# Μετάβαση από την εξίσωση στην ανίσωση μέσω αναπαραστάσεων της συνάρτησης

Πέτρος Βερύκιος, Βασιλική Φαρμάκη
Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών
pverikios@math.uoa.gr, vfarmaki@math.uoa.gr

## Περίληψη
*Η εργασία αυτή είναι μέρος μιας ευρύτερης έρευνας σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση αρχικών εννοιών της άλγεβρας. Προκειμένου να ξεπεραστούν δυσκολίες και γνωστικά εμπόδια που συναντούν οι μαθητές όταν εισάγονται στην άλγεβρα αναπτύξαμε και εφαρμόσαμε μια συναρτησιακή προσέγγιση εισαγωγής στην άλγεβρα σε μία τάξη Β Γυμνασίου. Παρουσιάζουμε και αναλύουμε στοιχεία τα οποία αφορούν τον τρόπο σκέψης, τις στρατηγικές επίλυσης και τα εμπόδια που συναντούν κάποιοι μαθητές, ενώ προσπαθούν να επιλύσουν ένα πρόβλημα το οποίο αντιμετωπίζεται με κατασκευή και επίλυση μιας ανίσωσης της μορφής ax+b<c. Τα στοιχεία προέρχονται από ατομικές συνεντεύξεις που έδωσαν έξι μαθητές μετά το πέρας της διδακτικής παρέμβασης.*

## Λέξεις κλειδιά
*Συνάρτηση, εξίσωση, ανίσωση, αναπαράσταση, πλαίσιο.*

## Εισαγωγή
Οι δυσκολίες των μαθητών κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα είναι τεκμηριωμένες στη βιβλιογραφία και αφορούν κυρίως ζητήματα ερμηνείας των γραμμάτων-συμβόλων και επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων (Kuchemann, 1981, Kieran, 1985, Filloy and Rojano 1989, Sfard and Linchevsky, 1994, Herscovics and Linchevski 1994, Pirie and Martin, 1997, Kieran, 1997, Boero et al 2000). Την τελευταία δεκαετία υπάρχει ένα αυξανόμενο ενδιαφέρον για τη μάθηση και τη διδασκαλία των αλγεβρικών εξισώσεων και ανισώσεων (Bazzini and Tsamir, 2004). Στις περισσότερες χώρες (και στην Ελλάδα) οι ανισώσεις διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ως ένα 'δευτερεύον' θέμα σε σχέση με τις εξισώσεις και αντιμετωπίζονται κατά τρόπο καθαρώς αλγοριθμικό. *Αυτή η προσέγγιση αντιμετωπίζει τις ανισώσεις ως ένα τετριμμένο θέμα, ως συνέπεια μιας ακολουθίας στερεότυπων διαδικασιών, οι οποίες δεν είναι εύκολο να κατανοηθούν, να ερμηνευθούν και να ελεγχθούν από τους μαθητές. Συνέπεια αυτής της προσέγγισης είναι η ανικανότητα των μαθητών να διαχειριστούν ανισότητες, οι οποίες δεν ταιριάζουν σε διδαγμένες διαδικασίες* (Boero & Bazzini, 2004, σελ 140). Ένα σημαντικό θέμα σχετικά με τη δυσκολία επίλυσης ανισώσεων είναι η προφανής ομοιότητα με την επίλυση εξισώσεων. Αυτό το ζήτημα φαίνεται να είναι αρκετά κρίσιμο (Sackur, 2004). Με τον συνήθη (αλγεβρικό) τρόπο επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων οι γραφιστικές ευρετικές δεν αξιοποιούνται και οι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί εκτελούνται χωρίς κατανόηση, η οποία προέρχεται από το γεγονός ότι το ανισοτικό σύμβολο δεν συμπεριφέρεται όπως το σύμβολο της ισότητας (Tsamir et al, 1998). Για παράδειγμα, σε έρευνα (Sackur, 2004) ζητήθηκε από μαθητές (ηλικίας 15-17 ετών) να επιλύσουν την ανίσωση 3/x>2+x και όπως αναμενόταν όλοι οι σπουδαστές, οι οποίοι χρησιμοποίησαν αλγεβρική μέθοδο έκαναν το λάθος να πολλαπλασιάσουν με το x, χωρίς να λάβουν υπόψη τους το πρόσημό του, δίνοντας την λανθασμένη απάντηση (-

