Ο Ρόλος της Αριθμητικής Γραμμής στην Αξιολόγηση της Ανάπτυξης της Έννοιας του Κλάσματος ως Αριθμού-Μέτρου

Χαράλαμπος Γ. Χαραλάμπους[1] και Δήμητρα Πίττα-Πανταζή[2]
[1]University of Michigan, [2]Πανεπιστήμιο Κύπρου
[1]chcharal@umich, [2]dpitta@ucy.ac.cy

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια έχει επισημανθεί ο ρόλος που μπορεί να διαδραματίσει η αριθμητική γραμμή στην ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου. Ωστόσο, διάφοροι ερευνητές υπογραμμίζουν ότι η τοποθέτηση κλασματικών αριθμών στην αριθμητική γραμμή δεν αποτελεί επαρκή συνθήκη για την κατανόηση της προαναφερθείσας έννοιας. Η παρούσα έρευνα επιχειρεί να εξετάσει το ρόλο της αριθμητικής γραμμής στην ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου, αξιοποιώντας τις απαντήσεις 672 μαθητών Ε΄ και Στ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου σε εννέα έργα που σχετίζονται είτε με την αριθμητική γραμμή είτε προτάθηκαν από διάφορους ερευνητές για τη μελέτη του βαθμού στον οποίο οι μαθητές έχουν κατανοήσει την έννοια του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου. Από την κλίμακα ιεράρχησης των έργων που προέκυψε με τη χρήση τεχνικών από τη σύγχρονη θεωρία μέτρησης (IRT) βρέθηκε ότι η επιτυχία σε έργα αριθμητικών γραμμών αποτελεί καθοριστικό παράγοντα ανάπτυξης της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου. Ωστόσο, από την ανάλυση χαρακτηριστικών λαθών των μαθητών στα έργα αυτά φάνηκε ότι η αριθμητική γραμμή μπορεί να διαδραματίσει καταλυτικό ρόλο στην ανάπτυξη της υπό εξέταση έννοιας όταν οι μαθητές αντιληφθούν τη διαφορά των κλασμάτων από τους ακέραιους αριθμούς και καταστούν ικανοί να συγκρίνουν κλασματικούς και ακέραιους αριθμούς.

Λέξεις κλειδιά

Αριθμητική γραμμή, κλάσμα ως αριθμός-μέτρο, σύγχρονες θεωρίες μέτρησης, μοντέλο δύο παραμέτρων.

Εισαγωγή

Τα κλάσματα αποτελούσαν ανέκαθεν μια από τις πιο δυσνόητες έννοιες για τους μαθητές του δημοτικού σχολείου (Boulet, 1999· Behr, Harel, Post & Lesh, 1993). Αν και έχουν προταθεί διάφορες αιτίες για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εκμάθηση των κλασμάτων, τις τελευταίες τρεις δεκαετίες γίνεται αποδεκτό ότι οι δυσκολίες αυτές οφείλονται κυρίως στο γεγονός ότι για να κατανοήσουν επαρκώς τα κλάσματα οι μαθητές χρειάζεται να έχουν οικοδομήσει πέντε επιμέρους έννοιες - το κλάσμα ως μέρος του όλου, ως αριθμός-μέτρο, ως τελεστής, ως πηλίκο και ως λόγος- καθώς και το πώς αυτές οι έννοιες συνδέονται μεταξύ τους. Η ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου θεωρείται μια από τις δυσκολότερες έννοιες για τους μαθητές, αφού για να αναπτύξουν την έννοια αυτή χρειάζεται να αναθεωρήσουν την αριθμοθεωρία που έχουν ήδη οικοδομήσει, αναγνωρίζοντας ότι μεταξύ των ακέραιων αριθμών μπορούν να υπάρξουν και άλλοι αριθμοί (Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger, 1987· Stafylidou & Vosniadou, 2004). Παρ' όλες τις δυσκολίες ανάπτυξης της συγκεκριμένης έννοιας, είναι γενικά αποδεκτό ότι η οικοδόμησή της είναι θεμελιακή για την κατανόηση των κλασμάτων (Sowder, Bezuk, & Sowder, 1993). Για αυτό αρκετοί ερευνητές (π.χ., Hannula, 2003· Lamon, 1999·

Marshall, 1993) μελέτησαν διάφορους τρόπους ανάπτυξης της συγκεκριμένης έννοιας, κάνοντας αναφορά σε διάφορα έργα και αναπαραστατικά μοντέλα που δυνατό να αξιοποιηθούν για την κατάκτηση της έννοιας αυτής. Κεντρικό ρόλο στα έργα αυτά κατέχει η αριθμητική γραμμή.

Η αριθμητική γραμμή ως μοντέλο διδασκαλίας και αξιολόγησης της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου

Ενδεικτικό του κεντρικού ρόλου της αριθμητικής γραμμής ως μοντέλου διδασκαλίας και αξιολόγησης της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου αποτελεί το γεγονός ότι το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται ακόμα και για τον ορισμό της υπό εξέταση έννοιας. Συγκεκριμένα, η Marshall (1993) επισημαίνει ότι η έννοια του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου αφορά στην περίπτωση εκείνη κατά την οποία ένα εναδικό κλάσμα (1/α) χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης μιας απόστασης. Για το σκοπό αυτό δίνεται συνήθως στους μαθητές μια αριθμητική γραμμή και τους ζητείται να καθορίσουν το μέτρο μιας απόστασης από το μηδέν, χρησιμοποιώντας το κλάσμα αυτό. Η αξία του κλάσματος στην οποία καταλήγουν οι μαθητές αποτελεί τη μια πτυχή της έννοιας (τον αριθμό), ενώ η απόσταση στην αριθμητική γραμμή τη δεύτερη πτυχή της έννοιας (το μέτρο).

