Η επίδραση γλωσσικών και άλλων κοινωνικών παραγόντων στη συγκρότηση από κοινού γνώσης κατά τη συνεργατική επίλυση προβλημάτων

Κωνσταντίνος Τάτσης   Ευγενία Κολέζα

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

me00319@cc.uoi.gr   ekoleza@cc.uoi.gr

Περίληψη

Έχοντας ως βασική παραδοχή τον κοινωνικό χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης και χρησιμοποιώντας τη θεωρία της συμβολικής αλληλεπίδρασης, η παρούσα έρευνα εξετάζει την επίδραση της γλώσσας και άλλων κοινωνικών παραγόντων στη συγκρότηση από κοινού μαθηματικής γνώσης κατά τη συνεργατική επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Λέξεις κλειδιά

Συνεργατική επίλυση προβλήματος, συμβολική αλληλεπίδραση, θεωρία ρόλου, από κοινού γνώση.

Εισαγωγή

Η συνεργατική επίλυση προβλημάτων αποτελεί κατά κοινή ομολογία μια αποτελεσματική μέθοδο όχι μόνο διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών, αλλά και μύησης των μαθητών στις διαλογικές πρακτικές που χαρακτηρίζουν μια μαθηματική κοινότητα (Lerman, 1994, Sfard, 2000). Η ιδιαίτερη σημασία της αλληλεπίδρασης και των λεκτικών ανταλλαγών μεταξύ των ατόμων που συνεργάζονται για την επίλυση του εκάστοτε προβλήματος, οδήγησε πολλούς ερευνητές στην υιοθέτηση γλωσσολογικών ή και κοινωνιολογικών μεθόδων ανάλυσης των εμπειρικών δεδομένων των ερευνών τους (π.χ. Pimm, 1994, Rowland, 2002) και αντίστοιχων θεωρητικών πλαισίων. Η συνεργατική επίλυση προβλημάτων στηρίζεται στη θεωρητική παραδοχή ότι η μαθηματική γνώση είναι κοινωνικά προσδιορισμένη (Ernest, 1991) και προκύπτει κατά την κοινωνική αλληλεπίδραση των ατόμων που συμμετέχουν σε μια μαθηματική δραστηριότητα. Η αλληλεπίδραση, σε ένα συγκεκριμένο κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο, πραγματοποιείται με τη βοήθεια συμβόλων (Blumer, 1969), με κυριότερο από αυτά τη γλώσσα. Οι βασικές λειτουργίες της γλώσσας είναι ότι (Lemke, 1989, σ. 5, Mercer, 2000, σ. 87, Ανδρέου, 2002, σ. 71):

- καθιστά δυνατή τη διεκπεραίωση της επικοινωνίας
- συμβάλλει στην εσωτερική αναδόμηση της εμπειρίας σε γνώση
- εκφράζει συγκεκριμένες ενέργειες των ομιλητών
- μορφοποιεί το πλαίσιο μέσα στο οποίο είναι δυνατή η ερμηνεία αυτών των ενεργειών.

Ένα σημαντικό συστατικό κάθε αλληλεπίδρασης είναι η ερμηνεία των ενεργειών των μετεχόντων, η οποία πραγματοποιείται σε δύο στάδια. Αρχικά οι μετέχοντες ορίζουν την περίσταση στην οποία βρίσκονται, δηλαδή χρησιμοποιώντας την πληροφόρηση που αφορά το γενικότερο πλαίσιο της περίστασης (τόπος διεξαγωγής, εξωτερικά χαρακτηριστικά των μετεχόντων, σκοπός της συνάντησης) οικοδομούν ένα *από κοινού ορισμό της περίστασης*, δηλαδή μια σιωπηρή συμφωνία ως προς τα θέματα που θεωρούνται σημαντικά, αλλά και ως προς αυτά που πρέπει να αποφευχθούν (Goffman, 1971). Στη συνέχεια, και κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης, οι μετέχοντες λαμβάνουν υπόψη τους κανόνες και τις νόρμες που είναι σε ισχύ. Οι κανόνες αφορούν έκδηλες οδηγίες που καθορίζουν τη συμπεριφορά (και σχετίζονται με εξωτερικά χαρακτηριστικά όπως την εμφάνιση ή τρόπους συμπεριφοράς όπως την ομιλία). Οι νόρμες αφορούν άδηλες οδηγίες, συγκροτούνται από κοινού κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης και, στα πλαίσια της μαθηματικής εκπαίδευσης, διακρίνονται σε:

- *κοινωνικές*, που σχετίζονται με γενικότερες αντιλήψεις ως προς την αναμενόμενη συμπεριφορά κατά την αλληλεπίδραση,
- *κοινωνικομαθηματικές*, που σχετίζονται με την αναμενόμενη συμπεριφορά κατά την αλληλεπίδραση που αφορά κάποια πρακτική των μαθηματικών (Yackel and Cobb, 1996, Yackel, Cobb and Wood 1999, Yackel, Rasmussen and King, 2000).

