Ο μηχανισμός κατασκευής της έννοιας της παραγώγου

Ιωάννης Καρακωνσταντής, Φιλαρέτου 9, Γαλάτσι

Περίληψη

Επιχειρείται η δόμηση ενός εννοιολογικού μηχανισμού της έννοιας της παραγώγου. Η δόμηση βασίζεται σε κάποιες ιδέες της «αναδρομικής ανάλυσης» (regressive analysis). Τελικά, προτείνονται κάποιες διδακτικές στρατηγικές βασισμένες στις ανωτέρω αναλύσεις.

Εισαγωγή

Η διδακτική των μαθηματικών θέτει σε προτεραιότητα τον προβληματισμό που αφορά στην γένεση και την κατασκευή των εννοιών. Η έρευνα εξετάζει τις σχέσεις μεταξύ των εννοιών. Οι σχέσεις αλλάζουν. Το σύνολο δε των μετασχηματισμών που υφίστανται οι σχέσεις μεταξύ τους, για να γνωσθεί μια έννοια, που τοποθετείται στο κέντρο της διδασκαλίας, ο Chevallard (1991) το ονόμασε «*διδακτική μετάπλαση*». Έτσι, μια έννοια αποκτά εγκυρότητα γνώσης, όταν εισαχθεί σε ένα πλέγμα δεσμών με άλλες έννοιες. Για να περιγράψει καλύτερα τις δυνατότητες μάθησης ο Vergnaud (1991), εισήγαγε την έννοια του «εννοιολογικού πεδίου». Το προοδευτικό κτίσιμο «εννοιολογικών πεδίων», είναι η κυριότερη διαδικασία κατά την εκμάθηση και αποτελεί κύριο στόχο για την διδακτική. Το εννοιολογικό πεδίο ορίζεται το σύνολο των σχέσεων μιας έννοιας με άλλες έννοιες. Ανάλογα δε με το είδος οργάνωσης των εννοιών, επιτυγχάνεται διαφορετικά η εννοιολογική αλλαγή κατά την μάθηση.

Η ανάλυση μιας έννοιας σε άλλες έννοιες τοποθετημένες σε επίπεδα οργάνωσης φθίνουσας περιπλοκότητας ορίζει το «Ιδεογράφημα» της έννοιας. Η σύνθεση δε της έννοιας από άλλες έννοιες τοποθετημένες σε επίπεδα οργάνωσης αύξουσας περιπλοκότητας ορίζει το «Διδακτογράφημα» της έννοιας. Τις έννοιες οργανώνουμε σε συστήματα εννοιών για να ορίσουν τα εννοιολογικά πεδία.

Έτσι, πρόσφατα, πιο ριζοσπαστικά είδη εννοιολογικών αλλαγών έχουν προταθεί. Η μετακίνηση από έναν εννοιολογικό τομέα σε έναν άλλο, η γνωστή ως διακλάδωση δένδρου και αλλαγή δένδρου Thagard (1992).

Επίσης η μετακίνηση από μια οντολογική κατηγορία σε μια άλλη, Chi, Slotta & De Leeuw (1994).

Αναφερόμενοι στην Πλατωνική θεωρία, παρατηρούμε ότι μαθαίνουμε προχωρώντας με ένα διάλογο Σωκρατικού τύπου. *Στον διάλογο αυτό,* η πραγματική πληροφορία είναι δυνατόν να μεταδοθεί και η σχετιζόμενη με την πληροφορία διανοητική δεξιότητα είναι δυνατόν να αναπτυχθεί, ως ένα τμήμα ενός τελικού στόχου και όλα αυτά να αποτελούν το «Μαθησιακό μπλοκ» ή το «εννοιακό μπλοκ». (“L.B.”)

Είναι δεδομένο ότι, μια έννοια θεωρούμενη ως ο τελικός στόχος, είναι δυνατόν να ορισθεί σαν μια συνένωση περισσοτέρων στοιχειωδών εννοιών. Σε μια δεύτερη ερμηνεία να μπορεί να ορισθεί σαν μια δομή διατεταγμένη σε ακολουθία επιπέδων περιπλοκότητας ή μαθησιακών φάσεων. Η πληροφορία μπορεί να μεταφερθεί σε κάθε επίπεδο με διαφορετικούς τρόπους, προσαρμοσμένη σε διαφορετικές διανοητικές δεξιότητες, έτσι παίρνουμε ένα αριθμό μαθησιακών τροχιών. Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο μαθητής, το δημ. υποκείμενο, χαρακτηρίζεται από ένα «διάνυσμα θέσης», του οποίου οι συνιστώσες ορίζονται από την ταξινόμηση των νοητικών δεξιοτήτων σε κάθε επίπεδο. Για τον έλεγχο δε του επιτεύγματος σε κάθε επίπεδο, εισάγονται μεταξύ των επιπέδων ασκήσεις αξιολόγησης. Πάνω σ’ αυτά βασίζεται η τοποθέτηση του μαθητή στον πίνακα του «L.B.» για να επιτευχθεί η βελτιστοποίηση της μάθησης.

