Η συνάρτηση ως διαμεσολαβημένη εκτίμηση. Μία διδακτική αξιοποίηση της έννοιας.

Παναγιώτης Σπύρου

Τμήμα Μαθηματικών Παν/μιου Αθηνών, Ιλίσια GR. 157 84, pspirou@math.uoa.gr

Στέφανος Κεΐσογλου

(M.ed) Ε.Ε.Τ Πανεπιστήμιο της Αθήνας, keisoglu@otenet.gr

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία προτείνουμε την έννοια της διαμεσολαβημένης εκτίμησης ως διδακτική προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης. Ερευνούμε τους ιδιαίτερους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές δημιουργούν μία τριγωνομετρική συνάρτηση συνοψίζοντας διαδικασίες μέτρησης στο φυσικό περιβάλλον. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε μέσα σε ένα μαθησιακό περιβάλλον το οποίο ευνοούσε μετρήσεις και ήταν πλούσιο σε εργαλεία, η παρουσία των οποίων υπήρξε καθοριστική στην κατασκευή και διερεύνηση των ιδιοτήτων των συναρτήσεων από τους μαθητές.

Λέξεις κλειδιά

Συνάρτηση, μέτρηση, τριγωνομετρική εφαπτομένη.

Εισαγωγή

Η έννοια της συνάρτησης είναι κεντρική στα Μαθηματικά και τις εφαρμογές τους. Η λιτότητα του σημερινού συνολοθεωρητικού ορισμού κρύβει βαθιά την ιστορική εμπειρία που τον διαμόρφωσε. Η εμπειρία αυτή περιελάμβανε, εκτός των άλλων, την έμμεση μέτρηση, τη μέτρηση δηλαδή ενός ποσού y μέσω ενός άλλου ποσού χ. Στην παρούσα εργασία, προτείνεται και ερευνάται η διδασκαλία μιας συγκεκριμένης συνάρτησης, της τριγωνομετρικής εφαπτομένης, ως έμμεση μέτρηση. Η επιλογή της συνάρτησης αυτής δεν είναι τυχαία αφού η εξέλιξή της είναι συνδεδεμένη με προβλήματα μέτρησης στο φυσικό περιβάλλον και με την ανάπτυξη και χρήση εργαλείων, γεγονός που αξιοποιούμε διδακτικά.

Θεωρητικό πλαίσιο

Επιστημολογική – ιστορική ανίχνευση της έννοιας της συνάρτησης

Πρώιμες μορφές συναρτησιακών συσχετισμών ανιχνεύουμε και στην αρχαιότητα, αλλά ένας συνθετικός ορισμός δεν στάθηκε σ' εκείνη την εποχή αναγκαίος. Η νεοτερικότητα, θα μετατοπιστεί σε ένα άλλο επίπεδο αφαίρεσης που θα προκύψει με την μετατροπή του λόγου σε ratio, δηλαδή σε υπολογιστική σχέση με αριθμητικό αποτέλεσμα. Η επιστήμη, μέσα στο νέο εννοιολογικό πλαίσιο που κυριάρχησε , κατάφερε το ξεπέρασμα των επιστημολογικών εμποδίων, που δεν της επέτρεπαν να μελετήσει την κίνηση και να κάνει μαθηματική κινηματική (Koyré, 1994). Από τα τέλη του 17ου αιώνα, αυτή η υπολογιστική αντίληψη οδήγησε στην δημιουργία του Απειροστικού Λογισμού (Boyer 1989). Στο πλαίσιο αυτών των διεργασιών, θα προκύψει ένας μεγάλος αριθμός αποτελεσμάτων και θα ανοιχτεί ένας ευρύς ορίζοντας μαθηματικών εμπειριών, που θα απαιτήσει όλο και πιο εκλεπτυσμένα εργαλεία, όπως η ιδέα της συνεξάρτησης μεταβλητών, οπότε διατυπώνονται οι πρώτοι ορισμοί που αφορούν την συνάρτηση από τους Bernoulli, Euler, Cauchy κ.ά. (Katz 1993). Τα μειονεκτήματα εκείνων των ορισμών ήταν κυρίως ότι έβλεπαν συμμετρικά εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως εμφανίζονται σε μια σχέση, (π.χ εξίσωση κύκλου) και επιπλέον δεν μπορούσαν να αποχωρίσουν την χρονικότητα από την ιδέα της μεταβλητής, κληρονομιά αναπόφευκτη για μια έννοια που γεννήθηκε από την μελέτη της κίνησης. Τελικά, ο Dirichlet το 1837 θα καταλήξει στη διατύπωση: "Η μεταβλητή ψ είναι συνάρτηση της μεταβλητής χ η οποία ορίζεται στο διάστημα α <χ <β, αν σε κάθε τιμή της μεταβλητής χ από αυτό το διάστημα αντιστοιχεί μια μόνη τιμή της μεταβλητής ψ, ανεξάρτητα από τη μορφή της αντιστοιχίας". Στον ορισμό αυτό, αν και διατηρείται ο όρος μεταβλητή αλλά ενέχει θέση νοητής επιλογής ενός πραγματικού αριθμού χ, α <χ <β. Εκείνο ωστόσο που αποτελεί το μεγάλο βήμα του ορισμού σε σχέση με τους παλιότερους, είναι η επιλογή από όλες τις σχέσεις εκείνων που εμπεριέχουν τον συσχετισμό της μορφής **πολλά – ένα**, προσδίδοντας στην έννοια κάτι πιο ισχυρό από απλό συσχετισμό: εμφανίζεται ξεκάθαρα το **μονοσήμαντο** της τιμής ψ. Η συνάρτηση, στην μαθηματική πρακτική, αποτελεί μια ειδική σχέση που προσφέρεται ιδιαίτερα στους υπολογισμούς. Στην ουσία πρόκειται για την εκτίμηση ενός μεγέθους ψ, η οποία όμως ανάγεται στην εκτίμηση ενός άλλου μεγέθους χ μέσω μιας σχέσης. Το ψ έρχεται να αποτελέσει τον στόχο, που επιδιώκεται να γνωρίζουμε την τιμή του, σε ένα πλαίσιο διαχείρισης, την στιγμή που το χ μας είναι το άμεσα προσπελάσιμο. Μια μέτρηση ενός μεγέθους έχει πάντα μία τιμή. Με αυτή την οπτική θα λέγαμε ότι η συνάρτηση προσφέρεται ως εργαλείο, ως διαμεσολαβημένη εκτίμηση ή και περιγραφή. Ο Fraenkel (1966, σελ. 23) εκφράζει χαρακτηριστικά το συγκεκριμένο ζήτημα ως εξής: "Η συνάρτηση που χαρακτηρίζει το θερμογράφο είναι μονότιμη, για κάθε στιγμή αντιστοιχεί μια κάποια θερμοκρασία. Αν, οποτεδήποτε, ρωτήσουμε σε ποια χρονική τιμή είχαμε μια συγκεκριμένη θερμοκρασία η απάντηση δίδεται από μια συνάρτηση - Η αντίστροφη της συνάρτησης είναι εν γένει μη μονότιμη καθόσον διαφορετικές χρονικές στιγμές έχουν διαφορετική μπορεί να έχουν την αυτή θερμοκρασία. Η ιδέα του μονότιμου αλλά μη αναπόφευκτα αντιστρεπτού είναι χρήσιμη στην ανάλυση".

