

Ίδια και Διαφορετικά: Κατανόηση της έννοιας του τριγώνου από παιδιά πρώτης δημοτικού

Άννα Χρονάκη Μαίρη Δημουλά

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

chronaki@uth.gr

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά στη διερεύνηση των χωρικών εικόνων και δεξιοτήτων παιδιών πρώτης δημοτικού σχετικά με το σχεδιασμό ίδιων και διαφορετικών τριγώνων. Οι χωρικές αυτές εικόνες και δεξιότητες εξετάζονται τόσο μέσα από το γραφικό σχεδιασμό όσο και μέσα από τις ερμηνείες που δίνουν τα ίδια τα παιδιά για τα δικά τους σχέδια. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ενώ τα παιδιά συνολικά έχουν την ικανότητα να σχεδιάσουν τρίγωνα, οι ερμηνείες τους σχετικά με το 'ίδιο' και 'διαφορετικό' τρίγωνο υποδεικνύει ότι αυτές οι έννοιες κατανοούνται υποκειμενικά. Οι δυσκολίες των παιδιών (κυρίως με την έννοια του διαφορετικού) μοιάζει να επηρεάζεται από το γεγονός ότι οι χωρικές εικόνες τριγώνων που κατέχουν τα παιδιά είναι κυρίως οι στερεότυπες των ισοσκελών και των ισοπλεύρων περιπτώσεων.

Λέξεις κλειδιά

Χωρικές και γεωμετρικές δεξιότητες, χωρικές εικόνες και αναπαραστάσεις τριγώνων, ερμηνείες παιδιών σχετικά με ίδια και διαφορετικά τρίγωνα

Εισαγωγή

Συχνά η γεωμετρία ορίζεται ως η συστηματική μελέτη του χώρου μέσα στον οποίο ζούμε, και η παραγωγή νέου 'χώρου' ο οποίος λειτουργεί ως εργαλείο για να είμαστε ικανοί να κατανοούμε, να περιγράφουμε και να αλληλεπιδρούμε μέσα σ' αυτόν. Το σχήμα και ο χώρος, καθώς είναι δύο πολύ σχετικές έννοιες ως προς το εύρος και το περιεχόμενό τους, καλύπτουν ένα μεγάλο φάσμα, από το πραγματικό περιβάλλον των ορατών και απτών αντικειμένων, μέχρι τις αφηρημένες έννοιες γεωμετρικών οντοτήτων και τις μεταξύ τους σχέσεις.

Πιο αναλυτικά, η Hershkovits (1991) υποστηρίζει, ότι μπορούμε να δούμε τη γεωμετρία τόσο ως 'επιστήμη του χώρου' όσο και ως 'λογική δομή'. Ως 'επιστήμη του χώρου' περιλαμβάνει τη μελέτη και την εφαρμογή εννοιών σε μη-μαθηματικές δραστηριότητες και καθημερινές γεωμετρικές εμπειρίες, όπως, για παράδειγμα, οι πρακτικές μέσα από τις οποίες γεωργοί, μηχανικοί, αρχιτέκτονες, οικοδόμοι, ξυλουργοί, τεχνίτες προσεγγίζουν το χώρο. Πρόκειται για ένα διαισθητικό, ευδιάκριτο και συνδεδεμένο με την πραγματικότητα μέρος της γεωμετρίας. Η προσέγγιση της γεωμετρίας ως 'λογικής δομής' αναφέρεται στο χειρισμό αφηρημένων μαθηματικών δομών. Η προσέγγιση αυτή απαιτεί μια ευρεία αντίληψη για τη γεωμετρία, χωρίς την αναγκαία ύπαρξη ενός πραγματικού περιβάλλοντος ως βάση. Με άλλα λόγια μπορεί να 'δουλεύει' πάνω σε γενικεύσιμες δομές οι οποίες στερούνται της 'κοινωνικής' διερεύνησης των αντικειμένων (π.χ. χρήση των αντικειμένων σε αλληλεπιδραστικά κοινωνικά πλαίσια). Σ' αυτό το πλαίσιο η γεωμετρία αποτελεί τη μελέτη βασικών οντοτήτων του χώρου (σημείο, γραμμή, επίπεδο), των συσχετίσεών τους και των μετασχηματισμών τους, καθώς και των αξιωματικών μαθηματικών συστημάτων που έχουν δημιουργηθεί για να τα

αντιπροσωπεύουν. Έτσι, παρόλο που το σημείο, η γραμμή και το επίπεδο ως αφηρημένες εννοιολογίσεις (κυρίως της ευκλείδειας γεωμετρίας) δεν ανήκουν στην απτή πραγματικότητα, αποτελούν απτά νοητικά εργαλεία στα πλαίσια συγκεκριμένων δραστηριοτήτων οι οποίες μπορεί να εξυπηρετούν άλλοτε προβλήματα καθημερινής ζωής και άλλοτε καθαρά γεωμετρικής φύσης.