Θεωρώντας ότι, η μάθηση συνίσταται στην απόκτηση νέων εννοιών, από ένα σύνολο στοιχειωδών, ήδη γνωστών εννοιών, τις οποίες θεωρούμε αναγκαίες για την σύνθεση της, οδηγούμεθα στην δόμηση της έννοιας της παραγώγου σε μια διαδικασία κατασκευής ακολουθώντας τα εξής βήματα:

- Πρώτον, βρίσκουμε τις έννοιες που ενυπάρχουν και τους τρόπους σύνδεσης μεταξύ τους, με την μέθοδο της αναδρομικής ανάλυσης.
- Δεύτερον, αναδιατάσσουμε τις έννοιες σε μια σειρά, ώστε να επιτύχουμε πιο εύκολο τρόπο μάθησης.
- Τρίτον, προτείνουμε τον βέλτιστο δρόμο, τον οποίο θα πρέπει να ακολουθήσει ο μαθητής για να έχει, εν προκειμένω, μεγαλύτερη επιτυχία στην δόμηση της έννοιας της παραγώγου.

Θεωρητικό Background

Στοιχεία της θεωρίας των γραφημάτων -Στοιχεία Γλωσσολογίας

Ο Chomsky (1991), ξεχώρισε την βαθιά δομή μιας πρότασης, η οποία αποτελεί όρισμα μιας έννοιας, από την επιφανειακή δομή της πρότασης. Η βαθιά δομή περιέχει όλες τις πληροφορίες που είναι αναγκαίες για την σημασιολογική ερμηνεία μιας πρότασης. Επίσης όρισε ότι, οι μετασχηματιστικοί κανόνες επιδρούν πάνω στη βαθιά δομή μιας πρότασης και παράγουν διαφορετικές επιφανειακές δομές. Έχοντες ως στόχο την διδακτική μετάπλαση της πρότασης, που αποτελεί όρισμα για την έννοια της παραγώγου, επιδρούμε πάνω στη βαθιά δομή της και δημιουργούμε διαφορετικές επιφανειακές δομές.

Για να επιτύχουμε καλύτερο χειρισμό, για την διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου, μετασχηματίζουμε την πρόταση που αποτελεί όρισμα για την έννοια με την μέθοδο της «αναδρομικής ανάλυσης» (Regressive analysis).

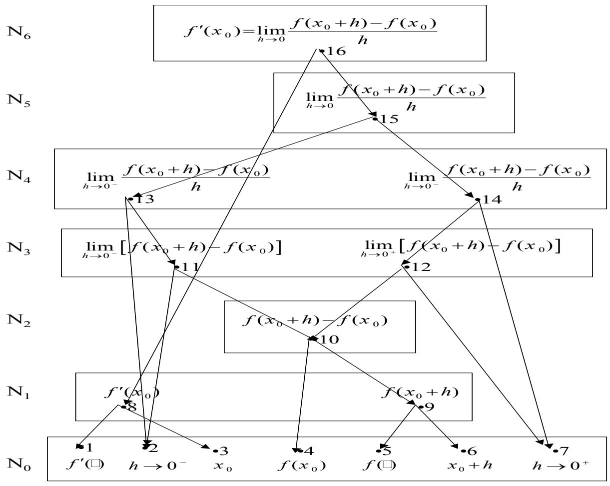
Με την μέθοδο της «αναδρομικής ανάλυσης» διασπάται μια πρόταση που έχει ως όρισμα μια έννοια, σε δύο άλλες προτάσεις, που ορίζουν άλλες έννοιες και αυτό συνεχίζεται στο διηνεκές αλλάζοντας μαθησιακά επίπεδα στο «L.B.». Η διαδικασία αυτή σταματά σε ένα επίπεδο έστω N_0, το επίπεδο βάσης για την έννοια.

Το Ιδεογράφημα της Έννοιας της Παραγώγου

Από την αναδρομική ανάλυση του περιεχομένου της έννοιας της παραγώγου, παίρνουμε μια σειρά εννοιών φθίνουσας περιπλοκότητας, τις οποίες παρουσιάζουμε στην εικόνα 1 και 2 αντίστοιχα. Chomsky (1957)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0							1								
2		0									1		1			
3			0					1								
4				0						1						
5					0				1							
6						0			1							
7							0					1		1		
8								0								1
9									0	1						
10										0	1	1				
11											0		1			
12												0		1		
13													0		1	
14														0	1	
15															0	1
16																0

Διάγραμμα 1



Διάγραμμα 2.

Στο Διάγραμμα 2, παρουσιάζονται τα επίπεδα περιπλοκότητας της έννοιας που ορίζουν το Ιδοεγράφημά της. Κάθε επίπεδο περιέχει ένα σύνολο εννοιών οι οποίες ορίζουν τις συνιστώσες ενός διανύσματος.

