Η ικανότητα επίλυσης πρωτότυπων μαθηματικών προβλημάτων και η χρήση στρατηγικών από μαθητές Β΄ δημοτικού

Έλενα Παναγίδου, Μαρία Τσιαννή
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
panelena@hotmail.com, m_tsianni@hotmail.com

Περίληψη

Η μελέτη αυτή διερευνά την ικανότητα μαθητών μικρής ηλικίας να επιλύουν πρωτότυπα μαθηματικά προβλήματα σε σχέση με την επίδοσή τους στα μαθηματικά. Επιπρόσθετα, εξετάζει τις στρατηγικές που εφαρμόζουν κατά την επίλυση των προβλημάτων αυτών. Εκατό μαθητές Β΄ τάξης δημοτικού κλήθηκαν να λύσουν τέσσερα πρωτότυπα μαθηματικά προβλήματα. Στη συνέχεια επιλέχτηκαν τέσσερις από αυτούς για τη διεξαγωγή ημιδομημένων συνεντεύξεων με σκοπό τη βαθύτερη διερεύνηση της σκέψης των μαθητών κατά την επίλυση των προβλημάτων. Από την ανάλυση των δεδομένων βρέθηκε ότι μαθητές με υψηλή επίδοση στα μαθηματικά πέτυχαν υψηλότερη βαθμολογία στο δοκίμιο πρωτότυπων προβλημάτων. Υπήρχαν, ωστόσο, και ότι μαθητές μέτριας επίδοσης που κατάφεραν να λύσουν κάποια από τα πρωτότυπα προβλήματα. Μαθητές με υψηλή επίδοση ακολούθησαν διαφορετική στρατηγική, συνήθως πιο επιτυχημένη, για την επίλυση αυτών των πρωτότυπων προβλημάτων. Γενικότερα, φάνηκε ότι οι μαθητές μικρής ηλικίας είναι ικανοί να λύνουν πρωτότυπα προβλήματα και να βρίσκουν εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης.

Λέξεις κλειδιά: επίλυση προβλήματος, πρωτότυπα προβλήματα, στρατηγικές

Εισαγωγή

Τα τελευταία 20 χρόνια διάφοροι οργανισμοί όπως το NCTM και το Adult Numeracy Practitioners Network, έχουν στρέψει το ενδιαφέρον τους στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος τονίζοντας ότι η διδασκαλία και μάθηση πρέπει να εστιάζεται στη ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης (Lerch, 2004). Η επίλυση μαθηματικού προβλήματος θεωρείται ως ένας από τους κύριους σκοπούς της διδασκαλίας των μαθηματικών. Αναφέρεται συγκεκριμένα ότι βασικός στόχος της διδασκαλίας σε όλα τα επίπεδα είναι η αυτορρύθμιση και ο αναστοχασμός κατά τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικού προβλήματος (NCTM, 2000).

Όπως αναφέρει ο Schoenfeld (1992), ο όρος «επίλυση μαθηματικού προβλήματος» (ΕΜΠ) έχει χρησιμοποιηθεί με ποικίλα νοήματα, τα οποία αρχίζουν από την απλή εκτέλεση πράξεων από μνήμης και φτάνουν μέχρι τη δημιουργία μαθηματικών από τον επαγγελματία επιστήμονα. Πρόκειται για μια εξαιρετικά πολύπλοκη διαδικασία, εφόσον σύμφωνα με τους Charles κ.α. (1992), περιλαμβάνει την ανάκληση γνωστικών σχημάτων και γεγονότων, τη χρήση ποικίλων δεξιοτήτων και διαδικασιών, την αξιολόγηση της σκέψης και τον έλεγχο του βαθμού προόδου κατά την πορεία επίλυσης του προβλήματος.

Ο Polya (1985) θεωρούσε την επίλυση μαθηματικού προβλήματος ως τέχνη και δεξιότητα που μπορεί να διδαχθεί και να αναπτυχθεί με τη μίμηση και την άσκηση. Το μοντέλο του Polya υπονοεί ότι οι μαθητές με αρκετή πρακτική άσκηση μπορούν να αποκτήσουν δεξιότητες επίλυσης προβλήματος επιλέγοντας τις στρατηγικές που προσφέρονται για την λύση του συγκεκριμένου προβλήματος.

Θεωρητικό πλαίσιο

Στάδια επίλυσης μαθηματικού προβλήματος

Σύμφωνα με τον Polya (1985), κατά την προσπάθεια εύρεσης της λύσης ενός προβλήματος ο μαθητής μπορεί να αναθεωρεί κατ' επανάληψη τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζει το πρόβλημα. Έτσι, ενώ αρχικά η αντίληψη του παιδιού για το πρόβλημα δυνατό να είναι ελλιπής στη συνέχεια διευρύνεται καθώς το παιδί σημειώνει κάποια πρόοδο. Ο Polya διακρίνει τέσσερα στάδια κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος: κατανόηση του προβλήματος, κατάστρωση σχεδίου επίλυσης του προβλήματος, εκτέλεση του σχεδίου και αναδρομική διερεύνηση.

Πέρα από τα στάδια που εισηγείται ο Polya όσον αφορά στη διδασκαλία επίλυσης μαθηματικού προβλήματος, η πρόσφατη βιβλιογραφία προάγει την ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων από τους μαθητές, όπως ο σχεδιασμός, η ρύθμιση και η αξιολόγηση της σκέψης, ως μέσο βελτίωσης των δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος (Goldberg & Bush, 2003). Όπως αναφέρει και η Boekaerts (1999), επιτυχία στη μάθηση προϋποθέτει μεταφορά, τροποποίηση και επέκταση των αποκτηθέντων γνώσεων και στρατηγικών σε νέες καταστάσεις, όπου βασικό ρόλο παίζει η ικανότητα επίγνωσης των γνωστικών διαδικασιών. Επομένως, η επίλυση προβλήματος απαιτεί ένα συνδυασμό γνωστικών και μεταγνωστικών δεξιοτήτων.