Ένα βασικό στοιχείο που χρησιμοποιούν οι μετέχοντες στην αλληλεπίδραση είναι η έννοια του *προσώπου*, δηλαδή της θετικής κοινωνικής αξίας την οποία οι ίδιοι διεκδικούν για τον εαυτό τους (Goffman, 1972, σ. 5).

Βάσει όλων αυτών των στοιχείων οι μετέχοντες, αφού ερμηνεύσουν τις ενέργειες του συνομιλητή τους, συγκροτούν τις μορφές δράσης τους ή αλλιώς *ερμηνεύουν τους ρόλους τους*.

Σε κάποιες περιστάσεις, συγκροτείται η λεγόμενη *δι-υποκειμενική* ή *από κοινού γνώση* (Mercer, 2000), η οποία συνίσταται στην αμοιβαία αφομοίωση της γλώσσας και των ενεργειών των ατόμων που μετέχουν στην αλληλεπίδραση (Steffe and Thompson, 2000). Έχοντας υπόψη το γεγονός ότι δεν υπάρχουν έρευνες στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών που να μελετούν ταυτόχρονα την επίδραση όλων των στοιχείων της αλληλεπίδρασης στη συγκρότηση από κοινού γνώσης, πραγματοποιήσαμε την έρευνά μας με ερευνητικούς στόχους τη μελέτη της επίδρασης:

- της γλώσσας,
- των διαφόρων νορμών και
- των ρόλων

στη συγκρότηση από κοινού γνώσης, στα πλαίσια της συνεργατικής επίλυσης προβλημάτων.

Μεθοδολογία

Υποκείμενα της έρευνας ήταν 40 φοιτήτριες και φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος (στο $3^{ο}$ και $4^{ο}$ έτος σπουδών), από τους οποίους ζητήθηκε να επιλέξουν το συνεργάτη τους για την επίλυση 3 προβλημάτων γεωμετρικής φύσης. Οι τρεις συναντήσεις (μία για κάθε πρόβλημα) πραγματοποιήθηκαν στο χώρο του Εργαστηρίου Διδασκαλίας των Μαθηματικών του Π.Τ.Δ.Ε. Ιωαννίνων με μοναδικούς παρόντες τους δύο συνεργαζόμενους φοιτητές και τον παρατηρητή, του οποίου ο ρόλος ήταν παθητικός: απαντούσε μόνο σε ερωτήσεις διαδικαστικού τύπου και έδινε τις αρχικές οδηγίες. Οι οδηγίες που δόθηκαν στους φοιτητές αφορούσαν ζητήματα διαδικαστικού χαρακτήρα (όπως η διάρκεια κάθε συνάντησης ή τα γεωμετρικά όργανα που έχουν στη διάθεσή τους) αλλά και την ίδια την αλληλεπίδραση: να εκφράζουν λεκτικά κάθε σκέψη τους και να προσπαθήσουν να συνεργαστούν για την επίλυση του προβλήματος.

Οι διάλογοι που προέκυψαν απομαγνητοφωνήθηκαν και αναλύθηκαν βάσει της εμπειρικά θεμελιωμένης θεωρίας (grounded theory) (Strauss and Corbin, 1990), σύμφωνα με την οποία οι μεταβλητές θεωρούνται εξαρτημένες από το πλαίσιο της έρευνας και υπόκεινται σε συνεχή εξέταση για το αν είναι συμβατές με τα φαινόμενα που περιγράφουν. Συγκεκριμένα, η ανάλυση πραγματοποιήθηκε σε δύο επίπεδα, σύμφωνα με τις αρχές των Lemke (1989) και Mercer (2000).

Στο πρώτο επίπεδο επικεντρωθήκαμε στο γλωσσικό κώδικα εντοπίζοντας λέξεις ή εκφράσεις που σχετίζονται με μαθηματικές έννοιες ή διαδικασίες. Στη συνέχεια, στηριζόμενοι στην κατηγοριοποίηση της Pirie (1998) αποφασίσαμε να επικεντρωθούμε στις λέξεις και εκφράσεις που ανήκαν στην καθημερινή και στην ψευδομαθηματική γλώσσα. [1]