3, 1). Ελάχιστοι σπουδαστές χρησιμοποίησαν γραφική λύση, κατασκευάζοντας τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων y=3/x και y=2+x.
*Η έρευνα έχει επισημάνει τον θετικό ρόλο που μπορούν να διαδραματίσουν οι γραφικές αναπαραστάσεις ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν καλύτερα τη συμβολική μορφή των ανισώσεων, καθώς επίσης και τις παγίδες που κρύβονται στην προσπάθεια μερικές από τις τεχνικές μετασχηματισμού που χρησιμοποιούνται στην επίλυση των εξισώσεων να εφαρμοστούν και στην επίλυση των ανισώσεων. Παρά την εισβολή των γραφικών αναπαραστάσεων η έρευνα σ' αυτόν τον τομέα είναι πολύ μικρή με αποκλειστική έμφαση στις συμβολικές πτυχές των ανισώσεων* (Kieran 2004, σελ 144).
Στα νέα αναλυτικά προγράμματα συνιστάται να χρησιμοποιούν οι μαθητές ποικίλες αναπαραστάσεις από τα πρώτα στάδια μάθησης της άλγεβρας (NCTM 2000). Η χρήση λεκτικών, αριθμητικών, γραφικών και αλγεβρικών αναπαραστάσεων έχει τη δυνατότητα να καταστήσει τις διαδικασίες μάθησης της άλγεβρας αποτελεσματικές και με νόημα (Friedlander & Tabach, 2001). Μολονότι κάθε αναπαράσταση έχει τα μειονεκτήματά της, η συνδυασμένη χρήση τους μπορεί να ακυρώσει τα μειονεκτήματα και να αποδειχθεί ότι είναι ένα αποτελεσματικό εργαλείο (Kaput 1992). Όπως επισημαίνουν οι Friedlander and Tabach (2001) *δεν μπορούμε να αναμένουμε η ικανότητα εργασίας με πολλαπλές αναπαραστάσεις να αναπτυχθεί αυθόρμητα.* Άρα όταν οι μαθητές μαθαίνουν άλγεβρα η επίγνωση της ικανότητας να χρησιμοποιούν ποικίλες αναπαραστάσεις πρέπει να υποστηρίζεται ενεργητικά και συστηματικά.
Μία από τις διδακτικές προσεγγίσεις για την εισαγωγή στην άλγεβρα, η οποία υποστηρίζει τις πολλαπλές αναπαραστάσεις είναι η *συναρτησιακή* προσέγγιση (για παράδειγμα Kieran, 1996, Yerushalmy, 2000) . Η συναρτησιακή προσέγγιση θεωρεί την συνάρτηση ως τη βασική έννοια γύρω από την οποία η σχολική άλγεβρα μπορεί να οργανωθεί με περιεχόμενο και νόημα. Μ' αυτό εννοούμε ότι οι αναπαραστάσεις σχέσεων μπορούν να εκφράζονται με τρόπους κατάλληλους για συναρτήσεις και ότι η αλγεβρική-συμβολική αναπαράσταση είναι ένας από αυτούς τους τρόπους. Σύμφωνα με την Kieran (1996) *η αλγεβρική σκέψη μπορεί να οριστεί ως η χρήση μιας ποικιλίας αναπαραστάσεων προκειμένου να χειριζόμαστε ποσοτικές καταστάσεις με ένα συναρτησιακό τρόπο*. Η έννοια της συνάρτησης θα πρέπει να επεκταθεί πέρα από την αντίληψη ως ενός αφηρημένου μαθηματικού αντικειμένου στην αντίληψη ότι οι συναρτήσεις περιγράφουν φαινόμενα του πραγματικού κόσμου. Οι μαθητές κατανοούν ευκολότερα την ιδέα μιας πιθανής σχέσης μεταξύ δύο ποσοτικών μεταβλητών αν τη δουν σε ένα συγκεκριμένο φυσικό πλαίσιο (Piaget, Grize, Szeminska & Bang, 1968). Αποδεχόμενοι μια *συναρτησιακή προσέγγιση* της σχολικής άλγεβρας συγχρόνως αναφερόμαστε σε μια διδασκαλία σε πλαίσιο και με κατανόηση.
Στην εργασία αυτή, η οποία αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας για τη διδασκαλία και τη μάθηση αρχικών αλγεβρικών εννοιών από μαθητές Β΄ Γυμνασίου μέσω μιας συναρτησιακής προσέγγισης, περιοριζόμαστε σε θέματα κατανόησης της έννοιας της ανίσωσης αχ+β<γ.

## Ο ερευνητικός σχεδιασμός και η συλλογή των στοιχείων

Η εισαγωγή στην άλγεβρα γίνεται ουσιαστικά στη Β Γυμνασίου. Οι μαθητές διδάσκονται επίλυση γραμμικών ανισώσεων με αλγεβρικό τρόπο και κατ' αναλογία με την επίλυση εξισώσεων που προηγούνται διδακτικά. Η διδασκαλία των γραμμικών συναρτήσεων έπεται και δεν συσχετίζεται με τις εξισώσεις. Αποδεχόμενοι μια συναρτησιακή προσέγγιση, όπως αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο σχεδιάσαμε μια σειρά μαθημάτων όπου η διδασκαλία των συναρτήσεων προηγήθηκε των εξισώσεων – ανισώσεων, συσχετίζοντας τις έννοιες αυτές. Έτσι κεντρικό ρόλο στη διδασκαλία είχαν οι διάφορες αναπαραστάσεις της συνάρτησης (γεωμετρική, αριθμητική και αλγεβρική αναπαράσταση) και η λύση προβλημάτων με πλαίσιο οικείο στους μαθητές. Αυτή η διδακτική προσέγγιση πραγματοποιήθηκε σε μια τάξη Β Γυμνασίου κάτω από πραγματικές συνθήκες, λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς του Ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος.

Στόχος της ευρύτερης έρευνας ήταν να εξετάσουμε αν και μέχρι ποιου βαθμού οι μαθητές ήταν ικανοί: (α) να αναπτύξουν μια εννοιολογική κατανόηση για την *μεταβλητή*, τη *συνάρτηση*, την *εξίσωση*, την *ανίσωση* και να συνδέσουν τις έννοιες αυτές (β) να μαθηματικοποιούν μια κατάσταση χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις συναρτήσεων και (γ) να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις για τη λύση προβλημάτων.

Μετά το πέρας των μαθημάτων πραγματοποιήσαμε μη δομημένες ατομικές συνεντεύξεις με έξι μαθητές (5 συνεδρίες με τον καθένα) διαφόρων επιπέδων επίδοσης. Οι συνεντεύξεις κάλυπταν όλα τα θέματα της διδακτικής παρέμβασης και είχαν ως κεντρικό θέμα ένα πραγματικό πρόβλημα.

Σ' αυτή την εργασία θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε μέρος των συνεντεύξεων των έξι μαθητών που αναφέρεται στη λύση ενός προβλήματος, το οποίο αντιμετωπίζεται με τη λύση μιας ανίσωσης της μορφής $αχ+β<γ$. Σκοπός μας είναι να διερευνήσουμε τα ακόλουθα ερωτήματα: (α) ποιος είναι ο ρόλος του *πλαισίου* στην κατανόηση της έννοιας της ανίσωσης; (β) πόσο επηρεάζει την κατανόηση της ανίσωσης η προφανής ομοιότητά της με την εξίσωση; (γ) πως αξιολογείται η συναρτησιακή προσέγγιση της έννοιας της ανίσωσης;

Πρέπει να σημειώσουμε ότι στη διδακτική προσέγγιση που αναπτύξαμε, για την ανίσωση αφιερώθηκε λιγότερος χρόνος από ότι για την εξίσωση και οι μαθητές δεν είχαν κατασκευάσει πλήρως ένα γνωστικό σχήμα για την έννοια αυτή. Μπορούμε λοιπόν βάσιμα να υποθέσουμε ότι κατά τη διάρκεια της συνέντευξης οι μαθητές προσπαθούσαν μέσα από τη λύση προβλήματος να αναπτύξουν και να εξελίξουν ένα επαρκές γνωστικό σχήμα για την έννοια της ανίσωσης. Το πρόβλημα είναι το εξής:

Το ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΤΑΞΙ

*Όταν χρησιμοποιούμε ταξί πληρώνουμε 'σημαία' 0,80€ και 0,30€ για κάθε χιλιόμετρο που κάνουμε.*