Ο σύγχρονος ορισμός της συνάρτησης διαμορφώνεται μετά τον Hausdorff (1914), ο οποίος δίνει τον ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους. Κατά συνέπεια, μπορούμε να πούμε εν συντομία τα εξής: Η συνάρτηση ως τυπική μαθηματική έννοια αποτελεί μια νοητική κατασκευή που ολοκληρώθηκε σχετικώς πρόσφατα. Πρόκειται για μια σύνοψη και ενοποίηση πολλών εν πρώτοις διαφορετικών εμπειριών και νοητικών εργαλείων, που μαθηματικοί και επιστήμονες εν γένει χρησιμοποίησαν για να λύσουν προβλήματα και να συγκροτήσουν θεωρίες.

Η διδακτική μεταφορά της συνάρτησης

Εξαιτίας της ιστορικής συμπύκνωσης η έννοια της συνάρτησης είναι αφηρημένη και παρουσιάζει δυσκολίες για την διδακτική της μεταφορά. Η πολυπλοκότητα της έννοιας της συνάρτησης έχει απασχολήσει ιδιαίτερα τους ενασχολούμενους με την διδακτική των Μαθηματικών και έχει συντελέσει σε μια πολυδιάστατη μελέτη της έννοιας (Dubinsky & Harel 1992, Sierpinska 1992). Δεν πρέπει ακόμη να αγνοηθεί το ότι μέσα στο πλαίσιο της γνωστικής ψυχολογίας, έχουν γίνει προσπάθειες για την αναγωγή σε σωματικές κιναισθητικές εμπειρίες, που προκύπτουν δια μέσου των δράσεων των υποκειμένων και θα μπορούσαν να αποτελέσουν το βιωματικό υπόστρωμα, ώστε να γίνει κατανοητή μια τέτοια έννοια, (Piaget et al, 1977). Όταν ζητηθεί από τους μαθητές να δώσουν ένα παράδειγμα συνάρτησης, στην πλειονότητά τους καταφεύγουν σε παραδείγματα συναρτήσεων 1-1 (Evagelidou et al, 2004). Το γεγονός αναμενόμενο καθόσον η έννοια της αντιστοιχίας 1-1 προσφέρεται άμεσα στο νου με τις πρώτες ιδέες απαρίθμησης. Ωστόσο, εκείνο που αναφύεται πιο δύσκολο είναι η ιδέα της συνάρτησης ως πολλά – ένα καθώς προκύπτει ως μια αδικαιολόγητη προτίμηση από όλες τις σχέσεις που δίνονται ως υποσύνολα του καρτεσιανού γινομένου εκείνες του τύπου: για τα ζεύγη (χ, ψ_1), (χ, ψ_2) να ισχύει $\psi_1 = \psi_2$. Το γεγονός εμφανίζεται ως αυθαίρετος κανόνας για αποστήθιση. Έτσι, ο μαθητής έρχεται να γνωρίζει ότι το γράφημα μιας παραβολής αναπαριστά συνάρτηση αλλά αν περιστραφεί κατά 90 παύει να αναγνωρίζεται ως τέτοια. Ο Piaget έχει αναζητήσει κιναισθητικές εμπειρίες που να αποτελούν στοιχεία βίωσης του πολλά – ένα. Πολλές διαφορετικές δράσεις καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα, π.χ. ένα σημείο το προσεγγίζω με πολλούς δρόμους (Chapman et al 1988).

Στην παρούσα εργασία, αυτό που προτείνουμε είναι το παράδειγμα της περιοδικής συνάρτησης και συγκεκριμένα της τριγωνομετρικής εφαπτομένης, η κατασκευή της οποίας μπορεί να στηριχτεί σε κιναισθητικές εμπειρίες καθώς οι μαθητές χρησιμοποιούν εργαλεία μέτρησης. Επιπλέον, ως περιοδική συνάρτηση είναι ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα συνάρτησης ‘πολλά-ένα’, ενώ συγχρόνως μπορεί να θεωρηθεί ως διαμεσολαβημένη μέτρηση.

