Τα μαθηματικά ως δίκτυο αλληλοσυνδεόμενων προβλημάτων: Ένα παράδειγμα

Νίκος Κλαουδάτος

Μεταπτυχιακό πρόγραμμα της Διδακτικής των Μαθηματικών, Μαθηματικό Τμήμα Π. Α

nklaoud@math.uoa.gr, nklaoud@otenet.gr

Περίληψη

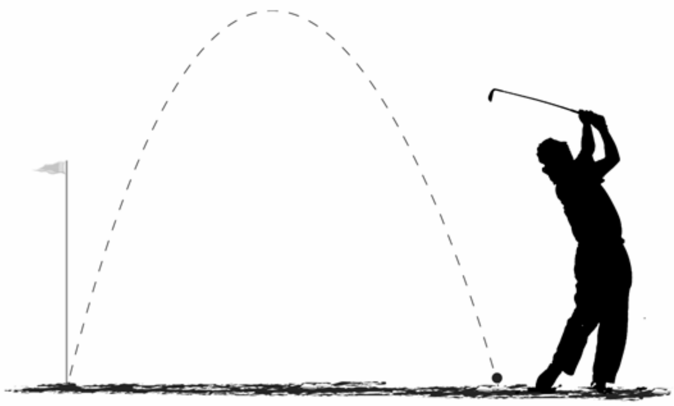
Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε τη διαδικασία σύνδεσης τριών φαινομενικά ανεξάρτητων προβλημάτων. Στη διατύπωση των προβλημάτων σημαντικό ρόλο είχαν η γενίκευση και η εξειδίκευση, δύο διαδικασίες που θεωρούνται σημαντικές για τη δημιουργία των μαθηματικών εννοιών και σχέσεων. Παράλληλα υποστηρίζουμε ότι οι διαδικασίες αυτές θα πρέπει να συμπληρωθούν με τις επιστημολογικές αρχές της εφαρμοσιμότητας και της ετοιμότητας, οι οποίες, μαζί με τη γενίκευση και εξειδίκευση, διευρύνουν τη θέση μας για τη διδασκαλία των Μαθηματικών ως λύση προβλήματος. Το αποτέλεσμα είναι η ανάπτυξη μιας ομάδας αλληλοσυνδεόμενων προβλημάτων, μια ιδιαίτερα χρήσιμη οπτική για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Τέλος,, παραθέτουμε μια συνοπτική παρουσίαση διδασκαλίας ως παράδειγμα αυτής της διδακτικής οπτικής.

Λέξεις κλειδιά:λύση προβλήματος,, διδακτικές καταστάσεις, γενίκευση, εξειδίκευση, εφαρμοσιμότητα, ετοιμότητα.

Εισαγωγή

Υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ των ακόλουθων προβλημάτων;

1. Στο σχήμα έχουμε έναν παίκτη του γκολφ ο οποίος χτυπά την μπάλα και της προσδίδει μια αρχική ταχύτητα v_0. Να εκφραστεί η ταχύτητα v της μπάλας σε κάθε σημείο της τροχιάς της ως συνάρτηση του χρόνου t, δηλαδή να βρεθεί μια συνάρτηση f της μορφής $v = f(t)$.



2. Έστω $d(M,O) = \sqrt{x^2 + y^2}$ η απόσταση ενός σημείου M(x,y) από την αρχή O των αξόνων. Αν το M κινείται σε ευθεία ή κωνική τομή, να ερευνηθεί η μεταβολή της d.

Το ερώτημα μοιάζει μάλλον απροσδόκητο. Το πρώτο πρόβλημα είναι μια απλοποιημένη κατάσταση σε εξω-μαθηματικό πλαίσιο, ενώ το δεύτερο είναι ένα καθαρά μαθηματικό ερώτημα. Ποιοι ήταν οι παράγοντες που μας οδήγησαν στη ζητούμενη συσχέτιση; Και πρώτα από όλα, ποιες ήταν οι αρχές που μας οδήγησαν στη διατύπωση των προβλημάτων αυτών;

Είναι γνωστός ο ρόλος της *γενίκευσης* (generalization) τόσο στην ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών όσο και σε γνωστικό επίπεδο. Για παράδειγμα, οι Steele and Johanning (2004) τη συνδέουν με την ανάπτυξη των γνωστικών σχημάτων (cognitive schemes) και τη λύση προβλήματος. Ο Tall (1991) διακρίνει την *επεκτατική γενίκευση* (expansive generalization) και την *επανακατασκευαστική γενίκευση* (reconstructive generalization) και τις συνδέει με τους δύο τρόπους ανάπτυξης ενός γνωστικού σχήματος, δηλαδή την *αφομοίωση* (assimilation) και την *προσαρμογή* (accommodation) αντιστοίχως. Ο Dörfler (1991), συνδέει τη γενίκευση με την ανάπτυξη μιας θεωρίας δράσης (activity theory). Όμως εδώ θα σταθούμε στη γνωστή τοποθέτηση του Mason (1996), στην οποία υποστηρίζει ότι η ικανότητα να διακρίνουμε το γενικό από το συγκεκριμένο (γενίκευση) και το συγκεκριμένο από το γενικό (εξειδίκευση-specialization), βρίσκεται στο κέντρο της μαθηματικής δημιουργίας. Την αντίληψη αυτή τη θεωρούμε χρήσιμη για τη θέση που υποστηρίζουμε ως προς τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Από την άλλη μεριά, η γενίκευση δεν καλύπτει το θέμα της *διατύπωσης* ενός ερωτήματος, δηλαδή ενός προβλήματος (problem posing), όπως αφήνει να εννοηθεί ο Dörfler. Όλοι γνωρίζουμε ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση έχει παραβλέψει το θέμα αυτό. Για παράδειγμα, ο Kilpatrick (1987, p.123) επισημαίνει ότι οι μαθητές βλέπουν τα προβλήματα έξω από αυτούς, ‘σαν τα ψηλά βουνά που πρέπει να τα κατακτήσουμε’. Προτείνουμε ότι οι επιστημολογικές αρχές της *εφαρμοσιμότητας* (applicability) και της *ετοιμότητας* (readiness) θα μπορούσαν, σε κάποιο βαθμό, να καλύψουν το ζήτημα.