1. *Από τι εξαρτάται το κόστος μιας διαδρομής;*
2. *Αν x είναι ο αριθμός των χιλιομέτρων που κάνουμε σε μια διαδρομή και y ο αριθμός που εκφράζει το ποσό σε € που πληρώνουμε γι' αυτή τη διαδρομή, να εκφράσεις το y ως συνάρτηση του x (ή αλλιώς να γράψεις μια εξίσωση που να συνδέει το y με το x).*
3. *Συμπλήρωσε τον πίνακα:*

| *x [διαδρομή σε χιλιόμετρα]* | *3* | *5* | *8* |
|---|---|---|---|
| *y [κόστος σε €]* | | | |

4. *Κατασκεύασε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης;*
5. *Ο Γιώργος και ο φίλος του ο Κώστας βρίσκονται στην Ομόνοια και παίρνουν ταξί ο καθένας για το σπίτι του. Ο Γιώργος για τη διαδρομή που κάνει πληρώνει 3,5€. Πόσα χιλιόμετρα απέχει το σπίτι του Γιώργου από την Ομόνοια;*
6. *Ο Κώστας έχει 5€. Φθάνοντας στο σπίτι του πληρώνει και παίρνει και ρέστα. Πόσα χιλιόμετρα μπορεί να απέχει το σπίτι του Κώστα από την Ομόνοια;*

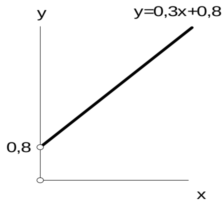
Τα ερωτήματα 1-5 του προβλήματος, που τελικά απαντήθηκαν από τους μαθητές, αναλύθηκαν στις εργασίες Farmaki, Klaoudatos, Verikios 2004, 2005 Θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε τις απαντήσεις των μαθητών στο $6^{ο}$ ερώτημα. Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχει ήδη κατασκευαστεί το μοντέλο της κατάστασης με τη συνάρτηση $\psi=0,3\chi+0,8$ και επιλυθεί η εξίσωση $0,3\chi+0,8=3,5$ (γραφικά, αλγεβρικά ή με πίνακα) .

## Παρουσίαση και ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών

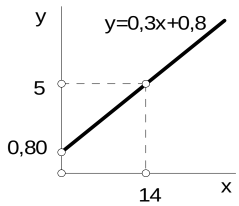
### Η μετάβαση από την εξίσωση στην ανίσωση

Η λέξη *ρέστα* είναι καθοριστική γιατί αποτελεί μια *γέφυρα* μετάβασης από την εξίσωση στην ανίσωση. Μετά το διάβασμα του ερωτήματος όλοι οι μαθητές-ιες διαπιστώνουν ότι υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ της προηγούμενης και της παρούσας κατάστασης όπως εκφράζεται με τις απαντήσεις τους: *«Ανδριάνα:... λιγότερα από 5 ... ανίσωση ...»*, «*Ελένη:… ρέστα… 5-ψ ... είναι πολλές λύσεις*», *«Ολίβια: θα κάνουμε ότι και πριν ... 5= χ.0,3+0,8 με βάση τον τύπο ψ=χ.0,3+0,8 με ψ=5€ ... εντάξει δεν πλήρωσε ακριβώς 5€ περίπου 5€»*, «*Παναγιώτης: θα το κάνουμε ως ανίσωση ... δεν χρησιμοποιούμε την συνάρτηση γιατί δεν είναι εξίσωση ... είναι ανίσωση ... πρέπει να πλήρωσε λιγότερα από 5€»*, *«Σία: δεν μου μοιάζει για εξίσωση, πιο πολύ για ανίσωση μου μοιάζει ... έτσι δεν είναι;»*, *«Σωτήρης: το κόστος ψ δεν μας το λέει ... δεν ξέρουμε τίποτα ... ξέρουμε ότι έδωσε 5€ ... δεν ξέρουμε το κόστος το τελικό .... δύσκολο ... δεν είναι όπως και πριν γιατί δεν μας δίνει π χ 3,5€ το κόστος της διαδρομής ακριβώς ...»*. Το πλαίσιο είναι καθοριστικό για να αρχίσουν οι μαθητές να αντιλαμβάνονται την διαφορά της κατάστασης, στην οποία υπόκεινται η έννοια της ανίσωσης από την κατάσταση, στην οποία υπόκειται η έννοια της εξίσωσης. Μια διαφορά εννοιολογικού περιεχομένου με νόημα για το μαθητή και όχι απλώς διαφορά μεταξύ των συμβόλων.

Από τους 6 μαθητές μόνο η Ανδριάνα αντιμετώπισε αμέσως το ερώτημα με αλγεβρικό τρόπο. Ο Σωτήρης είχε δυσκολία να αντιμετωπίσει το ερώτημα είτε αλγεβρικά, είτε γραφικά. Η Σία στρέφεται αρχικά σε αλγεβρική αντιμετώπιση, χωρίς επιτυχία και μετά στρέφεται στη γραφική παράσταση. Οι υπόλοιποι στράφηκαν αμέσως στη γραφική παράσταση, την οποία είχαν έτοιμη από προηγούμενο ερώτημα (σχήμα 1).




*σχήμα* 1




*σχήμα 2*

Η Ανδριάνα κατασκεύασε την ανίσωση σχεδόν χωρίς παρέμβαση του ερευνητή έχοντας σαν βάση το γραμμικό μοντέλο της κατάστασης ψ=χ˙0,30+0,80: «... *αν ψ<5 τότε χ˙0,30+0,80<5»*. Μετά την επίλυση της ανίσωσης, ωθούμενη από τον ερευνητή να αντιμετωπίσει γραφικά το ερώτημα, πάει στο σχήμα και εξετάζει τιμές στον άξονα ψ μικρότερες από 5: «*αν πάμε σε κάποια τιμή κάτω από το 5 ... και πάμε πάλι ευθεία και όλες τις τιμές μέχρι…*[φέρνει νοερή ευθεία με το μολύβι της] ... *βγαίνει 12* [στο χ]*» «μπορεί να είναι και 12,5;» «ναι, αν πάμε ... πώς να το βρούμε με **ακρίβεια**;» «μέχρι που μπορούμε να πάμε;» «μέχρι το 4,5* [δείχνει στον ψ]» *«στο 4,9 μπορούμε;» «και στο 4,9» «στο 5 μπορούμε να πάμε;» «όχι γιατί πήρε και ρέστα»*. Συγκρίνοντας την απάντηση που έχει από την προηγούμενη αντιμετώπιση, παρατηρεί ότι το χ=14 προκύπτει για ψ=5 και φέρνει τις κατάλληλες ευθείες (σχήμα 2) προσδιορίζοντας το 14 στο χ και λέει: «*... στο 5 και ... άρα από το 14 και κάτω»*. Στο ερώτημα του ερευνητή να δείξει πάνω στον άξονα χ΄χ τις λύσεις πατάει έντονα στον άξονα χ΄χ, από το 1 μέχρι λίγο πριν το 14 δείχνοντας με το κενό που αφήνει ότι η τιμή 14 δεν περιλαμβάνεται στις λύσεις. Έχει οικοδομήσει ένα γνωστικό σχήμα για την ανίσωση, το οποίο συνεχώς εξελίσσεται. Προσπαθώντας να ερμηνεύσει την γνήσια ανισότητα $0<x<14$, μέσω της γεωμετρικής αναπαράστασης, προσεγγίζει διαισθητικά την έννοια του ορίου.

