

Συμμετρία : Σχέση ισότητας ή γεωμετρικός μετασχηματισμός;

Κωνσταντίνος Τσελεπίδης, Χρήστος Μαρκόπουλος

Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Πατρών

ktselepidis@yahoo.gr, cmarkopl@upatras.gr

Περίληψη

Η εργασία αυτή στοχεύει στη διερεύνηση των αντιλήψεων Αετών φοιτητών του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης σχετικά με την έννοια της συμμετρίας. Συγκεκριμένα επικεντρώνουμε στο κατά πόσο αντιλαμβάνονται την έννοια της συμμετρίας ως ισότητα των δύο γεωμετρικών αντικειμένων που περιλαμβάνει ο μετασχηματισμός ή ως διαδικασία αντιστοίχισης επιμέρους στοιχείων τα οποία είναι συμμετρικά μεταξύ τους. Τα ερευνητικά δεδομένα που έχουν χρησιμοποιηθεί περιλαμβάνουν τις γραπτές προσεγγίσεις των φοιτητών σε δραστηριότητες σχετικές με την έννοια της συμμετρίας και απομαγνητοφωνημένα αποσπάσματα προσωπικών συνεντεύξεων. Αυτό που προκύπτει από την έρευνα είναι ότι οι φοιτητές θεωρούν τη συμμετρία διαδικασία απόδειξης ισότητας γεωμετρικών αντικειμένων και όχι ως γεωμετρικό μετασχηματισμό.

Λέξεις κλειδιά

Γεωμετρία, Συμμετρία, Μετασχηματισμοί

Εισαγωγή

Η σημαντικότητα της έννοιας της συμμετρίας στα μαθηματικά έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης αρκετών ερευνητών (Leikin, Berman & Zaslavsky, 1997). Η συμμετρία, η ομοιότητα και η ισότητα αποτελούν θεμελιώδεις έννοιες για πολλές μαθηματικές αιτιολογήσεις και εφαρμογές των μαθηματικών και προτείνεται η διδασκαλία τους σε ένα ευρύτερο πλαίσιο μετασχηματισμών στην Γεωμετρία (Hansen, 1998). Ο Malkevitch (1998) στην προσπάθειά του να καθορίσει τις απαραίτητες έννοιες που θα πρέπει να περιλαμβάνονται σε ένα πρόγραμμα σπουδών της Γεωμετρίας αναφέρει ότι η έννοια της συμμετρίας συνδέεται συχνά με την τέχνη και το σχέδιο. Επιπλέον, έννοιες όπως τα πολύγωνα, τα πολύεδρα και η επικάλυψη του επιπέδου συσχετίζονται με την έννοια της συμμετρίας (Meyer, 1998). Τέλος, συσχετίσεις της συμμετρίας με την έννοια της συνάρτησης έχουν αποτελέσει αντικείμενο έρευνας και φαίνεται να πηγάζουν από την θεωρία των γεωμετρικών μετασχηματισμών (Dreyfus & Eisenberg, 1990).

Αν και η συμμετρία αποτελεί μια ευρεία μαθηματική έννοια, στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση διδάσκεται ως μια συλλογή από ασύνδετες περιπτώσεις. Στη διδασκαλία των μαθηματικών, δάσκαλοι και σχολικά βιβλία αντιμετωπίζουν διαφορετικά τη συμμετρία στη Γεωμετρία από ότι σε άλλους κλάδους των μαθηματικών, αλλά ακόμα και στη Γεωμετρία η συμμετρία αντιμετωπίζεται μέσα από διάφορους μετασχηματισμούς (ανάκλαση - αναδίπλωση, περιστροφή, μεταφορά) (Leikin, Berman & Zaslavsky, 1997). Συγκεκριμένα, οι δάσκαλοι συχνά παρουσιάζουν διαφορετικούς ισχυρισμούς για ειδικές περιπτώσεις της συμμετρίας, εστιάζοντας κάθε φορά σε μόνο μερικές από τις διαφορετικές όψεις της έννοιας της συμμετρίας.

Επιπλέον, οι δάσκαλοι δεν "σκέφτονται συμμετρικά" και δεν χρησιμοποιούν συμμετρικούς ισχυρισμούς στην επίλυση προβλημάτων (Dreyfus & Eisenberg, 1990). Η παρούσα εργασία είναι μέρος ενός ευρύτερου ερευνητικού προγράμματος που στοχεύει στην διερεύνηση των αντιλήψεων των φοιτητών σχετικά με την έννοια της συμμετρίας.