Στρατηγικές επίλυσης μαθηματικού προβλήματος

Είναι γενικώς αποδεκτό ότι στρατηγική μπορεί να οριστεί ως ένα δομημένο σύνολο από διαδικασίες προσανατολισμένες σε συγκεκριμένο στόχο και απαραίτητες για την εκτέλεση κάποιου έργου. Κατά κανόνα οι στρατηγικές είναι γενικής μορφής ευρηματικές προσεγγίσεις, αλλά μπορεί να είναι εξειδικευμένες ανάλογα με το περιεχόμενο του προβλήματος και σχεδιασμένες να διευκολύνουν τόσο την απόκτηση καινούριας, όσο και την αξιοποίηση της προϋπάρχουσας γνώσης (English, 1996).

Ο Polya προτείνει ένα εύρος στρατηγικών (heuristics) που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σε διάφορα στάδια επίλυσης ενός προβλήματος, με τρόπο που να βοηθούν κάποιον στην καλύτερη κατανόηση του προβλήματος και στην επίτευξη προόδου ως προς τη λύση του. Μερικές από αυτές τις στρατηγικές, όπως η κατασκευή σχήματος ή διαγράμματος, χρήση ή κατασκευή πίνακα, απλοποίηση του προβλήματος, χρήση ή ανακάλυψη μοτίβου, προσομοίωση, χρήση λογικής σκέψης, ανάδρομη πορεία, εκτίμηση και έλεγχος, έχουν υιοθετηθεί ευρύτατα και έχουν ενταχθεί στο αναλυτικό πρόγραμμα πολλών χωρών.

Η ικανότητα επίλυσης προβλήματος προϋποθέτει γνωστικές, συναισθηματικές και μεταγνωστικές στρατηγικές. Σύμφωνα με τον Pintrich (1999), οι γνωστικές στρατηγικές περιλαμβάνουν διαδικασίες σε τρία επίπεδα: το επίπεδο απομνημόνευσης, το επίπεδο επεξεργασίας και το επίπεδο οργάνωσης της γνώσης. Εξίσου σημαντικές είναι και οι μεταγνωστικές στρατηγικές, οι οποίες περιλαμβάνουν δύο γενικές πτυχές ή διαστάσεις, τη γνώση των γνωστικών διαδικασιών και την αυτορρύθμιση των διαδικασιών αυτών (Φιλίππου & Χρίστου, 2001). Ο Flavel (1976, στο Fernadez κ.α., 1994) αναφέρει τρία είδη μεταγνωστικών στρατηγικών: στρατηγικές σχεδιασμού, στρατηγικές ελέγχου και στρατηγικές ρύθμισης.

Πρωτότυπα μαθηματικά προβλήματα

Ο Schoenfeld (1992) υποστηρίζει ότι ο όρος μαθηματικό πρόβλημα έχει καθιερωθεί ως μέσο διδασκαλίας το οποίο χρησιμοποιείται για εξάσκηση και για μέτρηση του επιπέδου ανάπτυξης μαθηματικής σκέψης. Αλλά τι ακριβώς εννοούμε με τον όρο μαθηματικό πρόβλημα; Ένα άτομο έχει πρόβλημα όταν είναι σε μια κατάσταση στην οποία αναζητά κάτι, θέλει να φθάσει κάπου και δεν γνωρίζει αμέσως την πορεία που θα ακολουθήσει (Φιλίππου και Χρίστου, 1995). Όταν η πορεία ή η διαδικασία που οδηγεί στο τέρμα είναι γνωστή από προηγούμενη εμπειρία, τότε δεν πρόκειται για πρόβλημα αλλά για άσκηση. Στην καθημερινή ζωή ο όρος χρησιμοποιείται άτυπα και σε περιπτώσεις ασκήσεων. Με την έννοια αυτή τα «προβλήματα» διακρίνονται συνήθως σε δύο είδη , τα «προβλήματα ρουτίνας ή ασκήσεις» και οι «προβληματικές καταστάσεις ή τα πρωτότυπα προβλήματα» (Schoenfeld, 1992).

Στην πρώτη κατηγορία εντάσσονται προβλήματα ή ασκήσεις πρακτικής αριθμητικής με βασικό στόχο την ανάπτυξη μιας πολύ συγκεκριμένης τεχνικής για την εκτέλεση πράξεων από μνήμης. Η τεχνική υποδεικνύεται αρχικά με ένα λυμένο παράδειγμα και ακολουθούν παρόμοια προβλήματα για εμπέδωση. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν σύνθετα προβλήματα η επίλυση των οποίων εμπεριέχει ένα βαθμό δυσκολίας. Τα προβλήματα αυτά είναι ως ένα βαθμό πρωτότυπα και η πορεία επίλυσής τους δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων (Schoenfeld, 1992). Οι Kramarski κ.ά. (2002) ονομάζουν τα προβλήματα αυτά «αυθεντικά» και τα ορίζουν ως τα προβλήματα εκείνα τα οποία περιλαμβάνουν περίπλοκα μαθηματικά δεδομένα, αντλούνται από καταστάσεις της καθημερινής ζωής, μπορούν να προσεγγιστούν με διάφορους τρόπους, ζητούν από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν διάφορες αναπαραστάσεις κατά τη διαδικασία επίλυσης, στηρίζονται σε ευρεία βάση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών και η πορεία λύσης τους δεν είναι εμφανής από την αρχή.