Η Ελένη μετά τις πρώτες δυσκολίες που έχει σχετικά με τα ρέστα αρχίζει να αντιλαμβάνεται ότι «*... αν δίναμε 5€ θα κάναμε 14 χιλιόμετρα* (το κάνει χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση, σχήμα 2) *... μας έδωσε και ρέστα ... αν του δίναμε 4,5€ θα κάναμε 13,5 χιλιόμετρα ...* ***είναι πολλές οι λύσεις****»,* κατανοώντας την βασική διαφορά της ανίσωσης από την εξίσωση, οικοδομώντας μια γέφυρα μεταξύ των δύο εννοιών. Και συνεχίζει «*μπορούμε να πληρώσουμε διάφορα ποσά ... με ψηλότερο το 5€ που αντιστοιχούν σε 14 χιλιόμετρα ... μπορούμε και μισό € και 2€ ... μπορεί να κάνουμε και 13 και 12 και 10 και 11 χιλιόμετρα ... 14 δεν μπορεί, δηλαδή τα χιλιόμετρα είναι μικρότερα από 14*». Μετά από την απάντηση που δίνει παροτρύνεται από τον ερευνητή να αντιμετωπίσει την ερώτηση χωρίς χρήση της γραφικής παράστασης. Στην προσπάθειά της να οργανώσει τα στοιχεία της κατάστασης προτείνει μια σημαντική αντιμετώπιση, η οποία έχει σαν βάση την εξίσωση. Προσεγγίζει την έννοια της ανίσωσης μέσω διακριτών τιμών με επίλυση εξισώσεων. Συγκεκριμένα λέει: «*... να το βρούμε με παραδείγματα ... ή με τον τύπο ... 5€ δίνει 14 χιλιόμετρα* (το είχε βρει προηγουμένως) *... 0,3χ+0,8 ... 14 χιλιόμετρα ... μπορεί και 4€ και 3€ και να γίνει το ίδιο ... εξίσωση ...* ***είναι πολλές οι λύσεις****»*. Κατανοεί ότι το ποσό που πληρώθηκε είναι αριθμός μικρότερος από 5 και για τα διάφορα ποσά πρέπει να λυθεί η αντίστοιχη εξίσωση. Έτσι για να βρει τις διαδρομές για 4€ ή 3€ πρέπει να λύσει τις αντίστοιχες εξισώσεις $\chi\cdot 0{,}30+0{,}80=4$ και $\chi\cdot 0{,}30+0{,}80=3$ και επίσης ότι και για κάθε άλλο ποσό μικρότερο του 5 θα γίνει το ίδιο. Οι λύσεις όλων αυτών των εξισώσεων είναι οι δυνατές απαντήσεις στο ερώτημα σύμφωνα με την Ελένη. Όλες αυτές οι εξισώσεις που δίνουν το σύνολο λύσεων, μπορούν να αντιπροσωπευτούν από την ανίσωση $\chi\cdot 0{,}30+0{,}80<5$. Αυτή η ιδέα είναι μια σημαντική ενέργεια κατανόησης της έννοιας της ανίσωσης και ουσιαστικής διαφοροποίησής της από την εξίσωση. Από την άλλη μεριά το συμπέρασμά της ότι «*είναι πολλές οι λύσεις*»*,* δημιουργεί μια γέφυρα μεταξύ της εξίσωσης και της ανίσωσης καλύπτοντας το εννοιολογικό χάσμα μεταξύ των δύο εννοιών. Αυτό το επιτυγχάνει έχοντας σαν βάση το *πλαίσιο* και τις *αναπαραστάσεις* της συνάρτησης (γεωμετρική ή αλγεβρική), που μαθηματικοποιούν την κατάσταση.

Η Ολίβια απαντάει στο ερώτημα χωρίς δυσκολία πηγαίνοντας στη γραφική παράσταση (φέρνει τις διακεκομμένες ευθείες, σχήμα 2) λέγοντας «*λίγο πιο λίγο, γιατί λέει ότι πήρε και ρέστα... π χ από 10 μέχρι 14 ... όχι 14 δεν μπορεί*». Προκειμένου να αντιμετωπίσει το ερώτημα χωρίς χρήση γραφικής παράστασης πάει στον τύπο $\psi=\chi\cdot 0{,}3+0{,}8$ και κατασκευάζει την εξίσωση $5=\chi\cdot 0{,}3+0{,}8$ λέγοντας «*δεν πλήρωσε ακριβώς 5€ περίπου 5€ ...*» και με την ερώτηση του ερευνητή: «*λιγότερα ή περισσότερα;*» κατανοεί την διαφορά των δύο καταστάσεων «*λιγότερα ... δηλαδή* ***κανονικά δεν πρέπει να βάλουμε ισότητα*** *... θα πρέπει να πούμε* $5>\chi\, 0{,}3+0{,}80$» και καταλήγει στην κατασκευή της ανίσωσης.

Ο Παναγιώτης αντιμετωπίζει γραφικά χωρίς δυσκολία το ερώτημα. Στην αλγεβρική αντιμετώπιση συναντά μια μικρή δυσκολία με τα ρέστα προκειμένου να μπορέσει να μαθηματικοποιήσει την κατάσταση και η καθοριστική ερώτηση του ερευνητή *«το 5 τι είναι από το ποσό που πλήρωσε;»* τον βοηθά να προχωρήσει: «*είναι μεγαλύτερο ... προκύπτει ανισότητα»* και συγκρίνοντας το ποσό που πλήρωσε με το ποσό που έδωσε κατασκευάζει την ανισότητα $5>0{,}8+0{,}3\chi$.

