διδάσκοντα να παρατηρήσει ότι :

Μεταβάλλοντας το h για τιμές πολύ κοντά στο 0 και στη συνέχεια μεγαλύτερες, ακόμη και κοντά στο 1, οι προσεγγίσεις της $y = e^{k \cdot x}$, ενώ για πολύ μικρές τιμές του h είναι πάρα πολύ καλές, αρχίζουν να απομακρύνονται όλο και περισσότερο, καθώς το h μεγαλώνει.

Η μεταβολή του k καθορίζει τη μορφή της καμπύλης $f(x) = e^{k \cdot x}$ (μπορεί να γίνει ακόμη και ευθεία για $k = 0$) και ταυτόχρονα σαφώς επηρεάζει την ποιότητα της προσέγγισης, αφού όσο μεγαλώνει το k, αυξάνονται και οι διαφορές των τιμών $f(h), f(2h), f(3h), f(4h),...$ από τις προσεγγιστικές τιμές της g που παίρνουμε για $h, 2h, 3h, 4h,...$ μέσω της γεωμετρικής προόδου.

Τα Πλεονεκτήματα

Τα ακόλουθα πλεονεκτήματα προκύπτουν από τη διαπραγμάτευση του θέματος και με τη βοήθεια του συγκεκριμένου λογισμικού :

-Εμπλοκή του μαθητή στη χρήση της γραμμικής προσέγγισης

-Δυνατότητα χειρισμού αλγεβρικών παραστάσεων και αλγεβρικών αποδείξεων

-Χρήση της γεωμετρικής κατασκευής και μάλιστα την αναγωγή ενός προβλήματος προσέγγισης, σε κατασκευή γνωμόνων που αναδεικνύουν τη δύναμη ορισμένων θεμελιωδών εργαλείων προερχόμενων από τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά

-Σύνδεση αρκετών διαφορετικών εννοιών στα σχολικά μαθηματικά, όπως η γεωμετρική πρόοδος με την εκθετική συνάρτηση, με τη βοήθεια προσεγγίσεων που επιτυγχάνονται μέσω της παραγώγου

-Δυνατότητα εναλλαγής ανάμεσα σε διάφορες αναπαραστάσεις (όπως λεκτική, αλγεβρική, γραφική) με τελικό σκοπό την κατανόηση της έννοιας της προσέγγισης, που προκύπτει με σύνθεση ορισμένων από τις παραπάνω

-Δυναμική χρήση της γραφικής παράστασης για τη μελέτη ποιοτικών (τοπικών και ολιστικών) ιδιοτήτων μιας συνάρτησης, καθώς και τη δυνατότητα επικύρωσης των αλγεβρικών συμπερασμάτων μέσω ελέγχου των παραμέτρων. Η γραφική αλληλεπίδραση και παρατήρηση όταν $k \to 0$ ή σε $x_0 > 1$ ή στο $+\infty$ και όταν $h \to 0^+$ ή $h \to 1$ συμβάλλουν στη μελέτη.

-Τη δυνατότητα εισαγωγής εικασιών που προκύπτουν από μια εξωτερική αναπαράσταση και τον έλεγχό τους μέσα σε μια άλλη της ίδιας έννοιας, με την παρότρυνση του διδάσκοντα και την αλληλεπιδραστική επαφή με το θέμα, μέσω του λογισμικού
-Γενικότερη εξοικείωση με τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, ευθειών, αξόνων, τομές γραμμών κ.λ.π. και χρήση της γεωμετρικής εικόνας ως εργαλείου επικύρωσης, κατασκευών και αναζήτησης