Έχει υποστηριχτεί ότι για να αναπτύξουν οι μαθητές την έννοια του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου χρειάζεται αφενός να έχουν την ικανότητα να διαμερίζουν ένα διάστημα σε ίσα μέρη και, αφετέρου, να έχουν οικοδομήσει διαισθητικά τις ιδιότητες της αναλογικής κλίμακας (Hannula, 2003· Marshall, 1993· Sowder et al., 1993). Συγκεκριμένα, όταν δίνεται στους μαθητές ένα γραμμικό μοντέλο στο οποίο καθορίζονται τα σημεία 0 και 1 θα πρέπει να είναι ικανοί να μοιράζουν την απόσταση μεταξύ των δύο αριθμών σε τόσα κομμάτια όσα είναι ο παρονομαστής του δοθέντος κλάσματος. Επιπρόσθετα, θα πρέπει να έχουν κατανοήσει ότι μια απόσταση που απέχει δύο διαστήματα από το μηδέν είναι διπλάσια από μια άλλη που απέχει μόνο ένα διάστημα.

Δεδομένου ότι το μοντέλο της αριθμητικής γραμμής έχει τη δυνατότητα να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τις πιο πάνω έννοιες και δεξιότητες, υποστηρίζεται ότι η ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν την αριθμητική γραμμή για την αναπαράσταση των κλασματικών αριθμών αποτελεί ένδειξη της κατάκτησης της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου (Baturo & Cooper, 1999· Bright, Behr, Post & Wachsmuth, 1988· Keijzer & Terwel, 2003· Siegal & Smith, 1997). Οι ερευνητές τεκμηριώνουν τη θέση τους υποστηρίζοντας ότι η αριθμητική γραμμή, σε αντίθεση με τα υπόλοιπα γραμμικά μοντέλα:

- δεν έχει συγκεκριμένο μήκος (εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις), γεγονός που αναγκάζει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν ένα συγκεκριμένο κομμάτι της ως το όλο και να διαχωρίσουν το κομμάτι αυτό σε αριθμό κομματιών ίσο με τον παρονομαστή του κλάσματος
- μπορεί να εκληφθεί ως ένας αριθμημένος χάρακας, αφού στην αριθμητική γραμμή το μέγεθος της μονάδας παρουσιάζεται μέσω ενός ευθύγραμμου τμήματος, το οποίο, όχι μόνο μπορεί να επιμεριστεί σε συγκεκριμένο αριθμό κομματιών, αλλά επιπρόσθετα κάθε κομμάτι μπορεί να επιμεριστεί σε μικρότερο αριθμό κομματιών

Υπερθεματίζοντας, ο Hannula (2003) υποστηρίζει ότι η ικανότητα των μαθητών να τοποθετούν κλάσματα στην αριθμητική γραμμή αποτελεί ένδειξη της σύγκλισης των διάφορων εννοιών του κλάσματος, στοιχείο που θεωρείται απαραίτητο για τη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων (Lamon, 1999). Ως εκ τούτου, διάφοροι ερευνητές υποστηρίζουν ότι η αριθμητική γραμμή αποτελεί κατάλληλο αξιολογικό εργαλείο για τον εντοπισμό των δυσκολιών και των παρανοήσεων των μαθητών αναφορικά με διάφορες έννοιες του κλάσματος (Keijzer & Terwel, 2003· Ni, 2001· Siegal & Smith, 1997).

Ωστόσο, άλλοι ερευνητές επισημαίνουν ότι οι μαθητές συναντούν ποικίλες δυσκολίες στη χρήση της αριθμητικής γραμμής (Behr et al., 1983· Bright et al., 1988· Gagatsis et al., 2003). Για παράδειγμα, έχει επισημανθεί ότι για να καταστούν οι μαθητές ικανοί να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά την αριθμητική γραμμή πρέπει να είναι σε θέση να επεξεργάζονται ταυτόχρονα δύο διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων (συμβολικές και εικονικές). Επιπρόσθετα, υποστηρίζεται ότι κατά την αξιοποίηση των αριθμητικών γραμμών οι μαθητές: (α) δυσκολεύονται να εντοπίσουν τον αριθμό ένα, ειδικότερα όταν χρησιμοποιούν αριθμητικές γραμμές από το μηδέν μέχρι το δύο, (β) δυσκολεύονται να τοποθετήσουν έναν κλασματικό αριθμό στην αριθμητική γραμμή, όταν οι υποδιαιρέσεις της αριθμητικής γραμμής είναι πολλαπλάσιες ή υποπολλαπλάσιες του παρονομαστή του κλάσματος και (γ) μετρούν τα διακριτά διαχωριστικά σημεία της αριθμητικής γραμμής και όχι τα διαστήματα στα οποία χωρίζεται η αριθμητική γραμμή με τη χρήση των διαχωριστικών αυτών σημείων. Τα αποτελέσματα πρόσφατων ερευνών (Baturo & Cooper, 1999· Kyriakides & Charalambous, 2002· Newstead & Olivier, 1999) ενισχύουν τις διαπιστώσεις αυτές.