Αρκετές έρευνες σχετίζονται με τον τρόπο που οι μαθητές κατασκευάζουν συναρτήσεις καθώς χρησιμοποιούν φυσικά εργαλεία, (Da Costa & Magina 1998), (Noble et al 2001(α)), (Noble et al (β)) . Στις έρευνες αυτές, έχει επισημανθεί η αξία της χρήσης φυσικών μηχανισμών σε συνδυασμό με υπολογιστικά εργαλεία για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, με ιδιαίτερη έμφαση στις περιοδικές συναρτήσεις και την συνάρτηση ημίτονο. Η μαθηματική έννοια που σχετίζεται με την παρούσα έρευνα είναι η τριγωνομετρική εφαπτομένη για την οποία η βιβλιογραφία παρουσιάζει σχετικό έλλειμμα.

Η έννοια της συνάρτησης στην ελληνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Η συνάρτηση ορίζεται για πρώτη φορά στην Β΄ Γυμνασίου, ως αλληλεξάρτηση δύο ποσοτήτων. Η έννοια στην τάξη αυτή διδάσκεται ως «η διαδικασία με την οποία για κάθε τιμή της μεταβλητής χ θα βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής ψ». Στις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (Π.Ι) είναι εμφανής η πολυσημία της έννοιας: «Με κατάλληλα παραδείγματα από την καθημερινή ζωή διαπιστώνεται ότι υπάρχει *αλληλεξάρτηση* μεταξύ δύο μεγεθών, η οποία εκφράζεται με μία *ισότητα* που συνδέει τις *αντίστοιχες* τιμές των δύο μεγεθών. Η ισότητα αυτή ορίζει μία συγκεκριμένη *διαδικασία* με την οποία σε κάθε τιμή μιας μεταβλητής χ *αντιστοιχίζεται* μία μόνο τιμή μιας άλλης μεταβλητής ψ. Μία τέτοια διαδικασία ονομάζεται συνάρτηση» Εδώ αναφέρονται όλες σχεδόν οι σημασίες της έννοιας της συνάρτησης ως αλληλεξάρτηση, ως ισότητα, ως διαδικασία και εμμέσως ως αντιστοιχία, ενώ κατά προτεραιότητα θεματοποιείται το χ!

Στην Γ΄ Γυμνασίου, εισάγεται διακριτικά η έννοια της συνάρτησης, ως μηχανισμός με τον οποίο γίνεται η αντιστοιχία και σημειώνεται ότι: «μία συνάρτηση περιγράφεται όταν γνωρίζουμε για κάθε τιμή του χ το f(χ)», και πάλι η προτεραιότητα του χ δεν αφήνει να φανεί ο στόχος: μέτρηση του ψ, επομένως αναμενόμενη τιμή μία!

Στην Α΄ Λυκείου, η συνάρτηση είναι : «Μία διαδικασία (κανόνας) από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β». Αλλά κανόνας είναι και μια σχέση εν γένει! Είναι χαρακτηριστικό ότι ενώ στις οδηγίες του Π.Ι για το Γυμνάσιο υπογραμμίζεται η σημασία των παραδειγμάτων από την καθημερινή εμπειρία του μαθητή στις οδηγίες για το Λύκειο απουσιάζει μία τέτοια υπόδειξη.

Στην Β΄ Λυκείου, για την συνάρτηση ψ=εφχ, το σχολικό βιβλίο αναφέρει τα εξής: « Όπως γνωρίζουμε για κάθε γωνία ω υπάρχει μια μόνο τιμή του ημω, έτσι ορίζεται μία συνάρτηση με την οποία κάθε γωνία ω αντιστοιχίζεται στο ημίτονό της. Όμοια, ορίζονται και οι άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις γωνιών». Λίγο παρακάτω: «Η συνάρτηση εφαπτομένη που συμβολίζεται με εφ, ορίζεται ως εξής: εφχ=ημω/συνω . Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης εφ είναι το σύνολο R1 = {χ/συνχ ≠ 0}. Επειδή, για κάθε χ που ανήκει στο R1 ισχύει εφ(χ+π)=εφ(χ-π)=εφχ, η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο π.» Όσον αφορά στην γραφική παράσταση της εφαπτομένης αυτή κατασκευάζεται μέσω ενός πίνακα τιμών. Η έννοια της ασύμπτωτης, της γραφικής παράστασης της εφαπτομένης περιγράφεται, ως εξής: «Όταν ο χ τείνει στο π/2 από μικρότερες τιμές η εφχ τείνει στο +∞. Γι αυτό λέμε ότι η ευθεία χ=π/2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.». Στην ουσία η συνάρτηση της τριγωνομετρικής εφαπτομένης περιγράφεται ως μία μαθηματική έννοια που προκύπτει από την συμβολική σύμπλεξη ημιτόνου και συνημιτόνου.