Η έρευνα για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας, αν θεωρηθεί η τελευταία ως επιστήμη του χώρου, σχετίζεται άμεσα με την έννοια ‘visualization’, έναν όρο ο οποίος στην ελληνική γλώσσα μπορεί να αποδοθεί ως οπτικοποίηση, οπτική αντίληψη ή με περιγραφικό τρόπο ως ‘σκέψη μέσω οπτικών εικόνων’. Ο Efraim Fischbein, από τους πρωτεργάτες της ομάδας P.M.E (Psychology of Mathematics Education), εργάστηκε πολλά χρόνια πάνω στο φαινόμενο της ‘οπτικοποίησης’ και σχετικά πρόσφατα έχει δώσει τη θεωρία του για τις σχηματικές έννοιες (figural concepts) για τη μελέτη διαδικασιών γεωμετρικής σκέψης. Σύμφωνα με τη θεωρία του, οι σχηματικές έννοιες είναι αφηρημένες, γενικές, ιδανικές, ‘αγνές’ και λογικά διαμορφώσιμες οντότητες. Ακόμη, αντανακλούν και μεταχειρίζονται νοερές αναπαραστάσεις χωρικών ιδιοτήτων (όπως το σχήμα, η θέση του σχήματος στο χώρο). Πολύ συχνά, τα σχήματα τείνουν να διατηρούν και να επιβάλλουν στη λογική διαδικασία τα εμφανή αυστηρά χαρακτηριστικά τους, σύμφωνα με τους γραφικούς περιορισμούς της αναπαράστασης. Συνεπώς, ο εννοιολογικός (αξιωματικός-επαγωγικός) έλεγχος μειώνεται και η διαδικασία επίλυσης ή μετάφρασης καταστρατηγείται. Ο ίδιος σημειώνει σχετικά με τους παράγοντες που επιδρούν στα φαινόμενα της οπτικής αντίληψης ότι: *«οι σχηματικές έννοιες είναι φυσικό προϊόν του ανθρώπινου μυαλού ως έννοιες και εικόνες, ή αναπτύσσονται μόνο ως αποτέλεσμα συστηματικής εξάσκησης; Το πρόβλημα είναι δύσκολο να απαντηθεί, επειδή σε πολλές καταστάσεις η υλική πραγματοποίηση και η νοητική αναπαράσταση αποτελούν μέρη της ίδιας απάντησης»* (Fischbein, 1993, σελ. 139).

Οι χωρικές δεξιότητες (spatial abilities) προσδιορίζονται ως εκείνες οι δεξιότητες που αποκτά ή πρέπει να αποκτήσει το παιδί για να επιλύσει προβλήματα, τα οποία σχετίζονται με τον πραγματικό και νοητό χώρο. Τέτοια προβλήματα είναι ο προσανατολισμός και η απλή κίνηση στο χώρο, η παράκαμψη εμποδίων, η τοποθέτηση αντικειμένων σύμφωνα με κάποιο πλάνο, η ‘ανάγνωση’ τρισδιάστατων ή δισδιάστατων αναπαραστάσεων διαφόρων αντικειμένων του χώρου, κλπ. Η ανάπτυξη χωρικών δεξιοτήτων είναι αναγκαία προϋπόθεση για την συγκρότηση της χωρικής και γεωμετρικής σκέψης. Η Yakimanskaya (1991) υποστηρίζει ότι: *«Η χωρική σκέψη είναι μια μορφή νοητικής δραστηριότητας, η οποία κάνει δυνατή την παραγωγή χωρικών εικόνων (spatial images) και το χειρισμό τους κατά την πορεία επίλυσης ποικίλων πρακτικών και θεωρητικών προβλημάτων»* (σελ. 21). Η ανάπτυξη αυτών των δεξιοτήτων συντελείται μέσα από ποικίλες δραστηριότητες, όπως η φυσική αγωγή, η προσέγγιση των φυσικών φαινομένων, το σχέδιο και η ζωγραφική, καθώς και η επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

Η Yakimanskaya (1991) συζητά τη φύση της χωρικής σκέψης μέσα από διάφορες Σοβιετικές μελέτες και καταλήγει στα εξής:

- Η χωρική σκέψη αναπτύσσεται μέσα από δραστηριότητες όπου το άτομο πρέπει να σχηματίσει τη δική της/του εικόνα, πριν αυτή μπορέσει να χρησιμοποιηθεί λειτουργικά.
- Η δραστηριότητα της χωρικής σκέψης τείνει κυρίως να χειρίζεται χωρικές εικόνες, παρά να τις δημιουργεί.

- Οι αναπαραστάσεις και τα αναπαραστασιακά συστήματα είναι απαραίτητο αλλά σύνθετο συστατικό στοιχείο της χωρικής σκέψης.
- Υπάρχουν πολλές ατομικές διαφορές, σχετικά με τις δεξιότητες χωρικής σκέψης.
- Η χωρική σκέψη είναι δυναμική και απαιτεί μια συνεχή καταγραφή και επεξεργασία εικόνων. Οι εικόνες επεξεργάζονται, συντελώντας στη δημιουργία νέων εικόνων, οι οποίες επανεπεξεργάζονται και η κυκλική διαδικασία συνεχίζεται.

Θα μπορούσαμε να διακρίνουμε ως κύρια χαρακτηριστικά της χωρικής σκέψης τρεις αλληλένδετες διαστάσεις: 1) το σημειωτικό σύστημα, το οποίο εκφράζεται μέσα από γραφικές, γλωσσικές και οπτικές αναπαραστάσεις, 2) το ψυχολογικό του περιεχόμενο, ως μια δραστηριότητα εστιασμένη στο να καταγράφει χωρικές εικόνες ποικίλων βαθμών αφαίρεσης, οπτικοποίησης και γενίκευσης, και 3) τα λειτουργικά τμήματα που απαιτούνται, προκειμένου να επιλυθούν συγκεκριμένα προβλήματα και τα οποία περιλαμβάνουν στοιχεία όπως το σχήμα, το μέγεθος, η χωρική ταξινόμηση στοιχείων και οι σχέσεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στα μέρη και το σύνολο (Chronaki, 1997, σ.60). Όλες μαζί οι παραπάνω διαστάσεις καθορίζουν βασικά μονοπάτια τα οποία αλληλεπιδρούν για την ανάπτυξη της χωρικής σκέψης σε διάφορα επίπεδα κατά τη διαδικασία εκπόνησης δραστηριοτήτων σε διδακτικά πλαίσια.

