Συμπεφωνημένα και υπονοούμενα στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών. Μια έρευνα από τη σκοπιά της διδακτικής των μαθηματικών

Παναγιώτης Λιναρδάκης
Αρσάκειο Λύκειο
linardak@otenet.gr

Θάνος Πετρόπουλος
Κολλέγιο Ψυχικού
thanospe@otenet.gr

Περίληψη

Στην εργασία μας αυτή παρουσιάζεται μία έρευνα σχετικά με τον ρόλο που παίζουν τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών στην Ελλάδα ,τα τελευταία χρόνια ,ως συστατικό στοιχείο της Μαθηματικής εκπαίδευσης. Αναλύονται όροι-κλειδιά της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών όπως: διδακτικό συμβόλαιο, διδακτικοί μετασχηματισμοί, εμπόδια , κ.ά και εν συνεχεία υπό το πρίσμα αυτών των όρων και με συγκεκριμένα παραδείγματα αναλύουμε συγκεκριμένες επιλογές και προσεγγίσεις που εμφανίζονται στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών. Η έρευνα μας κυρίως εστιάζεται: (1) Στους όρους του διδακτικού συμβολαίου που θέτουν οι «ορισμοί» στα σχολικά βιβλία ,και κατά πόσο αυτοί τηρούνται. (2) Στους όρους του διδακτικού συμβολαίου που θέτουν οι «εκφωνήσεις» των ασκήσεων (φανερούς ή κρυφούς) και κατά πόσο αυτοί τηρούνται. (3)Σε γλωσσολογικού τύπου επιστημολογικά εμπόδια που εμφανίζονται εξαιτίας της χρήσης συγκεκριμένων λέξεων στο συμφραστικό περιβάλλον των Μαθηματικών. Η έρευνα αυτή μελετάει τόσο την «εσωτερική» συνέπεια των σχολικών βιβλίων όσο και την συσχέτιση των επιλογών που εμφανίζονται στα σχολικά βιβλία διαφορετικών τάξεων.

Λέξεις κλειδιά

Διδακτικό συμβόλαιο, επιστημολογικό εμπόδιο, Σχολικά Μαθηματικά, Σχολικά βιβλία, ορισμοί εννοιών, λέξεις και σύμβολα, εκφωνήσεις και υπονοούμενα.

Εισαγωγή

Πάνω από μία δεκαετία διδάσκονται στην χώρα μας τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο. Με εξαίρεση το σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας για την Α΄ και Β΄ Λυκείου το οποίο έχει αλλάξει και διδάσκεται το καινούργιο και τα καινούργια βιβλία για το Γυμνάσιο τα οποία αναμένονται, η κατάσταση στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών παραμένει ίδια με κάποιες μικρές τροποποιήσεις που έχουν κατά καιρούς γίνει. Παράλληλα από τον Δεκέμβριο του 1997 υφίσταται το Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών για τα Μαθηματικά.

Στόχος της εργασίας μας είναι να ερευνήσουμε από την σκοπιά της Διδακτικής των Μαθηματικών τον τρόπο με τον οποίο οι επιλογές που γίνονται από τους συγγραφείς επηρεάζουν την σχέση των μαθητών με τα Μαθηματικά αλλά και την διδακτική διαδικασία στην σχολική τάξη.

Θέλουμε να αποσαφηνίσουμε ότι δεν πρόκειται για ένα άρθρο «κριτικής» των συγκεκριμένων σχολικών βιβλίων αλλά μία έρευνα στα πλαίσια που έχουν τεθεί διεθνώς εδώ και τριάντα τουλάχιστον χρόνια από τους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Αρκετοί ερευνητές, κυρίως της Γαλλικής σχολής (ADDA 1987, ARSAC 1989, CHEVALLARD 1991, LACOMBE 1987) έχουν ασχοληθεί τόσο με τον ρόλο των αναλυτικών προγραμμάτων στην Μαθηματική εκπαίδευση όσο και με την σημασία που έχουν οι επιλογές που γίνονται κατά την συγγραφή των σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών.

Θέλουμε εισαγωγικά να σημειώσουμε ότι για λόγους «οικονομίας» οι αναφορές που θα γίνονται στα σχολικά βιβλία θα σημειώνουν μόνο την τάξη στην οποία διδάσκονται και όχι τον πλήρη τίτλο, ο οποίος θα αναγράφεται στην βιβλιογραφία.

Διδακτική Των Μαθηματικών Και Ελληνική Πραγματικότητα

Διδακτικοί Μετασχηματισμοί – Διδακτικό Συμβόλαιο

Θα πρέπει καταρχάς να σημειώσουμε ότι οι όροι οι οποίοι θα αναφέρονται στην εργασία αυτή στην πραγματικότητα δεν είναι όροι των Μαθηματικών αλλά των Σχολικών Μαθηματικών.