Πιο συγκεκριμένα, ο όρος εφαρμοσιμότητα προέρχεται από τον όρο *εφαρμόσιμα μαθηματικά* (applicable mathematics) και βασίζεται στην αντίληψη ότι τα μαθηματικά αποτελούν πιθανή πηγή μοντέλων για τη διερεύνηση μιας δεδομένης ή μιας προτεινόμενης κατάστασης, βλέπε π.χ. Ormel (1972), Pollak (1979). Με τον όρο ετοιμότητα εννοούμε την *τάση για διερεύνηση των πιθανών εφαρμογών* μιας μαθηματικής έννοιας, προκειμένου να ερμηνεύσουμε ένα σύνολο φαινομένων ή προκειμένου να διατυπώσουμε νέα ερωτήματα με τη μορφή υποθέσεων, τόσο μέσα σε μαθηματικά όσο και σε εξω-μαθηματικά πλαίσια. Ισχυριζόμαστε ότι η υιοθέτηση όλων των παραπάνω αρχών έχει σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη μιας οπτικής τόσο για τα Μαθηματικά όσο και για τη διδασκαλία τους που αποδίδεται με τη φράση *τα Μαθηματικά ως ένα ‘αχανές’ δίκτυο αλληλοσυνδεόμενων προβλημάτων*.

Είναι σαφές ότι η θέση που περιγράψαμε σύντομα στα προηγούμενα, εμπλουτίζει τη γενικότερη αντίληψη που έχουμε διατυπώσει από καιρό για τη διδασκαλία των Μαθηματικών ως λύση προβλήματος (teaching mathematics as problem solving), βλέπε π.χ. Klaoudatos (1998, 2002), Κλαουδάτος (1997), Klaoudatos and Papastavridis (2002).

Στις επόμενες δύο παραγράφους θα παρουσιάσουμε σύντομα την επίλυση του πρώτου προβλήματος και θα το συνδέσουμε με το δεύτερο. Την παρουσίαση θα συνοδεύσουμε με σχόλια διδακτικού περιεχομένου, όπως διαμορφώθηκαν σε συζητήσεις που είχαμε με συναδέλφους αλλά και σε διδασκαλίες που πρόσφατα πραγματοποιήσαμε σε σχολεία του Λεκανοπεδίου με μαθητές Β΄ Λυκείου θετικής κατεύθυνσης. Τέλος, πρέπει να τονίσουμε ότι η παρουσίαση έγινε με τη βοήθεια του υπολογιστή. Το γεγονός αυτό μας επέτρεψε να υπερβούμε τις δυσκολίες που υπάρχουν στην επίλυση του προβλήματος, τόσο σε γνωστικό επίπεδο όσο και σε επίπεδο προγράμματος σπουδών, δεδομένου ότι η βολή (projectile motion) τυπικά δεν περιέχεται στο πρόγραμμα του Λυκείου [1].

Η διδασκαλία του πρώτου προβλήματος

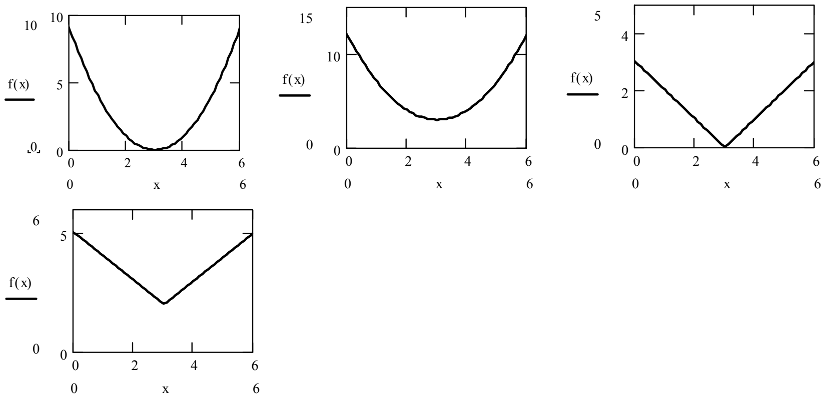
Η πρώτη ενέργεια είναι η αφιέρωση του κατάλληλου χρόνου για τη συζήτηση του προβλήματος, έτσι ώστε να διευκρινιστεί πλήρως η κατάσταση. Στη συνέχεια και πριν αρχίσει η επεξεργασία του ερωτήματος, διατυπώνουμε το ακόλουθο βοηθητικό ερώτημα με στόχο τη διαισθητική προσέγγιση και την ανάπτυξη εικασιών:

> *Μπορείτε να κάνετε ένα πρόχειρο διάγραμμα της ταχύτητας της μπάλας συναρτήσει του χρόνου;*