Η δυσκολία χρήσης της αριθμητικής γραμμής δεν αποτελεί, όμως, το μοναδικό σημείο αμφισβήτησης της καταλληλότητας της αριθμητικής γραμμής ως μοντέλου ανάπτυξης της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου. Η Lamon (1999) και η Sowder και οι συνεργάτες της (1993), για παράδειγμα, υπογραμμίζουν ότι η επιτυχία σε έργα χειρισμού της αριθμητικής γραμμής δεν αποτελεί επαρκή ένδειξη για την κατάκτηση της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου. Αντίθετα, για να θεωρούνται οι μαθητές ότι κατέχουν την έννοια αυτή θα πρέπει, σύμφωνα με τους ερευνητές, να μπορούν να: (α) καθορίζουν το σχετικό μέγεθος δύο κλασμάτων (π.χ. 3/4<4/5), (β) να σειροθετούν κλάσματα χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα κλάσματα ως σημεία αναφοράς (π.χ. το 1/5<3/4, αφού 1/5<1/2), και (γ) να καθορίζουν κλάσματα που η αξία τους είναι μεταξύ δύο άλλων κλασμάτων (π.χ. να εντοπίζουν τρία κλάσματα που είναι μικρότερα από το 1/3 και μεγαλύτερα από το 1/4).

Ερευνητικά ερωτήματα

Παρ' όλες τις αμφιβολίες που υπάρχουν αναφορικά με την καταλληλότητα της αριθμητικής γραμμής ως αναπαραστατικού μοντέλου για την ανάπτυξη και αξιολόγηση της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου, και παρόλο που έχουν προταθεί διάφορα έργα για την εξέταση της κατάκτησης της έννοιας αυτής, μέχρι σήμερα δεν έχει διερευνηθεί ο βαθμός στον οποίο τα πιο πάνω προτεινόμενα έργα, όπως και έργα σχετικά με την αριθμητική γραμμή μπορούν να συγκροτήσουν μια ιεραρχική κλίμακα αξιολόγησης της υπό εξέτασης έννοιας. Επιπρόσθετα, δεν έχει εξεταστεί ο σχετικός βαθμός δυσκολίας των έργων αυτών. Αναγνωρίζοντας το κενό αυτό, η παρούσα έρευνα αποσκοπεί να δώσει απαντήσεις στα πιο κάτω ερωτήματα:

(1) Σε ποιο βαθμό έργα που προτάθηκαν κατά καιρούς για την ανάπτυξη και αξιολόγηση της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού μπορούν να αποτελέσουν μια ιεραρχική κλίμακα η οποία να παρουσιάζει καλές ψυχομετρικές ιδιότητες;

(2) Αν μπορεί να αναπτυχθεί μια τέτοια κλίμακα, ποια η συνεισφορά των έργων που σχετίζονται με την αριθμητική γραμμή στην ανάπτυξη της κλίμακας αυτής και κατ' επέκταση στην ανάπτυξη και αξιολόγηση της υπό εξέταση έννοιας;

Μεθοδολογία

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας που στόχο είχε να εξετάσει το βαθμό στον οποίο οι μαθητές των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου είχαν αναπτύξει τις πέντε διαφορετικές έννοιες του κλάσματος. Η έρευνα διεξήχθη το 2004 και σε αυτή συμμετείχαν 672 μαθητές δέκα δημοτικών σχολείων, εκ των οποίων 351 φοιτούσαν στην Ε΄ τάξη και 321 στην Στ΄ τάξη (316 αγόρια και 356 κορίτσια). Στην παρούσα μελέτη επικεντρωνόμαστε σε εννέα από τα έργα που χορηγήθηκαν στους μαθητές τα οποία αφορούσαν στην έννοια του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου. Συγκεκριμένα από τους μαθητές ζητήθηκε να: (α) τοποθετήσουν τον αριθμό ένα σε δύο αριθμητικές γραμμές, μια που περιλάμβανε τους αριθμούς 0 και 5/9 (έργο 1) και μια που παρουσίαζε τους αριθμούς 0 και 2 ¼ (έργο 2), (β) βρουν ένα κλάσμα μεταξύ του 1/8 και του 1/9 (έργο 3), (γ) ελέγξουν την ορθότητα μιας δήλωσης σύμφωνα με την οποία το κλάσμα 2/3 είναι αριθμός (έργο 4) και να αναγνωρίσουν από μια σειρά αριθμών και συμβόλων κατά πόσο οι κλασματικοί αριθμοί 2/5 και 1 4/5 είναι αριθμοί (έργα 5 και 6), (δ) τοποθετήσουν σε αριθμητική γραμμή, η οποία περιλάμβανε τους αριθμούς 0 και 1/4 και ήταν χωρισμένη σε διαστήματα του 1/8, τους αριθμούς 3/4 και 7/8 (έργα 7 και 8) και (ε) να επιλέξουν μεταξύ τεσσάρων κλασμάτων (2/3, 3/4, 4/5 και 5/6) εκείνο που είναι πιο κοντά στο 1 (έργο 9). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ανάλογα έργα αξιοποιήθηκαν σε προγενέστερες έρευνες και μελέτες (Hannula, 2003· Lamon, 1999· Sowder et al., 1993).