Η μάθηση λοιπόν της γεωμετρίας και η ανάπτυξη γεωμετρικών/χωρικών δεξιοτήτων ξεκινά όταν τα παιδιά αρχίζουν να 'βλέπουν' και να 'γνωρίζουν' τον περιβάλλοντα φυσικό κόσμο, αλλά και όταν χειρίζονται χωρικές οντότητες ως λειτουργικά τμήματα για την επίλυση προβλημάτων. Αυτή η διαδικασία λαμβάνει χώρο σε ένα σημειωτικό πλαίσιο όπου τα συμφραζόμενα και ο λόγος λειτουργούν διαμεσολαβητικά και νοηματοδοτούν τη δράση των υποκειμένων. Συνεχίζεται σε υψηλότερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης μέσω σύνθετων επαγωγικών διαδικασιών και ενσωματώνεται σε κοινωνικά πλαίσια όπως το σχολείο, η οικογένεια και η δραστηριοποίηση στον εργασιακό και ψυχαγωγικό χώρο.

Ειδικότερα, στο σχολείο τα παιδιά έρχονται αντιμέτωπα με 'τυπικές' δραστηριότητες οι οποίες απαιτούν τον χειρισμό αφηρημένων γεωμετρικών οντοτήτων οι οποίες είναι ελάχιστα (ή καθόλου) συνδεδεμένες με την απτή πραγματικότητα. Πόσο έτοιμα είναι λοιπόν τα παιδιά να αντιμετωπίσουν τον τυπικό λογισμό της γεωμετρίας στις μικρές ηλικίες του νηπιαγωγείου και της πρώτης δημοτικού; Πως ανταποκρίνονται σε έργα τα οποία εκφράζουν τυπική γεωμετρική σκέψη; Με τι είδους προσωπικές εμπειρίες συνεισφέρουν; Τι είδους 'συγκρούσεις' δημιουργούνται μεταξύ αυτών των τυπικών έργων και των δικών τους προσωπικών χωρικών εικόνων και νοημάτων;

Στόχοι και Μεθοδολογία

Έχοντας τα παραπάνω ερωτήματα κατά νου, η παρούσα έρευνα στοχεύει να διερευνήσει την αλληλεπίδραση μεταξύ της χωρικής/γεωμετρικής σκέψης των παιδιών και σειράς έργων τα οποία αποία απαιτούν 'τυπικό' χειρισμό γεωμετρικών οντοτήτων που αφορούν την περίπτωση των τριγώνων. Συγκεκριμένα, η εστίαση βρίσκεται στη διερεύνηση της ικανότητας των παιδιών να χειρίζονται 'ίδια' και 'διαφορετικά' τρίγωνα λαμβάνοντας υπόψη τόσο την σχεδιαστική τους ικανότητα όσο και τους τρόπους που οι μικροί μαθητές και μαθήτριες ερμηνεύουν και

επεξηγούν την προσωπική τους κατανόηση για την έννοια του 'ίδιου' και του 'διαφορετικού' τριγώνου ως γενικεύσιμες χωρικές έννοιες.

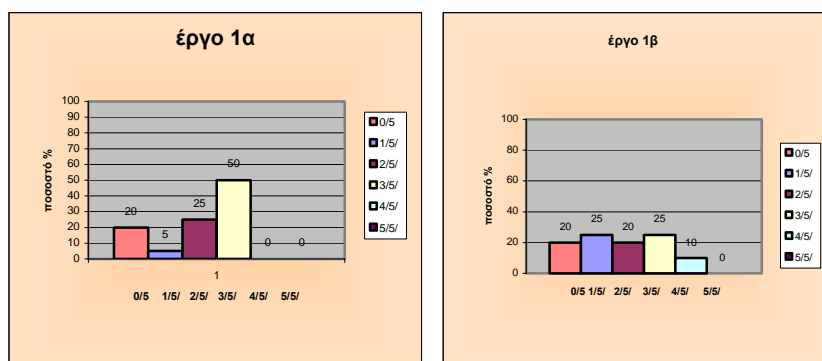
Στην έρευνα πήραν μέρος 20 μαθητές και μαθήτριες της πρώτης τάξης ενός αστικού δημοτικού σχολείου στη πόλη του Βόλου. Από αυτά 11 είναι αγόρια και 9 κορίτσια. Υπήρχαν δύο αλλοδαποί μαθητές, εκ των οποίων ο ένας έδειχνε απόλυτα προσαρμοσμένος στο περιβάλλον και δεν παρουσίαζε γλωσσική δυσκολία. Ο δεύτερος αντιμετώπιζε σοβαρό πρόβλημα λεκτικής επικοινωνίας και έκφρασης και δυσκολευόταν να περιγράψει. Συνήθιζε να απέχει και να σιωπά.