Σύμφωνα με την English (1996), τα πρωτότυπα προβλήματα απαιτούν κάτι πέρα από αλγοριθμικούς υπολογισμούς. Κατά την επίλυσή τους, τα παιδιά δημιουργούν, δοκιμάζουν και προσδιορίζουν τη δική τους στρατηγική επίλυσης. Οι Goldberg και Bush (2003) αναφέρουν ότι οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με πρωτότυπα προβλήματα, συνήθως δεν κατανοούν το περιεχόμενό τους, χρησιμοποιούν αναποτελεσματικές στρατηγικές και καταλήγουν σε λανθασμένες λύσεις. Αξιοσημείωτη είναι η άποψη ότι η επίδοση στα μαθηματικά δεν μπορεί να προβλέψει την ικανότητα των μαθητών στη λύση πρωτότυπων προβλημάτων (English, 1996).

Μέσα από διάφορες μακροπρόθεσμες έρευνες έχουν εντοπιστεί τρία κύρια στάδια τα οποία ακολουθούν οι μαθητές κατά την επίλυση πρωτότυπων προβλημάτων (English, 1996). Σε πρώτο στάδιο, οι μαθητές εργάζονται δημιουργικά χωρίς να ακολουθούν συγκεκριμένη στρατηγική. Χρησιμοποιούν διαδικασίες δοκιμής και πλάνης, κάνουν κάποιες παρατηρήσεις όσον αφορά στον τρόπο που έλυσαν το πρόβλημα και ανιχνεύουν απλές σχέσεις. Σε δεύτερο στάδιο, οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα πιο συστηματικό τρόπο επίλυσης του πρωτότυπου προβλήματος, κατά τον οποίο εντοπίζουν μοντέλα τα οποία όμως δεν είναι τα πιο αποτελεσματικά για τη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος. Σε τρίτο στάδιο, οι μαθητές βελτιώνουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν, με οργανωμένη δομή, για να λύσουν το πρόβλημα.

Ένα χαρακτηριστικό των πρωτότυπων προβλημάτων το οποίο βρέθηκε να επηρεάζει την επίδοση των μαθητών είναι το περιεχόμενο του προβλήματος ή η «ιστορία» μέσα στην οποία παρουσιάζεται το πρόβλημα. Το περιεχόμενο του προβλήματος είναι πιθανό να βοηθήσει τους λύτες να κατανοήσουν το μαθηματικό πλαίσιο σε ένα πρόβλημα και να επηρεάσει τα στάδια επίλυσης. Συγκεκριμένα, τα χαρακτηριστικά του περιεχομένου του προβλήματος, τα οποία επηρεάζουν την επίδοση στη λύση προβλήματος, είναι κατά πόσο αυτό ενδιαφέρει τα παιδιά, είναι συνηθισμένο ή ασυνήθιστο και περιέχει προσωπικά στοιχεία των μαθητών (Wiest, 2002).

Στην παρούσα έρευνα θα διερευνηθεί η χρήση στρατηγικών κατά την επίλυση πρωτότυπων μαθηματικών προβλημάτων από μαθητές Β’ δημοτικού και θα εξεταστεί η σχέση ανάμεσα στην ικανότητα επίλυσης πρωτότυπων προβλημάτων και στη γενική μαθηματική τους ικανότητα (επίδοσή τους) στα μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, η παρούσα έρευνα εξετάζει τις ακόλουθες υποθέσεις:

1. Υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στην ικανότητα μαθητών/τριών Β΄ δημοτικού να επιλύουν πρωτότυπα μαθηματικά προβλήματα και στην επίδοσή τους στο σχολείο στα μαθηματικά.
2. Οι στρατηγικές επίλυσης πρωτότυπων μαθηματικών προβλημάτων που χρησιμοποιούν οι μαθητές Β’ δημοτικού διαφοροποιούνται ανάλογα με την επίδοσή τους στα μαθηματικά.
3. Οι μαθητές Β’ δημοτικού δυσκολεύονται να βρουν εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης πρωτότυπων προβλημάτων.

Μεθοδολογία

Συνελέγησαν δεδομένα από 100 μαθητές και μαθήτριες της Β’ τάξης, 49 αγόρια και 51 κορίτσια, πέντε δημοτικών σχολείων των επαρχιών Λεμεσού και Λευκωσίας. Για τον έλεγχο των υποθέσεων της έρευνας καταρτίστηκε δοκίμιο το οποίο περιλάμβανε τέσσερα πρωτότυπα προβλήματα. Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους εξήντα λεπτά για να λύσουν τα προβλήματα του δοκιμίου. Τα προβλήματα αυτά επιλέχθηκαν από κατάλογο πρωτότυπων προβλημάτων που προτείνονται στην ιστοσελίδα του NCTM (2005) μεταφράστηκαν και προσαρμόστηκαν για τη συγκεκριμένη περίπτωση. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα προβλήματα του δοκιμίου:

1. Ο Σκρουτζ Μακ Ντακ, ο γέρο-τσιγκούνης, επισκέπτεται το θησαυροφυλάκιό του και το βρίσκει άδειο. Κάποιοι τον είχαν ληστέψει! Ξαφνικά, όμως, βρίσκει στο πάτωμα μερικά χαρτονομίσματα των 5, 10 και 20 λιρών και τα μετράει. Όλα τα χαρτονομίσματα ήταν 8 και η αξία τους ήταν 85 λίρες. Πόσα χαρτονομίσματα των 5, πόσα των 10 και πόσα των 20 λιρών βρήκε;

2. Σε ένα πάρτι γενεθλίων υπήρχαν 19 παιδιά. Αποφάσισαν να μπουν όλοι στο τρενάκι του λούνα παρκ. Το τρενάκι είχε 7 βαγόνια. Σε κάθε βαγόνι μπορούσαν να καθίσουν 2 ή 3 παιδιά. Σε πόσα βαγόνια θα καθίσουν 2 και σε πόσα 3 παιδιά;

3. Ο κύριος Θωμάς θέλει να μεταφέρει τα κιβώτια με τα φρούτα από το φορτηγό στο μπακάλικό του. Αν μεταφέρει στο ένα χέρι 1 κιβώτιο μήλα, πόσα κιβώτια αχλάδια πρέπει να μεταφέρει στο άλλο χέρι ώστε να ισορροπεί; Θα σε βοηθήσουν οι ακόλουθες πληροφορίες:
- 2 κιβώτια μανταρίνια και 1 κιβώτιο αχλάδια ζυγίζουν όσο 1 κιβώτιο μήλα.
- 2 κιβώτια μανταρίνια ζυγίζουν όσο 1 κιβώτιο αχλάδια.