Θεωρητικό πλαίσιο

Συμμετρία σύμφωνα με τον Rosen (1995), είναι «η διατήρηση σε μια πιθανή αλλαγή». Συγκεκριμένα, διακρίνονται δύο συστατικά στοιχεία της συμμετρίας: *η πιθανότητα για μια αλλαγή* και *η διατήρηση κατά την αλλαγή*. Αλλαγή θεωρείται ο μετασχηματισμός του γεωμετρικού αντικείμενου που διατηρεί όμως το αντικείμενο αναλλοίωτο, δηλαδή διατηρεί τις ιδιότητές του αμετάβλητες. Οι Leikin, Berman και Zaslavsky (1997), βασίζόμενοι στον προηγούμενο ορισμό, θεωρούν ότι η συμμετρία περιλαμβάνει τρία στοιχεία: ένα γεωμετρικό αντικείμενο, τις ιδιότητές του και ένα μετασχηματισμό. Το γεωμετρικό αντικείμενο μολονότι είναι αυτό που υπόκειται στην διαδικασία του μετασχηματισμού, διατηρεί όλες του τις ιδιότητες αμετάβλητες. Επεκτείνοντας την άποψη των προηγούμενων ερευνητών θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η συμμετρία περιλαμβάνει ένα αρχικό γεωμετρικό αντικείμενο, μια διαδικασία μετασχηματισμού και την δημιουργία ενός νέου γεωμετρικού αντικείμενου ίσου με το αρχικό που είναι όμως προϊόν του συγκεκριμένου μετασχηματισμού. Η ισότητα του τελικού αντικείμενου με το αρχικό δεν αποτελεί μοναδικό κριτήριο καθώς η διαδικασία του μετασχηματισμού απαιτεί την ύπαρξη της 1-1 αντιστοιχίας των χαρακτηριστικών των δύο αντικειμένων. Για παράδειγμα, η διαγώνιος σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο παρόλο που χωρίζει το σχήμα σε δύο ίσα τρίγωνα δεν αποτελεί άξονα συμμετρίας καθώς η ορθή γωνία του ενός τριγώνου δεν έχει συμμετρική, ως προς τον άξονα, την ορθή γωνία του άλλου.

Σε αυτήν την έρευνα θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε τις αντιλήψεις που ανέπτυξαν Α΄-ετείς φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης στην προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν δραστηριότητες που εμπεριέχουν την έννοια της συμμετρίας. Θα εστιάσουμε στο κατά πόσο δίνουν έμφαση μόνο στην ισότητα των δύο γεωμετρικών αντικειμένων που περιλαμβάνει ο μετασχηματισμός της συμμετρίας ή αντιλαμβάνονται την συμμετρία ως διαδικασία αντιστοίχισης επιμέρους στοιχείων τα οποία είναι συμμετρικά μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, οι φοιτητές αντιμετωπίζουν δραστηριότητες όπου τους ζητείται να κατασκευάσουν το συμμετρικό κάποιων γεωμετρικών αντικειμένων ή τον άξονα συμμετρίας των γεωμετρικών αντικειμένων.

Μεθοδολογία

Φάσεις της έρευνας

Η ερευνητική διαδικασία περιλαμβάνει τρεις φάσεις. Στη πρώτη φάση οι φοιτητές στα πλαίσια του μαθήματος των Μαθηματικών αντιμετώπισαν δραστηριότητες σχετικές με την έννοια της συμμετρίας. Οι συγκεκριμένες δραστηριότητες στόχευαν στην α) κατανόηση από τη μεριά των φοιτητών των ιδιοτήτων των σχημάτων βασίζόμενοι στην έννοια της συμμετρίας και β) αντιμετώπιση γεωμετρικών προβλημάτων (ισότητα σχημάτων, ισομετρίες).

Στην δεύτερη φάση, 11 από τους πρωτοετείς φοιτητές του ΠΤΔΕ πήραν μέρος σε ατομικές συνεντεύξεις. Η ερευνητική αυτή φάση στόχευε στην διερεύνηση των αντιλήψεων των φοιτητών σχετικά με την έννοια της συμμετρίας. Στα πλαίσια της συνέντευξης οι φοιτητές αντιμετώπισαν μια σειρά δραστηριοτήτων σχετικά με την

έννοια της συμμετρίας. Παράλληλα ο ερευνητής βασιζόμενος στις ενέργειες των φοιτητών έθετε ερωτήσεις με το στόχο τη διερεύνηση των αντιλήψεων τους. Επομένως από τη μια μεριά οι δραστηριότητες ήταν κοινές για όλα τα ζευγάρια των φοιτητών, από την άλλη οι συνεντεύξεις διαφοροποιούνταν στον τρόπο προσέγγισης των πιθανών γνωστικών αδυναμιών που εμφανίζονταν.

Η τρίτη φάση περιλάμβανε την συμμετοχή των παραπάνω φοιτητών σε μια δραστηριότητα σχετική με την έννοια της συμμετρίας. Οι φοιτητές καλούνταν να αντιμετωπίσουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα με την βοήθεια της συμμετρίας στα πλαίσια των γραπτών εξετάσεων του μαθήματος των Μαθηματικών. Αυτή η ερευνητική φάση είχε σαν στόχο την διερεύνηση της πιθανής εξέλιξης των αντιλήψεων των φοιτητών σε σχέση με την έννοια της συμμετρίας.

Στην παρούσα εργασία θα αναλύσουμε τα ερευνητικά δεδομένα της δεύτερης φάσης όπου οι φοιτητές συμμετείχαν σε ατομικές συνεντεύξεις.