Η μεθοδολογική προσέγγιση ακολούθησε τα εξής στάδια: Πρώτον, ζητήθηκε από τα παιδιά να πάρουν μέρος σε μια σειρά από τυπικά έργα στα οποία έπρεπε να σχεδιάσουν διαφορετικά και ίδια τρίγωνα. Τα έργα που δόθηκαν στα παιδιά ήταν τα εξής: α) Δίδεται ένα τρίγωνο και ζητείται η σχεδίαση πέντε διαφορετικών τριγώνων σε λευκό χαρτί και σε χαρτί με κουκίδες, β) Δίδονται τρία τρίγωνα και ζητείται η σχεδίαση ίδιων τριγώνων (με τα δοσμένα) σε λευκό χαρτί και σε χαρτί με κουκίδες (βλ. παράρτημα 1). Δεύτερον, η δραστηριότητα των παιδιών αναλύθηκε με βάση: α) την ικανότητα τους στη σχεδίαση διαφορετικών και ίδιων τριγώνων σε φυλλάδια εργασίας, και β) τις ερμηνείες που έδωσαν τα παιδιά σχετικά με τις σχεδιαστικές κατασκευές τους.

Οι τεχνικές της εθνογραφικής παρατήρησης και συνέντευξης αποτέλεσαν βασικά εργαλεία σε αυτή τη ποιοτική προσέγγιση (βλ. Pole and Morrison, 2003). Η ποιοτική μεθοδολογία, ως πλαίσιο συλλογής δεδομένων, θεωρείται αρμόζουσα επειδή ο στόχος δεν είναι τόσο η αποτύπωση των γνωστικών ικανοτήτων των παιδιών, όσο, όπως προαναφέρθηκε, η διερεύνηση των νοημάτων που αποδίδουν τα παιδιά στους όρους 'διαφορετικό' και 'ίδιο' αναφορικά με την χωρική έννοια του τριγώνου λαμβάνοντας υπόψη τις ερμηνείες τους κατά την διάρκεια δραστηριοτήτων τυπικού σχεδιασμού.

Συζήτηση αποτελεσμάτων

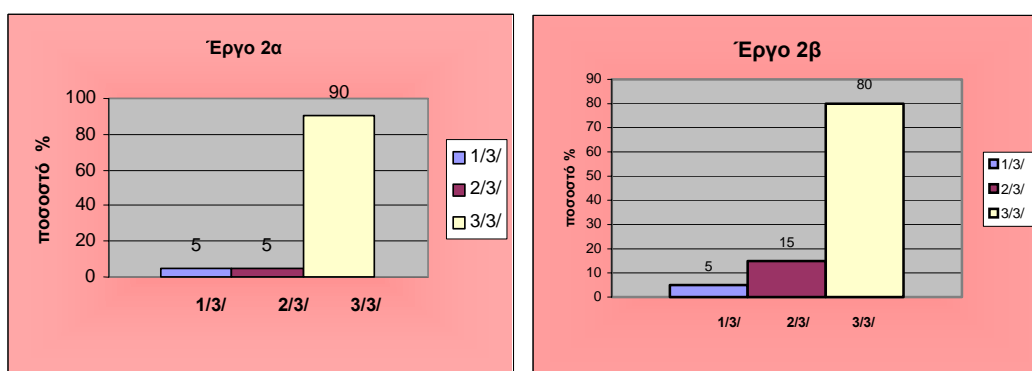
Στα έργα 1α και 1β (βλέπε παράρτημα 1) δίνεται ένα τρίγωνο και ζητείται από τα παιδιά να σχεδιάσουν πέντε διαφορετικά. Ενώ πολλά παιδιά κατάφεραν να σχεδιάσουν μικρό αριθμό τριγώνων διαφορετικό από το δοθέν, δεν μπόρεσαν να σχεδιάσουν με ευκολία τέσσερις ή πέντε διαφορετικές απεικονίσεις τριγώνων. Αυτή η δυσκολία, εκφράστηκε με δυσφορία από τα παιδιά, όπου κάποια αισθάνθηκαν άβολα και με απογοήτευση είπαν: 'Δεν ξέρω να κάνω τρίγωνα πολλά'.



Πίνακας 1&2: Σχεδίαση διαφορετικών τριγώνων (λευκό χαρτί και χαρτί με κουκίδες)

Όπως δείχνουν οι παραπάνω δύο πίνακες, τα περισσότερα παιδιά που δουλεύουν σε λευκό χαρτί (πίνακας 1) ή σε χαρτί με κουκίδες (πίνακας 2) μπορούν να

σχεδιάσουν ένα (5% και 25% αντίστοιχα), δύο (25% και 20% αντίστοιχα) ή τρία (50% και 10% αντίστοιχα) διαφορετικά τρίγωνα. Δεν μπορούν όμως να σχεδιάσουν τέσσερις (0% και στα δύο περιβάλλοντα χαρτιού) ή πέντε (10% και 0% αντίστοιχα) αναπαραστάσεις οι οποίες να ανταποκρίνονται σε χαρακτηριστικές περιπτώσεις οικογενειών τριγώνων (δηλ. ισοσκελές, ισόπλευρο, ορθογώνιο, οξυγώνιο, αμβλυγώνιο). Επίσης, όπως βλέπουμε στους πίνακες υπήρχαν παιδιά (20% και στα δύο περιβάλλοντα) τα οποία δεν κατανόησαν την οδηγία και δεν μπόρεσαν να σχεδιάσουν ούτε ένα διαφορετικό τρίγωνο. Συνολικά, 80% και 70% από τα παιδιά ανταποκρίθηκαν στα έργα. Εδώ, θα πρέπει να τονίσουμε ότι στα σχέδια των παιδιών δεσπόζουν οι στερεότυπες αναπαραστάσεις κυρίως ισοσκελών και ισοπλεύρων τριγώνων.