4. Η καντίνα του σχολείου διαθέτει για πρόγευμα τρία είδη ποτών, γάλα, χυμό και νερό. Διαθέτει και τρία είδη αλμυρών, τυρόπιτα, ελιόπιτα και πίτσα. Αν ένας μαθητής μπορεί να διαλέξει μόνο ένα είδος ποτού και ένα είδος αλμυρού, πόσα διαφορετικά προγεύματα μπορεί να κάνει;

Το πρώτο πρόβλημα ήταν πρόβλημα εξισορρόπησης το οποίο επιδεχόταν πολλαπλές λύσεις και αφορούσε στο νομισματικό σύστημα. Λέγοντας πρόβλημα εξισορρόπησης, αναφερόμαστε σε μια κατάσταση στην οποία ο μαθητής πρέπει να λάβει υπόψη μια συνθήκη συνδυάζοντας μια δεύτερη συνθήκη. Το δεύτερο πρόβλημα ήταν πρόβλημα εξισορρόπησης το οποίο επιδεχόταν μόνο μία λύση. Το τρίτο πρόβλημα ήταν πρόβλημα ανάδρομης πορείας το οποίο απαιτούσε από τους μαθητές να ακολουθήσουν μια σειρά οδηγιών ξεκινώντας από την τελευταία και καταλήγοντας στην πρώτη. Τέλος, το τέταρτο πρόβλημα ήταν πρόβλημα συνδυαστικής δύο διαστάσεων, καθεμιά από τις οποίες είχε τρία στοιχεία.

Για την εις βάθος ανάλυση των δεδομένων έγιναν σε δεύτερο στάδιο τέσσερις ημιδομημένες συνεντεύξεις, διάρκειας περίπου τριάντα λεπτών η καθεμιά. Οι μαθητές επιλέγηκαν με βάση την επίδοσή τους στο σχολείο στα μαθηματικά (δύο μαθητές υψηλής και δύο μέτριας επίδοσης) και οι οποίοι πήραν σχετικά υψηλή βαθμολογία στο δοκίμιο. Για την οργάνωση της ημιδομημένης συνέντευξης, προκαθορίστηκε ένας κατάλογος ερωτήσεων με βάση τα στάδια επίλυσης μαθηματικού προβλήματος, όπως καθορίστηκαν από τον Polya. Κάθε πρόβλημα συζητήθηκε με τους μαθητές έτσι ώστε να διαγνωστεί κατά πόσο είχαν κατανοήσει το πρόβλημα, μπορούσαν να επεξηγήσουν το σχέδιο επίλυσης που κατάστρωσαν και την εκτέλεσή του. Τέλος, διερευνήθηκε κατά πόσο οι μαθητές μπορούσαν να ελέγξουν την απάντησή τους και να βρουν εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης.

Όσον αφορά τη μαθηματική ικανότητα-επίδοση των μαθητών ζητήθηκε από τον εκπαιδευτικό κάθε τάξης να δώσει μια αριθμητική αποτίμηση της γενικής βαθμολογίας τους στην κλίμακα 1- 20.

Για την ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο SPSS. Αρχικά, βρέθηκε το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών στο δοκίμιο, καθώς και στο κάθε πρόβλημα ξεχωριστά. Βρέθηκαν οι συντελεστές συσχέτισης της επίδοσης στο δοκίμιο με την επίδοση στα μαθηματικά. Ακολούθως, πραγματοποιήθηκε παλινδρομική ανάλυση, με ανεξάρτητη μεταβλητή την επίδοση στα μαθηματικά και εξαρτημένη την επίδοση στο δοκίμιο πρωτότυπων προβλημάτων. Για τη διερεύνηση του είδους των στρατηγικών που επιλέγουν οι μαθητές, βρέθηκαν τα ποσοστά χρήσης κάθε στρατηγικής κατά την επίλυση των προβλημάτων. Επιπρόσθετα, εφαρμόστηκε ο έλεγχος x^2 για τον έλεγχο της ανεξαρτησίας ανάμεσα στη χρήση συγκεκριμένης στρατηγικής σε ένα πρόβλημα και στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά. Η ποιοτική ανάλυση έγινε μέσα από τη μελέτη των κειμένων των τεσσάρων απομαγνητοφωνημένων συνεντεύξεων.

Αποτελέσματα

Ποσοτική ανάλυση

Η περιγραφική στατιστική ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι οι μαθητές είχαν μεγαλύτερη επιτυχία στα δύο πρώτα προβλήματα. Τα ποσοστά επιτυχίας ήταν 73% στο πρόβλημα 2 (εξισορρόπησης) και 69% στο πρόβλημα 1 (εξισορρόπησης με πολλαπλές λύσεις). Στα άλλα δύο προβλήματα, τα ποσοστά επιτυχίας ήταν πολύ χαμηλά, 26% στο πρόβλημα 3 (ανάδρομης πορείας) και 27% στο πρόβλημα 4 (συνδυαστικής). Η μικρή διαφοροποίηση στο βαθμό επιτυχίας που παρατηρήθηκε στα προβλήματα 1 και 2, που είναι και τα δύο προβλήματα εξισορρόπησης, οφείλεται ως ένα τουλάχιστο βαθμό στο μέγεθος των αριθμών, 85 λίρες σε αντίθεση με τα 19 παιδιά, και στη χρήση χαρτονομισμάτων τριών διαφορετικών αξιών, σε αντίθεση με τα δύο διαφορετικά είδη βαγονιών.