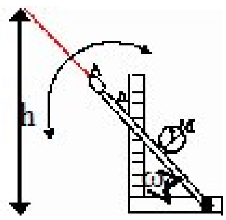
Η έρευνα

Ερευνητικά ερωτήματα

Μέσα στα πλαίσια των προβληματισμών που αναφέρθηκαν προηγουμένως, σχεδιάστηκε ένα ερευνητικό project του οποίου το πρώτο μέρος είχε διάρκεια περίπου 3 χρόνια. Ένα μέρος των γενικών ερευνητικών ερωτημάτων αφορούσε στους ιδιαίτερους τρόπους με τους οποίους προβλήματα μετρήσεων θα μπορούσαν να αποτελέσουν για τους μαθητές, ένα πλαίσιο συγκρότησης της έννοιας της συνάρτησης. Έμφαση είχε δοθεί σε εκείνες τις συναρτήσεις που συνδέονται με μετρήσεις στον φυσικό χώρο, ιδιαίτερα δε της τριγωνομετρικής εφαπτομένης. Η όλη ερευνητική agenda βασίστηκε σε δύο υποθέσεις: α) Το πλήθος κι οι δυνατότητες των εργαλείων, που διαθέτει ο μαθητής, είναι κρίσιμος παράγοντας στην μαθησιακή διαδικασία.β) Ένα μαθησιακό περιβάλλον που συνδυάζει εργαλεία μετρήσεων και τον υπολογιστή ευνοεί την κατασκευή από τους μαθητές της έννοιας της συνάρτησης ως διαμεσολαβημένη μέτρηση.Οι υποθέσεις αυτές μας οδήγησαν στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

- Ποιες είναι οι ιδιαίτερες δράσεις μαθηματικοποίησης από την μεριά των μαθητών καθώς εργάζονται μέσα σε ένα μαθησιακό περιβάλλον, που συνδυάζει φυσικά εργαλεία μετρήσεων και υπολογιστικές προσομοιώσεις τους.
- Πως οι δράσεις αυτές συμβάλουν στην δημιουργία νοημάτων σχετικών με την έννοια της τριγωνομετρικής εφαπτομένης, και των ιδιοτήτων της.

Σχεδιασμός και μεθοδολογία



Ο σχεδιασμός της έρευνας βασίστηκε στις δύο γενικές υποθέσεις που αναφέρθηκαν προηγουμένως ενώ για την υλοποίησή της κατασκευάστηκε ένα εργαλείο μέτρησης του ύψους ενός απομακρυσμένου απρόσιτου αντικειμένου. Όταν περιστρέφεται ο δείκτης, χωρίς να μεταφέρεται το εργαλείο, τότε τα μεγέθη που μεταβάλλονται είναι η γωνία ω και το ύψος εστίασης h πάνω στον τοίχο. Η μέτρηση της γωνίας ω μπορούσε να γίνει άμεσα με το μοιρογνωμόνιο Μ που έφερε ο δείκτης πάνω του. Η σταθερή απόσταση από τον τοίχο μπορούσε να μετρηθεί με ένα μέτρο το οποίο είχαν στην διάθεσή τους οι μαθητές. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκαν λογισμικά με τα οποία δημιουργήσαμε προσομοιώσεις των εργαλείων, με στόχο την κατασκευή ενός μαθησιακού περιβάλλοντος στο οποίο να συνδυάζονται-συντονίζονται τα φυσικά με τα υπολογιστικά εργαλεία. Η λειτουργία των φυσικών εργαλείων ήταν άγνωστη στους μαθητές, οπότε η κατάσταση προβλήματος αφορούσε στον τρόπο με τον οποίο θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία αυτά, ώστε να μετρήσουν ένα ορισμένο ύψος μέσα στο φυσικό περιβάλλον.

Η πιλοτική έρευνα διήρκεσε περίπου 18 μήνες και μέσω αυτής εντοπίστηκαν δυσλειτουργίες και ασάφειες που είχαν υπεισέλθει στον σχεδιασμό του μαθησιακού περιβάλλοντος. Για παράδειγμα, το δύσχρηστο εργαλείο μέτρησης αντικαταστάθηκε από ένα περισσότερο ευέλικτο και το αρχικό λογισμικό (sketchpad) αντικαταστάθηκε από το λογισμικό ‘Χελωνόκοσμος’ της υπολογιστικής πλατφόρμας ‘Αβάκιο’ που έχει αναπτύξει το Εργαστήριο Εκπαιδευτικής τεχνολογίας του Πανεπιστημίου της Αθήνας. Το τελευταίο θεωρήθηκε αναγκαίο, γιατί σε μελέτη περίπτωσης δύο ζευγών μαθητών διαπιστώθηκε ότι το λογισμικό αυτό ευνοούσε την συναρτησιακή διαχείριση των προσομοιώσεων.

Η κυρίως έρευνα διήρκεσε 18 μήνες επίσης και σε αυτήν συμμετείχαν 12 ομάδες των δύο ή τριών μαθητών, τόσο της Γ΄ Γυμνασίου όσο και της Α΄ Λυκείου. Οι μαθητές κάθε ομάδας απασχολήθηκαν 7-9 ώρες στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου τους εκτός ωραρίου λειτουργίας. Τα δεδομένα συνελέγησαν μέσω βιντεοσκόπησης και μαγνητοφώνησης των συναντήσεων, από τις σημειώσεις των μαθητών σε ειδικά διαμορφωμένα τετράδια, και τις απαντήσεις σε συγκεκριμένες ερωτήσεις φύλλων εργασίας. Τα ηχητικά δεδομένα απομαγνητοφωνήθηκαν και οι διάλογοι συσχετίστηκαν με τα δεδομένα των σημειώσεων, ώστε για κάθε ομάδα να μελετηθεί η πορεία μέσω της οποίας οι μαθητές χρησιμοποιούσαν ή δημιουργούσαν συναρτήσεις. Στην ανάλυση και στα αποσπάσματα που παρατίθενται στην συνέχεια, ο ερευνητής συμβολίζεται με το γράμμα Ε η μαθήτρια ή ο μαθητής που βρισκόταν αριστερά της οθόνης ως Α ενώ η άλλη/ος Δ. Κάθε ομάδα χαρακτηρίζεται από ένα κεφαλαίο γράμμα Α (Λύκειο) ή Γ (Γυμνάσιο) και δίπλα έναν αυθαίρετο αύξοντα αριθμό. Κατά την ανάλυση των δεδομένων αναζητήθηκαν δομές δράσεων από το μέρος των μαθητών, καθώς αυτοί επιχειρούσαν να αξιοποιήσουν τα φυσικά εργαλεία.