Διαδικασία

11 Προπτυχιακοί φοιτητές (Α΄έτος) ΠΤΔΕ Παν/μιο Πατρών συμμετείχαν σε εθελοντική βάση σε προσωπικές συνεντεύξεις. Οι φοιτητές είχαν σχηματίσει 5 ζευγάρια. Κάθε ζευγάρι συμμετείχε σε συνέντευξη με τον ερευνητή διάρκειας 2,5 ωρών. Οι φοιτητές αντιμετώπιζαν μια σειρά δραστηριοτήτων που αφορούσαν την έννοια της συμμετρίας και παράλληλα ο ερευνητής βασιζόμενος στις αντιδράσεις – απαντήσεις τους έθετε ερωτήσεις με στόχο τη αποσαφήνιση των αντιλήψεων τους.

Μεθοδολογικά, ως κατάλληλο εργαλείο για την διερεύνηση των αντιλήψεων των φοιτητών σχετικά με την έννοια της συμμετρίας επιλέχθηκε η *κλινική συνέντευξη* (Ackermann, 1995). Οι κλινικές ερευνητικές μέθοδοι που βασίζονται στις αρχές της κονστρουκτιβιστικής θεωρίας (constructivism) και στοχεύουν στη διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών έχουν βρει εφαρμογή σε πολλές έρευνες τα τελευταία χρόνια (Hunting, 1997; Clements, Swaminathan, Hannibal and Sarama, 1999; Steffe, Cobb and von Glasersfeld, 1988).

Ο ερευνητής δρώντας ως δάσκαλος αλληλεπιδρά με τους φοιτητές, με στόχο τη διερεύνηση των αντιλήψεών τους. Πιο συγκεκριμένα, ο ερευνητής, αναστοχαζόμενος τις αλληλεπιδράσεις με τους μαθητές, προσπαθούσε να ερμηνεύσει τις ενέργειές τους και κατασκεύαζε μοντέλα-υποθέσεις σχετικά με τις αντιλήψεις τους, τα οποία κατά τη διάρκεια του διδακτικού πειράματος αξιολογούνταν και, κατά συνέπεια, επιβεβαιώνονταν ή ανασκευάζονταν. Επιπλέον, ο ερευνητής-δάσκαλος, βασιζόμενος στις ερμηνείες του σχετικά με τις ενέργειες των φοιτητών, αποφάσιζε σχετικά με την εξέλιξη των δραστηριοτήτων, τον τύπο των ερωτήσεών του, αλλά και το είδος της γνώσης και τις ενέργειες που θα ενθαρρύνει (Steffe, 1995).

Οι δραστηριότητες που έθετε ο ερευνητής εντάσσονται με βάση το γνωστικό περιεχόμενο τους σε δύο κατηγορίες

- Εύρεση αξόνων συμμετρίας διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων και
- Κατασκευή συμμετρικού σχήματος δοθέντος άξονα συμμετρίας.

Οι φοιτητές δεν μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν γεωμετρικά όργανα και αντιμετώπιζαν τις δραστηριότητες σε ένα πλαίσιο χαρτί-μολύβι.

Τέλος, οι ερωτήσεις που έθετε ο ερευνητής ακολουθούσαν τους βασικούς κανόνες που θέτει ο Hunting (1997):

- ανοικτές ερωτήσεις, έτσι ώστε να επιτρέπεται στους μαθητές αρκετή ελευθερία επιλογής του τρόπου απάντησης, για παράδειγμα "Πώς αντιλαμβάνεσαι την έννοια της συμμετρίας;"
- ερωτήσεις που προκαλούν την ανάπτυξη συζήτησης και διαλόγου, προκειμένου να αποκαλυφθούν οι νοητικές λειτουργίες των φοιτητών,· όπως για παράδειγμα: "Γιατί πιστεύεις ότι αυτά τα δύο σχήματα είναι συμμετρικά;"
- ερωτήσεις που να δίνουν τη δυνατότητα αναστοχασμού τόσο στο φοιτητή όσο και στον ερευνητή, όπως για παράδειγμα: "Γιατί πιστεύεις ότι ο άξονας συμμετρίας που σχεδιάσες δημιουργεί δύο συμμετρικά σχήματα;"

Ανάλυση δεδομένων

Τα δεδομένα της συγκεκριμένης ερευνητικής φάσης περιλαμβάνουν τις γραπτές προσεγγίσεις των φοιτητών στις δραστηριότητες και απομαγνητοφωνημένα αποσπάσματα των απαντήσεων στις ερωτήσεις που έθετε ο ερευνητής.

Αποτελέσματα

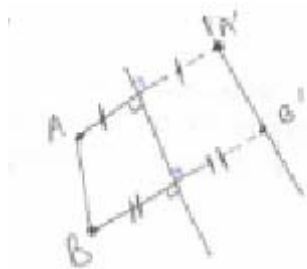
Μέσα από την ανάλυση των δεδομένων προσπαθήσαμε να εντοπίσουμε, αρχικά, τις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι φοιτητές στην προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν δραστηριότητες όπου καλούνται να κατασκευάσουν το συμμετρικό ενός γεωμετρικού αντικειμένου με δεδομένο τον άξονα συμμετρίας και δραστηριότητες όπου ο άξονας συμμετρίας και το συμμετρικό σχήμα πρέπει να κατασκευαστούν.