Στο δεύτερο επίπεδο εξετάσαμε τη χρήση των διαφόρων εκφράσεων ως μέσο έκφρασης κοινών αντιλήψεων (δηλαδή κοινωνικών ή κοινωνικομαθηματικών νορμών) ή μορφών συμπεριφοράς (δηλαδή ρόλων). Για τον εντοπισμό των νορμών χρησιμοποιήσαμε τη μεθοδολογία σχετικών ερευνών (Yackel, Cobb and Wood 1999, Yackel, Rasmussen and King, 2000) στις οποίες επισημαίνεται ότι ο εντοπισμός των διαφόρων νορμών γίνεται βάσει κανονικοτήτων που συναντώνται στην αλληλεπίδραση (Yackel and Cobb, 1996). Για την περιγραφή των ρόλων αρχικά κατηγοριοποιήσαμε κάθε έκφραση βάσει των εξής κατηγοριών (οι οποίες αποτελούν επέκταση της κατηγοριοποίησης του Bales, 1966):

- Έκφραση βεβαιότητας (Β1)
- Έκφραση αβεβαιότητας (Β2)
- Έκφραση συμφωνίας (Σ1)
- Έκφραση διαφωνίας (Σ2)
- Υποβολή πρότασης (ΠΡ1)
- Αναζήτηση πρότασης (ΠΡ2)
- Κατάθεση γνώμης (Γ1)
- Αναζήτηση γνώμης (Γ2)
- Παροχή πληροφορίας (ΠΛ1)
- Αναζήτηση πληροφορίας (ΠΛ2)
- Έκφραση αυτοσαρκασμού (Α1)
- Έκφραση ειρωνείας (Α2)
- Έκφραση επιβράβευσης (ΕΠ1)
- Έκφραση επίπληξης (ΕΠ2)
- Ένδειξη εκτόνωσης έντασης (Ε1)
- Ένδειξη έντασης (Ε2)

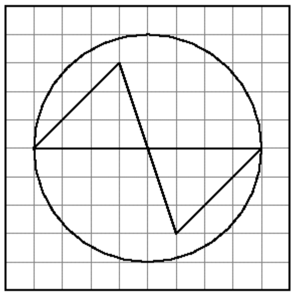
Στη συνέχεια εξετάσαμε το κατά πόσο κάθε έκφραση σχετίζεται με την ενίσχυση, τη διατήρηση, την αποδυνάμωση ή την απειλή κατά του προσώπου των μετεχόντων στην αλληλεπίδραση. Δημιουργήσαμε έτσι τέσσερις κατηγορίες για τους ρόλους των φοιτητών. Τέλος, εξετάσαμε το κατά πόσο οι κατηγορίες των δύο επιπέδων που διακρίναμε επηρεάζουν τη συγκρότηση από κοινού γνώσης. Η μεθοδολογία που ακολουθήσαμε παρουσιάζεται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παραδείγματα ανάλυσης

Πρώτο Παράδειγμα: Πρόβλημα 1

Ο διάλογος που ακολουθεί αφορά στην επίλυση του πρώτου προβλήματος που δόθηκε στους φοιτητές. Η εκφώνηση του προβλήματος είναι η εξής:

«Το παρακάτω σχέδιο πρόκειται να τοποθετηθεί σε μία μπλούζα. Έχετε το πρωτότυπο, και ο βιοτέχνης που θα σχεδιάσει τη μπλούζα το χρειάζεται άμεσα, δυστυχώς όμως δεν έχει φαξ ή σύνδεση στο διαδίκτυο. Έχει όμως ένα τετραγωνισμένο χαρτί ίδιων διαστάσεων με αυτό του σχεδίου και μπορείτε να επικοινωνήσετε τηλεφωνικά μαζί του. Γράψτε τις ακριβείς οδηγίες που πρέπει να του δώσετε για την κατασκευή του σχεδίου».



Το συγκεκριμένο ζεύγος απαρτίζουν δύο τεταρτοετείς φοιτήτριες, προερχόμενες από την 3η Δέσμη. Οι εκφράσεις που σημειώνονται με έντονους χαρακτήρες ανήκουν στη μη μαθηματική γλώσσα. Κάθε πρόταση ακολουθείται από την αντίστοιχη κατηγορία στην οποία εμπίπτει.

140. *Α. Λοιπόν, αυτό που σου 'πα θα γράψουμε.(ΠΡ1, Β1)*

141. *Β. Ξαναπές το. (ΠΛ2)*

142. *Α. Ότι θα… απ' την ακτίνα στο Α, το πρώτο τεταρτημόριο… Ε, **τραβάμε μια γραμμή σε απόσταση τριών τετραγώνων**. (ΠΛ1)*

143. *Β. Τη **διαγώνιο τριών τετραγώνων, συνεχομένων**. (ΠΛ1)*

144. *Α. Ωραία. Το ίδιο κάνουμε και στο Δ τεταρτημόριο. (ΠΡ1)*

145. *Β. Ωραία. Γράψ' το ξανά στο πρόχειρο. Πριν το γράψεις. Μια **ευθεία**, η οποία, **ξεκινάει από** το… (Σ1, ΠΛ1)*