Συμπεράσματα - Επεκτάσεις

Η προηγηθείσα μελέτη λειτουργώντας μέσα στο θεωρητικό πλαίσιο των πολλαπλών αναπαραστασιακών συστημάτων, το οποίο ετέθη στην αρχή, έχει στόχο να οδηγήσει στις ακόλουθες λειτουργικές προοπτικές :
Να συμβάλλει στην εξοικείωση των μαθητών/τριών με την εναλλαγή ανάμεσα σε διάφορα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης.
Να μελετήσει την επίδραση της παραπάνω διαδικασίας στη διαμόρφωση και τη μακροπρόθεσμη εξέλιξη των εσωτερικών συστημάτων αναπαράστασης που σχετίζονται με τις υποκείμενες έννοιες.
Να καθοδηγήσει το υπολογιστικό περιβάλλον στην κατεύθυνση της διατύπωσης εικασιών και επικύρωσης ή διάψευσης αυτών σε άλλο εξωτερικό σύστημα από αυτό, μέσα στο οποίο εμφανίζονται.
Την μελλοντική εκπόνηση τεστ ελέγχου κατανόησης, ώστε να διαπιστωθούν τα εξής :
Μέσα σε ποιους τρόπους αναπαράστασης επιλέγουν οι μαθητές-φοιτητές/τριες να εργαστούν; Πότε πρέπει να γίνεται χρήση του υπολογιστή και από ποιο τύπο σπουδαστών; Ήταν αυτή η χρήση επιτυχής ή όχι; Χρησιμοποίησαν τον υπολογιστή ως εργαλείο εξερεύνησης ή επικύρωσης; Τα δεδομένα συνέβαλαν πράγματι στην ενόραση για την εννοιολογική κατανόηση, καθώς και στον εμπλουτισμό των δομών και διασυνδέσεων ανάμεσα στα εσωτερικά συστήματα γνωστικών αναπαραστάσεων των μαθητών/τριών ;
Θα πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι η χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων δεν έχει πάντα τα αναμενόμενα θετικά αποτελέσματα. Το υποκείμενο, εάν δεν υπάρξει η σωστή επιλογή παραδειγμάτων, καθοδήγηση και κριτική αλληλεπίδραση με το υπολογιστικό μέσο μπορεί να αντιμετωπίσει δυσκολίες στην κατανόηση. Αυτές μπορεί να πηγάζουν είτε από την ταύτιση της υποκείμενης έννοιας που αναπαρίσταται με τη συγκεκριμένη αναπαράσταση, είτε επειδή τα παιδιά δεν αντιλαμβάνονται τη συμβολική σχέση ανάμεσα στην αναπαράσταση και την ολότητα στην οποία αυτή επισημαίνεται από τους DeLoache et al.(1998α) και αναφέρεται στους Γαγάτσης et al (2000). Η έρευνα επίσης έχει καταδείξει ότι αρκετά συχνά οι μαθητές του σχολείου θεωρούν απολύτως φυσιολογική τη συνύπαρξη τόσων διαφορετικών λύσεων-αριθμητικών αποτελεσμάτων (!!) για το ίδιο πρόβλημα όσες και οι δυνατές αναπαραστάσεις για το εν λόγω θέμα. Υπό το πρίσμα αυτό, τίποτε δεν πρέπει να θεωρείται αυτονόητο ως προς τις αναπαραστάσεις καθώς όπως και με όλα τα συμβολικά μέσα, ο χειρισμός απαιτεί εξοικείωση και εκμάθηση της γλώσσας τους.

Ευχαριστίες

Τον κ. Ζαχαριάδη Θ., την κ. Μπιζά Ε., τον κ. Χρήστου.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Aviles-Garay, E.J. (1996). Using multiple coordinated representations in a technology-intensive setting to teach linear functions at the college level (Dissertation Thesis). *Inter American University of Puerto Rico, San Juan, Pontifical Catholic University of Puerto Rico*, 1-20.

Γαγάτσης,Α.,Μιχαηλίδου,Ε.,Σιακαλλή,Μ. (2000). Συναρτήσεις : Ένα παιχνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης. *Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου. 45253-IC-2-ERASMUS*, 1-56.

Γαγάτσης, Α., Σπύρου, Π. (2004), Πολλαπλές Αναπαραστάσεις, Ανθρώπινη Νοημοσύνη και Μάθηση. Σε *Πρακτικά VIII Παγκύπριου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου. Σύγχρονες Τάσεις στην εκπαιδευτική έρευνα και πρακτική*, 427-435.

Dunham, P. (2000). Hand-held Calculators in Mathematics Education : A Research Perspective. In *E. LaughBaum (Ed.), Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education: A Collection of Papers. Colombus, OH: Teachers Teaching with Technology College Short Course Program*, 39-47

Edwards, D.L. (1998). Embodying Mathematics and Science : Microworlds as Representations. In *Journal of Mathematical Behavior, 17(1)*, 53-78.

Goldin, G.,& Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In *L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds), Theories of mathematical learning, Hilsdale, NJ: Erlbaum*, 397-430.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In *A. Cuoco (Ed.), The roles of representation in school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics*, 1-23.

Hedegus, J.S. (submitted 2004, accepted for CERME 2005) Dynamic Representations: A new perspective on Instrumental Genesis. In *CERME 2005*, 1-3, 5-8.

Janvier, C., Girardon, C., & Morand, J. C. (1993). Mathematics symbols and representations. In P. S. Wilson (Ed.), Research ideas for the classroom: High school mathematics, New York: Macmillan Publishing Company, 79-102.

Jones, A. (1998). The Fifth Process Standard : An Argument to Include Representation in Standars 2000. In *EDCI 650 Reacts : Representation*, 1-11.

Kaput, J., (1992). Technology and mathematics education. In *D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning* Reston*, VA: NCTM, New York :Macmillan*, 515-556.

Kaput, J. (1999). Representations, inscriptions, descriptions and learning : A kaleidoscope of windows. In *Journal of Mathematical Behavior, 17(2),special issue on "Representations and the Psychology of mathematics education*

Kuhn, T.S. (1962 και 1970). Η δομή των επιστημονικών επαναστάσεων. Μετάφραση από τις *Εκδόσεις Σύγχρονα Θέματα*, 31-47 και 101-121.

Lakatos, I. (α΄ εκδ. 1976, Μετάφραση 1996). Αποδείξεις και Ανασκευές. Η λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης. Εκδόσεις Τροχαλία, ISBN : 960-7022-73-4.

Marrongelle, K. (2001). Physics experiences and calculus: How students use physics concepts to construct meaningful conceptualizations of calculus concepts in an interdisciplinary calculus/physics course (Dissertation Thesis). *University of New Hampshire,* 1-45.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *In Journal for Research in Mathematics Education, 20, (4)*, 356-366.

Yerushalmy, M. (2005). Functions of Interactive Visual Representations in Interactive Mathematical Textbooks, *In International Journal of Computers for Mathematical learning, (to appear in vol. 10, 2005)*, 20-22.