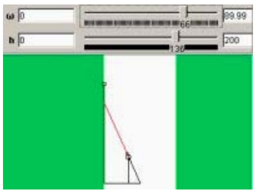
Η κατασκευή μιας συνάρτησης

Η μη γραμμική συσχέτιση της γωνίας και του ύψους στο οποίο εστιάζει το λέιζερ απετέλεσε τον πυρήνα γύρω από τον οποίο δομήθηκε από τους μαθητές η κατασκευή της συνάρτησης της τριγωνομετρικής εφαπτομένης. Η πορεία στις διάφορες ομάδες παρουσίασε αρκετά κοινά χαρακτηριστικά τα οποία φαίνεται να αποτελούν μια δομή που αναδυόταν καθώς προχωρούσε η έρευνα.

Στάδιο πρώτο: Η μη γραμμικότητα

Αφετηρία της δραστηριότητας υπήρξε το ερώτημα: «Αν θέλουμε να εστιάσουμε το λέιζερ σε διπλάσιο ύψος, από αυτό στο οποίο ήδη εστιάζει, τι επέμβαση θα πρέπει να κάνουμε στην γωνία;» Η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών απάντησε αυθόρμητα ότι θα πρέπει να διπλασιαστεί η γωνία και στην συνέχεια επιχείρησαν να το επιβεβαιώσουν. Η πρόβλεψη των μαθητών διαψεύστηκε όταν επιχείρησαν να διπλασιάσουν την γωνία και παρατήρησαν ότι το λέιζερ εστιάζει σε αρκετά μεγαλύτερο ύψος από το διπλάσιο. Η κατάρρευση της γραμμικότητας στην σχέση των δύο ποσών που μεταβάλλονται αποτελεί την πρώτη ψηφίδα, στην συγκρότηση της έννοιας της τριγωνομετρικής μεταβολής η οποία στην συνέχεια θα αποτελέσει μια βάση για την συγκρότηση της έννοιας της συνάρτησης της τριγωνομετρικής εφαπτομένης. Οι μαθητές έχοντας απορρίψει το μαθηματικό εργαλείο των αναλογιών για την μέτρηση-συσχέτιση των δύο μεγεθών πειραματίστηκαν με μία προσομοίωση του εργαλείου.

Στάδιο δεύτερο: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και οι ασύμπτωτες



Οι μαθητές είχαν στην διάθεσή τους μία γεωμετρική προσομοίωση του φυσικού εργαλείου, η οποία τους παρείχε την δυνατότητα να μεταβάλουν αυθαίρετα την γωνία ω και το ύψος h από τους δύο μεταβολείς (στο πάνω μέρος της προσομοίωσης) και να καθορίσουν τις τιμές των ακραίων τιμών που μπορούν να πάρουν οι δύο μεταβλητές ω και h. Σύροντας τους δύο μεταβολείς αναζήτησαν τις τιμές μέσω των οποίων το υποτιθέμενο λέιζερ εστίαζε στο συγκεκριμένο ύψος. Η πρώτη σημαντική συναρτησιακή δράση ήταν ο καθορισμός των ακραίων τιμών για την γωνία ω, καθώς οι μαθητές έδειξαν μία ισχυρή προτίμηση για ένα αρχικό διάστημα [0, 89]. Ο λόγος που τους οδήγησε σε αυτή την δράση, ήταν κυρίως η λειτουργία του φυσικού εργαλείου το οποίο στις 90 μοίρες δεν θα μπορούσε να εστιάσει σε κανένα ύψος. Επιπλέον τα ύψη στον φυσικό χώρο δεν είχε νόημα να πάρουν αρνητικές τιμές, όπως υποστήριξαν οι περισσότεροι μαθητές. Είναι χαρακτηριστική η διαπραγμάτευση μεταξύ των μελών του ζεύγους Α2 και του ερευνητή.

Ε: Ποιά είναι τα όρια της γωνίας;

Α: Να είναι μέχρι 90 ..παραπάνω;(περιστρέφει τον δείκτη εκφράζοντας αμφιβολία).

Δ: Βάλτο μέχρι 80 …από 15.

Α: Από 0…γιατί όχι;

Ε: Το μηδέν τι νόημα έχει;

Α: Ο δείκτης είναι εδώ (κατεβάζει τον δείκτη του φυσικού εργαλείου κάτω).

Ε: Το 90 τι νόημα έχει;

*Α: Το λέιζερ γίνεται **παράλληλο**, δεν θα σταμάταγε πουθενά.*

*Δ: Θα φτάσει **όσο θέλουμε** ψηλά.*

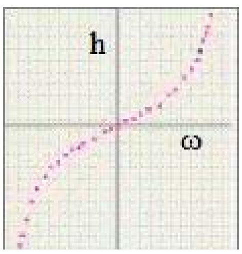
Δοκιμάζουν την τιμή 90 οπότε δημιουργείται μία πολλαπλά ανακλώμενη ακτίνα του λέιζερ, αφού δεν χωρούσε μέσα στα όρια της προσομοίωσης.

Α: Όπα, μπερδεύτηκε…να του βάλουμε 89,9999…

Οι μαθητές έχουν δημιουργήσει δύο επιπλέον ψηφίδες της συνάρτησης, ένα πεδίο ορισμού [0 90) και μία έννοια ασύμπτωτης, αφού έχουν εισάγει την έννοια του απείρου (όσο θέλουμε ψηλά) και την έννοια της παράλληλης πορείας (κατακόρυφης).