Πίνακες 3&4: Σχεδίαση ίδιων τριγώνων (λευκό χαρτί και χαρτί με κουκίδες)

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα έργα 1α και 1β, όπου από τα παιδιά ζητήθηκε να σχεδιάσουν πέντε διαφορετικά τρίγωνα, στα έργα 2α και 2β τα παιδιά μοιάζει έχουν άμεση ανταπόκριση (βλ. πίνακες 3 και 4). Στα έργα 2α και 2β δίδονται τρία τρίγωνα και ζητείται από τα παιδιά να σχεδιάσουν τρία ίδια (βλ. παράρτημα 1). Σ' αυτά τα έργα όλα τα παιδιά απαντούν. Συγκεκριμένα, 10% και 5% αντίστοιχα σχεδιάζουν ένα ίδιο τρίγωνο, 10% και 30% αντίστοιχα δύο ίδια τρίγωνα και 80% και 65% αντίστοιχα και τα τρία δοθέντα τρίγωνα.

Που οφείλονται λοιπόν οι παραπάνω διαφορές; Μπορεί κάποιος να πει με σιγουριά ότι τα παιδιά της πρώτης τάξης δημοτικού χειρίζονται πολύ καλύτερα την χωρική έννοια των 'ίδιων' τριγώνων από τη χωρική έννοια των 'διαφορετικών'. Αυτό κατ' επέκταση θα μπορούσε να σημαίνει ότι τα παιδιά διαθέτουν αναπαραστάσεις και χωρικές εικόνες τέτοιες που τους επιτρέπουν να χειρίζονται εικόνες ίδιων τριγώνων και να τις αποτυπώνουν στο χαρτί άλλοτε διαισθητικά και άλλοτε με ακρίβεια μέτρησης. Το ίδιο όμως δεν μπορούμε να ισχυριστούμε για το χειρισμό της έννοιας του 'διαφορετικού'. Με άλλα λόγια, ενώ τα παιδιά ανταποκρίνονται με ασφάλεια στην οδηγία 'φτιάξε ένα ίδιο τρίγωνο', η οδηγία 'φτιάξε ένα διαφορετικό' παραπέμπει το παιδί σε 'άγνωστους χώρους'. Το παιδί μοιάζει να μην μπορεί να χρησιμοποιήσει την φαντασία του και η ελευθερία του 'διαφορετικού' δημιουργεί μπλοκάρισμα στη σκέψη: 'Κυρία, δεν μπορώ να φτιάξω άλλο'.

Εμβαθύνοντας στα σχέδια των παιδιών και συζητώντας μαζί τους, αποκαλύπτεται ότι τα παιδιά αντιλαμβάνονται τη 'διαφορετικότητα' στα τρίγωνα με πολλαπλούς τρόπους. Στα δεδομένα μας εντοπίσαμε τέσσερις τουλάχιστον αποκλίνουσες κατηγορίες της έννοιας του «διαφορετικού» όπου τα παιδιά ερμηνεύουν την έννοια της διαφορετικότητας: α) ιδιοσυγκρασικά, β) με βάση την αίσθηση μορφής, γ) ως ομοιότητα, δ) σε σχέση με τη θέση στο χώρο.

Ιδιοσυγκρασική ερμηνεία της διαφορετικότητας

Σ' αυτή την κατηγορία τα παιδιά (2/20) θεωρούν ως διαφορετικό ένα τρίγωνο όταν είναι διακοσμημένο αισθητικά ή όταν έχει τη μορφή κάποιων προσωπικών τους αντικειμένων. Για παράδειγμα, στην προσπάθειά της η Βασιλική να φτιάξει διαφορετικά τρίγωνα, βάζει κουλουράκια (βλ. εικόνα 1). Για τη Βασιλική η διακόσμηση είναι η αιτία που κάνει τα τρίγωνα διαφορετικά και όχι τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες τους.

Βασιλική: Αυτό σκέφτηκα..... αυτό το τρίγωνο.

Ερευνήτρια: Κι αυτό που έχει πάνω, τι είναι;

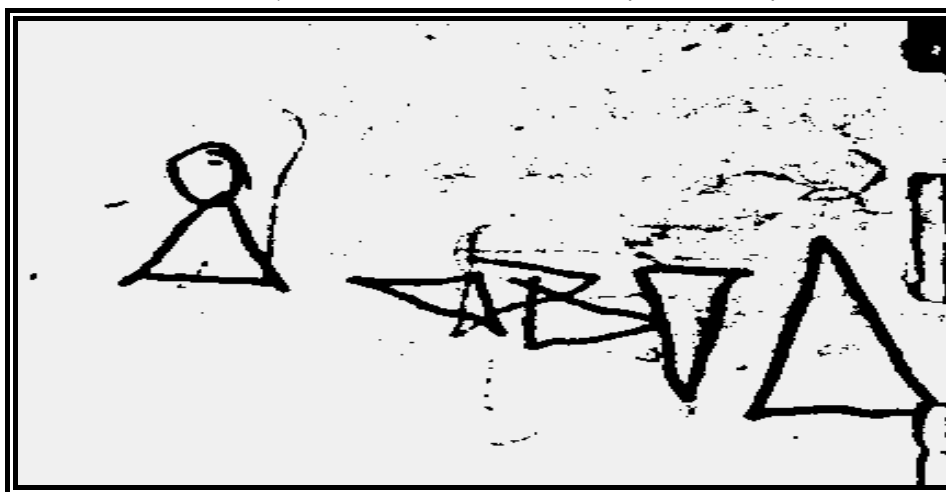
Βασιλική: Ένα κουλουράκι.