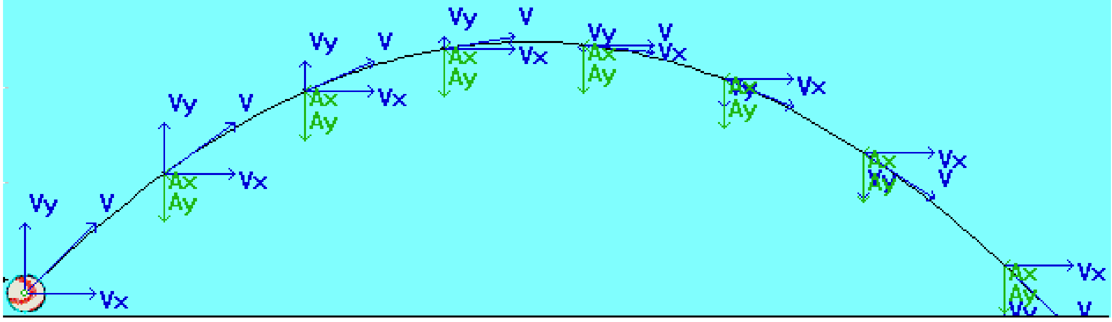
Ουσιαστικά ζητήσαμε από τους μαθητές να διατυπώσουν μια εικασία. Η εμπειρία από το πρόβλημα μας έδειξε ότι οι περισσότερες απαντήσεις περιορίζονται στα διαγράμματα του σχήματος 1. Παρατηρούμε ότι στα (α) και (γ) θεωρείται ότι η ταχύτητα της μπάλας στο ανώτερο σημείο της τροχιάς είναι μηδέν. Από την άλλη μεριά, στα (γ) και (δ) η μεταβολή της ταχύτητας ως προς το χρόνο θεωρείται γραμμική.

Ποιο είναι το σωστό; Προφανώς θα πρέπει να υπολογίσουμε τη συνάρτηση. Για να γίνει όμως αυτό πρέπει να έχουμε μια ακριβή εικόνα της κίνησης. Εδώ θα μας βοηθήσει ο υπολογιστής, όπου με κατάλληλο πρόγραμμα αναπαριστούμε την κίνηση της μπάλας ενώ, ταυτόχρονα, έχουμε και την ανάλυση της ταχύτητας σε δύο συνιστώσες, όπως παρατηρούμε στο σχήμα 2.

(α) (β) (γ) (δ)

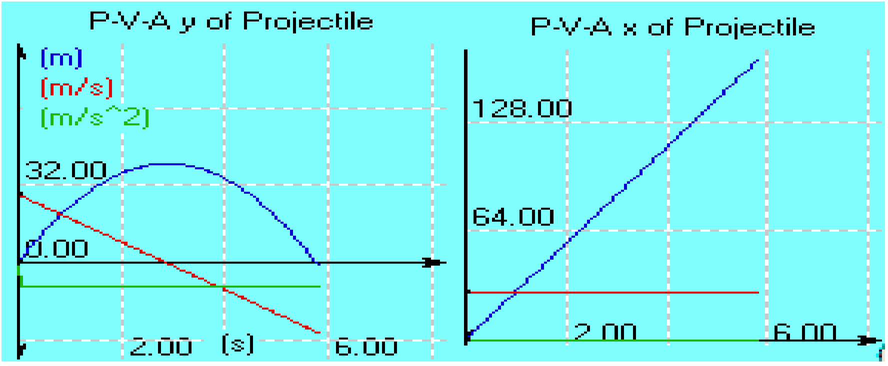


Σχήμα 1



Σχήμα 2

Η οθόνη του υπολογιστή εκτός από το σχήμα 2 έχει και τις ακόλουθες πληροφορίες που περιέχονται στο σχήμα 3:



Σχήμα 3

Το αριστερό διάγραμμα αναφέρεται στην κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας, δηλαδή στη μεταβολή του ύψους συναρτήσει του χρόνου t (παραβολή-m), στην ταχύτητα (m/s) που είναι ευθεία με αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης λόγω της βαρύτητας, και στην επιτάχυνση της βαρύτητας (m/s^2) που είναι αρνητική αλλά σταθερή ($g=10m/s^2$ περίπου). Τα αντίστοιχα ισχύουν για την οριζόντια συνιστώσα, δεξιό διάγραμμα, με τη διαφορά ότι εδώ η ταχύτητα είναι σταθερή και δε μηδενίζεται. Ο οριζόντιος άξονας και στα δύο διαγράμματα είναι ο χρόνος t σε δευτερόλεπτα. Τέλος, το πρόγραμμα δίνει μια επιλογή τιμών για τη γωνία βολής και για την ταχύτητα. Συμφωνήσαμε ότι θα εργαστούμε με τη γωνία 45° και με ταχύτητα 40 m/s.

Η συζήτηση αποκάλυψε στους περισσότερους μαθητές ότι η ταχύτητα δε μηδενίζεται στην κορυφή της τροχιάς, μηδενίζεται μόνον η κατακόρυφη συνιστώσα η οποία στη συνέχεια γίνεται αρνητική, δηλαδή αλλάζει φορά. Μετά από αυτά τα συμπεράσματα διατυπώνουμε το ερώτημα:

> *Μήπως θέλετε να διορθώσετε το διάγραμμά σας; Δηλαδή να επαναδιατυπώσετε την εικασία σας;*

Στην περίπτωση αυτή συνήθως εγκαταλείπονται τα διαγράμματα (α) και (γ) και διαμορφώνονται όπως περίπου τα (β) και (δ), στο σχήμα 1.