Δραστηριότητες όπου δίνεται ο άξονας συμμετρίας

Στις δραστηριότητες αυτής της κατηγορίας, ο δοθέν άξονας συμμετρίας μπορεί α) να μην έχει και β) να έχει κοινά σημεία με το αρχικό γεωμετρικό αντικείμενο. Στην κατηγορία (α) οι φοιτητές καλούνταν να σχεδιάσουν το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος, ενός τετραγώνου και ενός τριγώνου. Στην κατηγορία (β) ο άξονας συμμετρίας τέμνει μια οξεία γωνία και έναν κύκλο.

Οι στρατηγικές που ανέπτυξαν οι φοιτητές διαφοροποιούνται σε ενέργειες που στηρίζονται στην "τυπική" γνώση της έννοιας της συμμετρίας και σε διαισθητικές προσεγγίσεις. Παρακάτω θα αναφερθούμε σε κάποιες περιπτώσεις προκειμένου να τονίσουμε την διαφοροποίηση αυτή. Πιο αναλυτικά, κάποιες χαρακτηριστικές στρατηγικές που αναπτύχθηκαν στις δραστηριότητες της κατηγορίας (α) είναι οι παρακάτω:

1) Η χρήση της "τυπικής" γνώσης



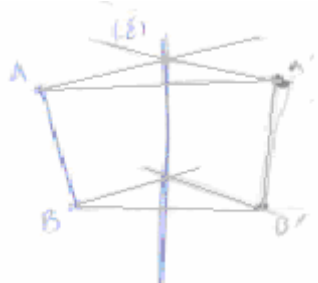
Σχήμα 1

Στην περίπτωση του σχήματος (1) η φοιτήτρια (Φ.1) στην προσπάθειά της να φέρει το συμμετρικό του ευθύγραμμου τμήματος AB, φροντίζει να φέρει τα συμμετρικά άκρα στηριζόμενη στην καθαρά τυπική γνώση δηλαδή φέρνει την κάθετη ίση προέκταση επί του άξονα συμμετρίας. Παρόλα αυτά, δείχνει να αγνοεί τη σημασία

της 1-1 αντιστοιχίας κάτι που φαίνεται από το γεγονός ότι το συμμετρικό ευθύγραμμο τμήμα έχει αισθητά μικρότερη κλίση από το αρχικό σε σχέση με τον άξονα συμμετρίας. Φαίνεται λοιπόν ότι από μόνη της η τυπική γνώση, όταν δεν συνοδεύεται από τη χρήση γεωμετρικών εργαλείων, δεν είναι ικανή να βοηθήσει τη συγκεκριμένη φοιτήτρια να αντιμετωπίσει τη δραστηριότητα.

Η συγκεκριμένη φοιτήτρια, στην ανοιχτή ερώτηση για το πώς αντιλαμβάνεται τη συμμετρία, δήλωσε πως "δύο συμμετρικά σχήματα χαρακτηρίζονται από μια ομοιομορφία κάτι που φαίνεται αν διπλώσω το χαρτί με βάση τον άξονα συμμετρίας". Ο ισχυρισμός της φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με την παραπάνω κατασκευή (σχήμα1) γιατί η "ομοιομορφία" και το "νοερό δίπλωμα" του χαρτιού θα την βοηθούσαν να είναι πιο αποτελεσματική. Η "τυπική" γνώση όταν δεν συνοδεύεται από τις απαραίτητες νοερές αναπαραστάσεις δεν είναι ικανή από μόνη της να ξεπεράσει τυχόν δυσκολίες που προκαλεί η έλλειψη γεωμετρικών οργάνων.