146. *Α. Τι **ευθεία**; (ΠΛ2, Ε2)*

147. *Β. Ένα λεπτό, να το σκεφτώ διαφορετικά. Προσπαθώ να βρω τα ονόματα. (Ε1, Β2)*

148. *Α. Εντάξει, δε χρειάζεται να τα βρεις τώρα, τα βρίσκουμε την επόμενη φορά. Έλα. (Α2, Ε2, Γ1)*

149. *Β. Κάτσε. (Ε1, Γ1)*

150. *Α. Και θα 'μαστε διαβασμένοι. Λοιπόν, να γράφουμε, αυτό που σου λέω θα κάνουμε: στην ακτίνα του κύκλου, μετράμε 45 μοίρες και **τραβάμε μία γραμμή απόσταση τριών τετραγώνων**. (Α2, Ε2, ΠΡ1, Β1)*

151. *Β. Μία **ευθεία** η οποία τέμνει την ακτίνα…του κύκλου. (ΠΛ1, Β2)*

152. *Α. Δε θα αρχίσουμε με, δε θα βγάλουμε θεώρημα εδώ τώρα. Λοιπόν, στο Α… εε… Λοιπόν, όταν λέμε **τραβάμε μια γραμμή**, από πού όμως; Από δω ή από δω; (Α2, Ε2, ΠΛ2)*

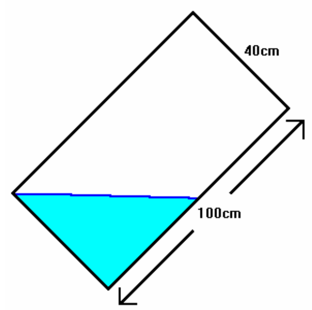
Αρχικά παρατηρούμε ότι ο διάλογος περιέχει αρκετές εκφράσεις καθημερινής γλώσσας (π.χ. «ξεκινάει από» (145)) και ψευδομαθηματικής γλώσσας, οι οποίες περιλαμβάνουν: λανθασμένους μαθηματικούς όρους («ευθεία» (145)), παραλλαγμένους μαθηματικούς όρους («διαγώνιο τριών τετραγώνων» (143)) και περιγραφές διαδικασιών («τραβάμε μια γραμμή απόσταση τριών τετραγώνων» (150)). Είναι σαφές ότι το είδος της γλώσσας που χρησιμοποιείται είναι στην προκειμένη περίπτωση υπεύθυνο για το πρόβλημα που δημιουργείται στην από κοινού αφομοίωση των προτάσεων που συζητούνται. Αυτό το αναγνωρίζει η φοιτήτρια Β, η οποία δεν επιδιώκει απλά να βρει τα σωστά «ονόματα» των μαθηματικών αντικειμένων που εμπλέκονται, αλλά θέλει να το «σκεφτεί διαφορετικά». Με αυτή την έκφραση υποδηλώνεται η άμεση σχέση μεταξύ του γλωσσικού κώδικα και της συγκρότησης μαθηματικής γνώσης.

Περνώντας από το επίπεδο του γλωσσικού κώδικα στο επίπεδο χρήσης αυτού, αρχικά μπορούμε να επισημάνουμε ότι η συμπεριφορά των δύο φοιτητριών είναι σαφώς διαφορετική. Η φοιτήτρια Α στην αρχή του αποσπάσματος δηλώνει: «αυτό που σου ’πα θα γράψουμε», εκφράζοντας έτσι τη βεβαιότητα για την ορθότητα της πρότασής της. Δεν δίνει ιδιαίτερη σημασία ούτε στη γλώσσα που χρησιμοποιεί αλλά ούτε στις επισημάνσεις της συμφοιτήτριάς της (με εξαίρεση το 152). Με άλλα λόγια, φαίνεται ότι δεν συμμορφώνεται πλήρως στις νόρμες της συνεργασίας και της σαφούς έκφρασης. Οι περισσότερες εκφράσεις της προσβλέπουν είτε στην ενίσχυση του προσώπου της (140, 150) είτε στην απειλή κατά του προσώπου της Β (148, 150, 152). Η φοιτήτρια Β από την άλλη, επιδεικνύει μια πιο συνεργατική συμπεριφορά με την έννοια ότι δεν απορρίπτει την πρόταση της Α (141), αλλά συμμετέχει στην από κοινού διαμόρφωσή της. Στις ειρωνικές εκφράσεις της Α δεν απαντά άμεσα, επιδιώκοντας με αυτό τον τρόπο να εκτονώσει την ένταση. Τελικά, ο συγκεκριμένος συνδυασμός των ρόλων φαίνεται ότι επιδρά θετικά στη συγκρότηση κοινών εννοιών αρκεί αυτές να προέρχονται από τη φοιτήτρια Α.