Με τον όρο Σχολικά Μαθηματικά, στα πλαίσια της Διδακτικής των Μαθηματικών, ορίζεται το σύνολο των διδακτικών μετασχηματισμών (Ttranspositions Didactiques) τους οποίους υφίστανται Μαθηματικές έννοιες για να γίνουν αντικείμενο διδασκαλίας. (CHEVALLARD 1986, CHEVALLARD-JOSHUA 1991, ARSAC 1989)

Η επιλογή, για παράδειγμα, του τρόπου με τον οποίο ορίζονται κάποιες Μαθηματικές έννοιες στα σχολικά βιβλία μπορεί να διαφοροποιούνται από τον τρόπο με τον οποίο ορίζονται σε Πανεπιστημιακά συγγράμματα, ή ακόμα και σε σχολικά βιβλία διαφορετικών τάξεων. Η διαφοροποίηση αυτή (διδακτικός μετασχηματισμός) γίνεται για την διευκόλυνση των διδακτικών στόχων. Βέβαια, στις επιλογές πού γίνονται θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη τόσο η Ιστορία και η Επιστημολογία των Μαθηματικών (ARTIGUE 1989, BROUSSEAU 1983), όσο και οι αντιλήψεις οι οποίες προϋπάρχουν, ή διαμορφώνονται στους μαθητές (VERGNAUD 1991, DOUADY 1989, ΚΑΛΔΡΥΜΙΔΟΥ 1997).

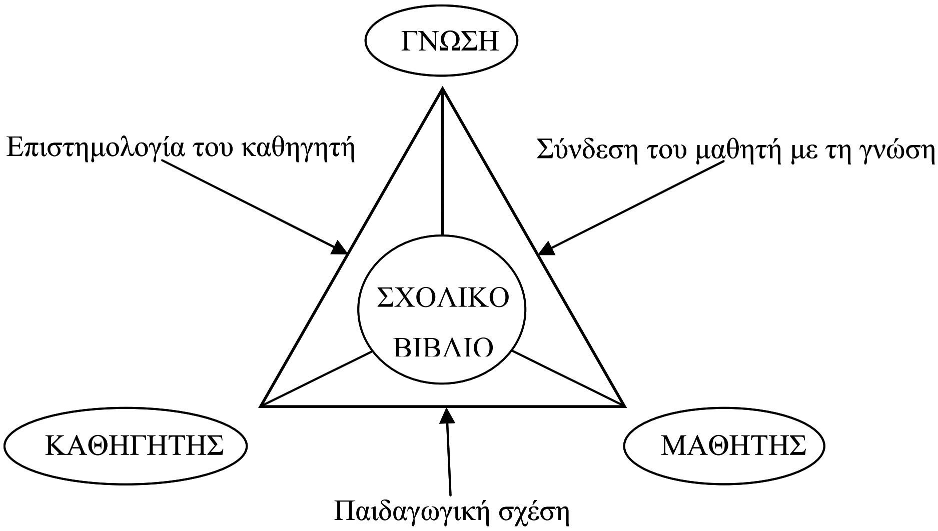
Σκοπός, όμως, της εργασίας αυτής δεν είναι μία έρευνα σχετικά με τις επιλογές που έγιναν αναφορικά με τους διδακτικούς μετασχηματισμούς τόσο στο αναλυτικό πρόγραμμα όσο και στα σχολικά βιβλία. Σκοπός είναι να εξετάσουμε το πώς διαμορφώνονται οι όροι του διδακτικού συμβολαίου από τους συγγραφείς των σχολικών βιβλίων και κατά πόσο παραβιάζονται.

Οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών (BROUSSEAU 1982, BALACHEF 1987, BARUK 1985) έχουν ασχοληθεί επί μακρόν με την σημασία που έχουν οι συμπεφωνημένες (explicit) ή οι υπόγειες (implicit) συμβάσεις μεταξύ καθηγητών και μαθητών, όπως και σχολικών βιβλίων, μαθητών και καθηγητών. Ο Brousseau (BROUSSEAU 1982) αναφερόμενος στο Διδακτικό Συμβόλαιο (contract didactique), ξεκαθάρισε ότι με τον όρο αυτό εννοούμε μια σειρά φανερών, η μη, συμβάσεων που τίθενται στην σχέση διδάσκοντα διδασκομένου, η παραβίαση των όρων των οποίων παίζει καθοριστικό ρόλο στην διδακτική διαδικασία.

Αυτό το οποίο διαφοροποιεί την έρευνα στην Ελλάδα από άλλες χώρες και ειδικά τη Γαλλία είναι η ύπαρξη μοναδικού σχολικού βιβλίου, στοιχείο σημαντικό ως προς τον ρόλο που παίζει στη διαμόρφωση των όρων του διδακτικού συμβολαίου.

Ο Έλληνας εκπαιδευτικός, σε αντίθεση με τον Γάλλο συνάδελφο του, εκτός των βασικών επιλογών που γίνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα είναι υποχρεωμένος να «ακολουθεί» τις επιλογές υλοποίησης των διδακτικών μετασχηματισμών που κάνουν οι συγγραφείς των σχολικών βιβλίων. Και η «υποχρέωση» αυτή είναι πιο φανερή στις δύο τελευταίες τάξεις του Λυκείου, στις οποίες η τελική αξιολόγηση των μαθητών, ως προς το απολυτήριο τους, δεν γίνεται από τον ίδιο.

Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε, στο σημείο αυτό, ότι το σχήμα του Y. Chevallard που περιγράφει την διδακτική κατάσταση (CHEVALLARD 1986, CHEVALLARD-JOSHUA 1991, HENRY 1991), στην Ελληνική πραγματικότητα μπορεί να τροποποιηθεί με την προσθήκη του σχολικού βιβλίου στο κέντρο του τριγώνου (σχήμα1).



Σχήμα 1

Τύποι Εμποδίων Στη Μάθηση

Επειδή στην συνέχεια θα αναφερθούμε στην έννοια των «εμποδίων», θα θέλαμε, σύντομα, να παρουσιάσουμε μερικά σημεία σχετικά με αυτήν την έννοια με την οποία έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές στα πλαίσια της «κατασκευαστικής θεωρίας της γνώσης» (κονστρουκτιβισμός) (BROUSSEAU 1983, CHEVALLARD 1982, FORT 1991).

Ο Marc Fort στην ομιλία του με θέμα «Κονστρουκτιβισμός: Από το Μαθησιακό στο Παιδαγωγικό Μοντέλο» στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου το 1991 (βλ. FORT 1991) είχε αναφερθεί στην έννοια και τα είδη των «εμποδίων» κωδικοποιώντας τα αποτελέσματα των προαναφερθέντων εργασιών, μεταξύ άλλων ανέφερε:

« ... Η λέξη εμπόδιο στη διδακτική έχει μία σημασία σχετικά ακριβή:

1. *Πρόκειται για μία γνώση που λειτουργεί ως τέτοια σε ένα σύνολο καταστάσεων.*
2. *Το εμπόδιο είναι μία γνώση που, προσπαθώντας να προσαρμοστεί σε άλλες καταστάσεις ή σε άλλες τιμές μεταβλητών, θα προκαλέσει ειδικά λάθη, εντοπίσιμα, αναλύσιμα σε σχέση με το εμπόδιο.*
3. *Το εμπόδιο αντιστέκεται στις αλλαγές.*
4. *Το εμπόδιο μπορεί να υπερπηδηθεί μόνο σε ειδικές καταστάσεις απόρριψης και αυτή η απόρριψη θα είναι συστατικό της γνώσης. ...».*

Ως προς τα διάφορα είδη των εμποδίων ο M. Fort σε ένα άλλο σημείο ανέφερε εμπόδια επιστημολογικού τύπου (BROUSSEAU 1983), διδακτικού τύπου, ψυχογενετικής προέλευσης κ.α.

Με βάση τα προηγούμενα μπορούμε να αναφερθούμε στα γλωσσολογικού τύπου εμπόδια (ΛΙΝΑΡΔΑΚΗΣ 1999) ως περίπτωση τόσο των εμποδίων επιστημολογικού τύπου όσο και των εμποδίων διδακτικού τύπου και τα οποία σχετίζονται με τις διαφοροποιήσεις που υφίστανται οι χρήσεις κάποιων λέξεων στο συμφραστικό περιβάλλον των Μαθηματικών.

Αλλάζοντας Έναν Ορισμό

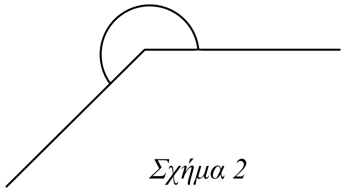
Ταξινομίες και αντινομίες

Η αλλαγή ενός ορισμού στα πλαίσια των Σχολικών Μαθηματικών, μπορεί να θεωρηθεί ως ένας διδακτικός μετασχηματισμός που εξυπηρετεί τη διδασκαλία σε διαφορετικά ηλικιακά επίπεδα (δηλαδή σε διαφορετικά επίπεδα κατανόησης μαθηματικών εννοιών). Ας σταθούμε όμως σε τρία σχετικά παραδείγματα:

	Α΄ Γυμνασίου:	Α΄ Λυκείου:
1.	Ένα παραλληλόγραμμο που έχει **όλες** τις πλευρές του ίσες ονομάζεται ρόμβος. (σελ. 282)	Το παραλληλόγραμμο που έχει **δυο διαδοχικές** πλευρές ίσες λέγεται ρόμβος. (σελ. 101)
2.	Κάθε γωνία μεγαλύτερη από την ορθή ονομάζεται αμβλεία γωνία. (σελ. 247)	Μια **κυρτή** γωνία μεγαλύτερη από ορθή ονομάζεται αμβλεία γωνία. (σελ. 16)
3.	Ένα τετράπλευρο του οποίου δυο πλευρές είναι παράλληλες, λέγεται τραπέζιο. (σελ. 281)	Το κυρτό τετράπλευρο που έχει **μόνο** δυο πλευρές παράλληλες, λέγεται τραπέζιο. (σελ. 112)

Στην 1^{η} περίπτωση είναι προφανές ότι οι δυο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