Τα πολύ χαμηλά ποσοστά επιτυχίας που παρουσιάστηκαν στο πρόβλημα 3 και στο πρόβλημα 4 ήταν ως ένα βαθμό αναμενόμενα. Τα προβλήματα αυτά θεωρούνται δυσκολότερα για τους μαθητές Β’ δημοτικού διότι απαιτούν ανώτερη μαθηματική σκέψη και δεν υπάρχουν όμοιά τους στα διδακτικά εγχειρίδια των μαθητών.

Αντίθετα, τα προβλήματα 1 και 2 στα οποία παρατηρήθηκαν υψηλά ποσοστά επιτυχίας ήταν και τα δύο προβλήματα εξισορρόπησης και μπορούσαν να λυθούν με στρατηγικές όμοιες των οποίων έχουν συναντήσει στην τάξη.

Κρίθηκε χρήσιμο να εξεταστεί η σχέση ανάμεσα στην επίδοση στο δοκίμιο και στην επίδοση στα μαθηματικά, υπολογίζοντας τον αντίστοιχο συντελεστή συσχέτισης. Βρέθηκε να υπάρχει μια θετική σχέση της επίδοσης στο δοκίμιο με την επίδοση στα μαθηματικά, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,01 ($r=0{,}69$). Αυτό δείχνει ότι μαθητές με υψηλή επίδοση στα μαθηματικά πέτυχαν υψηλότερη βαθμολογία στο δοκίμιο πρωτότυπων προβλημάτων. Επομένως, μαθητές που λύνουν τα πρωτότυπα αυτά προβλήματα είναι μαθητές με υψηλή επίδοση στα μαθηματικά.

Μέσα από την παλινδρομική ανάλυση, παρατηρείται γραμμική σχέση ανάμεσα στην επίδοση στα μαθηματικά και στην επίδοση των μαθητών στο δοκίμιο πρωτότυπων προβλημάτων, με συντελεστή 0,75. Η σχέση αυτή φαίνεται στην ακόλουθη παλινδρομική προγνωστική εξίσωση.

Επίδοση στην επίλυση προβλήματος = -5,32 + 0,75 x Επίδοση στα μαθηματικά

Για την ανάλυση του είδους των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στα πρωτότυπα προβλήματα βρέθηκαν οι συχνότητες εμφάνισης κάθε στρατηγικής. Στο πρόβλημα 1 χρησιμοποιήθηκαν οι στρατηγικές "κατασκευή σχεδίου" και "κατασκευή μαθηματικής πρότασης". Υψηλότερο ποσοστό παρουσιάζει η στρατηγική "κατασκευή σχεδίου" με 81%. Στο πρόβλημα 2 χρησιμοποιήθηκαν οι στρατηγικές "κατασκευή σχεδίου", "κατασκευή μαθηματικής πρότασης" και "συστηματική αντιστοίχηση" με υψηλότερο το ποσοστό της πρώτης 63%. Στο πρόβλημα 3 χρησιμοποιήθηκαν οι στρατηγικές "κατασκευή σχεδίου", "κατασκευή μαθηματικής πρότασης" και "χρήση λογικής σκέψης" ή "ανάδρομη πορεία". Και αυτή τη φορά το υψηλότερο ποσοστό παρουσιάζει η στρατηγική κατασκευή σχεδίου (50%), παρόλο που η στρατηγική αυτή δεν οδηγούσε στην ορθή λύση του προβλήματος. Στο πρόβλημα 4 χρησιμοποιήθηκαν οι στρατηγικές "κατασκευή μαθηματικής πρότασης", "συστηματική αντιστοίχηση", "μη συστηματική αντιστοίχηση", "συστηματική συνδυαστική" και "μη συστηματική συνδυαστική". Η στρατηγική με το υψηλότερο ποσοστό εμφάνισης είναι η "μη συστηματική συνδυαστική".

Για τον έλεγχο ανεξαρτησίας ανάμεσα στο είδος της στρατηγικής που χρησιμοποιήθηκε σε κάθε πρόβλημα και στην επίδοση στα μαθηματικά, βρέθηκε η τιμή του x^2. Στην περίπτωση του προβλήματος 1, όπου το επίπεδο σημαντικότητας είναι μεγαλύτερο από 0,001 ($x^2=23{,}68$), μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το είδος της στρατηγικής που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το πρόβλημα είναι ανεξάρτητο από την επίδοση στα μαθηματικά. Αντίθετα, στα προβλήματα 2 ($x^2=55{,}96$), 3 ($x^2=57{,}20$) και 4 ($x^2=100{,}65$) παρατηρείται ότι το είδος της στρατηγικής που εφαρμόστηκε δεν ήταν ανεξάρτητο της επίδοσης των μαθητών, δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση σε επίπεδο σημαντικότητας 0,01. Επομένως, μαθητές με υψηλή επίδοση ακολούθησαν διαφορετική στρατηγική, συνήθως πιο επιτυχημένη.

Ποιοτική ανάλυση

Τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων ανάλογα με τα θέματα τα οποία εξετάζουν κατηγοριοποιήθηκαν σε πέντε ομάδες, με βάση τα τέσσερα στάδια επίλυσης προβλήματος του Polya: κατανόηση προβλήματος, κατάστρωση σχεδίου επίλυσης προβλήματος, εξαγωγή απάντησης και αναδρομική διερεύνηση.