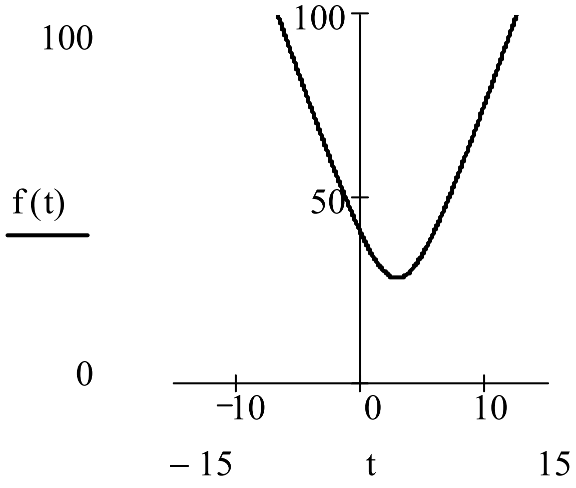
> *Ποιο από τα δύο διαγράμματα πιστεύετε ότι είναι το σωστό;*

Οι μαθητές ταλαντεύονται ανάμεσα στα δύο. Είναι φανερό ότι πρέπει να υπολογιστεί η συνάρτηση και το πρώτο βήμα είναι ο υπολογισμός των v_x, v_y. Για τους μαθητές φαίνεται ότι ο υπολογισμός των συνιστωσών είναι μια μάλλον εύκολη υπόθεση, δηλαδή $v_x = v_0 \cdot \cos 45^\circ, v_y = v_0 \cdot \sin 45^\circ - g \cdot t$. Από το τρίγωνο των ταχυτήτων v, v_x, v_y, και για τις τιμές που συμφωνήθηκαν, έχουμε τα ακόλουθα.

$$v(t) = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \sqrt{(v_0 \cdot \cos 45^\circ)^2 + (v_0 \cdot \sin 45^\circ - g \cdot t)^2} \text{ ή}$$

$$v(t) = \sqrt{g^2 \cdot t^2 - 40\sqrt{2} \cdot g \cdot t + 1600}, a > 0, \Delta < 0, (1)$$

Στη συνέχεια τους δείξαμε το διάγραμμα της συνάρτησης (1) από τον υπολογιστή, σχήμα 4, και τους ρωτήσαμε αν τους θυμίζει κάποια καμπύλη. Οι μαθητές απάντησαν ότι μπορεί να είναι παραβολή ή υπερβολή, αλλά δεν ήταν βέβαιοι. Θα έπρεπε να ερευνηθεί αν η (1) είναι γνωστή συνάρτηση.



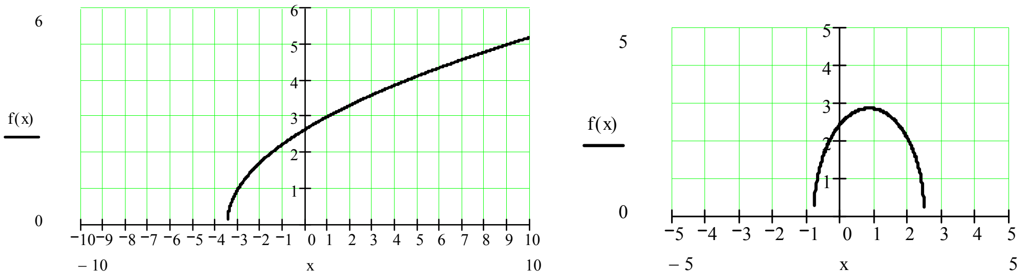
Σχήμα 4

Στο σημείο αυτό κάναμε τη γενίκευση. Παρατηρούμε ότι μέσα στην τετραγωνική ρίζα είναι μια τετραγωνική συνάρτηση με α>0 και Δ<0. Γιαυτό θα ήταν πιο χρήσιμο να πάρουμε τη γενική μορφή της τετραγωνικής συνάρτησης, με την υπόθεση α>0 και Δ<0, και να βρούμε τη γενική εξίσωση. Με άλλα λόγια, να αποσπάσουμε τη συνάρτηση αυτή από το ειδικό πλαίσιο του προβλήματος προκειμένου να φθάσουμε σε όσο το δυνατόν ευρύτερα συμπεράσματα. Αν λοιπόν θέσουμε $f(x) = y = \sqrt{\alpha\chi^2 + \beta x + \gamma}, a > 0, \Delta < 0$, τότε $y = \sqrt{a(x + \frac{\beta}{2a})^2 + \frac{|\Delta|}{4a}}$ ή, τελικά, $\frac{y^2}{\lambda^2} - \frac{X^2}{\kappa^2} = 1$, (2), όπου $X = x + \frac{\beta}{2a}$ και $\lambda = \sqrt{\frac{|\Delta|}{4a}}, k = \sqrt{\frac{|\Delta|}{4a^2}}$, δηλαδή έχουμε μια *υπερβολή*. Το αποτέλεσμα ήταν μη αναμενόμενο για τους μαθητές, όσο ήταν και για μας όταν ερευνούσαμε το πρόβλημα. Η ταχύτητα λοιπόν της μπάλας του γκολφ σε κάθε σημείο της τροχιάς της δίνεται από τη συνάρτηση (1), που είναι υπερβολή λόγω της (2).