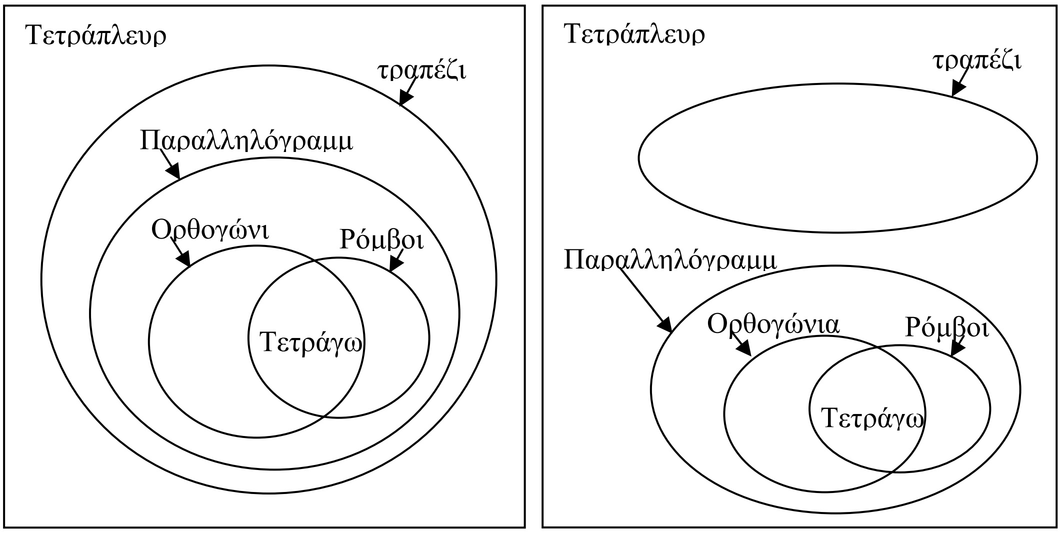
Στην 2^{η} περίπτωση η κατάσταση είναι διαφορετική, καθώς, για τη γωνία του σχήματος 2, ένας δωδεκάχρονος μαθητής διδάσκεται ότι είναι αμβλεία, ενώ, τρία χρόνια αργότερα, ο ίδιος μαθητής καλείται να ακυρώσει την κεκτημένη του αυτή γνώση. Ωστόσο είναι λογικό να δεχτούμε αυτή την επιλογή, καθώς δεν θέλουμε να εμπλέξουμε τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου με την έννοια της κυρτής γωνίας.



Σχήμα 2

Ας προσέξουμε όμως το 3^{ο} παράδειγμα.

Οι διαφορετικοί ορισμοί οδηγούν αυτή τη φορά σε διαφορετική ταξινομία των τετραπλεύρων (Σχήμα 3). Μη θεωρήσετε ότι στο βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου έχει εκ παραδρομής παραληφθεί η κρίσιμη λέξη «μόνο». Λίγο μετά τον ορισμό του παραλληλογράμμου επισημαίνεται σαφώς ότι «… το παραλληλόγραμμο είναι ειδική περίπτωση τραπεζίου» (σελ. 281).



Σχήμα 3 Η ταξινομία των τετραπλεύρων σύμφωνα με τους ορισμούς των βιβλίων της Α΄ Γυμνασίου (αριστερά) και της Α΄ Λυκείου (δεξιά).

Άραγε ποια διδακτική ανάγκη υπαγορεύει αυτή τη διαφοροποίηση από την μια εκπαιδευτική βαθμίδα στην άλλη; Είναι γνωστό ότι ιστορικά συναντάμε αρκετές διαφορετικές ταξινομίες των τετραπλεύρων, καμία όμως μαθησιακή σκοπιμότητα δεν εξυπηρετείται εν προκειμένω από τη διαφορετική επιλογή στους δυο ορισμούς.

Η Περιπέτεια Της Παραλληλίας

Η έννοια της παραλληλίας και το σύμβολο της, στο σχολικό βιβλίο, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα παραβίασης του «διδακτικού συμβολαίου».

Πιο συγκεκριμένα: Στην Α΄ Λυκείου τα πράγματα είναι ξεκάθαρα. Τόσο στο βιβλίο της Άλγεβρας (σελ. 101), όσο και στην Γεωμετρία (σελίδες 10, 75), δύο ευθείες του επιπέδου θεωρούνται παράλληλες αν και μόνο εάν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Τα προβλήματα ξεκινούν στο βιβλίο Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου.

Είναι λογικό και αναμενόμενο στο κεφάλαιο περί διανυσμάτων να διευρύνεται η έννοια της λέξης «παράλληλα» και του συμβόλου «//», όταν αναφερόμαστε σε δύο διανύσματα, ή σε ένα διάνυσμα και μία ευθεία. Στις περιπτώσεις αυτές (σελίδα 12) δηλώνεται σαφώς ότι:

«*Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται παράλληλα ή συγγραμμικά αν και μόνο αν οι φορείς τους είναι παράλληλοι ή ταυτίζονται.*»

Αντίστοιχα στην περίπτωση παραλληλίας διανύσματος και ευθείας.

Στην παραπάνω πρόταση παρατηρούμε ότι η ίδια λέξη διαφοροποιεί την σημασία της ανάλογα με το αν αναφέρεται σε διανύσματα ή σε ευθείες. Στο σημείο αυτό εμφανίζεται ένα επιστημολογικό εμπόδιο (γλωσσολογικού τύπου).