Οι βασικές έννοιες στοιχεία του N_0 παρουσιάζονται με το διάνυσμα V = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Kosko (1987). Οι αριθμοί δε οι οποίοι συμβολίζουν τις έννοιες που είναι κυρίως μαθηματικές στο γράφημα το οποίο καλούμε «Ιδεόγραμμα», αποκωδικοποιούνται ως εξής:

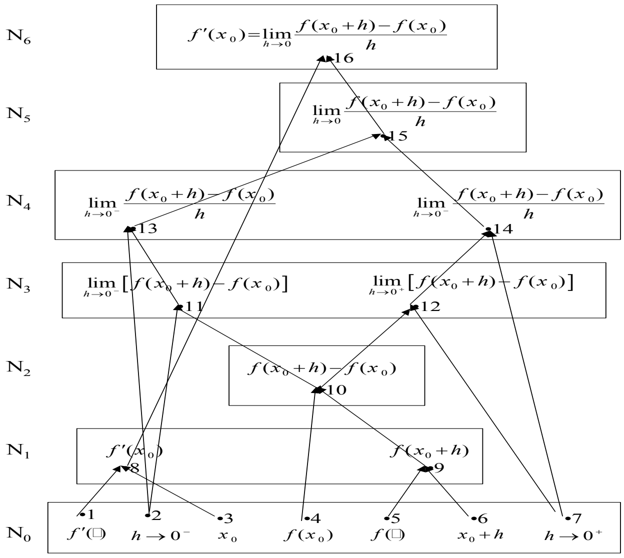
1. Η έννοια της παραγώγου ως συνάρτησης συμβολικά $f'(\bullet)$
2. Η έννοια του απειροστού αριστερά του μηδενός $h \to 0^-$
3. Η έννοια του αριθμού που εκφράζει μια σταθερά x_0
4. Η αριθμητική τιμή συνάρτησης στο x_0. $f(x_0)$
5. Η έννοια της συνάρτησης $f(\bullet)$ [ορισμός κατά Frege]
6. Η έννοια της μεταβλητής x_0+h
7. Η έννοια του απειροστού δεξιά του μηδενός. $h \to 0^+$
8. Συμβολική έκφραση της παραγώγου στο x_0. $f'(x_0)$
9. Η έννοια της αλγεβρικής παράστασης $f(x_o+h)$
10. Διαφορά αριθμητικής από αλγεβρική παράσταση που εκφράζει την διαφορά δύο τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής
11. Αριστερό πλευρικό όριο της διαφοράς τιμών της f στο x_0 $\lim_{h\to 0^-}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]$
12. Δεξιό πλευρικό όριο της διαφοράς τιμών της f στο x_0 $\lim_{h\to 0^+}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]$
13. Αριστερό πλευρικό όριο του λόγου μεταβολών στο x_0 $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
14. Δεξιό πλευρικό όριο του λόγου μεταβολών στο x_0 $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
15. Το όριο του λόγου μεταβολών στο x_0 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
16. Σύνοψη συμβολικά της έννοιας της παραγώγου $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Το «Διδακτογράφημα» της Έννοιας της Παραγώγου

Από διδακτικής σκοπιάς είναι σαφές ότι, η έννοια της μάθησης θα προχωρήσει σε αντίθετη πορεία από τις στοιχειώδεις έννοιες προς την κορυφή του γραφήματος σε μια διαδικασία σύνθεσης. Batens (1992).

Τότε ο μεν πίνακας παραμένει ο ίδιος, όμως στο κατευθυνόμενο γράφημα αλλάζει το διάγραμμα ροής του, συνεπώς τα βέλη κατευθύνονται προς την κορυφή. **Διάγραμμα 3.** Το νέο διάγραμμα είναι το διδακτογράφημα της έννοιας της παραγώγου.

Στο Διάγραμμα 3 έχουμε οργάνωση του δυαδικού δένδρου σε επίπεδα, δηλαδή έχουμε σχηματίσει μια διατεταγμένη ακολουθία υποσυνόλων N_i ως εξής:



Διάγραμμα 3.

Στο Διάγραμμα 3 παρουσιάζεται η σύνθεση της έννοιας της παραγώγου από άλλες έννοιες που τοποθετούνται σε επίπεδα οργάνωσης.

Στο δεδομένο πλαίσιο μάθησης θεωρούμε ότι, η διαδικασία της σύνθεσης είναι η κατασκευή μιας νέας έννοιας από την σύνδεση δύο άλλων εννοιών.

Η νοητική κατάσταση η οποία αποδίδεται με την εικόνα του διαγράμματος 3 είναι νεφελώδης. Αν θέλουμε να ερευνήσουμε ποικίλους τρόπους μάθησης, μας διευκολύνει να κινηθούμε παιδαγωγικά σωστά, ερευνώντας μια συνάρτηση ιεράρχησης του γραφήματος του διαγράμματος 3, στην οποία δεν υπάρχουν κύκλοι.