Στο τελευταίο βήμα της επίλυσης διαχωρίσαμε τη συνάρτηση από το πρόβλημα, επομένως η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}$ έχει τώρα μια ύπαρξη *ανεξάρτητη* από οποιοδήποτε πρόβλημα, είναι δηλαδή ένα *μαθηματικό αντικείμενο* (mathematical object). Είναι φυσιολογικό, πλέον, να αναρωτηθούμε τι συμβαίνει για τις διάφορες τιμές των α και Δ. Το αποτέλεσμα της διερεύνησης ήταν για μια ακόμα φορά μη προβλέψιμο. *Η συνάρτηση αυτή δίνει την ευθεία και όλες τις κωνικές τομές.*

Θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα μόνο για δύο περιπτώσεις. Ο αναγνώστης μπορεί να κάνει πλήρη διερεύνηση, εργαζόμενος όπως πιο πάνω.

Για παράδειγμα αν $f(x) = \sqrt{2x + 7}$ τότε είναι α=0 και Δ>0, παραβολή. Αν $f(x) = \sqrt{-3x^2 + 5x + 6}$, α<0, α≠-1, Δ>0, έλλειψη, βλέπε σχήματα 5.

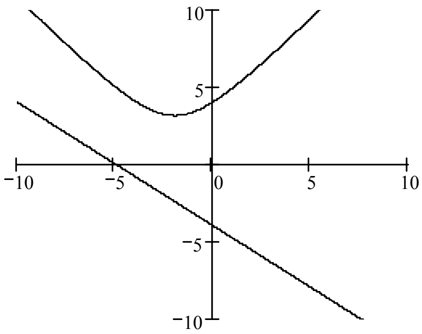


Σχήμα 5

Το δεύτερο πρόβλημα ως εξειδίκευση του πρώτου

Όταν έχεις αναπτύξει μια ιδέα, τότε τη συναντάς πολύ συχνά. Ποια θα μπορούσε να είναι μια χρήσιμη μορφή της $f(x)=\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}$; Μα φυσικά η συνάρτηση της απόστασης δύο σημείων η οποία είναι πάντοτε μια μη αρνητική ποσότητα. Και επειδή, όπως είδαμε, η f σχετίζεται άμεσα με την ευθεία και τις κωνικές τομές, η διατύπωση του δεύτερου προβλήματος ήλθε φυσιολογικά. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνον με την περίπτωση της ευθείας και της παραβολής, οι υπόλοιπες προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο.

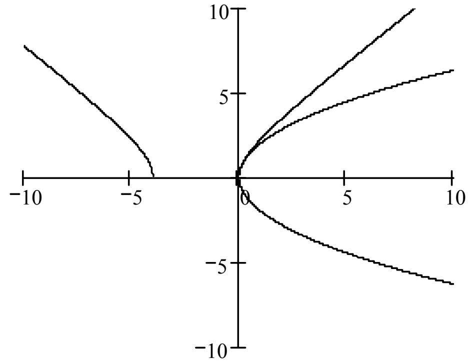
1^{η} περίπτωση: Έστω ότι το M(x,y) κινείται στην ευθεία $f(x)=ax+b$. Η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων είναι $d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, ή $d(x)=\sqrt{x^2+(ax+b)^2}$. Η εξίσωση αυτή έχει πάντα τη μορφή $d(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$, με A>0 και Δ<0, άρα η d παριστάνει μια υπερβολή.



Σχήμα 6

Στο σχήμα 6 το M κινείται στην ευθεία $f(x)=y=-0.8x-4$ επομένως η μεταβολή της απόστασής του από το O δίνεται από την υπερβολή $d(x)=\sqrt{1.64x^2+6.4x+16}$.

2^{η} περίπτωση: Έστω ότι το M(x,y) κινείται στην παραβολή $y^2=2px$. Τότε $Y=d(x)=\sqrt{x^2+2px}$ ή $Y^2=(x+p)^2-p^2$ και τελικά $\frac{X^2}{p^2}-\frac{Y^2}{p^2}=1$, δηλαδή είναι ο κλάδος της υπερβολής που αντιστοιχεί στα χ≥0, σχήμα 7, για την παραβολή $y^2=4x$.

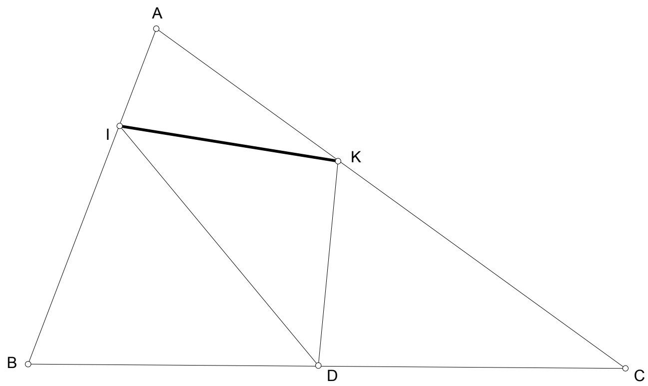


Σχήμα 7

Γενικότερα, είναι απλό να δείξουμε ότι και για την έλλειψη και για την υπερβολή ισχύουν τα ίδια, δηλαδή ότι η συνάρτηση d είναι υπερβολή, κλάδος ή μέρος της [3]. Φυσικά μπορούμε να διατυπώσουμε και άλλα ερωτήματα, για παράδειγμα ποια είναι η d (M, E), όπου E είναι μια εστία των κωνικών. Τέλος του μαθήματος, το οποίο είχε διάρκεια δύο συνεχόμενων διδακτικών ωρών.