Παρόλα αυτά, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι δεν υπάρχει πρόβλημα, δεδομένου ότι η σύμβαση διευρύνεται στο καινούργιο εννοιολογικό περιβάλλον των διανυσμάτων.

Όμως στην σελίδα 60 του ίδιου βιβλίου, σε υποσημείωση, αναφέρεται:

«*Με τον συμβολισμό* $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, *εννοούμε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες ή συμπίπτουν*»

Εδώ λοιπόν διαφοροποιείται η σύμβαση από προηγούμενες τάξεις αναφορικά με το σύμβολο – τουλάχιστον – της παραλληλίας μεταξύ ευθειών.

Και ποιο είναι το πρόβλημα; θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς.

Αν μέναμε ως εδώ, κανένα. Θα μπορούσαμε να δεχθούμε ότι, αναφερόμενοι σε δύο ευθείες του επιπέδου, χρησιμοποιώντας την λέξη «παράλληλες» θα εννοούμε ότι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, ενώ με το σύμβολο «//» ότι είναι «παράλληλες ή ταυτίζονται».

Αν ως εδώ διατηρείται μια ισορροπία του νέου διδακτικού συμβολαίου ως προς το παλιό, δεν συμβαίνει το ίδιο και με τις ασκήσεις των βιβλίων της Β΄ και Γ΄ Λυκείου, όπου πλέον προκύπτει παραβίαση των όρων του διδακτικού συμβολαίου. Δυο ενδεικτικά παραδείγματα:

Στην άσκηση 1 της Α΄ Ομάδας στη σελίδα 69 του βιβλίου Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου, ζητώντας τιμές του πραγματικού μ για τις οποίες η ευθεία $(\mu-1)x+\mu y+\mu^2=0$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ δίνεται ως λύση η τιμή $\mu = 0$, που οδηγεί στον ίδιο τον $y'y$.

Αντίστοιχα στην άσκηση 3 της Β΄ Ομάδας στη σελίδα 38 του βιβλίου Γενικής Παιδείας της Γ΄ Λυκείου, αναζητώντας τις ευθείες που εφάπτονται στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και είναι παράλληλες στην ευθεία $y=x$, γίνεται δεκτή ως λύση η … $y=x$.

Οι Συμβάσεις Στην Εκφώνηση Μιας Άσκησης

Είναι δεδομένο ή … προς έλεγχο;

Ας δούμε τώρα παραβιάσεις του διδακτικού συμβολαίου, που εντοπίζουμε σε εκφωνήσεις ασκήσεων των Σχολικών Βιβλίων του Λυκείου.

Στην πρώτη κιόλας νησίδα ασκήσεων του βιβλίου Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου, συναντάμε την ακόλουθη άσκηση:

Αν για δυο τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ ισχύει $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE}$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ΒΔΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο. (σελ. 21 ασκ. 4)

Μελετώντας στο λυσάρι το χειρισμό της άσκησης αυτής, διαπιστώνουμε πως το γεγονός ότι στην εκφώνηση το σχήμα $ΒΔΓΕ$ αναφέρεται ως τετράπλευρο, καθιστά δεδομένη – κατά συνέπεια αδιαμφισβήτητη – αυτή την ιδιότητα του σχήματος. Έτσι, θεωρεί πλήρη την απόδειξη, εξασφαλίζοντας απλώς τη σχέση $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}$.

Με άλλα λόγια, το διδακτικό συμβόλαιο στην προκείμενη περίπτωση είναι το εξής:

Όταν η άσκηση σου ζητά να αποδείξεις ότι ένα τετράπλευρο έχει κάποια ιδιότητα, εσύ δεν διερευνάς τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες το σχήμα στο οποίο αναφέρεται η άσκηση είναι όντως τετράπλευρο. Το θεωρείς δεδομένο.

Στο ίδιο μήκος κύματος η άσκηση 7 της σελίδας 88 του ίδιου βιβλίου:

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2-3\beta^2=0$ στο σημείο του Α(α, –β).

Καμία διερεύνηση δεν γίνεται (στο λυσάρι) ως προς το κατά πόσον η εξίσωση της εκφώνησης αντιστοιχεί σε κύκλο. Δόθηκε κύκλος; … είναι κύκλος!

Η παραβίαση, όμως, του διδακτικού συμβολαίου που αναφέραμε έρχεται στην άσκηση 7iii της Α΄ Ομάδας στη σελίδα 75:

Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου με κορυφές $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(-5, -4)$.

Τα σημεία που δίνονται ως κορυφές του τριγώνου *ΑΒΓ*, στην πραγματικότητα είναι συνευθειακά, συνεπώς δεν ορίζουν καν τρίγωνο, γεγονός που επισημαίνεται στο λυσάρι.

Κατόπιν των προηγουμένων, τι άραγε θα πρέπει να κάνει ένας μαθητής, όταν κληθεί να αντιμετωπίσει την παρακάτω άσκηση; (Β΄ Κατ. σελ. 70 ασκ. 2 Β΄ Ομάδας)

Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της μορφής $\left(2\alpha^2+\alpha+3\right)x+\left(\alpha^2-\alpha+1\right)y+\left(3\alpha+1\right)=0$ (1), $\alpha\in\mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Γιατί το λυσάρι ασχολείται με την απόδειξη ότι η εξίσωση (1) εκφράζει όντως ευθεία, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$; Ακόμα μια παραβίαση όρων του διδακτικού συμβολαίου.