Δεύτερο Παράδειγμα: Πρόβλημα 3

Το τρίτο πρόβλημα που δόθηκε στους φοιτητές ήταν το εξής:

«Στο παρακάτω σχέδιο απεικονίζεται η μπροστινή όψη ενός ενυδρείου, το οποίο έχει 100 cm μήκος, 60 cm πλάτος και 40 cm ύψος. Το ενυδρείο έχει ανασηκωθεί έτσι ώστε το νερό να φτάνει ως το μέσο της βάσης του. Όταν το ενυδρείο επανέλθει στην οριζόντια θέση του, ποιο θα είναι το βάθος του νερού σε cm;»



Ο διάλογος που ακολουθεί γίνεται μεταξύ δύο τεταρτοετών φοιτητριών, Κυπριακής καταγωγής, προερχόμενες από τον Οικονομικό (η φοιτήτρια Α) και τον Κλασικό (η φοιτήτρια Β) κλάδο σπουδών στο Λύκειο. Ακολουθούμε τις συμβάσεις που περιγράφηκαν στο πρώτο παράδειγμα.

100. *Α: Πρώτα θα βρούμε το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου που είναι βάση επί ύψος δια 2. Το εμβαδόν είναι 50 επί 40 δια 2. Είναι βάσει των δεδομένων των οποίων μας δίνεται στην άσκηση. Και βρίσκουμε ότι είναι 1000. (ΠΡ1, Β1)*

101. *Β: Και βρίσκουμε το **ορθογώνιο τετράγωνο** διότι αντιστοιχεί... (ΠΛ1)*

102. *Α: Ορθογώνιο τρίγωνο. (ΠΛ1)*

103. *Β: Το ορθογώνιο τρίγωνο το οποίο **αντιστοιχεί με τη χωρητικότητα του νερού** ουσιαστικά. (ΠΛ1)*

104. *Α: Λοιπόν, αφού βρήκαμε το του τριγώνου δηλαδή, μη βάλω δηλαδή εδώ. Βρήκαμε το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου, **εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου στο οποίο βρίσκεται μέσα το νερό**. (ΠΛ1)*

105. *Β: Είναι η* ***χωρητικότητα του νερού****, ξέρω 'γώ, κάπως έτσι. Είναι* ***το νερό σκέτο****. (ΠΛ1, Β2)*

106. *Α: Ακολούθως θα βρούμε, θα βρούμε το βάθος του νερού... (ΠΛ1)*

107. *Β: Σ' ένα...*

108. *Α: Όταν επανέλθει στην οριζόντια θέση του, θέση του. Αφού γνωρίζουμε, αφού γνωρίζουμε ότι πρέπει το νερό να έχει... (ΠΛ1)*

109. *Β: Εμβαδόν 1000, και ότι η βάση του ενυδρείου είναι 100. (ΠΛ1)*

110. *Α: Ότι το εμβαδόν; (ΠΛ2)*

111. *Β:* ***Του νερού στο ορθογώνιο****; (ΠΛ1, Β2)*

112. *Α: Του νερού στο ενυδρείο, πρέπει να είναι 1000, άρα, αφού το μήκος του... (ΠΛ1)*

Και στο συγκεκριμένο απόσπασμα συναντούμε εκφράσεις καθημερινής («το νερό σκέτο») και ψευδομαθηματικής γλώσσας («χωρητικότητα του νερού») και από τις δύο φοιτήτριες. Σε αντίθεση όμως με το προηγούμενο παράδειγμα, η συγκεκριμένη γλώσσα δεν δημιουργεί πρόβλημα από κοινού κατανόησης και αφομοίωσης: και οι δύο φοιτήτριες κατανοούν τη μαθηματική οντότητα την οποία συζητούν (π.χ. τον όγκο που καταλαμβάνει το νερό) και οδηγούνται έτσι στην από κοινού επίλυση του προβλήματος. Η αναζήτηση της ορθής ορολογίας (δηλαδή της ορολογίας που ανήκει στην τυπική μαθηματική γλώσσα) δεν επιδρά στη διαδικασία επίλυσης, αν εξαιρέσει κανείς το χρόνο που απαιτεί.