Όπως ήδη ανεφέρθη, η μάθηση προχωρά με την λογική σύνδεση δύο εννοιών και έτσι κατασκευάζεται μια νέα έννοια, υπό την προϋπόθεση ότι στο γράφημα G δεν υπάρχουν κύκλοι. Συνεπώς είναι αναγκαίο να υπολογισθεί ο αριθμός των δένδρων που προκύπτουν από την αποσύνθεση.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση μια αποσύνθεση δένδρων έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\exists\, !\, Xn \in E \quad : \Gamma^{-}\{Xn\} = 2$

   $\Gamma\{Xn\} = \varnothing$

2. $\forall x_i \in E - \{Xn\} \quad : \Gamma\{Xi\} = 1$. Κάθε γραμμή έχει μια μονάδα (1)

3. $\forall x_i \in E - \{Xn\} \quad : |\Gamma\{x_i\}| \in \{0,2\}$. Κάθε στήλη έχει 0 ή δύο μονάδες (1).

Συμπερασματικά κατά την αποσύνθεση ενός δένδρου, ένα **διάνυσμα** σε ένα δεδομένο επίπεδο, μπορεί να έχει περισσότερα από ένα προηγούμενα, αλλά ένα μόνο επόμενο. Στον πίνακα της εικόνας 1, οι γραμμές 2, 7 και 10 έχουν 2 μονάδες (1) και έτσι δεν ικανοποιείται η δεύτερη ιδιότητα.

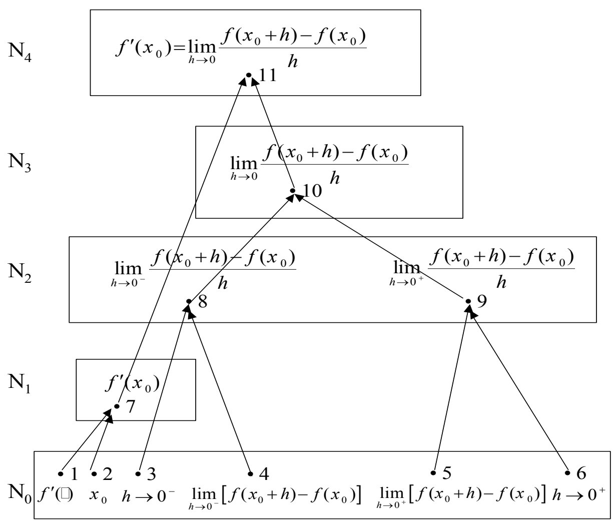
Για να πραγματοποιήσουμε μια αποσύνθεση δένδρου θέτουμε μηδέν (0) στις θέσεις των αριθμών κατάλληλα ώστε στις γραμμές 2, 7, και 10 να έχουμε μονάδα (1) μια φορά μόνο. Επειδή έχουμε να επιλέξουμε μεταξύ δύο μονάδων σε κάθε μία γραμμή από αυτές δημιουργούνται 2^3 δυνατότητες. Οι οκτώ (8) αυτές δυνατότητες αντιστοιχούν στα οκτώ δένδρα αποσύνθεσης που αποδίδονται στα H_i γραφήματα με $1 \leq i \leq 8$.

Τελικά, σε μια αποσύνθεση δυαδικού δένδρου, σε κάθε γραμμή να μην περιέχεται μονάδα (1) περισσότερες από μία φορές, αλλά και σε κάθε στήλη πρέπει να έχουμε μηδέν ή δύο φορές την μονάδα αλλιώς η στήλη καταργείται.

Έτσι κατά την εξέλιξη της διδασκαλίας από επίπεδο σε επίπεδο, αν ένα διάνυσμα δεν πληροί τις προηγούμενες συνθήκες, όλα τα διανύσματα που είναι επακόλουθα αυτού δεν αποτελούν τμήματα του δυαδικού δένδρου που ξεκινάει από το N_0.

Το επίπεδο N_0, εκφράζει την βασική γνώση και τις δεξιότητες και αποτελεί επίπεδο αναφοράς για την διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου. Αν βέβαια το N_0 είναι υψηλό, τότε οι υπηρεσίες της κοινωνίας της νόησης έχουν λιγότερο έργο να επιτελέσουν για να γίνει η σύνθεση της έννοιας της παραγώγου. Έτσι ο διδακτικός σχεδιασμός για να έχει αποτέλεσμα θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη το επίπεδο βάσης N_0, που εκφράζει την προϋπάρχουσα γνώση του μαθητή.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν αναλύσουμε την έννοια της παραγώγου, σε ένα επίπεδο N_0 σχετικά υψηλών προδιαγραφών, επειδή θεωρείται ότι, αποτελεί την βάση της γνώσης για ένα μαθητή είτε μια μαθητική ομάδα, μετά από τον έλεγχο κάποιων σχετικών test αξιολόγησης, η διδακτική στρατηγική είναι μια απλή διαδικασία σύνθεσης από τις στοιχειώδεις έννοιες προς την κορυφή του γραφήματος. Το «διδακτογράφημα» που καθορίζει ένα σχέδιο μαθήματος και ορίζει την διδακτική τροχιά, είναι ένα δυαδικό δένδρο, το οποίο εύκολα δομείται όπως φαίνεται στο διάγραμμα 4.