Έννοιες Που Ορίστηκαν Βιαστικά (Ή Δεν Ορίστηκαν Ποτέ)

Στην ενότητα αυτή θα παραθέσουμε ορισμένα σημεία των σχολικών βιβλίων, όπου γίνεται αναφορά σε έννοιες οι οποίες είτε δεν έχουν ορισθεί καθόλου, είτε ο ορισμός τους δίνεται παρενθετικά, απλώς για να εξυπηρετήσει το ζητούμενο μιας άσκησης, αποτυγχάνοντας να εναρμονισθεί με σχετικές εννοιολογικές καταστάσεις που έχουν προηγηθεί στην ύλη, ή ακολουθούν, δημιουργώντας εν δυνάμει με τον τρόπο αυτό εμπόδια διδακτικού τύπου.

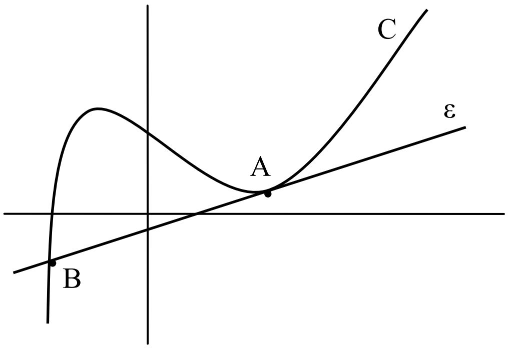
Εφαπτόμενες Κωνικές Τομές

Η έννοια της επαφής δυο γραμμών στα Σχολικά βιβλία έχει ως εξής:

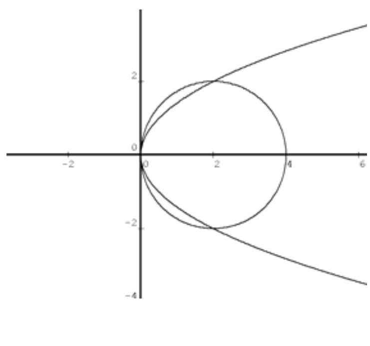
Στα Μαθηματικά του Γυμνασίου και την Ευκλείδεια Γεωμετρία του Λυκείου ορίζονται πολύ προσεκτικά τα παρακάτω:

- ευθεία εφαπτόμενη σε κύκλο (μοναδικό κοινό σημείο)
- εφαπτόμενοι κύκλοι (εσωτερικά ή εξωτερικά) (μοναδικό κοινό σημείο)
- ευθεία εφαπτόμενη σε κωνική τομή (οριακή θέση τέμνουσας, Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου)

Ακόμα, όταν κληθούμε να απαντήσουμε αν η ευθεία (*ε*) του σχήματος 4α εφάπτεται της καμπύλης *C*, προφανώς θα πούμε ναι, παρόλο που στο σημείο Β οι δυο γραμμές τέμνονται. Η (*ε*) <u>είναι</u> μια εφαπτόμενη της *C*.



Σχήμα 4α



Σχήμα 4β

Ακολουθώντας το συμβόλαιο αυτό, καταφατική θα πρέπει να είναι η απάντησή μας και στην περίπτωση των κωνικών του σχήματος 4β. Αρκεί να δείξουμε ότι στην αρχή των αξόνων οι δυο καμπύλες δέχονται ως κοινή εφαπτόμενη τον άξονα $y'y$.

Έχουμε λοιπόν δημιουργήσει μια υπόγεια σύμβαση σχετικά με τη σημασία της έννοιας της επαφής δυο γραμμών.

Σε ρήξη με τα παραπάνω μας φέρνει στη σελίδα 99 η άσκηση 1 της Β΄ Ομάδας του βιβλίου Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου:

Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος $(x-3)^2 + y^2 = 8$ εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 4x$. (Δηλαδή, έχουν τις ίδιες εφαπτόμενες στα κοινά σημεία τους).

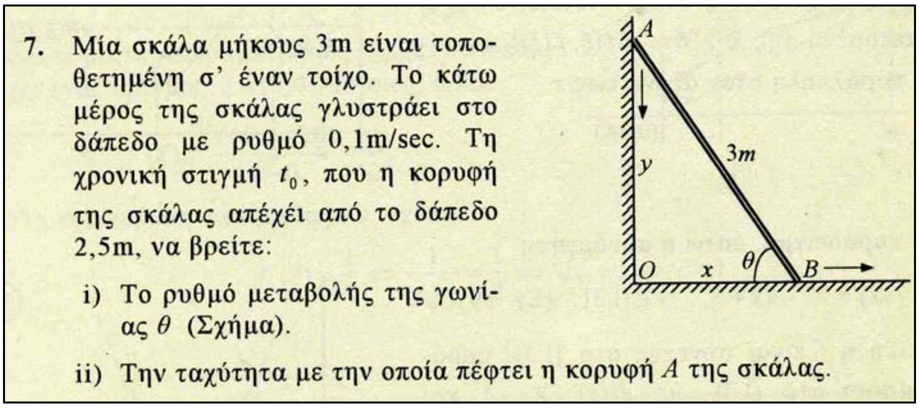
Παρατηρείστε ότι το βιβλίο επιλέγει να αναφέρει – απλώς εντός παρενθέσεως– ότι το να εφάπτονται δυο κωνικές σημαίνει να έχουν αποκλειστικά και μόνο σημεία επαφής και όχι σημεία τομής. Μια αποσαφήνιση της εννοιολογικής διαφοράς των όρων «δυο γραμμές εφάπτονται» και «δυο γραμμές εφάπτονται στο σημείο Α» θα βοηθούσε τους μαθητές να γνωρίζουν ποιο είναι το ζητούμενο σε κάθε περίπτωση.