Πως ξεκίνησε η εργασία αυτή

Το χειμώνα του ακαδημαϊκού έτους 2000-2001, μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας και κατά τη διάρκεια του μαθήματος οι φοιτητές σε συνεργασία μαζί μας ανέπτυξαν το ακόλουθο πρόβλημα ως αποτέλεσμα των διαδοχικών γενικεύσεων ενός άλλου γεωμετρικού προβλήματος:
Σε τρίγωνο ABC, D είναι ένα σημείο της BC από το οποίο κατασκευάζουμε ευθύγραμμα τμήματα DI, DK, τα οποία σχηματίζουν με τις πλευρές AB, AC αντιστοίχως, ίσες γωνίες ω. Να βρεθεί η θέση του D, ώστε το μήκος IK να γίνει ελάχιστο, σχήμα 8.

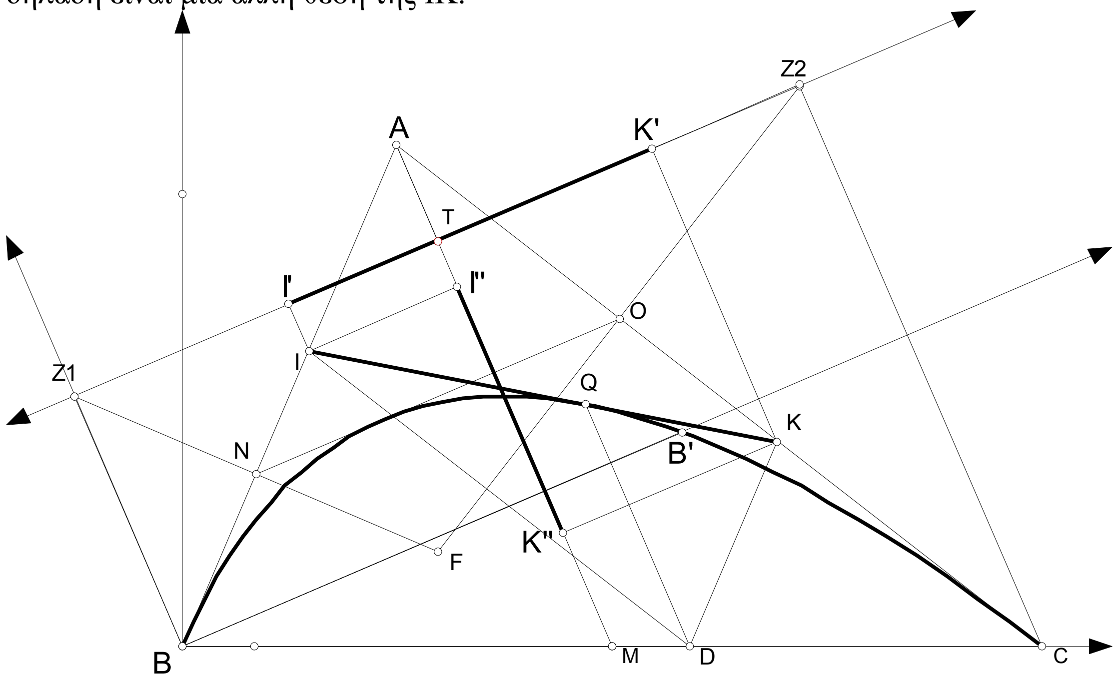


Σχήμα 8

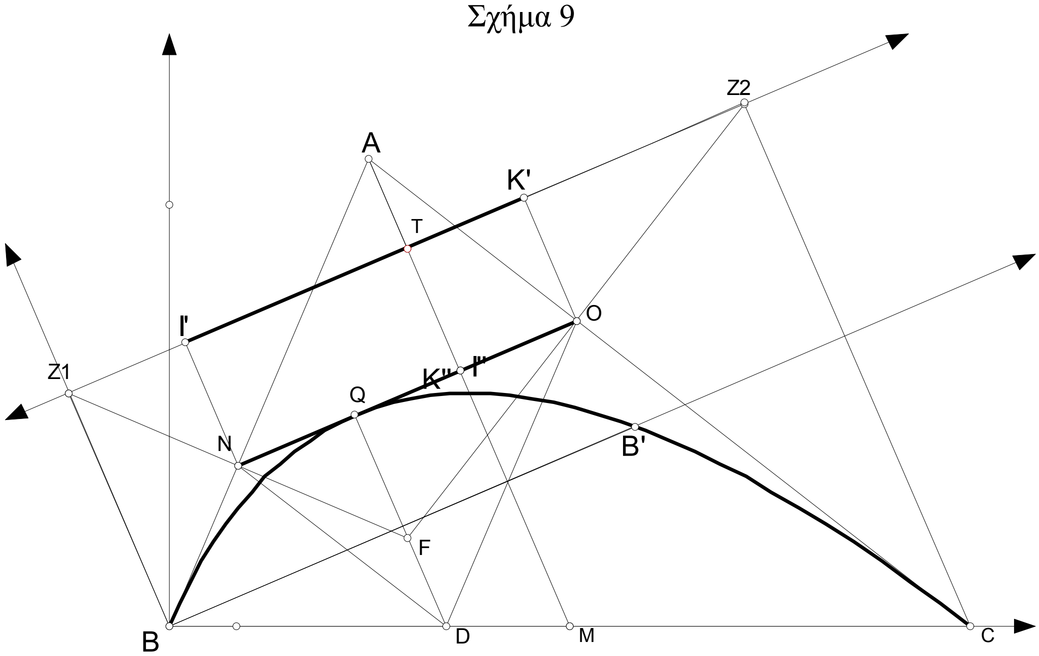
Τη λύση του προβλήματος αυτού παρουσιάσαμε σε διεθνές συνέδριο, βλέπε Klaoudatos (2002). Έκτοτε διατυπώθηκαν διάφορες λύσεις οι οποίες έχουν βέβαια την αξία τους, αλλά εδώ θα επιμείνουμε στη δική μας επειδή σχετίζεται με το θέμα.