Οι απαντήσεις των μαθητών κωδικοποιήθηκαν με βάση διχοτομική κλίμακα (σωστό-λάθος). Συγκεκριμένα, στα πρώτα δύο έργα θεωρήθηκαν σωστές μόνο οι απαντήσεις στις οποίες ο αριθμός 1 τοποθετείτο σε θέση που έδειχνε ότι οι μαθητές είχαν λάβει υπόψη τους τη σχετική απόσταση ανάμεσα στους δύο αριθμούς που περιλαμβάνονταν στην κλίμακα. Στο τρίτο έργο θεωρήθηκαν σωστές απαντήσεις στις οποίες οι μαθητές εντόπιζαν ένα κλάσμα μεταξύ του 1/8 και του 1/9, ανεξάρτητα από την πορεία που ακολουθούσαν για να βρουν το κλάσμα αυτό (π.χ. ισοδύναμα κλάσματα, χρήση αριθμητικής γραμμής, κλάσμα με παρονομαστή μεταξύ του 8 και του 9 κτλ). Στην περίπτωση των υπόλοιπων έξι έργων οι μαθητές είτε εντόπιζαν τη σωστή απάντηση είτε όχι. Για την ανάπτυξη της κλίμακας ικανοτήτων χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές από τη σύγχρονη θεωρία μέτρησης (Item Response Theory-IRT). Η χρήση σύγχρονων θεωριών μέτρησης κρίθηκε αναγκαία, αφού χρειαζόταν να διαχωριστούν τα χαρακτηριστικά των μαθητών από τα χαρακτηριστικά των έργων, ώστε η ιεράρχηση των έργων στην κλίμακα που θα προέκυπτε και η σχετική συνεισφορά τους να μην επηρεαζόταν από τις ικανότητες των συγκεκριμένων μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα (Hambleton, Swaminathan & Rogers, 1991). Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με το στατιστικό πακέτο BILOG-MG (Zimowski, et al., 1996). Συγκεκριμένα, εξετάστηκε κατά πόσο τα δεδομένα μπορούσαν να περιγραφούν επαρκώς είτε από ένα μοντέλο μιας παραμέτρου είτε από ένα μοντέλο δύο παραμέτρων. Η διαφορά των δύο μοντέλων έγκειται στο ότι στη δεύτερη περίπτωση τα έργα έχουν διαφορετικό δείκτη διάκρισης (item discrimination), γεγονός που υποδηλοί ότι τα έργα έχουν διαφορετική συνεισφορά στην ανάπτυξη της κλίμακας, αφού έργα με ψηλότερο δείκτη διάκρισης μπορούν να διαχωρίσουν καλύτερα τα υποκείμενα της έρευνας σε διαφορετικά επίπεδα, ανάλογα με τις ικανότητές τους.

Αποτελέσματα

Ανάπτυξη της κλίμακας της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται ο βαθμός δυσκολίας των εννέα έργων (β), ο δείκτης διάκρισής τους (α) και τα τυπικά σφάλματα (SE) των παραμέτρων αυτών για ένα μοντέλο μιας και δύο παραμέτρων. Στον Πίνακα παρουσιάζονται επίσης η αξιοπιστία της κλίμακας που προέκυψε και οι τιμές του κριτηρίου -2 log likelihood, οι οποίες μπορούν να αξιοποιηθούν για τη σύγκριση της καταλληλότητας των υπό εξέταση μοντέλων. Συγκεκριμένα, η διαφορά των τιμών αυτών για τα δύο μοντέλα ακολουθεί κατανομή x^2 και δείχνει το βαθμό στον οποίο ένα πιο πολύπλοκο μοντέλο, όπως είναι το μοντέλο δύο παραμέτρων, περιγράφει καλύτερα τα δεδομένα, σε σύγκριση με το απλούστερο μοντέλο μιας παραμέτρου (Embretson & Reise, 2000).

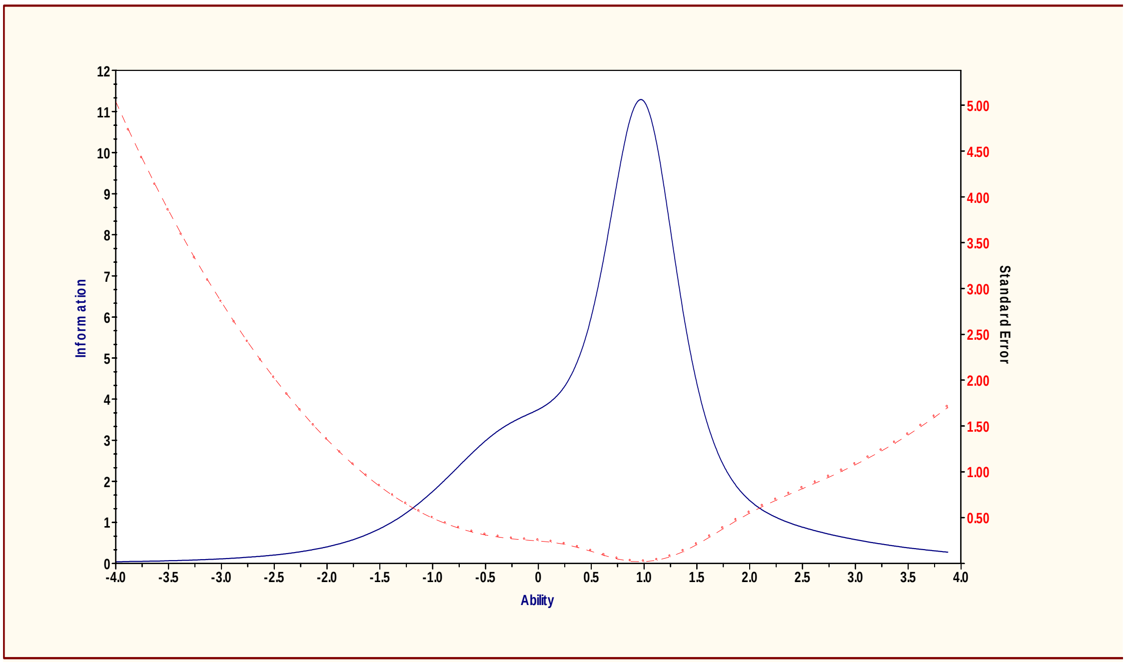
	1 παράμετρος		**2 παράμετροι**			
Έργο	**β**	**$SE_{(\beta)}$**	**β**	**$SE_{(\beta)}$**	**α**	**$SE_{(\alpha)}$**
1	-0.36	0.06	-0.29	0.05	1.36	0.11
2	-0.13	0.06	-0.10	0.05	1.22	0.10
3	1.74	0.09	1.75	0.14	0.84	0.09
4	1.12	0.07	1.28	0.36	0.32	0.05
5	0.78	0.07	0.93	0.11	0.63	0.06
6	0.71	0.07	0.87	0.10	0.62	0.06
7	0.87	0.07	0.76	0.06	1.09	0.09
8	1.45	0.08	1.08	0.05	2.13	0.20
9	0.09	0.06	0.11	0.08	0.68	0.06
	R = .74		R = .79			
	-2 log likelihood = 6391.38		-2log likelihood = 6306.27			