Περνώντας στο δεύτερο επίπεδο ανάλυσης, διαπιστώνουμε ότι οι ρόλοι των φοιτητριών του συγκεκριμένου ζεύγους διαφέρουν από αυτούς του πρώτου παραδείγματος. Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι απουσιάζει η όποια (έκδηλη) προσπάθεια ενίσχυσης ή απειλής κατά του προσώπου. Οι Α, Β συμμετέχουν ισότιμα στη διαμόρφωση της πρότασής τους, συμμορφούμενες έτσι στη νόρμα της συνεργασίας (αυτό καταδεικνύει και το πρώτο πληθυντικό πρόσωπο των περισσότερων ρημάτων που χρησιμοποιούν). Επίσης, τους απασχολεί ο τρόπος έκφρασης (νόρμα σαφούς έκφρασης). Οι ρόλοι που υιοθετούν οι δύο φοιτήτριες στο συγκεκριμένο απόσπασμα είναι παρόμοιοι και διακρίνονται από την προσπάθεια ουσιαστικής και απρόσκοπτης συνεργασίας και την αποφυγή οποιωνδήποτε εντάσεων. Προφανώς πρόκειται για την ιδανική περίπτωση συνδυασμού ρόλων, όσον αφορά τη συγκρότηση από κοινού μαθηματικής γνώσης.

Σύνοψη των αποτελεσμάτων της έρευνας

Η ανάλυση όλων των απομαγνητοφωνημένων διαλόγων μας οδήγησε σε χρήσιμα συμπεράσματα όσον αφορά τους αρχικούς ερευνητικούς μας στόχους. Συγκεκριμένα, η ανάλυση του γλωσσικού κώδικα, δηλαδή των εκφράσεων καθημερινής και ψευδομαθηματικής γλώσσας μας οδήγησε στον παρακάτω συνοπτικό πίνακα, ο οποίος αναφέρεται στις έννοιες και τις διαδικασίες που εισήχθησαν μέσω αυτής γλώσσας.

Πρόβλημα	Εισαχθείσες έννοιες	Κοινές έννοιες	Εισαχθείσες διαδικασίες	Κοινές διαδικασίες
1	126	78	134	61
2	26	17	48	32
3	52	28	63	33

Κοινές έννοιες και διαδικασίες σε μη τυπική μαθηματική γλώσσα

Παρατηρούμε ότι η μοναδική περίπτωση στην οποία το ποσοστό των κοινών εννοιών/διαδικασιών γίνεται χαμηλότερο του 50% είναι στο Πρόβλημα 1 και αφορά διαδικασίες. Έχοντας υπόψη και το πρώτο παράδειγμα ανάλυσης που παραθέσαμε, παρατηρήσαμε ότι η χρήση μη αυστηρά μαθηματικής γλώσσας δημιουργεί προβλήματα όταν αφορά γεωμετρικές κατασκευές. Το Πρόβλημα 1 είναι το μοναδικό που απαιτούσε γεωμετρικές κατασκευές και γι' αυτό το λόγο, οι φοιτητές συνάντησαν εμπόδια στη συγκρότηση από κοινού γνώσης, εμπόδια που προήλθαν από την ίδια τη γλώσσα που χρησιμοποιούσαν.

Περνώντας στο δεύτερο επίπεδο ανάλυσης, ομαδοποιήσαμε τις νόρμες συμπεριφοράς στις εξής κατηγορίες, από τις οποίες οι τέσσερις πρώτες αφορούν κοινωνικές και οι επόμενες αφορούν κοινωνικομαθηματικές νόρμες:

- **Συνεργασίας:** ο ομιλητής λαμβάνει υπόψη τις απόψεις του συνομιλητή του και συνεργάζεται με αυτόν στην επίλυση του προβλήματος
- **Αμοιβαίας κατανόησης:** ο ομιλητής ενδιαφέρεται για την κατανόηση του συνομιλητή του και προχωρά μόνο αφού έχει βεβαιωθεί για αυτή
- **Κατανόησης από τρίτο:** η λύση διατυπώνεται με τρόπο που να είναι κατανοητή από κάποιον τρίτο (π.χ. στο Πρόβλημα 1 το βιοτέχνη)
- **Σαφούς έκφρασης:** η λύση είναι διατυπωμένη με σαφήνεια
- **Μαθηματικής δικαιολόγησης:** μία μέθοδος επίλυσης είναι αποδεκτή αν τεκμηριώνεται και δικαιολογείται βάσει λογικών συλλογισμών που περιέχουν μαθηματικές έννοιες ή διαδικασίες
- **Σχετικότητας της λύσης:** μία προτεινόμενη λύση ή διαδικασία είναι αποδεκτή αν ικανοποιεί κάποιες συνθήκες οι οποίες τίθενται από τα δεδομένα του προβλήματος ή από το κοινωνικο-μαθηματικό πλαίσιο που περιβάλλει το πρόβλημα
- **Οριοθέτησης των μαθηματικών:** υπάρχει σαφής διαχωρισμός ανάμεσα σε ένα «μαθηματικό» και σε ένα «πρακτικό» τρόπο επίλυσης ενός προβλήματος. Σε κάποιες περιπτώσεις η νόρμα αυτή περιγράφει και τα όρια που – σύμφωνα με τους φοιτητές – υπάρχουν ανάμεσα σε κλάδους των μαθηματικών, και ειδικότερα ανάμεσα στην άλγεβρα και τη γεωμετρία
- **Επαλήθευσης:** για κάθε διαδικασία επίλυσης υπάρχει και μία αντίστοιχη διαδικασία επαλήθευσης.