Στάδιο τρίτο: Γραφική παράσταση και επέκταση του πεδίου ορισμού

Ο σχεδιασμός της έρευνας προέβλεπε, μετά την μελέτη της προσομοίωσης, να ζητηθεί από τους μαθητές να μελετήσουν την σχέση των τιμών ω και h μέσα από την γραφική παράσταση των ζευγών των τιμών αυτών.



Οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να αναζητήσουν, σε ένα καρτεσιανό επίπεδο, τα σημεία (ω , h) οι συντεταγμένες των οποίων επέτρεπαν το εικονικό λέιζερ να εστιάσει στο ύψος h. Η διάταξη των σημείων αποτέλεσε έναν πυρήνα διαπραγμάτευσης καθοριστικό για την συγκρότηση της νέας συνάρτησης. Η επέκταση του πεδίου ορισμού, σε αρνητικές τιμές, έγινε μέσα από την διάταξη των σημείων και την τυχαία, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, επιλογή σημείων στο τρίτο τεταρτημόριο των αξόνων. Η διαπραγμάτευση των μαθητών για την σημασία των αρνητικών τιμών για την γωνία και το ύψος είχε σαν αφετηρία την άποψη ότι δεν έχει νόημα να δοκιμαστούν αρνητικές τιμές, αφού όπως χαρακτηριστικά σημείωσε μία μαθήτρια της ομάδας Α3 : *«Δεν υπάρχουν αρνητικοί αριθμοί στο φυσικό περιβάλλον».* Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να αποδώσουν νόημα στις αρνητικές τιμές, αφού διατηρούσαν την αντίληψη ότι η προσομοίωση ως εικονικός χώρος δεν είναι κατ' ανάγκη ισόμορφη προς τον φυσικό χώρο. Όταν επιχείρησαν να πειραματιστούν με το εργαλείο για να αποδώσουν νόημα στις αρνητικές τιμές της γωνίας και του ύψους, τότε άρχισαν να επινοούν καταστάσεις προβλημάτων στα οποία θα ήταν χρήσιμη η αντιστροφή του φυσικού εργαλείου (Α3).

Ε: Τι θα μπορούσε να μετρήσει τώρα;

Δ: Το βάθος.

Ε: Το βάθος είναι αρνητικό;

Δ: Όχι θετικό είναι αλλά δεν χρειάζεται να πας κάτω για να το μετρήσεις.

Α: Αν είμαστε σε ένα πηγάδι και θέλαμε να μετρήσουμε το βάθος του θα βάλουμε έτσι το εργαλείο (εννοεί στο χείλος του πηγαδιού).

Στο ζεύγος Γ6, η μαθήτρια Δ υποστήριξε ότι: *«Μπορούμε αν καθόμαστε στο ταβάνι ανάποδα και θέλουμε να μετρήσουμε το ύψος του δωματίου».*
Έτσι, οι μαθητές επεκτείνουν το πεδίου ορισμού σε αρνητικές τιμές μέσα από την επέκταση της χρήσης του φυσικού εργαλείου σε μετρήσεις όχι μόνο ύψους αλλά και βάθους. Η επέκταση αυτή γίνεται μέσα από την ανάγκη να αποδοθεί νόημα στα σημεία της γραφικής παράστασης που βρίσκονται στο τρίτο τεταρτημόριο.

Στάδιο 4ο . Ο τύπος της συνάρτησης

Ο εντοπισμός της συμβολικής αναπαράστασης της νέας συνάρτησης στηρίχτηκε στην προσπάθεια των μαθητών να βρουν έναν τύπο για τον υπολογισμό του ύψους h μέσω της γωνίας ω ώστε να αξιοποιηθεί το εργαλείο. Η αδυναμία, να εντοπίσουν τον τύπο της συσχέτισης των δύο μεταβλητών, ενώ είχαν κατασκευάσει την γραφική παράσταση, οδήγησε τα περισσότερα ζεύγη να επιστρέψουν σε ένα γεωμετρικό σχήμα στο τετράδιο.

Κρίσιμη υπήρξε η παρουσία του μοιρογνωμόνιου Μ με το οποίο οι μαθητές είχαν την δυνατότητα να μετρήσουν την γωνία του δείκτη. Αυτό οδήγησε τους μαθητές να ανακαλέσουν τριγωνομετρικές έννοιες με προτίμηση στην εφαπτομένη πρωτίστως αλλά και του ημιτόνου δευτερευόντως. Έτσι, στα περισσότερα ζεύγη κατέγραψαν τον τύπο εφω=h/d από όπου προέκυψε ο h=dεφω τον τύπο δηλαδή μέσω του οποίου μπορούσαν να πραγματοποιήσουν μετρήσεις. Στο σημείο αυτό και με βάση το φύλλο εργασίας οι μαθητές θα έπρεπε να διαπραγματευτούν το ερώτημα : «Πως συνδέεται ο τύπος αυτός με τα προηγούμενα;» Αντιμετώπισαν πραγματική δυσκολία, αφού ο τύπος δεν αποτελούσε γι αυτούς συνάρτηση. Για παράδειγμα στο ζεύγος Γ1.

Α: Μοιάζει με ανάλογα ποσά αλλά δεν είναι.

Ε: Είναι συνάρτηση αυτό;

Α: Εφόσον έχουμε το d σταθερό αυτό μπορεί να αντιστοιχεί στο α και να βγεί ψ=α.χ αλλά αυτό δεν ταιριάζει στην γραφική παράσταση.