Διάγραμμα 4.

Στο διάγραμμα 4 παρουσιάζεται η σύνθεση της έννοιας της παραγώγου από άλλες έννοιες σε επίπεδα οργάνωσης από ένα πιο υψηλότερο επίπεδο N_0.

Κατασκευή Δυαδικού Δένδρου αποσύνδεσης με βάση N_0

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε τις πρώτες αποσυνθέσεις δυαδικών δένδρων. Στην εικόνα 4 έχουμε αναπαράξει τον πίνακα της εικόνας 1, στον οποίο έχουμε θέσει ένα (x) στις αμφισβητούμενες γραμμές 2, 7 και 10. Κάτω από τον πίνακα είναι 8 γραμμές που περιέχουν αντίστοιχα τις τιμές που θα πάρουν τα μονοπάτια για κάθε μία από τις οκτώ (8) δυνατότητες των δένδρων αποσύνθεσης Lipschutz (1992, Liu (1985):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0							1								
2		0									X		X			
3			0					1								
4				0						1						
5					0				1							
6						0			1							
7							0					X		X		
8								0								1
9									0	1						
10										0	X	X				
11											0		1			
12												0		1		
13													0		1	
14														0	1	
15															0	1
16																0

	2 → 11	2 → 13	7 → 12	7 → 14	10 → 11	10 → 12
1	1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0	1
3	1	0	0	1	1	0
4	1	0	0	1	0	1
5	0	1	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0	1
7	0	1	0	1	1	0
8	0	1	0	1	0	1

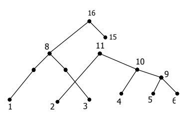
Διάγραμμα 5

Ας εστιάσουμε την προσοχή μας στην πρώτη γραμμή του πλαισίου που δίνει το σύνολο των τιμών που αντιστοιχεί στο γράφημα H_1 της εικόνας 5 και ας εφαρμόσουμε τους προηγούμενους κανόνες.

Θέτοντας τις αντίστοιχες τιμές στην θέση των (x) κατασκευάζουμε τον πίνακα της εικόνας 5. Ο πρώτος κανόνας πληρείται, όλες οι γραμμές περιέχουν μόνο μια φορά την μονάδα (1), αλλά όλες οι στήλες δεν έχουν δύο φορές την μονάδα (1). Διαγράφουμε τις στήλες και τις γραμμές από τον πίνακα, οι οποίες δεν έχουν στις στήλες δύο φορές την μονάδα, επειδή τα αντίστοιχα διανύσματά τους είναι εκτός κανόνα. Έτσι, εν προκειμένω, διαγράφουμε τις στήλες και γραμμές 12, 13 και 14. Πράττοντας έτσι οι στήλες 7 και 15 και οι γραμμές 7 και 4 έχουν μόνο μηδενικά, έτσι τις διαγράφουμε ως μη παρεμβαίνουσες στο σύστημα.

	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	16
1	0						1				
2		0								1	
3			0				1				
4				0					1		
5					0			1			
6						0		1			
8							0				1
9								0	1		
10									0	1	
15										0	1
16											0

(2)



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0							1								
2		0									1					
3			0					1								
4				0						1						
5					0				1							
6						0			1							
7							0					1				
8								0								1
9									0	1						
10										0	1					
11											0		1			
12												0		1		
13													0		1	
14														0	1	
15															0	1
16																0

(1)

Διάγραμμα 6

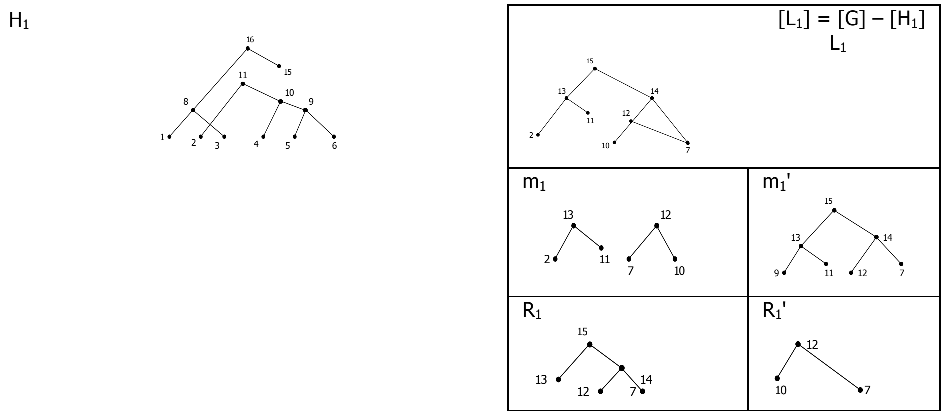
Έτσι προκύπτει ο πίνακας (2) του διαγράμματος 6 και κατασκευάζεται το γράφημα H_1.