Όσον αφορά στην κατανόηση του προβλήματος παρατηρήθηκε ότι και οι τέσσερις μαθητές δε χρειάστηκαν πολύ χρόνο για να κατανοήσουν τα προβλήματα. Μόλις έβλεπαν το πρόβλημα ήταν σε θέση να το διατυπώσουν με δικά τους λόγια διευκρινίζοντας τις σημαντικές πληροφορίες που περιλαμβάνονται. Και οι τέσσερις μαθητές ανέφεραν προφορικά τις σημαντικές πληροφορίες κάθε προβλήματος.

Κατά την κατάστρωση σχεδίου επίλυσης του προβλήματος διευκρινίστηκε και από τους τέσσερις μαθητές ότι δεν είχαν λύσει προηγουμένως παρόμοια προβλήματα. Κατά την επεξήγηση της πορείας επίλυσης που ακολούθησαν παρατηρήθηκε ότι και οι τέσσερις μαθητές ήταν ικανοί να επεξηγήσουν με ακρίβεια τον τρόπο που εργάστηκαν. Επιπρόσθετα, οι μαθητές πίστευαν ότι ο τρόπος που επέλεξαν τους οδήγησε στην εξαγωγή ορθής απάντησης. Παρόλα αυτά, όλοι, στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν πώς ο τρόπος που εργάστηκαν τους οδήγησε σε κάποια λύση, έκαναν επαλήθευση. Μέσα από την επαλήθευση, οι μαθητές που είχαν κάνει λάθος σε κάποια προβλήματα, εντόπισαν και διόρθωσαν το λάθος που έκαναν.

Σχετικά με το τρίτο στάδιο επίλυσης μαθηματικού προβλήματος, την εύρεση της απάντησης, όλοι οι μαθητές ισχυρίστηκαν ότι εκτέλεσαν όλες τις πράξεις ή διαδικασίες που απαιτούνταν στον τρόπο που αποφάσισαν να λύσουν το πρόβλημα. Όσον αφορά στις δυσκολίες που συνάντησαν κατά την εξαγωγή της απάντησης, οφείλονταν κυρίως στη μερική κατανόηση ή παράληψη δεδομένων και στη μέθοδο που ακολούθησαν κατά την επίλυση. Παρατηρήθηκε ότι όλοι οι μαθητές διατύπωναν με σαφήνεια την απάντηση κάθε προβλήματος.

Στο τελευταίο στάδιο επίλυσης μαθηματικού προβλήματος, της αναδρομικής διερεύνησης, οι τρεις μαθητές ήταν σίγουροι για την απάντησή τους και στα τέσσερα προβλήματα, ενώ ο τέταρτος μόνο σε μερικά από τα προβλήματα. Όταν ρωτήθηκαν, χρησιμοποίησαν το ισχυρό επιχείρημα ότι έκαναν προηγουμένως επαλήθευση. Σχετικά με την ικανότητα εύρεσης εναλλακτικών τρόπων επίλυσης, δύο από τους μαθητές κατάφεραν να βρουν εναλλακτικούς τρόπους λύσης και στα τέσσερα προβλήματα, ο τρίτος σε όλα εκτός από το πρόβλημα ανάδρομης πορείας και ο τέταρτος μόνο στο πρόβλημα εξισορρόπησης με πολλαπλές λύσεις και στο πρόβλημα εξισορρόπησης με μία λύση. Πιο κάτω παρουσιάζεται ο τρόπος που εργάστηκε ένας μαθητής στο Πρόβλημα 2 και ο εναλλακτικός τρόπος που βρήκε. Ο Μαθητής1 αρχικά κατασκεύασε σχέδιο το οποίο επεξήγησε μέσω μαθηματικών προτάσεων πρόσθεσης. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι χρησιμοποίησε το χάρακα ως αριθμητική γραμμή, για να αναπαραστήσει την πρόσθεση. Ως εναλλακτική στρατηγική επίλυσης κατασκεύασε μαθηματική πρόταση, χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική δομή.

Ερευνητής: Μπορείς να μου εξηγήσεις πώς το βρήκες;
(Δείχνει στο σχέδιο που είχε κάνει και εξηγεί.)
Μαθητής1: Έκανα 3 και 3, 6 και 3 κάνει 9 και 3, 12 και 3, 15 και 2 και 2 κάνουν19
Ερευνητής: Είδα ότι χρησιμοποίησες το χάρακα. Μπορείς να μου εξηγήσεις πώς την χρησιμοποίησες;
Μαθητής1: Έκανα πάνω στο χάρακα 3+3=6 +3=9+3=12+3=15+2=17+ 2=19
(Δείχνει με το χέρι του στο χάρακα τον οποίο χρησιμοποίησε ως αριθμητική γραμμή.)
Ερευνητής: Πώς ήξερες ότι έβαλες 7 βαγόνια;
Μαθητής1: Γιατί έβαλα ..., δεν ξέρω...
Ερευνητής: Ο τρόπος αυτός σε βοήθησε να βρεις το σωστό;
Μαθητής1: Ναι
Ερευνητής: Μπορείς να σκεφτείς ένα άλλο τρόπο να λύσεις το πρόβλημα;
(Ο μαθητής κάνει εξίσωση πρόσθεσης 3+3+3+3+3+2+2=19. Στη συνέχεια κάνει εξισώσεις πολλαπλασιασμού 5x3=15, 2x2=4 και μετά πρόσθεσης 15+4 =19.)

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο τρόπος που εργάστηκε ένας άλλος μαθητής στο Πρόβλημα 4 και ο εναλλακτικός τρόπος που βρήκε.

Ερευνητής: Μπορείς να εξηγήσεις τον τρόπο που εργάστηκες για να λύσεις το πρόβλημα;

Μαθητής2: Έκανα μια στήλη με 5 είδη που μπορεί να φάει ή να πιει ένας μαθητής από την καντίνα και μετά έβαζα στο καθένα ένα ποτό ή ένα αλμυρό.