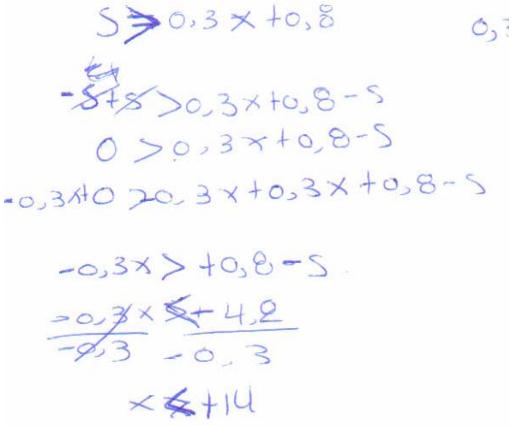
Η Σία στην αρχή προσπαθεί να αντιμετωπίσει το ερώτημα αλγεβρικά, αλλά μετά την δυσκολία που αντιμετωπίζει στην κατασκευή της ανίσωσης στρέφεται χωρίς υπόδειξη προς τη γραφική παράσταση και πάει στο 5 του άξονα ψ: «*στα 5€ κάνει ... 14*

*χιλιόμετρα* [σχήμα 2]...» «*αφού παίρνει και ρέστα τι σημαίνει;» «ότι κάνει λιγότερα από 14 χιλιόμετρα ... το σπίτι του είναι σε απόσταση μικρότερη από 14 χιλιόμετρα»*. Για αντιμετώπιση χωρίς γραφική παράσταση παρ' όλο που αναφέρει ότι η κατάσταση της θυμίζει ανίσωση αντιμετωπίζει δυσκολία στην κατασκευή της: «*λοιπόν ψ ίσον ... ναι εντάξει ... ψ μικρότερο είναι ίσον ... γίνεται να πω ψ **ίσον** μικρότερο από 5 και να συνεχίσω; ... επειδή τα € θα είναι λιγότερα από 5... ψ<5»*. Σωστά μαθηματικοποιεί την κατάσταση με την ανίσωση ψ<5, αλλά δεν μπορεί να κάνει τη μετάβαση στην ισοδύναμη 0,80+03χ<5 εφόσον θέλει να εκτιμήσει την τιμή του χ. Αυτή η μετάβαση αποτελεί ένα ισχυρό εμπόδιο. Πιθανόν ο τύπος να αποτελεί εμπόδιο για την κατασκευή της ανίσωσης γιατί δεν μπορεί να ξεφύγει από την αναπαράσταση του ποσού με το ψ και να σκεφτεί την αναπαράστασή του με 0,80+03χ. Μόνο όταν ο ερευνητής της υποδεικνύει να ερμηνεύσει πιο προσεκτικά τον τύπο συμπεραίνει «*το ψ είναι ... αα ... 0,80+03χ μικρότερο του 5, α ναι ή αλλιώς 0,80+03χ<5»*.
Ο Σωτήρης, ο οποίος ήταν ο μαθητής με την χαμηλότερη επίδοση σύμφωνα με την αξιολόγηση της καθηγήτριάς του, αντιμετωπίζει τα μεγαλύτερα εμπόδια στην αντιμετώπιση του ερωτήματος είτε γραφικά είτε αλγεβρικά όπως φαίνεται από το διάλογο: «*δεν μπορούμε ... δεν μας δίνει τίποτα π χ όπως πριν που το κόστος ήταν 3,5€ ... το κόστος της διαδρομής ... πλήρωσε 5€ πήρε και ρέστα...» «δεν μας δίνει τίποτα;» «ότι πλήρωσε 5€ και πήρε και ρέστα» «άρα πλήρωσε 5€;» «όχι πλήρωσε λιγότερα»* «*τι σχέση έχουν αυτά μεταξύ τους;» «ότι και τα δύο δεν τα ξέρουμε ... και το 0,3χ+0,8 δεν ξέρουμε το ποσό, δηλαδή δεν μας λέει ότι ...»*. παρά τη διαπίστωσή του ότι το ποσό που πληρώθηκε είναι μικρότερο του 5 δεν μπορεί να κάνει τη μετάβαση στη συμβολική αναπαράσταση της κατάστασης και να κατασκευάσει την ανίσωση. Ακολουθεί ένας μακρύς διάλογος παρόμοιου χαρακτήρα με τον ερευνητή και στην πολύ καθοριστική ερώτηση αν τα ποσά είναι ίσα απαντά «*δεν είναι ίσα ... φυσικά το 5 € είναι μεγαλύτερο από την τιμή που του είπε ο ταξιτζής ... είναι άνισα»,* αλλά όταν του υποδεικνύει να γράψει κάποια σχέση που να φαίνεται αυτό λέει «*ως **ανισότητα*** ... [και γράφει 5-ψ] ... *γιατί λέει ότι παίρνει και ρέστα»*. Μια αξιοπρόσεκτη προσέγγιση του προβλήματος μια και το 5-ψ για τον Σωτήρη είναι το κόστος της διαδρομής. Όμως είναι μακριά από το να διατυπώσει την ανίσωση 5-ψ>0 και να λύσει το πρόβλημα. Ο «φόβος» και η μη κατανόηση του μηδέν είναι ένα εμπόδιο. Τελικά ο ερευνητής επαναδιατυπώνει το ερώτημα, το οποίο δεν μπόρεσε να κάνει ο ίδιος ο Σωτήρης: «*τα ρέστα σε μπερδεύουν ... αυτό σημαίνει ότι τα χρήματα που πληρώνουμε είναι **λιγότερα** από 5€»* και τότε γράφει την ανίσωση 0,3.χ+0,8<5. Όταν ερωτάται αν μπορεί να αντιμετωπίσει το ερώτημα με χρήση της γραφικής παράστασης τα ρέστα εξακολουθούν να αποτελούν εμπόδιο «*ε ... δεν πιστεύω ότι μπορούμε με γραφική παράσταση γιατί δεν μας δίνει κάτι συγκεκριμένο πάλι» «το 5 δεν είναι συγκεκριμένο;» «...»*. Συνεχίζει να θεωρεί ότι δεν έχουμε στοιχεία για να επεξεργαστούμε την κατάσταση, θεωρώντας και το 5 μη συγκεκριμένο, εννοώντας πιθανότατα ότι δεν είναι η συγκεκριμένη τιμή που πληρώθηκε. Μπροστά στο αδιέξοδο ο ερευνητής εστιάζει στη γραφική παράσταση: *«πάμε εδώ στο προηγούμενο* [εννοεί το προηγούμενο ερώτημα], *εδώ είπες ... στα 3,5 € πόσα χιλιόμετρα κάναμε;» « 9» «αν σου έλεγα ότι πλήρωσε λιγότερα από 3,5 τι θα έλεγες ... πόσα χιλιόμετρα θα έκανε;» «λιγότερα από 9»*. Οικοδομώντας, με τις κατάλληλες ερωτήσεις του ερευνητή, πάνω στην προηγούμενη γνώση του και επεκτείνοντάς την ο Σωτήρης δείχνει να κατανοεί την κατάσταση και χρησιμοποιώντας με κατάλληλο τρόπο τη γραφική παράσταση απαντά στο συγκεκριμένο ερώτημα: *«δηλαδή, θα πάω στα 5 και θα* ...[φέρνει τις διακεκομμένες ευθείες, σχήμα 2] ... *πόσο είναι; 14» «τώρα που πλήρωσε λιγότερα πόσα χιλιόμετρα έκανε;» «λιγότερα από 14*».