Πίνακας 1: Στατιστικά Στοιχεία της Κλίμακας του Κλάσματος ως Αριθμού-Μέτρου για ένα μοντέλο μιας και δύο παραμέτρων

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 1, το μοντέλο δύο παραμέτρων περιγράφει καλύτερα τα δεδομένα της έρευνας, αφού αφενός έχει ψηλότερο βαθμό αξιοπιστίας σε σύγκριση με το μοντέλο δύο παραμέτρων και, αφετέρου, η διαφορά του κριτηρίου -2 log likelihood είναι στατιστικά σημαντική (διαφορά= 85.11 βαθμοί ελευθερίας=8, $p<.001$). Το αποτέλεσμα αυτό υποδηλοί ότι τα εννέα έργα της κλίμακας έχουν διαφορετικό δείκτη διάκρισης και, συνεπώς, διαφορετική συνεισφορά στην κλίμακα που αναπτύχθηκε. Συγκεκριμένα, όπως προκύπτει από τον Πίνακα 1, τη μεγαλύτερη συνεισφορά στην κλίμακα αυτή έχουν τα τέσσερα έργα των αριθμητικών γραμμών (έργα 1-2 και 7-8), τα οποία παρουσιάζουν το μεγαλύτερο δείκτη διάκρισης, αποτέλεσμα που υποδηλοί τη σημασία που έχουν τα έργα αριθμητικών γραμμών στην εξέταση της συγκεκριμένης έννοιας. Αντίθετα, τα έργα αναγνώρισης των κλασμάτων ως αριθμών (έργα 4-6) έχουν το μικρότερο δείκτη διάκρισης, όπως και το έργο 9 που σχετίζεται με τη σύγκριση κλασμάτων, αποτέλεσμα που εισηγείται ότι τα έργα αυτά έχουν μικρότερη συνεισφορά όσον αφορά στο διαχωρισμό των υποκειμένων της έρευνας σε διαφορετικά επίπεδα, ανάλογα με το βαθμό στον οποίο έχουν αναπτύξει την υπό εξέταση έννοια. Το έργο εύρεσης κλάσματος μεταξύ του 1/8 και του 1/9 (έργο 3) έχει ενδιάμεσο δείκτη διάκρισης.

Πέρα από τη συνεισφορά των εννέα έργων στην κλίμακα μέτρησης της κατανόησης του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου, ο Πίνακας 1 περιλαμβάνει πληροφορίες που αφορούν στο σχετικό βαθμό δυσκολίας των έργων αυτών. Αναλυτικότερα, από τις τιμές του μοντέλου δύο παραμέτρων προκύπτει ότι η εύρεση ενός κλάσματος που να περιλαμβάνεται μεταξύ δύο εναδικών κλασμάτων που έχουν ως παρονομαστές συνεχόμενους αριθμούς (έργο 3) αποτελεί το δυσκολότερο έργο της κλίμακας. Αντίθετα, η τοποθέτηση της μονάδας σε αριθμητικές γραμμές (έργα 1-2) και η σύγκριση κλασμάτων (έργο 9) αποτελούν τα ευκολότερα έργα της κλίμακας. Τα υπόλοιπα έργα παρουσιάζουν ενδιάμεσο βαθμό δυσκολίας.

Εκτός από το βαθμό αξιοπιστίας της κλίμακας και το κριτήριο -2 log likelihood, οι ψυχομετρικές ιδιότητες της κλίμακας που αναπτύχθηκε ελέγχθηκαν και με μια σειρά άλλων κριτηρίων. Αναλυτικότερα, αρχικά ελέγχθηκε η καταλληλότητα της κλίμακας για διάφορες τιμές ικανότητας της υπό εξέταση έννοιας (θ), όπως αυτή προκύπτει από την καμπύλη πληροφοριών του δοκιμίου (test information curve) (Διάγραμμα 1). Δεδομένου ότι η κλίμακα αυτή θεωρείται ικανοποιητική για τιμές information(θ)>2, αφού οι τιμές αυτές αντιστοιχούν σε αξιοπιστία ψηλότερη από .70 (Embretson & Reise, 2000), από το Διάγραμμα 1 προκύπτει ότι η υπό εξέταση κλίμακα περιγράφει αρκετά ικανοποιητικά το υπό εξέταση γνώρισμα για τιμές από θ=-1 μέχρι θ=2, γεγονός που εισηγείται ότι η κλίμακα είναι πιο κατάλληλη για τις ενδιάμεσες τιμές ικανοτήτων, παρά για ακραίες τιμές του γνωρίσματος (δηλαδή για μαθητές που παρουσιάζουν αρκετές δυσκολίες στην κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου ή για μαθητές που έχουν κατακτήσει σε σημαντικό βαθμό την έννοια αυτή).