Όσον αφορά την επίδραση των παραπάνω νορμών στη συγκρότηση από κοινού γνώσης, παρατηρήσαμε ότι αν και κάποιες νόρμες ήταν σε ισχύ και στα τρία προβλήματα, η επίδρασή τους δεν ήταν η ίδια. Αυτό μας οδήγησε στην εξέταση της αλληλεξάρτησης μεταξύ των νορμών, δηλαδή το κατά πόσο η ύπαρξη μιας νόρμας υποβοηθά ή παρεμποδίζει την ισχύ μιας άλλης. Η πιο χαρακτηριστική περίπτωση που εντοπίσαμε αφορά το Πρόβλημα 1: το ζητούμενο του προβλήματος ήταν η καταγραφή μιας σειράς οδηγιών που απευθύνονται σε ένα βιοτέχνη. Οι φοιτητές επιδιώκοντας να είναι όσο το δυνατόν πιο κατανοητοί από αυτόν (Νόρμα κατανόησης από τρίτο), έκαναν πιο απλοϊκή την έκφρασή τους (Νόρμα σαφούς έκφρασης), εμπλουτίζοντάς την με εκφράσεις μη μαθηματικής γλώσσας. Αυτό, όπως έχουμε ήδη αναφέρει δημιούργησε προβλήματα στη συγκρότηση από κοινού γνώσης.

Τέλος, οι ρόλοι που υιοθετήθηκαν από τους φοιτητές κατηγοριοποιήθηκαν ως εξής:

- **Συνεργατικός αξιολογητής:** σπάνια εκφράζει με απόλυτο τρόπο τις προτάσεις του, ενδιαφέρεται για την τεκμηρίωση των προτάσεων που είναι προς συζήτηση, ζητά πάντα τη γνώμη του συνομιλητή του και γενικά, συμμορφώνεται σε όλες τις νόρμες που είναι σε ισχύ (π.χ. η φοιτήτρια Β του πρώτου παραδείγματος και οι δύο φοιτήτριες του δεύτερου παραδείγματος)
- **Συνεργατικός καθοδηγητής:** εκφράζει με βεβαιότητα τις προτάσεις του, ζητά γενικά τη γνώμη του συνομιλητή του, και συμμορφώνεται στις νόρμες συμπεριφοράς, αρκεί να μην είναι σε βάρος του προσώπου του
- **Εγωκεντρικός καθοδηγητής:** εκφράζει με απόλυτο τρόπο τις προτάσεις του, σπάνια ζητά τη γνώμη του συνομιλητή του, και γενικά δίνει μεγάλη σημασία στη διατήρηση του προσώπου του (π.χ. η φοιτήτρια Α του πρώτου παραδείγματος)
- **Παθητικός συνεργάτης:** σπάνια εκφράζει με βεβαιότητα τις προτάσεις του, οι οποίες είναι λίγες συγκριτικά με τους προηγούμενους ρόλους, συμμορφώνεται στις νόρμες συμπεριφοράς και δείχνει να μην τον ενδιαφέρει τόσο η διατήρηση του προσώπου του, όσο η ομαλή διεξαγωγή της συνάντησης.

Η επίδραση των συνδυασμών των ρόλων στη συγκρότηση από κοινού γνώσης ήταν γενικά θετική με εξαίρεση τα ζεύγη στα οποία υπήρχε ένας εγωκεντρικός καθοδηγητής: σε αυτά τα ζεύγη το εύρος των εννοιών προς διαπραγμάτευση περιοριζόταν αισθητά. Αυτό είχε με τη σειρά του ως αποτέλεσμα οι φοιτητές να αναλώνονται στη διαπραγμάτευση εννοιών, μόνο και μόνο επειδή ο καθοδηγητής του ζεύγους επέμενε σε αυτές. Το πρόβλημα αυτό εμφανίστηκε σε μικρότερο βαθμό στις περιπτώσεις των συνεργατικών καθοδηγητών.