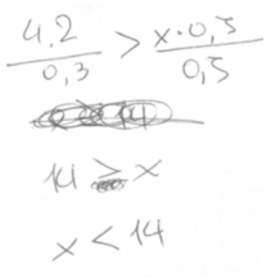
Από την παραπάνω ανάλυση εντοπίζουμε ένα εμπόδιο, το οποίο αφορά την μοναδικότητα των λύσεων. Για παράδειγμα στη γραμμική εξίσωση 0,8+0,3χ=3,5 έχουμε ως λύση το 9, ενώ στην ανίσωση 0,8+0,3χ<5 το ανοικτό διάστημα (0, 14), μια έννοια αρκετά δύσκολη και για μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας. Επίσης ενώ για τους περισσότερους μαθητές η γραφική παράσταση αποτέλεσε ένα στήριγμα για την αντιμετώπιση της κατάστασης, διαπιστώσαμε μια σαφή δυσκολία στην αλγεβρική αντιμετώπισή της και πιο συγκεκριμένα στην κατασκευή της ανίσωσης. Αυτό το εμπόδιο διατυπώθηκε καθαρά από την Σία μετά την επίλυση της ανίσωσης: «*την εξίσωση και την ανίσωση να τις λύνω εντάξει … δεν μπορώ εύκολα να τις φτιάξω*».

**Προβλήματα στην αλγεβρική επίλυση της ανίσωσης**

Οι μαθητές-ιες της μελέτης έλυσαν αλγεβρικά την ανίσωση κάνοντας ακριβώς τις ίδιες διαδικασίες με την αλγεβρική επίλυση της εξίσωσης, μερικοί μάλιστα (Ολίβια, Σωτήρης) αναφέρουν καθαρά ότι «*η λύση της ανίσωσης θα γίνει σαν εξίσωση*». Η ισχυρή ταύτιση της επίλυσης της εξίσωσης με την επίλυση της ανίσωσης, όπου θεωρείται ότι η μόνη διαφορά είναι στο σύμβολο, το < ή το > αντί για =, δημιουργεί παρανοήσεις και οδηγεί σε σφάλματα (Tsamir et al, 1998). Για παράδειγμα ο Σωτήρης όταν φθάνει στην 0,3χ<4,2 συνεχίζει 0,3χ/0,3>4,2/0,3 εξηγώντας ότι «*πρέπει να αλλάξω το σύμβολο ... πάντα αλλάζει στο τέλος*». Η Ελένη φθάνοντας στην ανίσωση -0,3χ>-4,2 (σχήμα 3) διαιρεί με -0,3 και τα δύο μέλη της ανίσωσης χωρίς να αλλάξει το ανισοτικό σύμβολο και βρίσκει απάντηση χ>14. Συνδυάζοντας την απάντηση αυτή με την απάντηση που βρήκε από την γραφική επίλυση καταλαβαίνει ότι κάτι δεν πάει καλά. Αμέσως αλλάζει το ανισοτικό σύμβολο > σε <, εξηγώντας ότι «*αλλάζει γιατί είναι αρνητικό*». Η εξήγησή της φαίνεται επαρκής, αλλά κατά τη διάρκεια επίλυσης άλλης ανίσωσης, σε άλλη συνέντευξη, όταν φθάνει στην -1χ<-4 συνεχίζει, χωρίς να ενεργεί με κατανόηση, όπως φαίνεται από το απόσπασμα διαλόγου: «*διαιρώ με το -1 και ... θα αλλάξει η φορά*» «*γιατί αλλάζει η φορά;*» «*γιατί είναι αρνητικός*» «*εξήγησέ το λίγο περισσότερο*» «*α εδώ έχουμε δύο αρνητικούς ... δεν αλλάζει η φορά*» «*τελικά τι συμβαίνει;*» «*δεν θυμάμαι ... νομίζω ότι αλλάζει επειδή στο 2$^{ο}$ μέλος είναι αρνητικός*».




*σχήμα 3*




*σχήμα 4*

Η Ολίβια επιλύοντας την ανίσωση 5>χ.0,3+0,80 φθάνει στην ισοδύναμη 4,2>χ·0,3 (σχήμα 4) και διαιρώντας με το 0,3 γράφει χ=14 (το σβησμένο μέρος στο σχήμα). Στο ερώτημα του ερευνητή «*γιατί το σύμβολο > άλλαξε και έγινε =;*» το αλλάζει αμέσως και γράφει χ≥14 και στο ερώτημα «*το χ ήταν στο 2ο μέλος, πως πήγε στο 1ο;*» αντιδρά «*… αα ναι*» και σβήνοντας την προηγούμενη ανίσωση γράφει την 14≥χ. Ο ερευνητής ρωτά «*γιατί έβαλες και ίσον εδώ; ... μπορεί να είναι και ίσον;*» σκέφτεται και λέει «*... αν έδινε 5 θα έκανε 14... παίρνει και ρέστα ... όχι δεν μπορεί*» και σβήνει