Δ: Με τίποτα δεν είναι ψ=αχ γιατί η εφαπτομένη δεν είναι χ το εφ είναι εφαπτομένη

Α: (Προς τον Ε) μπορούμε να πούμε εφαπτομένη χ; Η γωνία θα είναι χ;

Ε: Το ψ;

Α-Δ: Το ύψος

Ε: Αυτό είναι συνάρτηση;

Α: Ναι, γιατί σε κάθε γωνία αντιστοιχεί ένα ύψος.

Ε: Ποιά είναι η γραφική παράστασή της;

Δ: Δεν το πιστεύω… αυτή;!! (δείχνει την γραφική παράσταση στους άξονες)

Ε Πώς να χαρακτηρίσουμε την συνάρτηση αυτή;

Δ: Αλγεβρογεωμετρική

Α: Ααα τριγωνομετρία…… Τριγωνομετρική;

Τελικά, η συμβολική αναπαράσταση ψ=d.εφχ φαίνεται να προκύπτει κυρίως μέσω της χρήσης των συμβόλων χ και ψ. Τα σύμβολα αυτά, σε όλα τα ζεύγη, απέδωσαν συναρτησιακό νόημα στον τύπο μέτρησης h=d.εφω ο οποίος υφίσταται έναν εννοιολογικό μετασχηματισμό σε συνάρτηση.

Στάδιο 5ο . Η υπέρβαση του 1-1

Στο τελευταίο στάδιο της δραστηριότητας οι μαθητές διαπραγματεύτηκαν το ερώτημα: «Τι νόημα θα μπορούσε να έχουν τιμές του χ μεγαλύτερες των 90^o». Η διερεύνηση του ερωτήματος και η διαδρομή προς μία απάντηση είναι συνάρτηση του εργαλείου που χρησιμοποιήθηκε αρχικά. Οι μαθητές, που χρησιμοποίησαν αρχικά το φυσικό εργαλείο, περιέστρεψαν τον δείκτη σε γωνία μεγαλύτερη των 90^o οπότε παρατήρησαν ότι το λέιζερ εστιάζει πάλι σε κάποιο ύψος. Είναι χαρακτηριστικός ο διάλογος στο σημείο αυτό στην ομάδα Α2.

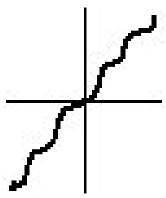
Δ: Επειδή σκέφτηκα….. επειδή ξαναγυρίζει, ξανασχηματίζεται το ίδιο.

Α: Λογικά αυτό που γίνεται μέχρι το 360^o πρέπει να ξαναεπαναλαμβάνεται (περιστρέφει τον δείκτη του εργαλείου)

Ε: Τι επαναλαμβάνεται;

Α: Έχει κάνει ένα σχηματάκι μέχρι αυτό το σημείο και μετά ξανακάνει το ίδιο

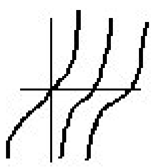
(ζωγραφίζει τοπαρακάτω σχήμα).



Θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε το σχήμα του μαθητή ως προσπάθεια απόδοσης της περιοδικότητας μέσα από δύο αρχέτυπες αντιλήψεις για την συνάρτηση, την συνέχεια του γραφήματος και το 1-1. Η περιοδικότητα στο σημείο αυτό έχει μάλλον γεωμετρικό χαρακτήρα παρά συναρτησιακό. Συνεχίζοντας να χειρίζονται το φυσικό εργαλείο ο Α αντιστρέφει και περιστρέφει τον δείκτη:

Δ: Ωραία το στρίβουμε έτσι ώστε να ξαναπηγαίνει εκεί το κατάλαβα.

Α: Άμα ξαναρχίζει από το 0 εδώ πέρα έτσι (δείχνει την γραφική παράσταση στο χαρτί) πως θα πηγαίνει έτσι; (δείχνει επαναλαμβανόμενες καμπύλες την μία δίπλα στην άλλη). Είναι γελοίο…. Κάντην εσύ.

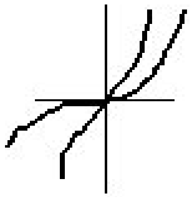


Ο Δ κατασκευάζει το διπλανό σχήμα, που του υπέδειξε ο Α, αλλά εκφράζει σοβαρές αμφιβολίες και αυτός. Είναι χαρακτηριστικό ότι η κιναισθητική εμπειρία του Α, ο οποίος χειρίστηκε το εργαλείο, μεταφράστηκε σε ένα γράφημα το οποίο δομικά είναι ισόμορφο προς το φαινόμενο που δημιουργήθηκε. Τα αρχέτυπα όμως της συνέχειας και του 1-1, καθώς και η έλλειψη οποιασδήποτε μαθηματικής εμπειρίας για περιοδικές συναρτήσεις δημιουργεί αρνητική στάση απέναντι στο γράφημα. Η αρνητική στάση οδηγεί τους μαθητές σε μία τρίτη λύση.

Δ: Να περνάει από δω και να μην περνά από το 0; (με απορία)

Α: Κάτσε μούβαλες μία ιδέα τώρα…αυτό εδώ πέρα πάει και ξαναπάει.

Δ: Σκέφτομαι ότι εκτός από εδώ (δείχνει την αρχή των αξόνων) δεν μπορεί να συναντήσει αλλού τους άξονες.



Η διαπίστωση αυτή οδήγησε τους μαθητές στην κατασκευή ενός σχήματος στο οποίο για πρώτη φορά αναιρείται η συνέχεια του γραφήματος αλλά καταργείται η περιοδικότητα και το 1-1. Στην ουσία δεν πρόκειται για γράφημα συνάρτησης πλέον.