Ερευνήτρια: Ένα τρίγωνο με ένα κουλουράκι;

Μάλιστα. Έχουν κάτι άλλο διαφορετικό εκτός από το σχέδιο;

Βασιλική: Αυτό δεν ταιριάζει μ' αυτό, γιατί αυτό δεν έχει κουλουράκι.

Απόσπασμα 1: [Κ.Μ 264-269, Βασιλική, συνέντευξη]



Εικόνα 1: Η διαφορετικότητα ως διακόσμηση

Η ερμηνεία της διαφορετικότητας με βάση την αίσθηση μορφής

Η διαφορετικότητα κάποιες φορές εκφράζεται με βάση τη μορφή των σχημάτων. Τα παιδιά (7/20 παιδιά) εστιάζουν στο περίγραμμα του σχήματος και στην αίσθηση που τους προκαλεί (π.χ. είναι σαν γυαλί λαμπερό, είναι μυτερό). Οι περιγραφές τους είναι γεμάτες μεταφορές. Στο παρακάτω απόσπασμα, ο Γιάννης ισχυρίζεται, ότι ο ρόμβος που έχει φτιάξει είναι τρίγωνο και το δηλώνει με σιγουριά. Κοιτάζει όμως μόνο το πάνω μέρος και το συγκρίνει με άλλα τρίγωνα. Για να διαπιστώσει ότι είναι τρίγωνο, περνά και το δάχτυλο του πάνω από το μισό ρόμβο. Ο μισός ρόμβος μοιάζει με ισόπλευρο τρίγωνο.

Ερευνήτρια: Και τι έχει διαφορετικό από τα προηγούμενα;

Γιάννης: Είναι ανάποδα.

Ερευνήτρια: Και το δίπλα είναι τρίγωνο, έτσι; Πόσες γωνίες έχει;

Γιάννης: Τέσσερις.

Ερευνήτρια: Μα, πως γίνεται τα υπόλοιπα να έχουν τρεις και αυτό να έχει τέσσερις;

Γιάννης:

Ερευνήτρια: Είσαι σίγουρος ότι δεν το λένε κάπως αλλιώς, ε; Είσαι σίγουρος;

Γιάννης: Ναι.
Ερευνήτρια: Ωραία και τι έχει διαφορετικό αυτό το τρίγωνο από τα υπόλοιπα;
Γιάννης: Είναι έτσι..
Ερευνήτρια: Πως;
Γιάννης: Σαν ένα γυαλί λαμπερό.

Απόσπασμα 2: [Κ.Μ. 3773-3784, Γιάννης, συνέντευξη]

Στο ίδιο πλαίσιο κινείται και η Εύα και ο Λαέρτης, όπως φαίνεται στα παρακάτω αποσπάσματα 3 και 4.

Ερευνήτρια: Κοίταξε τα τρίγωνά σου και προσπάθησε να κάνεις κάτι άλλο. Που να μην τους μοιάζει! Προσπάθησε κι ότι βγει, ναι;
Εύα: Κ:.....
Ερευνήτρια: Πώς είναι αυτό το τρίγωνο, τι έχει;
Εύα: Πετάει λίγο η γωνία.
Ερευνήτρια: Ωραία, κάνε ένα τρίγωνο, λίγο διαφορετικό από αυτό. Έλα προσπάθησε να κάνεις ένα τρίγωνο και βλέπουμε,
ε;
Εύα: Θα προσπαθήσω να κάνω ένα τέτοιο, χωρίς να πετάξει η μύτη.
Απόσπασμα 3 [Κ.Μ. 2725-2728, Εύα, συνέντευξη]

Ερευνήτρια: Τι έχουνε διαφορετικό, δηλαδή;
Λαέρτης: Αυτό είναι πολύ λεπτό, αυτό είναι χοντρό, αυτό είναι λίγο πιο μεγάλο και λίγο φαρδύ και αυτό...είναι μικρό.
Ερευνήτρια: Έχουν τίποτα άλλο διαφορετικό;
Λαέρτης: Όχι.
Απόσπασμα 4 [Κ.Μ. 3479-3281, Λαέρτης, συνέντευξη]

Η διαφορετικότητα ως ομοιότητα

Η διαφορετικότητα ερμηνεύεται άλλες φορές ως ομοιότητα. Συγκεκριμένα 8/20 παιδιά σχεδιάζουν τρίγωνα τα οποία ενώ είναι διαφορετικά στο μέγεθος, είναι μεταξύ τους όμοια. Για παράδειγμα, ενώ ο Σάκης [στο επεισόδιο 10] μιλάει για γωνία και σχήμα, στην πραγματικότητα αναφέρεται στο μέγεθος, καθώς τα τρίγωνα που έχει φτιάξει είναι όλα ισόπλευρα.