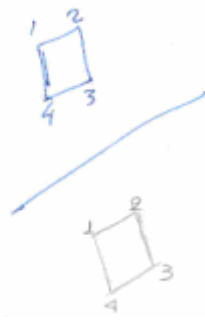
2) Διαισθητική - δυναμική προσέγγιση



Σχήμα 2

Μια άλλη φοιτήτρια (Φ.2), αντιμετωπίζοντας την ίδια δραστηριότητα (σχήμα 2) κατασκευάζει, βασιζόμενη στην διαίσθησή της, ένα πρίσμα και θεωρεί τις δύο απέναντι ακμές του ως τα δύο συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα. Στην προσπάθειά της να αιτιολογήσει την στρατηγική που ακολούθησε υποστηρίζει: "φαντάζομαι τα δύο ευθύγραμμα τμήματα στο χώρο". Στην συνέχεια, η κατασκευή του συμμετρικού ευθύγραμμου τμήματος περιλάμβανε την κατασκευή παραλλήλων που ξεκινούν από τα A και B. Έπειτα έφερε κάθετες από τα A και B προς την ευθεία (ε) και τις προέκτεινε με σκοπό να κατασκευάσει δύο ισοσκελή τρίγωνα. Τέλος όρισε ως συμμετρικά άκρα A' και B' τις κορυφές των τριγώνων που προέκυψαν. Η συγκεκριμένη προσέγγιση θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως δυναμική καθώς φαίνεται να περιλαμβάνει μια παράλληλη μετατόπιση των δύο ευθυγράμμων τμημάτων από τον άξονα συμμετρίας ως αποτέλεσμα μιας ευρύτερης μεταβολής σε ένα τρισδιάστατο περιβάλλον. Πιο συγκεκριμένα τα δύο συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα βρίσκονται σε διαφορετικό επίπεδο από αυτό του άξονα συμμετρίας καθώς αποτελούν τις παράλληλες ακμές της ορθογωνιας βάσης ενός τριγωνικού πρίσματος και ο άξονας συμμετρίας την ακμή της κορυφής του. Επιπλέον, φαίνεται ότι δεν ακολουθεί κάποια από τις τυπικές στρατηγικές που περιλαμβάνει η αξονική συμμετρία αλλά αποτελεί μια καθαρά διαισθητική προσέγγιση.

3) Διαισθητική προσέγγιση

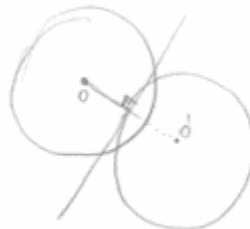


Σχήμα 3

Η φοιτήτρια (Φ.3) στην προσπάθειά της να κατασκευάσει το συμμετρικό ενός τετραγώνου με δεδομένο τον άξονα συμμετρίας (σχήμα 3), βασίζεται στη διαίσθησή της και υποστηρίζει ότι "τα δύο τετράγωνα φαίνονται συμμετρικά". Η παραπάνω κατασκευή είναι ουσιαστικά αποτέλεσμα μιας παράλληλης μεταφοράς του τετραγώνου από το ένα ημιεπίπεδο στο άλλο. Σε αυτή την περίπτωση η διαισθητική προσέγγιση της φοιτήτριας εστιάζεται μόνο στην ισότητα των δύο τετραγώνων, αγνοώντας παράλληλα την απαραίτητη 1-1 αντιστοιχία των επιμέρους στοιχείων τους. Κάτι τέτοιο ενισχύεται άλλωστε και από την θεώρησή που έχει για τη συμμετρία ότι δηλαδή "η συμμετρία είναι τομή που δίνει συμμετρικό αποτέλεσμα και φέρνει δύο ίσα σχήματα".

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν επίσης και οι στρατηγικές που αναπτύσσουν οι φοιτητές στην προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν και τις δραστηριότητες της κατηγορίας (β) όπου ο άξονας συμμετρίας τέμνει το γεωμετρικό αντικείμενο.

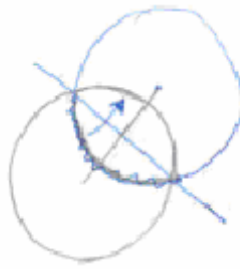
1) Η χρήση της "τυπικής" γνώσης



Σχήμα 4

Η φοιτήτρια (Φ.4) στην προσπάθειά της να φέρει το συμμετρικό κύκλο ως προς τον άξονα συμμετρίας που τέμνει τον κύκλο κατασκευάζει το σχήμα 4. Παρατηρούμε ότι αρχικά χρησιμοποιεί την "τυπική" γνώση λαμβάνοντας υπόψη της ότι πρέπει να κατασκευάσει το συμμετρικό κέντρο του κύκλου φέρνοντας κάθετη στον άξονα συμμετρίας. Από την άλλη μεριά όμως δεν φροντίζει τα κοινά σημεία των δύο κύκλων να βρίσκονται πάνω στον άξονα συμμετρίας. Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη προσέγγιση δίνεται έμφαση μόνο στην ισότητα των δύο κύκλων με αποτέλεσμα να αγνοείται η σημασία και της 1-1 αντιστοιχίας των επιμέρους στοιχείων των κύκλων.