το = γράφοντας 14>χ. Η ισχυρή ταύτιση της ανίσωσης με την εξίσωση την κάνει να χειρίζεται το ανισοτικό σύμβολο σχεδόν όπως και στο σύμβολο της ισότητας με μεγάλη ευκολία να μεταβαίνει από το ένα στο άλλο, θεωρώντας πιθανότατα ότι αφού η ισότητα 14=χ είναι «*ίδια*» με την χ=14, το ίδιο θα συμβαίνει και με τις ανισώσεις 14>x και x>14. Παρατηρούμε ότι το πλαίσιο του προβλήματος (Ολίβια), αλλά και η χρήση της γραφικής παράστασης (Ελένη) δίνουν τρόπους επαλήθευσης της λύσης.
Τρεις από τους μαθητές της μελέτης διατύπωσαν λεκτικά την ανίσωση χ<14 ως «*χ **ίσον** μικρότερο του 14*». Μια πιθανή ερμηνεία είναι ότι το *ίσον* χρησιμοποιείται με την έννοια του *είναι*: δηλαδή το χ *είναι* (ένας αριθμός) μικρότερος του 14. Αυτή η ερμηνεία πηγάζει από τη διαπίστωσή μας ότι πολλοί μαθητές όταν λύνουν ένα πρόβλημα και θέλουν να αναπαραστήσουν συμβολικά κάποιο ζητούμενο στοιχείο π χ «*αριθμό ημερών*» γράφουν «*χ=ημέρες*» αντί για το τυπικά σωστό «*χ είναι ο αριθμός των ημερών*». Ίσως αυτό να είναι αποτέλεσμα διδασκαλίας από το δημοτικό. Μια δεύτερη ερμηνεία είναι ότι οι μαθητές αυτοί δεν έχουν ακόμα διαφοροποιήσει τις έννοιες εξίσωσης και ανίσωσης και ίσως θεωρούν ότι η λύση είναι το 14.

## Συζήτηση

Με βάση την προηγούμενη ανάλυση συμπεραίνουμε ότι η έννοια της ανίσωσης είναι μια έννοια αρκετά πιο δύσκολη στην κατανόησή της απ' ότι η έννοια της εξίσωσης. Το πρώτο εμπόδιο είναι η κατανόηση της εννοιολογικής διαφοράς μεταξύ των δύο εννοιών. Ο ρόλος του *πλαισίου* του προβλήματος ήταν καθοριστικός γιατί έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να κάνουν διάκριση μεταξύ μιας κατάστασης, που εμπεριέχει την έννοια της εξίσωσης και μιας κατάστασης που εμπεριέχει ανίσωση. Καθοριστικό ρόλο έπαιξε η λέξη *ρέστα*, που βοήθησε τους μαθητές να αντιληφθούν ότι η κατάσταση της ανίσωσης είναι διαφορετική από αυτή της εξίσωσης (εδώ *έχουμε πολλές λύσεις*). Αξιοσημείωτος είναι ο τρόπος αντιμετώπισης της Ελένης στην έννοια της ανίσωσης μέσω πολλών διακριτών εξισώσεων. Αυτό είναι ένα κομβικό σημείο για την κατανόηση της έννοιας της ανίσωσης (πολλές λύσεις), που διαφοροποιείται από την έννοια της εξίσωσης (μία λύση).
Το πλαίσιο του προβλήματος βοήθησε τους μαθητές να διαφοροποιήσουν την έννοια της ανίσωσης από την εξίσωση, όμως η προφανής ομοιότητα στην αλγεβρική επίλυσή τους οδηγεί σε παρανοήσεις και σφάλματα, τα οποία αναδείχτηκαν και στις συνεντεύξεις αυτές. Ο παρόμοιος αλγεβρικός χειρισμός της ανίσωσης με την εξίσωση, όπου θεωρείται ως μοναδική διαφορά *το σύμβολο* (Tsamir et al, 1998), οδήγησε σε παρανοήσεις όπως για παράδειγμα: (α) η διαίρεση με αρνητικό αριθμό χωρίς αλλαγή του ανισοτικού συμβόλου (Sackur, 2004), αλλά και η μηχανιστική αλλαγή προσήμου χωρίς κατανόηση (β) η θεώρηση της ανίσωσης 14>χ ως ισοδύναμης με την χ>14 (γ) η μοναδικότητα της λύσης της εξίσωσης (λύση με «*ακρίβεια»*) δημιουργεί τη εσφαλμένη προσδοκία ότι κάτι ανάλογο θα συμβεί και με τη λύση της ανίσωσης («*τώρα πώς να το βρω με ακρίβεια»*), δυσκολεύοντας έτσι την κατανόηση της λύσης ως διαστήματος, μια έννοιας αρκετά προχωρημένης γι' αυτή την ηλικία.
Δυσκολίες συνάντησαν κάποιοι μαθητές στην κατασκευή της ανίσωσης σε σχέση με την εξίσωση. Όμως η συναρτησιακή προσέγγιση βοήθησε στην κατασκευή αν και μερικές φορές χρειάστηκε η παρέμβαση του ερευνητή. Αναπτύχθηκαν ενδιαφέροντες συμβολισμοί στην προσπάθεια μαθηματικοποίησης της κατάστασης, όπως για παράδειγμα το ψ-5 για να αναπαρασταθούν τα ρέστα ή η ανίσωση ψ<5. Η μετάβαση από την τελευταία στην ισοδύναμή της 0,80+0,30χ<5 για μερικούς μαθητές υπήρξε προβληματική.