Ερευνήτρια: Ωραία. Για πρόσεξε, είναι διαφορετικά αυτά τα τρίγωνα; Τι έχουν διαφορετικό;
Σάκης: Αυτό είναι έτσι και αυτό είναι έτσι..
Ερευνήτρια: Πως δηλαδή είναι;
Σάκης: Αυτό δεν έχει κάποια μύτη κοφτερή..
Ερευνήτρια: Το πρώτο δεν έχει δηλαδή κοφτερή μύτη, μάλιστα. Διαφέρουν κάπου αλλού; Έχουν κάτι άλλο διαφορετικό;
Σάκης: Αυτό.(το δεύτερο) γιατί δεν είναι έτσι, δεν είναι ίδιο.
Ερευνήτρια: Πως είναι δηλαδή, γιατί δεν καταλαβαίνω;

Σάκης: Αυτό δεν είναι όπως κι αυτό.
 Ερευνήτρια: Τι εννοείς;
 Σάκης: Τρίγωνο.
 Ερευνήτρια: Είναι τρίγωνο;
 Σάκης: Δεν ξέρω να κάνω τρίγωνα πολλά.
 Ερευνήτρια: Έκανες τρίγωνα, απλά θέλω να μου πεις αυτό σε τι διαφέρει από αυτό, γιατί δεν κατάλαβα.
 Σάκης: Εννοώ ότι δεν έχουν το ίδιο σχήμα.
 Ερευνήτρια: Τι άλλο έχουν διαφορετικό αυτά τα τρίγωνα που σχεδίασες;
 Σάκης: Αυτό είναι πιο μεγάλο από αυτό, αυτό είναι πιο μικρό και αυτό είναι πιο μεγάλο. Δεν είναι ίδια.

Απόσπασμα 5 [Κ.Μ 624-627, Σάκης, συνέντευξη]

Χαρακτηριστική είναι επίσης, η περίπτωση του Πάρη, όπου θα μπορούσε κανείς να παίξει με τα τρίγωνα που έφτιαξε το παιχνίδι με τις Μπάμπουσκες, να βάλει δηλαδή το ένα τρίγωνο μέσα στο άλλο (βλ. εικόνα 3).

Ερευνήτρια: Είναι διαφορετικά τα τρίγωνα αυτά μεταξύ τους;
 Πάρης: Ναι.
 Ερευνήτρια: Τι έχουν διαφορετικό;
 Πάρης:αυτό είναι πολύ μεγάλο, αυτό είναι λίγο πιο μικρό, αυτό πιο μικρό, αυτά είναι πάλι μικρό και αυτό πιο μικρό απ' όλα.
 Ερευνήτρια: Έχουν κάτι άλλο διαφορετικό;
 Πάρης: Όχι.

Απόσπασμα 6 [Κ.Μ.2511-2512, Πάρης, συνέντευξη]

Η διαφορετικότητα ως θέση στο χώρο

Σ' αυτή την κατηγορία τα παιδιά (5/20) ερμηνεύουν ως διαφορετικά τα τρίγωνα που απλά έχουν άλλη θέση (διεύθυνση και φορά) πάνω στο χωρίο του λευκού χαρτιού ή του χαρτιού με κουκίδες. Για παράδειγμα ένα ισόπλευρο τρίγωνο σχεδιάζεται ξανά με τρόπο που η κορυφή του να «κοιτά» σε άλλη κατεύθυνση. Από το διάλογο που ακολουθεί, φαίνεται ότι η Ιωάννα πιστεύει ότι τα τρίγωνα που σχεδίασε δεν μοιάζουν, γιατί «είναι αλλιώς», εννοώντας ότι είναι τοποθετημένα αλλιώς.

Ερευνήτρια: Ωραία, είναι διαφορετικά μεταξύ τους;
 Ιωάννα: Ναι.
 Ερευνήτρια: Γιατί τι έχουν διαφορετικό;
 Ιωάννα: Δεν είναι ίδια!
 Ερευνήτρια: Τι έχουν διαφορετικό και δεν μοιάζουν;
 Ιωάννα: Είναι αλλιώς, δε μοιάζουν.

Απόσπασμα 7 [Κ.Μ. 1857-1862, Ιωάννα, συνέντευξη]

Συμπεράσματα

Με βάση τα παραπάνω, θα μπορούσαμε να αναφερθούμε συμπερασματικά στα εξής σημεία: Πρώτον, τα παιδιά έχουν μεγαλύτερη δυσκολία στην έννοια του 'διαφορετικού' όσον αφορά στη γεωμετρική οντότητα του 'τριγώνου'. Αυτό σημαίνει ότι η δυσκολία στη σχεδίαση πολλών περιπτώσεων τριγώνων σχετίζεται με τη δυνατότητα που έχουν τα παιδιά στη διάθεση και στο χειρισμό πολλαπλών αναπαραστάσεων ή χωρικών εικόνων για τα τρίγωνα. Το 'τρίγωνο' στο μυαλό των παιδιών, αλλά και στο απτό περιβάλλον, συνήθως απεικονίζεται μονοσήμαντα και στερεότυπα και οι πλέον συνηθισμένες 'εικόνες' τριγώνων είναι αυτές των ισοσκελών και των ισοπλεύρων. Οι οπτικές εμπειρίες των παιδιών συνήθως δεν περιλαμβάνουν περιπτώσεις αμβλυγώνιων ή οξυγώνιων τριγώνων. Αν και γνωρίζουν τυπικά ότι το τρίγωνο έχει 'τρεις πλευρές και τρεις γωνίες' (Hill, 1987) δεν είναι σε θέση να γενικεύσουν αυτή τη πρόταση. Σ' αυτό συντελούν έντονα και τα σχολικά εγχειρίδια, όπου οι κυριότερες αναπαραστάσεις που συναντούνται είναι αυτές του ισοπλεύρου τριγώνου (βλ. Σκουμπουρδή, 2003). Το γεγονός αυτό συντελεί στην ταύτιση του ισοπλεύρου τριγώνου με την έννοια του τριγώνου. Μέσα από τη δική μας δουλειά σκιαγραφούνται οι ερμηνείες των παιδιών για τα σκαληνά, τα οξυγώνια ή τα αμβλυγώνια, περιπτώσεις τριγώνων που για τα παιδιά παύουν να είναι τρίγωνα.