Ερευνητής: Αυτά τα δύο είναι διαφορετικά προγεύματα;(Του δείχνω δύο ίδιους συνδυασμούς που είχε κάνει).

Μαθητής2: Όχι, είναι τα ίδια.

Ερευνητής: Προσπάθησε ξανά και προσεχτικά να βρεις όλα τα προγεύματα.(Ο μαθητής γράφει ξανά όλους τους συνδυασμούς με μη συστηματικό, όμως, τρόπο).

Ερευνητής: Ο τρόπος αυτός σε οδήγησε σε κάποια λύση;

Μαθητής2: Ναι.

Ερευνητής: Μπορείς να σκεφτείς κι άλλους τρόπους για να λύσεις το πρόβλημα;

Μαθητής2: Με εξίσωση.

Ερευνητής: Δηλαδή;

Μαθητής2:Επειδή είναι 3 αλμυρά και 3 ποτά, άμα συνδυάσεις το κάθε ποτό με το κάθε αλμυρό μπορείς να πεις 3 x 3 = 9.

Όπως φαίνεται πιο πάνω, ο Μαθητής2 αρχικά έκανε συνδυασμούς με μη συστηματικό τρόπο και ως εναλλακτική στρατηγική επίλυσης κατασκεύασε μαθηματική πρόταση, χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική δομή. Επομένως, πιθανόν ο μαθητής να έλεγχε νοερά τους συνδυασμούς κατά την αρχική του λύση.

Όταν οι μαθητές ρωτήθηκαν αν τους αρέσει να λύνουν πρωτότυπα προβλήματα απάντησαν όλοι καταφατικά. Οι λόγοι που ανέφεραν αφορούσαν τόσο στο περιεχόμενο (*Ναι, μου άρεσε που μιλούσε για το Σκρουτζ*), όσο και στο βαθμό δυσκολίας του προβλήματος (*Ναι, γιατί ήταν πολύ δύσκολο και γιατί μπορούσα να κάνω σχέδιο*). Συγκεκριμένα, η δυσκολία του προβλήματος αποτελεί πρόκληση για τους άριστους μαθητές. Επιπρόσθετα, αναφέρονταν στις στάσεις τους απέναντι στα μαθηματικά (*Ναι, γιατί μου αρέσουν πολύ τα μαθηματικά*) καθώς και στον προσανατολισμό τους σε σκοπούς μάθησης και επίδοσης. Όπως αναφέρουν τους αρέσει να λύνουν τέτοιου είδους προβλήματα τόσο για να πετύχουν ψηλή επίδοση, όσο και για να μάθουν. Είναι αξιοσημείωτο ότι κάθε μαθητής βασίστηκε σε ένα σταθερό κριτήριο για να δικαιολογήσει την αρέσκειά του για όλα τα προβλήματα.

Συμπεράσματα

Όπως αναμενόταν, η επίδοση των μαθητών στα πρωτότυπα προβλήματα έχει θετική συσχέτιση με την επίδοσή τους στα μαθηματικά. Οι Hiebert κ.α. (1982), σε έρευνά τους, βρήκαν ότι η απουσία μερικών γνωστικών ικανοτήτων εμπόδιζε την απόκτηση ή ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών λύσης οι οποίες οδηγούν σε ορθή λύση.

Η διαφοροποίηση της επίδοσης στη λύση των πρωτότυπων προβλημάτων οφείλεται στο είδος των προβλημάτων. Όσον αφορά στα προβλήματα εξισορρόπησης, παρουσιάζεται υψηλό ποσοστό επιτυχίας λόγω του ότι τα προβλήματα αυτά ήταν προβλήματα τα οποία περιλάμβαναν αλγοριθμικές διαδικασίες, η ανάπτυξη των οποίων αποτελεί ένα από τους κύριους στόχους του αναλυτικού προγράμματος. Αυτό δείχνει ότι οι περισσότεροι μαθητές έλυσαν τα προβλήματα εξισορρόπησης, ανεξάρτητα από την επίδοσή τους στα μαθηματικά. Αντίθετα, τα προβλήματα ανάδρομης πορείας και συνδυαστικής δυσκόλεψαν πολλούς μαθητές χαμηλότερης επίδοσης. Συγκρίνοντας τα δύο προβλήματα που απαιτούσαν λογική σκέψη, ανάδρομης πορείας και συνδυαστικής, το ποσοστό αποτυχίας είναι μεγαλύτερο στην πρώτη περίπτωση. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί από το γεγονός ότι το πρόβλημα συνδυαστικής ήταν πιο προσιτό στους μαθητές.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μαθητές μέτριας και χαμηλής επίδοσης έλυναν με επιτυχία είτε τα προβλήματα εξισορρόπησης, είτε τα προβλήματα 3 και 4 που απαιτούσαν λογική σκέψη. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί από το γεγονός ότι κάποιοι μαθητές έχουν περισσότερο αναπτυγμένη την ικανότητα να κάνουν αλγοριθμικές διαδικασίες, ενώ άλλοι την ικανότητα λογικής σκέψης. Οι Hiebert κ.α. (1982) σε έρευνα που πραγματοποίησαν βρήκαν ότι κάποιοι μαθητές, παρόλο που δεν είχαν πλήρως ανεπτυγμένες κρίσιμες γνωστικές ικανότητες κατάφεραν να λύσουν με επιτυχία τα προβλήματα και να χρησιμοποιήσουν εναλλακτικές στρατηγικές. Όπως υποστηρίζει και η English (1996), η επίδοση στα μαθηματικά δεν μπορεί να προβλέψει την ικανότητα των μαθητών στη λύση πρωτότυπων μαθηματικών προβλημάτων.