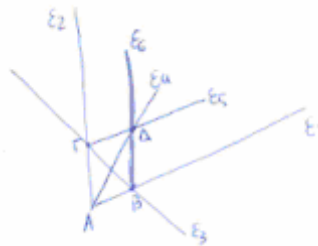
2) Διαισθητική - δυναμική προσέγγιση



Σχήμα 5

Η φοιτήτρια (Φ.3) στην προηγούμενη κατηγορία δραστηριοτήτων είχε αναπτύξει μια διαισθητική κατασκευή ενός συμμετρικού τετραγώνου ως προς ένα δεδομένο άξονα συμμετρίας. Στην προσπάθειά της να κατασκευάσει το συμμετρικό ενός κύκλου όταν αυτός έχει κοινά σημεία με τον άξονα συμμετρίας (σχήμα 5.) φαίνεται να εξελίσσει τη διαισθητική της προσέγγιση. Συγκεκριμένα η φοιτήτρια ακολουθεί δύο στάδια κατασκευής. Αρχικά, με ένα καθαρά διαισθητικό τρόπο ορίζει το συμμετρικό κέντρο. Παρατηρούμε ότι τα δύο συμμετρικά κέντρα βρίσκονται στα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος που φαίνεται να είναι μεσοκάθετο στην κοινή χορδή. Στη συνέχεια η φοιτήτρια κατασκευάζει πρώτα το συμμετρικό τόξο χρησιμοποιώντας ένα νοερό μετασχηματισμό και έχοντας το τόξο ως οδηγό κατασκευάζει τον υπόλοιπο κύκλο. Στο σχήμα έχει η ίδια σκιαγραφήσει το τόξο του αρχικού κύκλου και με το βέλος δείχνει το συμμετρικό τόξο στο οποίο βασίστηκε για να σχεδιάσει τον κύκλο. Η συγκεκριμένη κατασκευή χαρακτηρίζεται τόσο από την ισότητα των δύο κύκλων όσο και από την 1-1 αντιστοιχία των στοιχείων τους.

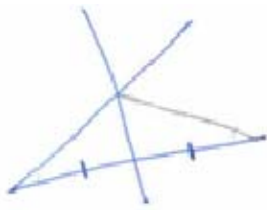
3) Διαισθητική προσέγγιση



Σχήμα 6

Στο σχήμα 6 παρουσιάζεται η κατασκευή της συμμετρικής γωνίας $\varepsilon_2 \hat{A} \varepsilon_1$ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ε_3 από την φοιτήτρια (Φ.4). Η συγκεκριμένη κατασκευή χαρακτηρίζεται από την παρανόηση ότι οι δύο συμμετρικές κορυφές αποτελούν δύο απέναντι κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Συγκεκριμένα, η φοιτήτρια (Φ.4) έφερε παράλληλες ευθείες ως προς την ε_2 και ε_1 τις ε_6 και ε_5 αντίστοιχα. Έτσι κατασκεύασε το παραλληλόγραμμο ABΓΔ και δήλωσε ότι οι δύο συμμετρικές κορυφές των γωνιών θα βρίσκονται στα άκρα της διαγωνίου ΑΔ. Έτσι, η συμμετρική της γωνίας $\Gamma \hat{A} B$ με άξονα συμμετρίας την ευθεία ε_3 θα είναι η γωνία $\Gamma \hat{A} B$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η πεποίθηση ότι σε ένα παραλληλόγραμμο κάθε διαγώνιος του αποτελεί και άξονα συμμετρίας του δρα καταλυτικά με αποτέλεσμα να μην επιτυγχάνεται η 1-1 αντιστοιχία των στοιχείων των γωνιών αν και η ισότητά τους διαισθητικά τουλάχιστον είναι εμφανής.

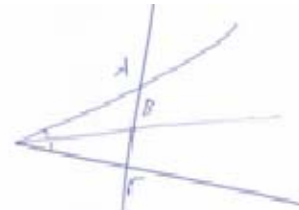
Ο ρόλος της ισότητας στην περίπτωση της γωνίας



Σχήμα 7



Σχήμα 8



Σχήμα 9

Παραπάνω παρουσιάζονται τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις κατασκευής συμμετρικής γωνίας ως προς άξονα. Το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι πως η έννοια της ισότητας αποτελεί βασικό κριτήριο στην σκέψη των φοιτητριών, παρά το γεγονός ότι ακολουθούν τρεις διαφορετικές στρατηγικές.

Η φοιτήτρια (Φ.5) κατασκευάζει στο σχήμα 7 ένα ισοσκελές τρίγωνο θεωρώντας τον άξονα συμμετρίας ως διάμεσό του. Όταν κλήθηκε να τεκμηριώσει την προσέγγισή της δήλωσε πως αρχικά έβλεπε ένα τρίγωνο που είχε ως πλευρές τις πλευρές της γωνίας και τον άξονα συμμετρίας. Συγκεκριμένα δήλωσε "σαν να είχα μισό τρίγωνο" θεωρώντας ότι έπρεπε να κατασκευάσει και το άλλο μισό. Έπειτα φέρνοντας την τρίτη πλευρά θεώρησε πως το καινούργιο τρίγωνο που δημιουργήθηκε είναι ίσο με το αρχικό ως συμμετρικό. Κατέληξε μάλιστα πως οι προσκείμενες στην βάση του ισοσκελούς τριγώνου γωνίες είναι συμμετρικές εξαιτίας της ισότητας των δύο τριγώνων. Κατά την φοιτήτρια ο άξονας συμμετρίας δημιουργεί με τη γωνία ένα χωρίο του οποίου αναζητά το συμμετρικό. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι αν η πλευρά της γωνίας ήταν κάθετη στον άξονα συμμετρίας η παραπάνω διαισθητική προσέγγιση θα ήταν επιτυχής. Παρόλα αυτά όμως η φοιτήτρια φαίνεται ότι επικεντρώνεται μόνο στην ισότητα των δύο τριγώνων που δημιουργούνται θεωρώντας πως ο ρόλος του άξονα συμμετρίας είναι να διχοτομεί ένα σχήμα. Έτσι, παραβλέπει την απουσία της 1-1 αντιστοιχίας των επιμέρους στοιχείων.