Διαπιστώσαμε ότι η βασική περίπτωση ήταν η ω=Α. Κάθε άλλη περίπτωση ανάγεται σε αυτήν, επομένως στο σχήμα 9 οι DI και DK είναι παράλληλες προς τις πλευρές AC και AB αντίστοιχα. Τότε αποδεικνύεται ότι η IK *εφάπτεται συνεχώς μιας παραβολής η οποία, παραβολή, εφάπτεται στις πλευρές AB, AC στα B και C.* Για την κατασκευή της παραβολής, δηλαδή της εστίας F και της διευθετούσας Z1 Z2, βλέπε

Bullard (1935, 1937) ή Honsberger (1978, p.236-242). Στη συνέχεια αποδείξαμε ότι το ελάχιστο μήκος της ΙΚ συμβαίνει όταν το D πάρει τέτοια θέση πάνω στην BC, ώστε η DQ να γίνει η DF, δηλαδή να γίνει ο άξονας συμμετρίας της παραβολής, όπως δείχνει το σχήμα 10. Το ελάχιστο μήκος είναι ίσο με το μήκος της ΝΟ, όπου Ν, Ο είναι τα μέσα των FZ1 και FZ2, όπου Z1, Z2 συμμετρικά της F ως προς τις πλευρές AB, AC, αντίστοιχα. Η ΝΟ είναι εφαπτόμενη της παραβολής στην κορυφή της, δηλαδή είναι μια άλλη θέση της ΙΚ.



Σχήμα 9



Σχήμα 10

Αργότερα δώσαμε το πρόβλημα ως εργασία στους μεταπτυχιακούς φοιτητές της επόμενης χρονιάς. Και ενώ αναμέναμε γεωμετρικές λύσεις, ένας φοιτητής το έλυσε αλγεβρικά δείχνοντας ότι το μήκος της ΙΚ συναρτήσει της απόστασης BD=x δίνεται από μια συνάρτηση της μορφής $d(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$, με Α>0 και Δ<0![2]. Δεν είχαμε ερευνήσει ακόμα το 1^o πρόβλημα, επομένως εκείνη την εποχή η συνάρτηση αυτή δε μας έλεγε πολλά πράγματα. Μόλις όμως διαμορφώσαμε το 1^o πρόβλημα και διαπιστώσαμε την ιδιαιτερότητα της συνάρτησης, διατυπώσαμε το ερώτημα αν υπάρχει σύνδεση μεταξύ των δύο αυτών προβλημάτων. Το ερώτημα τέθηκε ως εξής: *Είναι δυνατόν να θεωρήσουμε την παραβολή του τριγώνου ABC ως τροχιά υλικού σημείου που εκτοξεύεται από το B, με αρχική ταχύτητα v ίση με το μήκος της AB;*

Η απάντηση είναι ΝΑΙ. Από το σχήμα 9 φαίνεται πως όταν το D παίρνει τη θέση του B ή του C τότε η IK ταυτίζεται με την AB ή την AC αντίστοιχα. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σημείο Q, το σημείο επαφής της IK με την παραβολή, εκτοξεύεται από το B και σε κάθε θέση έχει ταχύτητα ίση με το μήκος του IK. Κατόπιν αποδείξαμε ότι η IK, αν θεωρηθεί ως το ‘διάνυσμα’ της ταχύτητας, αναλύεται σε μία ‘οριζόντια’ συνιστώσα με σταθερό μήκος και σε μια ‘κατακόρυφη’ συνιστώσα μεταβαλλόμενη. Η ανάλυση έγινε στους άξονες της διευθετούσας Z1Z2 και της διαμέσου AM η οποία, λόγω κατασκευής, είναι κάθετη στη διευθετούσα. Όπως παρατηρούμε, η ‘οριζόντια’ συνιστώσα είναι η I΄K΄ η οποία ισούται με την NO επειδή το τετράπλευρο NI΄K΄O είναι πάντα παραλληλόγραμμο. Επίσης ισχύει ότι NO= I΄K΄=IKσυνω, όπου ω η γωνία της διευθετούσας με το IK, δηλαδή στο σχήμα 9 είναι η γωνία I΄΄IK. Ανάλογα δείχνεται ότι η ‘κατακόρυφη’ συνιστώσα είναι I΄΄K΄΄=IKημω. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή της I΄΄K΄΄ δεδομένου ότι είναι παρόμοια με τη μεταβολή της v_y στο σχήμα 2. Φυσικά, επειδή η όλη κατάσταση είναι ιδεατή, για παράδειγμα μιλάμε για υλικό σημείο με μηδενική μάζα, προφανώς δεν μπορούμε να αναφερθούμε π.χ. στο g. Η όλη κατάσταση είναι ένα *γεωμετρικό μοντέλο* της βολής με κάποιες, μη συνήθεις, συμβάσεις.