Διάγραμμα 1: Καμπύλη Πληροφοριών του Δοκιμίου (Item Information Curve)

Επιπρόσθετα, εξετάστηκε κατά πόσο τα εννέα έργα παρουσίαζαν διαφορετικό βαθμό δυσκολίας και δείκτη διάκρισης (Differential Item Functioning- DIF) για τα αγόρια και τα κορίτσια που συμμετείχαν στην έρευνα. Σύμφωνα με τους Embretson και Reise (2000) τιμές DIF>2 υποδηλούν ότι τα έργα διαφέρουν ως προς το δείκτη διάκρισης και το βαθμό δυσκολίας τους για τις δύο υπό εξέταση ομάδες. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, όλα τα έργα, με εξαίρεση το τελευταίο έργο, παρουσίαζαν παρόμοιο δείκτη διάκρισης και βαθμό δυσκολίας για τα αγόρια και τα κορίτσια που συμμετείχαν στην έρευνα, γεγονός που ενισχύει την καταλληλότητα της υπό εξέταση κλίμακας για τη μέτρηση της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου.

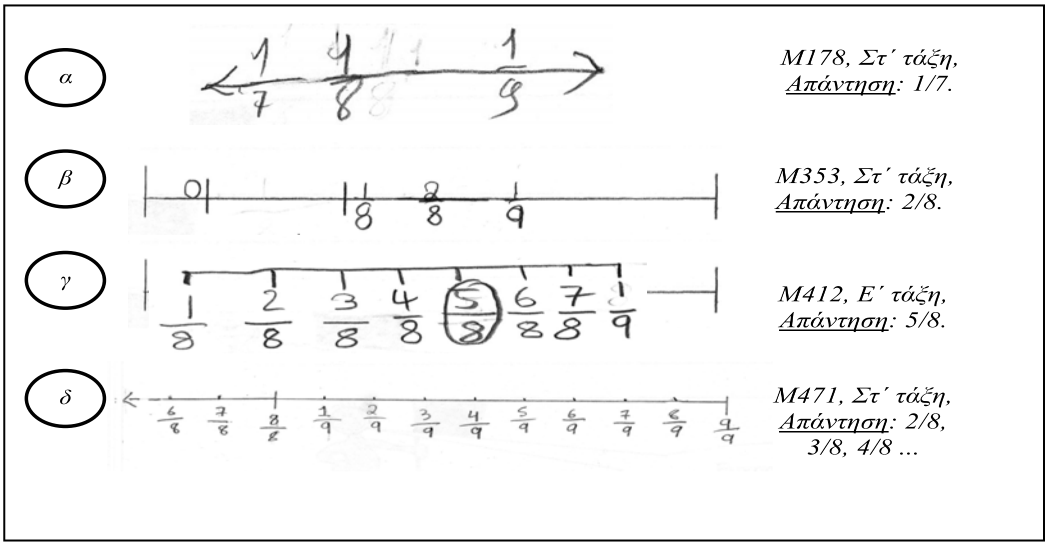
Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι η διαφορά στην επίδοση των αγοριών και των κοριτσιών στα εννέα έργα, όπως αυτή αξιολογήθηκε από την κλίμακα που προέκυψε, δεν ήταν στατιστικά σημαντική (t=0.001, df=670, p>.05). Επίσης, η επίδοση των μαθητών της Ε΄ τάξης δεν διέφερε από την επίδοση των μαθητών της Στ΄ τάξης (t=0.1, df=670, p>.05).

	Αγόρια		Κορίτσια		DIF	
Έργο	**β**	**α**	**β**	**α**	**DIF(β)**	**DIF(α)**
1	-0.35	1.99	-0.26	2.49	-0.93	-1.41
2	-0.09	1.84	-0.13	2.19	0.38	-1.13
3	1.89	1.39	1.68	1.39	0.70	0.00
4	1.02	0.64	1.40	0.52	-0.56	0.69
5	0.87	1.19	0.99	0.99	-0.58	0.92
6	0.81	1.20	0.91	0.95	-0.46	1.20
7	0.75	1.93	0.84	1.50	-0.62	1.46
8	1.02	3.20	1.15	2.75	-1.25	0.81
9	-0.06	1.42	0.30	0.92	-2.27	2.28

Πίνακας 2: Έλεγχος της σημαντικότητας της διαφοράς του βαθμού δυσκολίας και του δείκτη διάκρισης των έργων για τις δύο υποομάδες του δείγματος (αγόρια-κορίτσια)

Μελέτη χαρακτηριστικών λαθών των μαθητών στα έργα της έρευνας

Στο έργο 3 ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν ένα κλάσμα που να έχει αξία μεγαλύτερη του 1/8 και μικρότερη από την αξία του κλάσματος 1/9. Οι μαθητές καλούνταν, επίσης να δείξουν την πορεία που ακολούθησαν για να βρουν μια λύση στο πρόβλημα αυτό. Αν και δεν καθορίστηκε συγκεκριμένος τρόπος εργασίας για την επίλυση του έργου αυτού, από τους μαθητές που προσπάθησαν να λύσουν το πρόβλημα αυτό (52.4%), αρκετοί αξιοποίησαν την αριθμητική γραμμή. Οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών στο έργο αυτό, χαρακτηριστικά δείγματα των οποίων παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 2, εισηγούνται ότι για να καταφέρουν οι μαθητές να αξιοποιήσουν σωστά την αριθμητική γραμμή θα πρέπει να έχουν κατανοήσει τη διαφορά των κλασμάτων από τους ακέραιους αριθμούς και, επιπρόσθετα, να είναι ικανοί να συγκρίνουν και σειροθετούν κλάσματα.