Το Θέμα Της Ταχύτητας

Στην εισαγωγική παράγραφο του κεφαλαίου 2 (Διαφορικός Λογισμός) στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου, ορίζεται η έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας ενός σώματος που κινείται κατά μήκος ενός άξονα, ως η παράγωγος της συνάρτησης θέσης του σώματος. Η συνάρτηση θέσης δίνει την τετμημένη του σώματος $S(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή t. Το σχόλιο της σελίδας 210 επισημαίνει ότι η (στιγμιαία) ταχύτητα είναι θετική όταν το σώμα κινείται προς τα «δεξιά» και αρνητική όταν η κίνηση γίνεται προς τα «αριστερά».

Ποια είναι όμως η ταχύτητα ενός σώματος όταν η κίνησή του γίνεται σε ένα πλαίσιο στο οποίο δεν προσδιορίζεται η συνάρτηση θέσης, γιατί απλούστατα δεν έχει ορισθεί άξονας πάνω στον οποίο γίνεται η κίνηση; Έχει σε μια τέτοια περίπτωση νόημα αρνητική τιμή της ταχύτητας;

Στην άσκηση 7 σελ. 145 του βιβλίου Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου (σχήμα 5) η απάντηση δίνει αρνητική τιμή στην ταχύτητα με την οποία πέφτει το σημείο Α, γιατί αυθαίρετα θεωρήθηκε ως ταχύτητα ο ρυθμός μεταβολής του y.


7. Μία σκάλα μήκους 3m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλυστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5m, να βρείτε:

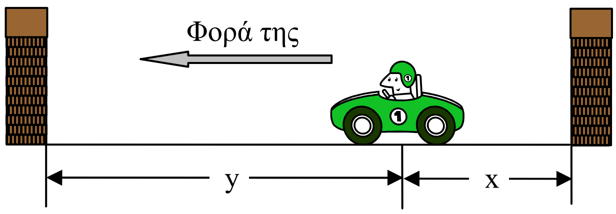
i) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα).

ii) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας.

Σχήμα 5

Πρότασή μας είναι να υιοθετήσουμε ένα διδακτικό συμβόλαιο σύμφωνα με το οποίο, στην περίπτωση που δεν δίνεται συνάρτηση θέσης ενός κινούμενου σώματος και δεν υπάρχει ορισμένη θετική κατεύθυνση (δηλαδή άξονας) πάνω στην ευθεία της κίνησης, η ταχύτητα θα ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της διαδρομής που διανύει το σώμα.

Με τον τρόπο αυτό η ταχύτητα θα αποδίδεται με μη αρνητική τιμή, εναρμονισμένη με τη συνήθη χρήση αυτού του μεγέθους στην καθημερινότητα. Με άλλα λόγια θα ισχύουν όσα σημειώνονται στο σχήμα 6 που ακολουθεί:



Ταχύτητα:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dt} \geq$$

Σχήμα 6

Αν αποφασίσουμε η ταχύτητα να ισούται με το ρυθμό μεταβολής του x (και όχι του y), τότε, στην άσκηση που προαναφέραμε, η κορυφή της σκάλας πέφτει με ταχύτητα $\upsilon_{\mathrm{A}} \cong 66$ cm/s (και όχι $-\frac{\sqrt{2,75}}{25}$ m/s).