Στο σχήμα 8 η φοιτήτρια (Φ.3) ορίζει πάνω στο άξονα συμμετρίας ένα σημείο Γ τέτοιο ώστε $AB = BG$. Υποστηρίζει ότι αφού οι δύο γωνίες βλέπουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα του άξονα συμμετρίας θα είναι ίσες λόγω του ότι είναι συμμετρικές. Η δήλωση της πως "η συμμετρική γωνία είναι ίση" φανερώνει ότι πρώτα κατασκεύασε δύο γωνίες τις οποίες θεώρησε συμμετρικές και της ιδιότητας που τους προσδίδει τις θεωρεί και ίσες. Βλέπουμε ότι και σε αυτή τη προσέγγιση κυριαρχεί η ισότητα των επιμέρους στοιχείων ως μοναδική ιδιότητα της συμμετρίας.

Η φοιτήτρια (Φ.6) κατασκευάζοντας το σχήμα 9 δήλωσε ότι "φέρνω διχοτόμο γιατί η συμμετρική κορυφή θα βρίσκεται πάνω της". Βλέπουμε, λοιπόν, την ισχυρή πεποίθηση ότι η συμμετρική κορυφή θα βρίσκεται σε μια ημιευθεία που έχει την ιδιότητα να χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσα μέρη. Όπως φαίνεται όμως και από το σχήμα δεν κατάφερε να προσδιορίσει τις πλευρές της συμμετρικής γωνίας. Στην συγκεκριμένη περίπτωση ο ρόλος της ισότητας εκφράζεται από τη θεώρηση ότι η συμμετρική κορυφή θα βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της αρχικής γωνίας.

Δραστηριότητες όπου ζητείται να κατασκευαστεί ο άξονας συμμετρίας

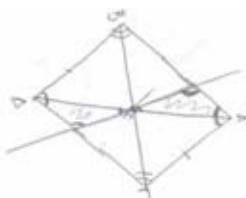
Οι δραστηριότητες αυτές θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι απαιτούσαν πιο ανεπτυγμένες νοητικές ενέργειες από τους φοιτητές καθώς η κατασκευή ενός άξονα συμμετρίας συνεπάγεται τη δημιουργία – ανάδειξη των δύο συμμετρικών σχημάτων που προκύπτουν. Ουσιαστικά τα δύο συμμετρικά σχήματα περιλαμβάνονται στο αρχικό και ο φοιτητής καλείται να φέρει τον άξονα συμμετρίας που θα τα αναδείξει. Στην προηγούμενη κατηγορία δραστηριοτήτων οι φοιτητές έπρεπε να κατασκευάσουν το συμμετρικό ενός σχήματος με ένα δεδομένο άξονα συμμετρίας. Έτσι, το ένα από

τα δύο συμμετρικά σχήματα ήταν καθορισμένο και οι φοιτητές καλούνταν να κατασκευάσουν το συμμετρικό του.

Παρακάτω θα ομαδοποιήσουμε τις στρατηγικές που ανάπτυξαν οι φοιτητές στην προσπάθειά τους να σχεδιάσουν τον άξονα συμμετρίας ενός παραλληλογράμμου. Η επιλογή του παραλληλογράμμου βασίστηκε στην γεγονός ότι οι φοιτητές φαίνεται να θεωρούν ότι άξονας συμμετρίας ενός σχήματος είναι κάθε ευθεία που το χωρίζει σε δύο ισοεμβαδικά σχήματα. Αυτό ήταν ένα από τα βασικά αποτελέσματα της ανάλυσης της πρώτης ερευνητικής φάσης στην οποία έχουμε αναφερθεί προηγούμενα.