Στο σημείο αυτό, ο ερευνητής τους ζήτησε να ελέγξουν την εγκυρότητα των γραφημάτων αποκλειστικά μέσα από την προσομοίωση οπότε οι μαθητές καταφεύγουν στην γραφική παράσταση:

Δ: Πάρε ένα σημείο που να είναι πολύ πιο πέρα.

Α: Να είναι στην ίδια ευθεία.

Ε: Στην ίδια ευθεία;

Α: Αυτό πρέπει να γίνεται, στην ίδια ευθεία, αφού έχει κάνει όλο αυτό εδώ πέρα (δείχνει την δεύτερη γραφική παράσταση) δεν μπορεί να έχει δύο τιμές.

Δ: Λογικό, γιατί εδώ πέρα που δεν θα ενώνεται, δεν ενώνεται ούτε εδώ (δείχνει την ασυνέχεια στο σωστό σχήμα) οπότε επαληθεύονται και αυτά τα σημεία (δείχνει σημεία στην ίδια ευθεία σε διαφορετικούς κλάδους).

Εδώ πλέον, η τελική επιλογή γίνεται με κριτήριο το μονότιμο της συνάρτησης.

Διαπραγμάτευση

Συνοψίζοντας τα ερευνητικά ευρήματα μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι οι μαθητές, με βάση τα εργαλεία που διέθεταν, κατασκεύασαν μία έννοια τριγωνομετρικής συνάρτησης, τα χαρακτηριστικά της οποίας προέκυψαν και συνδέθηκαν με τις δυνατότητες των εργαλείων και την κατάσταση προβλήματος. Η συνάρτηση, και ένα μέρος από τις ιδιότητές της, αναδύθηκε μέσα από την συντονισμένη χρήση του φυσικού εργαλείου και της προσομοίωσης. Η έννοια δομείται γύρω από τον στόχο που εκφράζεται ρητά μέσα στην κατάσταση προβλήματος «Να υπολογιστεί ένα ύψος h προς το οποίο δεν έχουμε άμεση πρόσβαση».

h ή (ψ)	στόχος μέτρησης
ω ή (χ)	άμεση μέτρηση
d.εφω ή (d.εφχ)	έμμεση μέτρηση.

Τα σύμβολα που απέδωσαν τον τύπο της συνάρτησης προέκυψαν μέσα από την εμπειρία της μέτρησης. Η περιοδικότητα της συνάρτησης προέκυψε μέσα από την περιοδικότητα του φαινομένου που δημιούργησαν τα εργαλεία. Για την κατασκευή της γραφική παράστασης οι μαθητές χρειάστηκε να υπερβούν τα αρχέτυπα σχήματα της συνέχειας μιας καμπύλης και της 1-1 αντιστοιχίας. Η υπέρβαση αυτή έγινε δυνατή μέσω της δυνατότητας να πειραματιστούν με τα εργαλεία του περιβάλλοντος.

Τελικά, προέκυψαν ενδείξεις ότι οι μαθητές, καθώς εργάζονται στο συγκεκριμένο μαθησιακό περιβάλλον, έχουν την δυνατότητα να κατασκευάσουν οι ίδιοι και να διερευνήσουν τις ιδιότητες της συνάρτησης της εφαπτομένης.

Η έρευνα θα μπορούσε να επεκταθεί σε δύο κατευθύνσεις. Η πρώτη αφορά στην αξιοποίηση του συγκεκριμένου εργαλείου, χωρίς την χρήση του μοιρογνωμόνιου. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση μέτρησης είναι γραμμική, αφού τα μαθηματικά που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν είναι η ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων επομένως και τα ανάλογα ποσά (Keisoglou & Spyrou, 2003). Η δεύτερη αφορά στην χρήση άλλου εργαλείου μέτρησης, όχι υποχρεωτικά μήκους, αλλά χρόνου.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Boyer, C. (1949), The History of the Calculus and its Conceptual Development, Dover, New York.

Chapman, M., Lindenberger (1988), Functions, Operations, and Decalage in the Development of Transivity, *Developmental Psychology,* Vol. 24, No 4.

Dubinsky, E., Harel, G. (1992), The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy, *Mathematical Association of America (MMA).*

Evagelidou, A., Spyrou, P., Gagatsis, I. Elia (2004), University Student’s Conception of Function, PME 28, Vol 2.

Fraenkel A. A. (1966), Abstract Set Theory, North Holland, Amsterdam.

Katz V.J. (1993), A History of Mathematics, *Harper Collins College Publishers,* New York.

Keisoglou, S., Spyrou, P., (2003), Processes of mathematization in a learning environment combining devices and computational tools, *Rediconti Ricerca Mathematica, 13, p. 43-57.*

Koyré A, (1943), Galileo and Plato, Journal of History of Ideas, Vol. IV, no 4, p. 400-428, Ελληνική μετάφραση Κ. Κριμπά, (1994),*ΝΕΥΣΙΣ, Ι* σελ. 51-83.

Nielse, L., Da Costa, S., (1998). ‘’ Making sense of sine and cosine functions through alternative approaches: ‘Computer and experimental world’ contexts’’ Proceedings of the 22th Conference for the P. M. E.

Noble,T., Nemirovsky, R., Wright, Tierny (2001),(α) ‘‘Experiencing change: The mathematics of change in multiple environments’’ *JRME* January.

Noble, T., Nemirovsky, R., Wagoner, P., Solomon, J.,(β) "This is true: that's how it is. “The Bouncing Car and the Development of Complexity” from http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/TERC_AERA.pdf

Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A., Bang, V., (1977), Epistemology and Psychology of Functions, Dordrect.

Sierpinska, A.: (1992), On understanding the notion of function. In G. Harel and E.Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Mathematical Association of America, MAA Notes, Volume 25.