Τα Μονοσήμαντα Σημαινόμενα Δεν Έχουν Κατ΄ Ανάγκη Μονοσήμαντα Σημαίνοντα

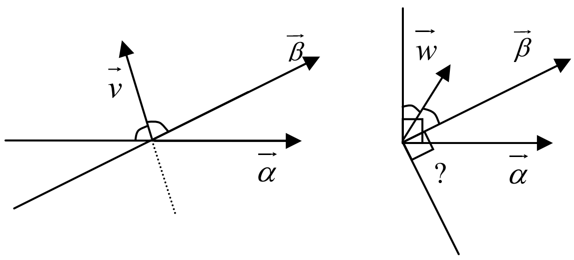
Η Γωνία Δύο Ευθειών

Στη σελίδα 77 του βιβλίου Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου η άσκηση 7 ζητά συνθήκη ώστε ο άξονας x΄x να διχοτομεί τη γωνία των ευθειών $\varepsilon_1 : \alpha_1 x + \beta_1 y = 0$ και $\varepsilon_2 : \alpha_2 x + \beta_2 y = 0$. Η γωνία δυο ευθειών όμως είναι μια έννοια που δεν έχει ορισθεί στα Σχολικά Μαθηματικά. Εντούτοις έχει ορισθεί η έννοια της γωνίας που σχηματίζει μια ευθεία ε με τον άξονα $x΄x$, ως η γωνία που διαγράφει ο $x΄x$ όταν στραφεί κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ε. Το λυσάρι πάντως δεν λαμβάνει υπόψη του τη διάταξη των δυο ευθειών, καθώς δεν διαφοροποιεί τη γωνία που σχηματίζει η ε_1 με την ε_2 από εκείνη που σχηματίζει η ε_2 με την ε_1. Ενώ ζητήθηκε συνθήκη διχοτόμησης της γωνίας των δυο ευθειών, τελικά προσδιορίζεται συνθήκη διχοτόμησης μιας από τις γωνίες που δημιουργούν οι δυο ευθείες.

Η Παραπληρωματική Γωνία Δύο Διανυσμάτων

Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου, σελίδα 49, άσκηση 3 της Β΄ Ομάδας:

Να αποδείξετε ότι ο φορέας του διανύσματος $\vec{v} = |\vec{\beta}|\vec{\alpha} - |\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί <u>την παραπληρωματική</u> γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



Προφανώς, ως ζητούμενο υπονοείται το ότι ο φορέας του $\vec{v}$ διχοτομεί <u>τις εφεξής</u> και παραπληρωματικές γωνίες της γωνίας των δύο διανυσμάτων. Τι θα συνέβαινε όμως αν σε άλλη άσκηση ζητούσαμε να δειχθεί ότι ο φορέας κάποιου διανύσματος $\vec{w}$ διχοτομεί τη συμπληρωματική της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$; (Σχήμα 7).

Σχήμα 7

Βιβλιογραφία

Adda, J., (1987) Erreurs provoquées par les representations, CIEAM (Canada).

Arsac, G., (1989) La transposition didactique en mathématiques. Dans *La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie*, cours de DEA, IREM de Lyon.

Artigue, M., (1989) Epistemologie et didactique. Dans *le cahier de didirem* no 3, IREM de Paris7.

Bαlacheff, N., (1987) Fondements et methodes de la didactique des mathématiques, actes du colloque franco-allemand de Luminy, ed. la pensée sauvage, Grenoble.

Baruk, S., (1985) L'âge du capitaine, ed. Seuil.

Brousseau, (1982) G., Le contrat didactique: le milieu. Dans *RDM* Vol. 9 no 3

Brousseau, G., (1983) Les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathématiques. Dans *RDM* Vol. 4 no 2.

Chevallard, Y., Johsua, Marie- Alberte, (1991) La transposition didactique, éditions de la Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., (1982) Sur l'Ingenierie didactique, publication de l'IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y., (Fevrier 1986) Les programmes et la transposition didactique: illusions, contraintes et possibles. Dans *Bulletin de l'APMEP* no 352.

Douady, R. (1989) De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle. Dans *les cahiers de didactique des mathematiques* no 6, IREM de Paris 7.

Fort, M., (1991) Κονστρουκτιβισμός: Από το Μαθησιακό στο Παιδαγωγικό Μοντέλο. Στα *Θέματα Διδακτικής Των Μαθηματικών I*, Εκδόσεις Προτάσεις.

Henry, M., (Oct. 1991) Didactique des Mathematiques, Irem de Besancon.

ΥΠΕΠΘ-Π Ι, (2004) Μαθηματικά Θετικής Και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Β΄ Τάξη Ενιαίου Λυκείου, ΟΕΔΒ.

ΥΠΕΠΘ-Π Ι, (2004) Μαθηματικά Θετικής Και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Γ΄ Τάξη Ενιαίου Λυκείου, ΟΕΔΒ.

ΥΠΕΠΘ-Π Ι, (2004) Μαθηματικά Και Στοιχεία Στατιστικής, Γ΄ Τάξη Ενιαίου Λυκείου, ΟΕΔΒ.

ΥΠΕΠΘ-Π Ι, (2004) Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, ΟΕΔΒ.

Καλδρυμίδου, Μ., (1997) Οι αντιλήψεις ως εργαλείο ανάλυσης της Μαθηματικής εκπαίδευσης, Θ.Δ.Τ.Μ.ΙΙΙ, Εκδόσεις Gutenberg.

Κλαουδάτος, Ν., Παπασταυρίδης, Σ., (1997) Τα μαθηματικά του σχολείου και ο πραγματικός κόσμος: Πώς θα συνδυάσουμε θεωρία και πράξη. Στα *Θ.Δ.Τ.Μ.ΙΙΙ*, Εκδόσεις Gutenberg.

Lacombe, D., (1986-87) La langue mathématique et ses difficultés, Université de Paris VII.

Λιναρδάκης, Π., (1999) Η διδασκαλία της Τριγωνομετρίας στο Λύκειο. Μια έρευνα υπό το πρίσμα της Διδακτικής Μηχανικής, Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών.

Vergnaud, G., (1991) La theorie des champs conceptuels. Dans *Recherches en Didactiques des Mathematiques* no 6.