Σχήμα 10



Σχήμα 11



Σχήμα 12



Σχήμα 13

Στα παραπάνω σχήματα παρουσιάζονται τρεις (σχήματα 10, 11, 12) διαφορετικές στρατηγικές εύρεσης αξόνων συμμετρίας ενός πλάγιου παραλληλογράμμου. Κοινό χαρακτηριστικό όλων αποτελεί η επίδραση της ισότητας και ο διαμερισμός του παραλληλογράμμου σε ισοεμβαδικά μέρη. Η φοιτήτρια (Φ.1) (σχήμα 10) θεωρεί ως άξονες συμμετρίας τις μεσοπαράλληλες του σχήματος και βασίζει την άποψη της στη δημιουργία δύο ίσων σχημάτων. Η στρατηγική της φοιτήτριας (Φ.4) (σχήμα 11) διαφοροποιείται μόνο στην κατασκευή των διαγώνιων ως αξόνων συμμετρίας, μολονότι εστιάζεται στην ισότητα των σχημάτων που προκύπτουν. Στο σχήμα 12 παρουσιάζεται ένας συνδυασμός των δύο προηγούμενων στρατηγικών με τη διαφορά ότι οι διαγώνιοι αποτελούν άξονες συμμετρίας λόγω "στροφής". Συγκεκριμένα, η φοιτήτρια (Φ.3) θεωρεί αρχικά την μεσοπαράλληλη ως άξονα συμμετρίας λόγω της ισότητας των επιμέρους σχημάτων που δημιουργεί. Στη συνέχεια θέτει ως άξονες συμμετρίας τις διαγωνίους και αιτιολογεί την άποψή της θεωρώντας ότι αν περιστραφεί το σχήμα κατά γωνία που ορίζουν οι διαγώνιοι, κάθε κορυφή θα βρεθεί στη θέση μιας άλλης. Φαίνεται ότι στην προσπάθειά της να διατηρήσει της 1-1 αντιστοιχία των σημείων του σχήματος κατά το μετασχηματισμό της συμμετρίας συγχέει τη συμμετρία ως προς άξονα με τη συμμετρία ως προς σημείο. Στο τελευταίο σχήμα (σχήμα 13) η φοιτήτρια (Φ.2) δήλωσε πως το παραλληλόγραμμο δεν έχει άξονες συμμετρίας υιοθετώντας μια εμπειρική προσέγγιση που βασίζεται στην αναδίπλωση ενός φύλλου χαρτιού σχήματος παραλληλογράμμου. Συγκεκριμένα δήλωσε ότι "δεν μπορώ να το τσακίσω με τρόπο ώστε το ένα να πέφτει πάνω στο άλλο".

Συμπεράσματα

Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα για της αντιλήψεις των φοιτητών σχετικά με την έννοια της συμμετρίας. Στις δραστηριότητες όπου ο άξονας συμμετρίας έχει δοθεί οι φοιτητές φαίνεται να μη θεωρούν ως μοναδικό κριτήριο την ισότητα του αρχικού και τελικού γεωμετρικού αντικειμένου, παρόλο που σε κάποιες περιπτώσεις δεν τηρείται για όλα τα σημεία του αρχικού αντικειμένου η 1-1 αντιστοίχιση. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθούμε στο ρόλο που παίζουν η "τυπική" γνώση και η διαισθητική προσέγγιση στις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι φοιτητές. Η απουσία των γεωμετρικών εργαλείων είχε σαν αποτέλεσμα την αδυναμία των φοιτητών, που βασίζονταν στην

"τυπική" γνώση, να πετύχουν την 1-1 αντιστοιχία. Αντίθετα, οι φοιτητές που βασίστηκαν σε διαισθητικές προσεγγίσεις φάνηκαν πιο ικανοί στο να αναδείξουν και την ισότητα και την 1-1 αντιστοιχία.

Από την άλλη μεριά στις δραστηριότητες όπου οι φοιτητές καλούνται να κατασκευάσουν τον άξονα συμμετρίας φαίνεται πώς στην πλειονότητά τους το μοναδικό κριτήριο αποτελεί η ισότητα. Μέσα από την ανάλυση των προσεγγίσεων που ανέπτυξαν είναι εμφανής η εμμονή τους στη θεώρηση του άξονα συμμετρίας ως μέσου διχοτόμησης ενός γεωμετρικού αντικειμένου. Μια πιθανή ερμηνεία αποτελεί το γεγονός ότι σε αυτή την περίπτωση το αρχικό και τελικό γεωμετρικό αντικείμενο της συμμετρίας δημιουργούνται ταυτόχρονα με τη κατασκευή του άξονα και οι φοιτητές πρέπει ουσιαστικά να προβλέψουν το αποτέλεσμα των συγκεκριμένων διαδικασιών της 1-1 αντιστοίχισης των δύο σχημάτων που ουσιαστικά δεν υφίστανται χωρίς τη δημιουργία του άξονα.

Αναφορές

- Ackermann, E. (1995). Construction and Transference of Meaning Through Form. In L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in Education* (pp. 341-354). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. In *Journal for Research in Mathematics Education* 30(2), 192-212.
- Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1990). Symmetry in Mathematics Learning. In *ZDM-International Reviews on Mathematics Education* 22(2), 53-59.
- Hansen, L. (1998). Everlasting geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study* (pp. 9-18). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Hunting, R. P. (1997). Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. In *Journal for Research in Mathematics Education* 16(2), 145-165.
- Leikin, R., Berman, A. & Zaslavsky, O. (1997). Defining and Understanding Symmetry. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 3* (pp. 192-199). Lahti, Finland.
- Malkevitch, J. (1998). Finding room in the curriculum for recent geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study* (pp. 18-25). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Meyer, W. (1998). Recent applications of geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study* (pp. 100-105). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Rosen, J. (1995). *Symmetry in science : an introduction to the general theory*. New York : Springer Verlag.
- Steffe, L. P. (1995). Alternative Epistemologies: An Educator's Perspective. In L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in Education* (pp. 489-523). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Steffe, L. P., Cobb, P., & von Glasersfeld, E. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.