Διάγραμμα 2: Χαρακτηριστικές λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών στο έργο 3

Όπως προκύπτει από το Διάγραμμα 2, ο πρώτος μαθητής έδωσε ως απάντηση ένα κλάσμα μεγαλύτερο των δύο δοθέντων κλασμάτων (1/7). Από την αριθμητική γραμμή που σχεδίασε φαίνεται ότι για το μαθητή αυτό το κλάσμα 1/8 ήταν μικρότερο από το κλάσμα 1/9. Από την απάντησή του φαίνεται, παράλληλα, η επίδραση των ακέραιων αριθμών, αφού η διάταξη των κλασμάτων 1/7, 1/8 και 1/9 στην αριθμητική γραμμή ακολουθεί τη διάταξη των ακέραιων αριθμών. Στη δεύτερη και τρίτη περίπτωση, οι μαθητές φαίνεται να θεωρούσαν ότι μεταξύ των κλασμάτων 1/8 και 1/9 εντοπίζονται τα κλάσματα με παρονομαστή το 8 και αριθμητή οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό από το 2 μέχρι το 7. Αξίζει να επισημανθεί ότι ο δεύτερος μαθητής (Μ353) τοποθετούσε τους αριθμητές και τους παρονομαστές των κλασμάτων εκατέρωθεν της αριθμητικής γραμμής, στοιχείο που ενισχύει την υπόθεση ότι ο συγκεκριμένος μαθητής πιθανόν να αντιμετώπιζε τα κλάσματα ως δύο ξεχωριστούς ακέραιους αριθμούς. Αντίστοιχες παρανοήσεις φαίνεται να είχε και η μαθήτρια που έδωσε την τέταρτη απάντηση. Η μαθήτρια αυτή φαίνεται να είχε κατανοήσει ότι στην περίπτωση των ομώνυμων κλασμάτων το μεγαλύτερο κλάσμα είναι αυτό που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή. Ωστόσο, φαίνεται να πίστευε ότι, όπως και στην περίπτωση των ακέραιων αριθμών, τα κλάσματα είναι σειροθετημένα στην αριθμητική γραμμή με τρόπο που πρώτα να εμφανίζονται όλα τα κλάσματα με μικρότερο παρονομαστή και μετά τα κλάσματα με μεγαλύτερο παρονομαστή. Αξιοπρόσεχτο στην απάντησή της είναι και το γεγονός ότι το κλάσμα 8/8 θεωρείται μικρότερο από το κλάσμα 1/9, καθώς και το ότι η μαθήτρια δεν φαίνεται να είχε κατανοήσει ότι τα κλάσματα των οποίων ο παρονομαστής είναι ίσος με τον αριθμητή ισούνται με τη μονάδα. Συνεπώς, εύλογα μπορεί να υποστηριχτεί ότι και σε αυτή την περίπτωση, όπως και στις προηγούμενες τρεις, η μαθήτρια αντιμετώπιζε το κλάσμα ως δύο ξεχωριστούς αριθμούς, θεωρώντας ότι η αξία του ορίζεται αρχικά από τον παρονομαστή του και στη συνέχεια από τον αριθμητή του.

Συζήτηση

Η παρούσα έρευνα αποσκοπούσε να εξετάσει το βαθμό στον οποίο διάφορα έργα που κατά καιρούς προτάθηκαν για την εξέταση της κατανόησης της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου μπορούν να συγκροτήσουν μια ιεραρχική κλίμακα μέτρησης της προαναφερθείσας έννοιας. Επιπρόσθετα, στόχευε να διερευνήσει τη σχετική συνεισφορά των έργων που σχετίζονται με την αριθμητική γραμμή στην κλίμακα αυτή. Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψε ότι τα εννέα έργα που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα συγκροτούσαν ιεραρχική κλίμακα. Βρέθηκε, επίσης, ότι ένα μοντέλο δύο παραμέτρων περιέγραφε καλύτερα τα δεδομένα της έρευνας παρά ένα μοντέλο μιας παραμέτρου. Η κλίμακα που αναπτύχθηκε στην περίπτωση του μοντέλου δύο παραμέτρων παρουσίαζε καλές ψυχομετρικές ιδιότητες, όπως προέκυψε από την εξέταση ενός αριθμού δεικτών και κριτηρίων. Ωστόσο, φάνηκε ότι η κλίμακα αυτή μετρούσε καλύτερα τις ενδιάμεσες, παρά τις ακραίες τιμές της υπό εξέτασης έννοιας. Αυτό πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι ο αριθμός των έργων που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα ήταν σχετικά μικρός.

Με βάση την κλίμακα που προέκυψε θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι αρχικά οι μαθητές είναι ικανοί να επιλύουν έργα που σχετίζονται με τη σύγκριση κλασματικών αριθμών, αφού στο στάδιο αυτό μπορούν να τοποθετούν τον αριθμό 1 σε αριθμητικές γραμμές οι οποίες περιλαμβάνουν το 0 και ένα γνήσιο κλάσμα ή ένα μικτό αριθμό (έργα 1 και 2). Στη φάση αυτή οι μαθητές μπορούν, επίσης, να αναγνωρίζουν μεταξύ μιας σειράς κλασμάτων εκείνο που είναι πιο κοντά στο 1 (έργο 9). Σε μεταγενέστερη φάση οι μαθητές αναγνωρίζουν τα κλάσματα ως αριθμούς (έργα 4-6), ενώ μαθητές που έχουν αναπτύξει και αυτή την ικανότητα μπορούν να καθορίζουν επακριβώς τη θέση ενός κλάσματος σε έργα αριθμητικής γραμμής (έργα 7-8). Το έργο στο οποίο ζητούνταν από τους μαθητές να εντοπίσουν ένα κλάσμα μεταξύ δύο άλλων εναδικών κλασμάτων αποτέλεσε το δυσκολότερο έργο της έρευνας για την αξιολόγηση του βαθμού κατανόησης της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου. Συνοπτικά, δεδομένης της ιεράρχησης των εννέα έργων σε κλίμακα, ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας τους, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι για την αξιολόγηση της ανάπτυξης της υπό εξέταση έννοιας απαιτείται η αξιοποίηση ποικιλίας έργων.