Όσον αφορά στην ικανότητα των μαθητών να βρίσκουν εναλλακτικές στρατηγικές οι μαθητές φαίνεται να είναι πρόθυμοι να αναζητήσουν εναλλακτικές στρατηγικές επίλυσης. Αρχικά, όμως, χρησιμοποιούν μια μέθοδο επίλυσης η οποία απαιτεί καταβολή ελάχιστης προσπάθειας και η οποία τους είναι οικεία. Μια τέτοια στρατηγική είναι η "κατασκευή σχεδίου". Ως εναλλακτική στρατηγική χρησιμοποιούν κυρίως την κατασκευή μαθηματικής πρότασης ή κάποια άλλη στρατηγική, πάντοτε "ανώτερη" από την αρχική στρατηγική που εφάρμοσαν. Σύμφωνα με την Ishida (2002), "οι μαθητές που μπορούν να βρουν εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης ενός προβλήματος, επιλέγουν καλύτερες, από μαθηματικής άποψης, στρατηγικές" (σ.55). Πολλές φορές οι μαθητές αν και γνωρίζουν διάφορα είδη στρατηγικών, δεν μπορούν να μεταπηδήσουν από το ένα στο άλλο και κατά συνέπεια να χρησιμοποιήσουν εναλλακτικές στρατηγικές σε ένα πρόβλημα. Αυτό συνδέεται με την απουσία μεταγνωστικών δεξιοτήτων τονίζοντας τη σημασία της ανάπτυξης των δεξιοτήτων αυτών (Ishida, 2002).

Μέσα από τις συνεντεύξεις που έγιναν, φάνηκε ότι σημαντικός παράγοντας κατά την επίλυση πρωτότυπων μαθηματικών προβλημάτων είναι και η επίδραση των στάσεων των μαθητών για τα μαθηματικά. Ο Silver (1985) βρήκε μέσα από έρευνά του ότι οι στάσεις των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά επηρεάζουν τις μαθηματικές τους ικανότητες στην επίλυση πρωτότυπων μαθηματικών προβλημάτων.

Συμπερασματικά, μέσα από τη χρήση ποικιλίας μαθηματικών προβλημάτων, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να αναπτύσσουν δικούς τους τρόπους επίλυσης, παρά να εφαρμόζουν απλά κάποιους κανόνες. Χρησιμοποιώντας ποικιλία προβλημάτων, αυξάνεται και η ποικιλία εναλλακτικών προσεγγίσεων των μαθητών (Wong κ.α., 2002). Η English (1996), αναφέρει ότι η επίλυση πρωτότυπων προβλημάτων συμβάλλει στην οικοδόμηση σημαντικών μαθηματικών ιδεών από τους μαθητές.

Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας τονίζουν τη σημασία που πρέπει να δοθεί κατά τη διδασκαλία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, όχι τόσο στις αλγοριθμικές διαδικασίες, όσο στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης των παιδιών, η οποία όπως αποδεικνύεται, μπορεί να αναπτυχθεί από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Τα πρωτότυπα προβλήματα πρέπει να αποτελούν απαραίτητο στοιχείο στη διδασκαλία μαθηματικού προβλήματος. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να ενθαρρύνουν τους μαθητές να συζητούν τις κύριες ιδέες του προβλήματος, να δίνουν έμφαση στην ανάγκη διερεύνησης ποικίλων τρόπων επίλυσης και να εντοπίζουν τα πλεονεκτήματα των διαφόρων μεθόδων επίλυσης. Μια μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να μελετήσει εις βάθος τους λόγους για τους οποίους κάποιοι μαθητές αποτυγχάνουν κατά την επίλυση πρωτότυπων προβλημάτων.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Boekaerts, M. (1999). Self-regulated learning: where we are today. *International Journal of Education Research, 31,* 445-457.

Charles, R., Lester, F., & O' Daffer, P. (1992). *How to evaluate progress in problem solving*. (4th edition). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

English, L. D. (1996). Children's Construction of Mathematical Knowledge in Solving Novel Isomorphic Problems in Concrete and Written Form. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 81-112.

Fernandez, M. L., Hadaway, N. & Wilson, J. W. (1994). Problem Solving: Managing It All. *The Mathematics Teacher, 87* (3) 195.

Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Δαρδανός.

Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (2001). *Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών.* Αθήνα: Ατραπός.

Goldberg, P. D. & Bush, W. S. (2003). Using Metacognitive Skills to Improve 3rd Graders' Math Problem Solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics. 25,* (4) 35-54.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). Cognitive Development and Children's Solutions to Verbal Arithmetic Problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*, (2), 83-98.

Ishida, J. (2002). Students' evaluation of their strategies when they find several solution methods. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 49-56.

Kramarski, B., Mevarech, Z.R., & Arami, M. (2002). The Effects of Metacognitive Training on Solving Mathematical Authentic Tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 225-250.

Lerch, C. M. (2004). Control decisions and personal beliefs: their effect on solving mathematical problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 21-36.

NCTM, (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: Va, NCTM.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (n.d.). Retrieved February 18, 2005 from http://www.nctm.org/elementary/archive.asp

Pintrich, P. R. (1999). The role of motivation in promoting and sustaining self-regulated learning. *International Journal of Educational Research, 31,* 459-470.

Polya, G. (1985). *How to solve it*? (Second edition). Great Britain: Princeton University Press.

Silver, E. A. (1985). Research on Teaching Mathematical Problem Solving: Some underrepresented themes and needed directions. In E. A. Silver (Ed.). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 247 – 266). Hillsdale, Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*. In D.A. Grows (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334 – 370). New York: Macmillan.

Wiest, L.R., (2002). Aspects of Word-Problem Context That Influence Children's Problem-Solving Performance. *Focus on Learning in Mathematics*, 24 (2), 38-51.

Wong, N., Marton, F., Wong, K., & Lam, C. (2002). The lived space of mathematics learning. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 25-47.