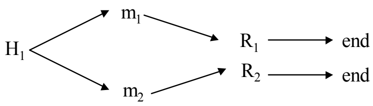
Χρησιμοποιώντας τον ίδιο αλγόριθμο για όλες τις δυνατές περιπτώσεις που υπάρχουν στην εικόνα 5 επιτυγχάνονται οι λύσεις οι οποίες συρρικνώνονται στις έξι διαφορετικές H_1, H_2, H_3, H_4, H_6, H_7. Στα έξι διαφορετικά γραφήματα αντιστοιχούν οι έξι πίνακες $[H_i]$, i = 1, 2, 3, 4, 6, 7.

Ακολούθως δημιουργούμε τους πίνακες $[L_i]$, ως εξής: $[L_i] = [G] – [H_i]$, οι οποίοι αντιστοιχούν στα γραφήματα L_i.

- Με την προηγούμενη διαδικασία υπολογίζουμε όλα τα δυαδικά δένδρα που είναι δυνατά για κάθε πίνακα.
- Από τις αποσυνθέσεις δε των νέων δυαδικών δένδρων εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο παίρνουμε νέες παράγωγες, ώστε με την ομαδοποίηση των αποτελεσμάτων να οργανώσουμε όλους τους τρόπους με τους οποίους η μαθησιακή διαδικασία μπορεί να προχωρήσει, Liu (1985):

Η διαδικασία παρουσιάζεται σχηματικά για κάθε περίπτωση:

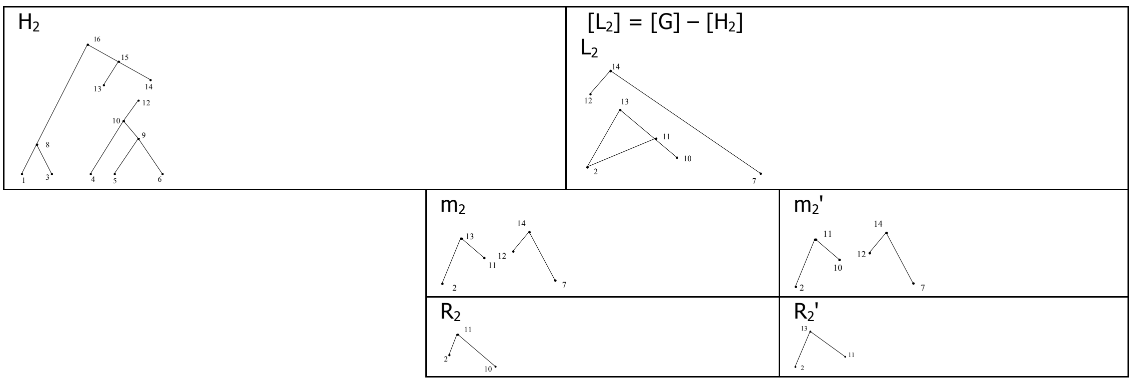




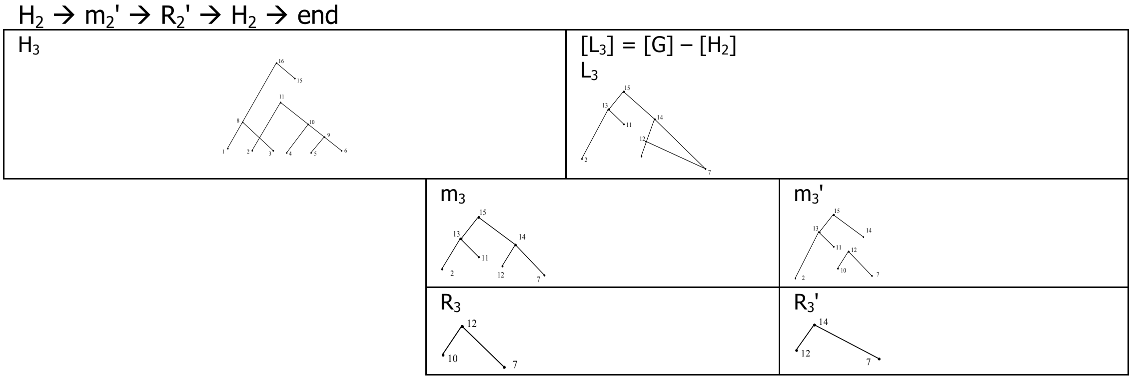
Ανάλυση διδακτικής διαδικασίας:

Μια διδακτική πορεία ξεκινά με την δόμηση της έννοιας 9 από τις έννοιες 5 και 6. Με την βοήθεια της 9 και των 4 δομείται η 10, η οποία με την έννοια 2 του N_0 δομεί την 11.