Σύνοψη

Η θέση ότι τα Μαθηματικά αλλά και η διδασκαλία τους μπορούν να θεωρηθούν από την οπτική των αλληλοσυνδεόμενων προβλημάτων δεν είναι νέα, βλέπε π.χ. Bouvier (1985). Η επιδίωξή μας ήταν να προβάλλουμε κάποιες αρχές που θα φέρουν τη διδασκαλία πιο κοντά στη μαθηματική δημιουργία.

Κατά τη σύντομη περιγραφή της διδασκαλίας των δύο προβλημάτων, προσπαθήσαμε να δείξουμε τις βασικές αρχές της διδασκαλίας μας και ιδιαίτερα τη θεμελιώδη αρχή της επικοινωνιακής προσέγγισης, ότι *ο τρόπος που επικοινωνούν οι μαθητές με το δάσκαλο ή τους συμμαθητές τους αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία διαμορφώνονται οι τρόποι που σκέφτονται και ενεργούν στα Μαθηματικά.* Γιαυτό και μέσα από συνεχείς ερωτήσεις προσπαθήσαμε να αναπτύξουμε κανάλια επικοινωνίας, με τα οποία θα ήταν δυνατόν να αντιληφθούμε τόσο τη σκέψη των μαθητών, όσο και αυτοί τη δική μας. Ο σχεδιασμός λοιπόν των ενεργειών μας ακολούθησε το διάγραμμα:

1. Παρατήρηση-Πειραματισμός	
2. Επισήμανση ενός pattern	Επαγωγική Συλλογιστική
3. Ανάπτυξη μιας εικασίας	
4. Έλεγχος της εικασίας	Παραγωγική Συλλογιστική

Τέλος, θα θεωρήσουμε το 1^o πρόβλημα ως *πρόβλημα γεννήτορα* (generating problem), επειδή η επεξεργασία του μας οδήγησε τόσο στην ανάπτυξη της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ όσο και στη σύνδεση των προβλημάτων που παρουσιάσαμε.

Φυσικά, παραμένουν προς διερεύνηση πολλά άλλα ερωτήματα, τα οποία δεν μπορούν να αναφερθούν στην εργασία αυτή.

Σημειώσεις

[1]. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιήσαμε τα λογισμικά: MathcaD, Sketchpad και Interactive Physics.

[2]. Η εργασία παρουσιάστηκε από τον, τότε, μεταπτυχιακό φοιτητή Δημήτρη Ντρίζο.

[3]. Η μόνη 'παραφωνία' είναι ο κύκλος όπου αν έχει κέντρο το Ο, τότε η d είναι ευθ. τμήμα εφαπτόμενο στον κύκλο, διαφορετικά η d είναι μη γνωστή κλειστή καμπύλη.

Βιβλιογραφία

Bouvier,A., (1985), On strategies for teaching, in *For the Learning of Mathematics,* 5, 1, 2-11.

Bullard, J. A., (1935), Properties of parabolas inscribed in a triangle', in *A.M.M.*, p.606-610.

Bullard, J. A., (1937), Further properties of parabolas inscribed in a triangle, in *A.M.M.,* p. 368-371.

Dörfler, W., (1991), Forms and means of generalization in Mathematics, in Bishop A., J., et al. (eds), *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching,* Kluwer, 63-85.

Honsberger, R., (1978), Mathematical Morsels, Dolciani Mathematical Expositions no 3, M.A.A.

Kilpatrick, J., (1987), Problem formulating: Where do good problems come from?, in Schoenfeld, A., H., *Cognitive science and mathematics education,* Lawrence Erlbaum, Hillsdale, 123-147.

Klaoudatos, N., (1998) Active and research-minded attitudes towards mathematics: What does it mean in mathematics education? In *Proceedings of the International Conference on the teaching of Mathematics*, University of the Aegean, Samos, Greece, July 3-6, 1998, σελ. 179-181.

Klaoudatos, N., (2002) A project in Euclidean Geometry". In *Proceedings of ICTM2 Conference*, July 1-6, 2002, Crete, Greece.

Klaoudatos, N., and Papastavridis, S., (2002) Teaching Mathematics and Problem Solving: The role of Context. In Veistinen, A., L. (ed.) 2002, 'Proceedings of the ProMath workshop at Turku in May 2001. University of Turku, Finland. Department of Teacher Education', 38-48.

Κλαουδάτος, Ν., (1997) Η Διδασκαλία των Μαθηματικών ως Λύση Προβλήματος: ο ρόλος των ερευνητικών δραστηριοτήτων, στο *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών,* 2, Ιούνιος 1997,39-72.

Mason, J., (1996), Expressing generality and roots of algebra, in Bednarz, D., et al. *Approaches to algebra,* Kluwer, 65-86.

Ormel, C., P., (1972) Mathematics, Applicable versus Pure and Applied. In *Int. J. Math. Educ. Sci Technol.* 3, 125-131.

Pollak, H., O., (1979), The interaction between mathematics and other school subjects. In New trends in mathematics teaching, vol. IV, UNESCO, 232-248.

Steele, D. and Johanning, D., I., (2004), A schematic-theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking, in *Educational Studies in Mathematics,* 57, 65-90.

Tall, D., (1991), The psychology of advanced mathematical thinking, in Tall, D., (ed.), *Advanced mathematical thinking,* Kluwer, 3-21.