Παρ' όλη την ανάγκη αξιοποίησης διάφορων έργων για την αξιολόγηση της υπό εξέτασης έννοιας, τα ευρήματα της παρούσας έρευνας συνηγορούν στο ότι η ικανότητα επίλυσης έργων αριθμητικής γραμμής αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για την αξιολόγηση της κατάκτησης της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου. Συγκεκριμένα, με βάση την κλίμακα που προέκυψε βρέθηκε ότι και τα τέσσερα έργα αριθμητικών γραμμών είχαν το ψηλότερο δείκτη διάκρισης, γεγονός που υποδηλοί ότι είχαν τη σημαντικότερη συνεισφορά στην ανάπτυξη της κλίμακας και, κατά συνέπεια, στη μέτρηση του υπό εξέταση γνωρίσματος. Ωστόσο, η ανάλυση χαρακτηριστικών λαθών των μαθητών αποκάλυψε ότι τα έργα της αριθμητικής γραμμής μπορούν να λειτουργήσουν ως καταλύτες στην οικοδόμηση της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου μόνο όταν οι μαθητές αρχίσουν να αναθεωρούν την αριθμοθεωρία που έχουν αναπτύξει και κατανοήσουν ότι τα κλάσματα δεν αποτελούν σύνθεση δύο ακέραιων αριθμών, αλλά ένα αριθμό με συγκεκριμένη αξία. Επιπρόσθετα, οι μαθητές χρειάζεται να έχουν αναπτύξει την ικανότητα σύγκρισης κλασματικών και ακέραιων αριθμών. Το ότι τα έργα 1-2 και 9 αποτελούσαν τα ευκολότερα έργα της κλίμακας ενισχύει την πιο πάνω άποψη, αφού οι μαθητές χρειάζεται να έχουν αναπτύξει έννοιες και δεξιότητες σχετικά με τα έργα αυτά, ώστε να επιτύχουν και στα υπόλοιπα έργα.

Αν και θεωρούμε ότι η παρούσα έρευνα συμβάλλει στη διερεύνηση του ρόλου της αριθμητικής γραμμής στην αξιολόγηση της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου, εντούτοις πιστεύουμε ότι μελλοντικές έρευνες χρειάζεται να εμβαθύνουν περαιτέρω σε αυτό το θέμα, καθορίζοντας επακριβώς τις επιμέρους ικανότητες που χρειάζεται να αναπτύξουν οι μαθητές, ώστε να επιλύουν σωστά συγκεκριμένα έργα αριθμητικών γραμμών. Επιπρόσθετα, χρειάζεται να προσδιοριστεί πώς η ανάπτυξη των ικανοτήτων αυτών θα μπορούσε να συμβάλει στην ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου. Ως εκ τούτου, προτείνουμε όπως διενεργηθούν κλινικές συνεντεύξεις με μαθητές διαφορετικών ηλικιών και επιπέδων.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Baturo, A.R., & Cooper, T.J. (1999). Fractions, Reunitisation and the Number-Line Representation. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23nd Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2* (pp.81-88), Haifa: Israel Institute of Technology.

Behr, M.J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis-Emphasis on the Operator Construct. In T.P. Carpenter, E. Fennema, T.A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, (pp. 13-47). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Boulet, G. (1999). Large Halves, Small Halves: Accounting for Children's Ordering of Fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21* (3), 48-66.

Bright, G., Behr, M., Post, T., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying Fractions on Number Line. *Journal for Research in Mathematics Education, 19* (3), 215-232.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. In J. Janvier, C. (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning Mathematics* (pp. 109-122). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Embretson, S. E. & Reise, S. P. (2000). *Item Response Theory for Psychologists.* NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gagatsis, A., Shiakalli, M., & Panaoura, A. (2003). La représentation de la ligne arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers. *Annales de Didactique des Sciences Cognitives, 8*, 95-112.

Hambleton, R.K., Swaminathan, H., & Rogers, H.J. (1991). *Fundamentals of Item Response Theory.* California: SAGE Publications.

Hannula, M.S. (2003). Locating Fraction on a Number Line. In N.A. Pateman, B. J. Dougherty and J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of the PME and PMENA, 3* (pp. 17-24). Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Keijzer, R., & Terwel, J. (2003). Learning for mathematical insight: a longitudinal comparative study on modeling. *Learning and Instruction, 13,* 285-304.

Kyriakides, L., & Charalambous, C. (2002). Developmental Assessment of Primary Students' Skills on Multiple Representations: Construct Validity of a Test on Fractions. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1* (1), 79-104.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding.* NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Marshall, S.P. (1993). Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach. In T. P. Carpenter, E. Fennema, T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, (pp. 261-288). New NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Newstead, K., & Olivier, A. (1999). Addressing Students' Conceptions of Common Fractions. In O. Zaslavsky (Ed.) *Proceedings of the 23rd Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 329-336), Haifa: Israel Institute of Technology.

Ni, Y. (2001). Semantic Domains of Rational Numbers and the Acquisition of Fraction Equivalence. *Contemporary Educational Psychology, 26,* 400-417.

Siegal, M., & Smith, J.A. (1997). Toward Making Representation Count in Children's Conceptions of Fractions. *Contemporary Educational Psychology, 22,* 1-22.

Sowder, J.T., Bezuk, N., & Sowder, L.K. (1993). Using Principles From Cognitive Psychology to Guide Rational Number Instruction for Prospective Teachers. In T.P. Carpenter, E. Fennema, T.A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, (pp. 239-259). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fraction. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503-518.

Zimowski, M.F., Muraki, E., Mislevy, R.J., & Bock, R.D. (1996). BILOG-MG: Multiple-Group IRT Analysis and Test Maintenance for Binary Items. Chicago, IL: Scientific Software International.