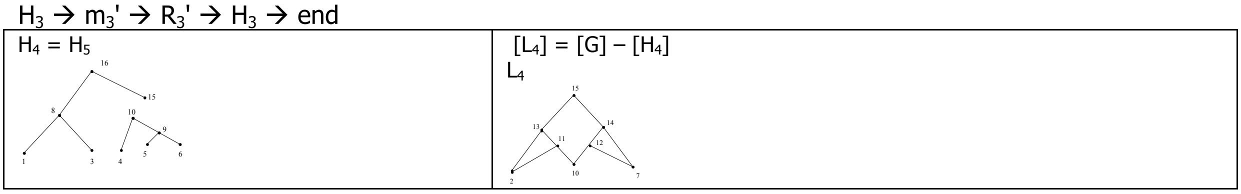
- Μέσω του σταδίου m_1 κατασκευάζονται οι έννοιες 13 και 12
- Μέσω του σταδίου R_1 κατασκευάζονται οι έννοιες 14 και 15 οπότε επιστρέφοντας στο γράφημα H_1 με την κατασκευή της 8 φτάνουμε στην κατασκευή της τελικής έννοιας 16.
- Ανάλογη είναι και η πορεία που ακολουθείται και με την δεύτερη διαδικασία.

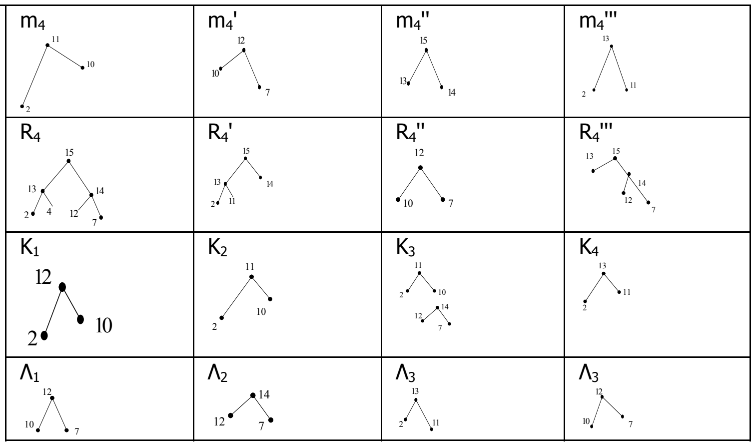


$H_2 \rightarrow m_2 \rightarrow R_2 \rightarrow H_2 \rightarrow$ end
$H_2 \rightarrow m_2' \rightarrow R_2' \rightarrow H_2 \rightarrow$ end



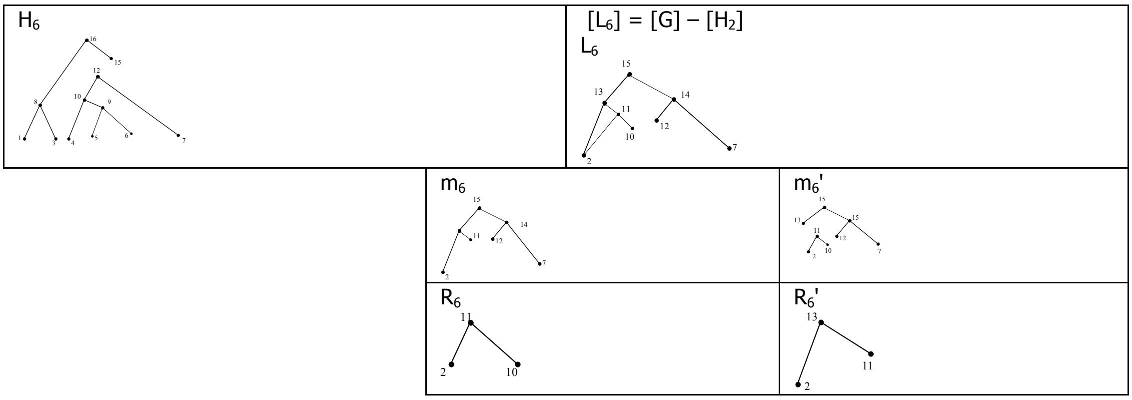
$H_3 \rightarrow R_3 \rightarrow m_3 \rightarrow H_3 \rightarrow$ end
$H_3 \rightarrow m_3' \rightarrow R_3' \rightarrow H_3 \rightarrow$ end