Η συναρτησιακή προσέγγιση της άλγεβρας στην τάξη, κατά την οποία οι μαθητές αντιμετώπισαν μέσω προβλημάτων και με βάση τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης τις έννοιες της εξίσωσης και της ανίσωσης βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν τις έννοιες αυτές σε ικανοποιητικό βαθμό και τους εξοικείωσε στη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων ως στρατηγικών λύσης προβλήματος. Το πλαίσιο και η διατύπωση των ερωτημάτων του προβλήματος της συνέντευξης βοήθησαν τους μαθητές-ιες να διαφοροποιήσουν τις έννοιες εξίσωσης και ανίσωσης και να επιλέγουν την κατάλληλη γι' αυτούς αναπαράσταση. Όταν δοκίμαζαν κάποια αναπαράσταση και δεν μπορούσαν να απαντήσουν είχαν την ευκαιρία και τη δυνατότητα να προστρέξουν σε κάποια άλλη (π χ Σία). Επίσης η μία αναπαράσταση λειτούργησε συμπληρωματικά με κάποια άλλη ή σαν ένα μέσο ελέγχου της απάντησης (π χ Ελένη). Παρατηρήσαμε ωστόσο ότι όταν ένας μαθητής-ια απαντούσε στο ερώτημα με κάποιο τρόπο δεν ενδιαφερόταν να δοκιμάσει και κάποιο άλλο εκτός κι αν τον παρακινούσε γι' αυτό ο ερευνητής (Kieran 1997). Φάνηκε ότι η γεωμετρική αναπαράσταση έδωσε στους μαθητές-ιες μια πληρέστερη εικόνα της κατάστασης, την οποία ερμήνευσαν με περισσότερη κατανόηση από ότι την αλγεβρική-συμβολική αναπαράσταση. Είναι χαρακτηριστικό ότι οι περισσότεροι μαθητές-ιες για να απαντήσουν στο ερώτημα στην αρχή προσέφυγαν στη γραφική παράσταση. Μια δυσκολία στη γραφική επίλυση ήταν η εξής: ενώ η απάντηση με τη γραφική παράσταση στο ερώτημα 5, το οποίο περιείχε εξίσωση, δεν δημιούργησε κανένα πρόβλημα, το ερώτημα 6, το οποίο περιείχε ανίσωση, δηλαδή το *λιγότερα από το 5€* εμπόδιζε το μαθητή-ια να πάει ακριβώς στο 5 (σχήμα 2), αλλά να το προσεγγίζει συνεχώς (Ανδριάνα) ή να λέει «*πιο λίγο, γιατί λέει ότι πήρε και ρέστα*» (Ολίβια). Η δυσκολία αυτή όμως δεν οφείλεται στην ίδια την αναπαράσταση, αλλά στην εσωτερική δυσκολία της έννοιας του ανοικτού συνόλου ή της γνήσιας ανισότητας.
Θεωρούμε ότι η γρήγορη αντιμετώπιση, μόνο με αλγεβρικό τρόπο και σε συνάφεια με την εξίσωση, της διαδικασίας επίλυσης της ανίσωσης δημιουργεί εννοιολογικά εμπόδια και δυσκολίες στους μαθητές. Η επαρκής γνώση των ιδιοτήτων πράξεων και σχέσεων του αριθμητικού συστήματος, για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων αποτελεί ένα γνωστικό φορτίο για τους αρχάριους στην άλγεβρα μαθητές, αντίθετα από τις άλλες δύο αναπαραστάσεις της συνάρτησης, τον πίνακα και την γραφική παράσταση, όπου οι μαθητές επιδεικνύουν μεγαλύτερη κατανόηση. Θεωρούμε ότι είναι προτιμότερο για ένα μαθητή να χρησιμοποιεί μια λιγότερο τυπική στρατηγική με κατανόηση παρά μια πιο τυπική χωρίς κατανόηση (Meyer 2001). Θεωρούμε επίσης ότι ο χρόνος που διατίθεται από το αναλυτικό πρόγραμμα για τη διδασκαλία αυτών των εννοιών είναι πολύ μικρός. Η μάθηση και η κατανόηση εννοιών και διαδικασιών δεν γίνεται με την με οποιονδήποτε τρόπο διδασκαλία (Sfard, 1994) γιατί η μάθηση είναι μία πολύπλοκη γνωσιακή δραστηριότητα που δε χωράει βιασύνη (Vosniadou, 2001).

## Βιβλιογραφία


Bazzini, L., Tsamir, P. (2004). Algebraic equations and inequalities: Issues for research and teaching, *Proceedings of PME28*, Bergen, Norway, Vol. I, pp 137-139.

Boero, P, Bazzini, L. & Garuti, R..(2001), 'Metaphors in teaching and learning mathematics: a case study concerning inequalities', *Proceedings of PME-XXV*, Utrecht, The Netherlands, Vol.2,185-192.

Boero, P., Bazzini, L. (2004). Inequalities in Mathematical Education: The need for complementary perspectives, *Proceedings of PME28*, Bergen, Norway, Vol. I, pp 137-139.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59-78.

Farmaki, Klaoudatos, Verikios (2004). From functions to equations: introduction to algebraic thinking to 13 year-old students, *Proceedings of PME28,* Bergen, Norway, Vol. IV, pp. 393-400.

Farmaki, Klaoudatos, Verikios (2005). Introduction of algebraic thinking: connecting the concepts of linear function and linear equation, *Preceedings of the 4th Mediterranean conference on mathematics education,* Palermo, Italy, vol II, pp 407-422.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9* (2), 19-25.

Friedlander, A., Tabach, M., (2001). Promoting Multiple Representations in Algebra. In *The Roles of Representation in School Mathematics,* edited by Cuoco, A., and Curcio, F. R., pp. 183-184. Reston, V.: NCTM.

Kieran, C. (1985). Constructing meaning for equations and equation-solving. In A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, Research & Practice in Mathematical Education*, 243-248. University of Nottingham, UK: Shell Center for Mathematical Education.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: McMillan & National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In *8th international congress on mathematical education, selected lectures,* 271-286. S.A.E.M. ΄THALES΄.

Kieran, C. (1997). Mathematical concepts at the secondary school level: The learning of algebra and functions. In Nunes T., Bryant P., (eds), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective.* Psychology Press, 133-162.

Kieran, C. (2004). The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations, *Proceedings of PME28,* Bergen, Norway, Vol. I, pp 143-147.

Kuchemann, D. E. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics,* 102-119. London: Murray.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, V.: NCTM.

Piaget, J., Grize, J.B., Szeminska, A., & Bang, V. (1968). Epistemologie et psychologie de las fonction. Paris: Presses Universitaires de France. (English version published in 1997 by D.Reidel publishing).

Pirie, S. & Martin, L. (1997). One approach to the teaching of linear equations, *Educational Studies in Mathematics* 34, 159–181.

Sackur, C. (2004). Problems relatedto the use of graphs in solving inequalities, *Proceedings of PME28*, Bergen, Norway, Vol. I, pp 148-152.

Sfard, A. & Linchevsky, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of Algebra, *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191-228.

Tsamir P., Almog N., Tirosh D.(1998), 'Students' solutions of inequalities', *Proceedings of PME 22*, Stellenbosch, South Africa, Vol. VI, 129-136.

Vosniadou , S. 2001. How children learn. International Academy of Education, Palais des Académies, Brussels, Belgium. [www.ibe.unesco.org]

Yerushalmy, M. (2000). Problem solving strategies: A longitudinal view of problem solving in a function based approach to algebra, *Educational Studies in Mathematics 43,* pp 125-147.