Συμπεράσματα

Η παρούσα έρευνα, αν και αποτελεί μελέτη περίπτωσης, μας οδηγεί σε χρήσιμα συμπεράσματα όσον αφορά τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της συνεργατικής επίλυσης προβλημάτων. Καταρχάς, η χρήση μη αυστηρά μαθηματικής γλώσσας δεν πρέπει να ερμηνεύεται ως ένδειξη μη κατανόησης. Πολλές φορές αυτή η γλώσσα αποδεικνύεται εξίσου αποτελεσματική στην από κοινού διαπραγμάτευση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών (με εξαίρεση τις γεωμετρικές κατασκευές όπου κρίνεται ανεπαρκής). Ακόμη πιο σημαντικά είναι τα συμπεράσματα που αφορούν τις άλλες συνιστώσες της αλληλεπίδρασης. Οι κοινές αντιλήψεις που εγκαθίστανται κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης (δηλαδή οι νόρμες) επιδρούν σημαντικά στην από κοινού διαμόρφωση των μαθηματικών εννοιών που προκύπτουν. Αν και επικρατεί η άποψη ότι οι νόρμες δεν μπορούν να διδαχθούν με την απλή αναφορά τους (Sfard, 2000, σ. 185), αυτό δεν αποκλείει τη δημιουργία από τον εκπαιδευτικό ενός *πλαισίου μάθησης*, εντός του οποίου θα αξιολογούνται οι κοινές αντιλήψεις που διέπουν τις πρακτικές επίλυσης προβλήματος. Με αυτό τον τρόπο μπορούν να εντοπιστούν οι αντιλήψεις που παρεμποδίζουν την από κοινού αφομοίωση των εννοιών. Τέλος, η ανάλυση των ρόλων που υιοθέτησαν οι φοιτητές καταδεικνύει ότι οι μετέχοντες στην εκπαιδευτική διαδικασία ενδιαφέρονται σημαντικά για τη διατήρηση του προσώπου τους. Έτσι, οι ενδεχόμενες αποτυχίες κάποιου μαθητή μπορεί να προέρχονται από το ρόλο που έχει υιοθετήσει ο ίδιος ή ο συνεργάτης του στην ομάδα εργασίας. Σε μια τέτοια περίπτωση μπορεί να κριθεί αναγκαία η αλλαγή της σύνθεσης μιας ομάδας. Γενικά, τα προηγούμενα συμπεράσματα συγκλίνουν στο ότι η όλη διαδικασία συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης πρέπει να στραφεί στις συνθήκες που τη συνοδεύουν και στις αλληλεπιδράσεις που την καθορίζουν.

Σημειώσεις

Σημείωση 1: Σύμφωνα με την Pirie (1998), η ψευδομαθηματική γλώσσα (quasi-mathematical language) χρησιμοποιείται κυρίως από τους μαθητές και το μαθηματικό της νόημα δεν είναι πάντα προφανές για τους άλλους (όπως για παράδειγμα το δάσκαλο). Για τους σκοπούς της έρευνάς μας, σε αυτή την κατηγορία εντάξαμε και όλες τις λαθεμένες μαθηματικές εκφράσεις.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Ανδρέου, Γ. (2002). *Γλώσσα. Θεωρητική και Μεθοδολογική Προσέγγιση*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Bales, R. F. (1966). Task Roles and Social Roles in Problem-Solving Groups. In B. J. Biddle, E. J. Thomas (Eds.), *Role Theory: Concepts and Research*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 254-262.

Blumer, H. (1969). *Symbolic Interactionism: Perspective and Method*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

Goffman, E. (1971). *The Presentation of Self in Everyday Life*. Harmondsworth, Middlesex: Penguin University Books.

Goffman, E. (1972). *Interaction Ritual: Essays on Face-To-Face Behaviour*. Harmondsworth, Middlesex: Penguin University Books.

Lemke, J. L. (1989). *Using language in the classroom*. Oxford: Oxford University Press.

Lerman, S. (1994). Changing Focus in the Mathematics Classroom. In S. Lerman (Ed.), *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 191-213.

Mercer, N. (2000). *Η Συγκρότηση της Γνώσης. Γλωσσική Αλληλεπίδραση μεταξύ Εκπαιδευτικών και Εκπαιδευομένων*. (μτφρ. Μ. Παπαδοπούλου). Αθήνα: Μεταίχμιο.

Pimm, D. (1994). Mathematics Classroom Language: Form, Function and Force. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 159-169.

Pirie, S. E. B. (1998). Crossing the Gulf between Thought and Symbol: Language as (Slippery) Stepping-Stones. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, A. Sierpinska, (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 7-29.

Rowland, T. (2002). Pragmatic Perspectives on Mathematics Discourse. In J. Novotná (Ed.), *CERME2: European Research in Mathematics Education II*. Prague: Charles University, 408-419.

Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (3), 157-189.

Steffe, L. P., Thompson, P. W. (2000). Interaction or Intersubjectivity? A Reply to Lerman. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (2), 191-209.

Strauss, A., Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Research. Grounded Theory Procedures and Techniques*. Newbury Park, California: Sage Publications.

Yackel, E., Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 390-408.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T. (1999). The Interactive Constitution of Mathematical Meaning in One Second Grade Classroom: An Illustrative Example. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (4), 469-488.

Yackel, E., Rasmussen, C., King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *Journal of Mathematical Behavior*, 19 (3), 275-287.