Δεύτερον, οι ερμηνείες των παιδιών για τη χωρική έννοια του τριγώνου είναι πλούσια σε προσωπικές εκτιμήσεις οι οποίες εκφράζονται σχεδιαστικά και λεκτικά με υποκειμενικό τρόπο. Χαρακτηριστικά αναφερόμαστε στο μεταφορικό λόγο που χρησιμοποιούν τα παιδιά (βλέπε παραπάνω αποσπάσματα) για να μιλήσουν για τα χαρακτηριστικά ορισμένων τριγώνων (π.χ. 'σαν ένα γυαλί λαμπερό', '...χωρίς να πετάζει η μύτη', '...έχει κάποια μύτη κοφτερή'). Αυτός ο λόγος έχει μεγάλη σημασία για τα παιδιά γιατί αποτελεί την εργαλειοθήκη η οποία λειτουργεί με στόχο να προσδώσει 'ακρίβεια' στις επεξηγήσεις τους. Παρόλες τις ασάφειες και την γενικότητα του αποτελεί τη βάση για την επικοινωνία μεταξύ παιδιού, χωρικών και γεωμετρικών οντοτήτων και του ενήλικα που έχει το ρόλο ερευνητή ή εκπαιδευτή. Η ακρίβεια αυτή έρχεται σε 'σύγκρουση' με την 'ερευνητική' ή 'εκπαιδευτική' ματιά η οποία προβάλλεται στα εγχειρίδια, στα αναλυτικά προγράμματα, ή στις στοχοθεσίες ερευνητικών εφαρμογών και η οποία συνήθως αποτελεί ενσάρκωση φορμαλισμού.

Τρίτον, η 'ακρίβεια' έρχεται σε αντιπαράθεση με τη 'διαίσθηση' των παιδιών σε αυτές τις ηλικίες για το τι μπορεί να είναι 'ίδιο' ή 'διαφορετικό'. Για παράδειγμα, σε πολλές γεωμετρικές δραστηριότητες τα παιδιά καλούνται να χρησιμοποιήσουν τετραγωνισμένο χαρτί ή χαρτί με κουκίδες (βλ. διδακτικά εγχειρίδια). Ο στόχος είναι να δοθεί ένα πλαίσιο όπου το παιδί θα εξασκηθεί στο μετρικό χειρισμό του χώρου και των σχημάτων. Τα πλαίσια αυτά όμως αποτελούν 'πολιτισμικά εργαλεία' με τα οποία τα παιδιά δεν είναι τόσο εξοικειωμένα όσο με το λευκό χαρτί. Άλλες φορές λειτουργούν περιοριστικά στις απόπειρές τους να σχεδιάσουν διαισθητικά. Εάν συγκρίνει κανείς τους πίνακες 1 και 3 με τους πίνακες 2 και 4 μπορεί να διαπιστώσει, ότι τα παιδιά δυσκολεύονται περισσότερο να κατασκευάσουν τρίγωνα (έστω και στερεότυπα) στο χαρτί με τις κουκίδες (πίνακες 2 και 4), όπου το ποσοστό συμβατών αναπαραστάσεων μειώνεται αισθητά σε σχέση με αυτό στο λευκό χαρτί. Πολλές φορές μπερδεύονται και φτιάχνουν τετράγωνα, θεωρώντας πως όλες οι γραμμές πρέπει να ακουμπάνε σε τελείες. Χαρακτηριστικά είναι τα παρακάτω αποσπάσματα:

Ερευνήτρια: *Ακόμη ένα, να είναι διαφορετικό ε;*

Σάκης: *Ναι. Η τελίτσα πάει έτσι. Άμα κάνω κι ένα προς τα κάτω.. έτσι κι έτσι ..δεν μπορώ γιατί είναι οι τελίτσες, λες και πάει έτσι σαν κι αυτό.*

Ερευνήτρια: Δοκίμασε, να φτιάξεις κάτι άλλο.

Σάκης: Δεν ξέρω. Να.

Απόσπασμα 8: [Κ.Μ. 646-649, Σάκης, συνέντευξη]

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Chronaki, A. 1997. Case Studies in the Teaching of Mathematics through the Use of Art-Based Activities. Unpublished PhD Dissertation. University of Bath, Bath, UK.
- Hershkovits, R. 1990. Psychological Aspects of Learning Geometry. In P. Nesher and J. Kilpatrick (eds.) Mathematics and Cognition. Cambridge University Press.
- Pole, C. and Morrison, M. 2003. Ethnography for Education. Open University Press.
- Yakimanshkaya, I. S. 1991, The Development of Spatial Thinking in SchoolChildren. In Soviet Studies in Mathematics, Vol. V. NCTM, Reston Virginia, US.
- Σκουμπουρδή, Χ. 2003. Μορφές Εικονικής Αναπαράστασης της Έννοιας του Τριγώνου στα Μαθηματικά του Δημοτικού Σχολείου. Στο Δ. Χασάπης (επιμ..) Εικόνα, Σχήμα και Λόγος στη Διδασκαλία των Μαθηματικών (σελ. 105-124).