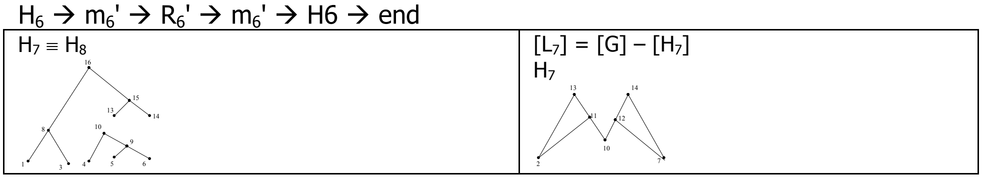


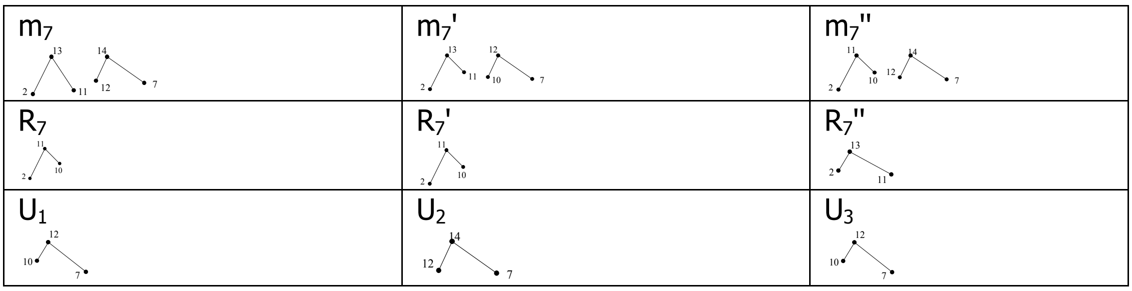
$H_4 \rightarrow m_4 \rightarrow K_1 \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow R_4 \rightarrow H_4 \rightarrow$ end
$H_4 \rightarrow m_4' \rightarrow K_2 \rightarrow \Lambda_2 \rightarrow R_4' \rightarrow H_4 \rightarrow$ end
$H_4 \rightarrow R_4'' \rightarrow K_3 \rightarrow \Lambda_3 \rightarrow m_4'' \rightarrow H_4 \rightarrow$ end
$H_4 \rightarrow \Lambda_3 \rightarrow R_4''' \rightarrow K_4 \rightarrow R_4'' \rightarrow m_4$;;; $\rightarrow H_4 \rightarrow$ end

Παρουσιάζονται ορισμένες στρατηγικές που είναι δυνατόν να αναπτυχθούν κατά την εξέλιξη μιας διδασκαλίας.



$H_6 \rightarrow R_6 \rightarrow m_6 \rightarrow H_6 \rightarrow$ end
$H_6 \rightarrow m_6' \rightarrow R_6' \rightarrow m_6' \rightarrow$ H6 $\rightarrow$ end





$H_8 \rightarrow R_7 \rightarrow U_1 \rightarrow m_7 \rightarrow H_7 \rightarrow$ end
$H_8 \rightarrow R_7' \rightarrow m_7' \rightarrow U_2 \rightarrow H_7 \rightarrow$ end
$H_8 \rightarrow U_3 \rightarrow R_7'' - m_7'' \rightarrow H_8 \rightarrow$ end

Παρουσιάστηκαν ενδεικτικά στοιχεία διδακτικών στρατηγικών. Η δημιουργικότητα κάθε δασκάλου ορίζει συγκεκριμένο πρόγραμμα οργάνωσης των υποπρογραμμάτων, τα οποία ορίζονται από τα γραφήματα και χαράζει δική του στρατηγική. Ανάλογα με τη διδακτική στρατηγική, ο μαθητής οργανώνει στρατηγικές μάθησης κατά αντιστοιχία. Η λήψη ενός στοιχείου από το πλήθος των δυνατών συνδυασμών, οι οποίοι ορίζουν διδακτικές στρατηγικές είναι προσωπική υπόθεση των διδασκόντων και αποτελεί χαρακτηριστικό του διδακτικού σχεδιασμού τους. Επίσης οι μαθητές χαρακτηρίζονται για το συγκεκριμένο στυλ στρατηγικών μάθησης, το οποίο έχουν κατά περίπτωση, κατά τη δόμηση της γνώσης της έννοιας της παραγώγου.

Συμπέρασμα

Η ανάλυση της έννοιας της παραγώγου, σε έννοιες φθίνουσας περιπλοκότητας που διατάσσονται σε επίπεδα, με τη μέθοδο της «αναδρομικής» ανάλυσης είναι απαραίτητη. Αυτό ισχύει επειδή η ανάλυση αυτή οδηγεί σε ένα επίπεδο βασικής γνώσης N_0. Η γνώση του επιπέδου «βασικής γνώσης» αποτελεί προϋπόθεση για την ομαδοποίηση των μαθητών που έχουν το ίδιο επίπεδο N_0. Ανάλογα με το επίπεδο «βασικής γνώσης» οργανώνεται η αντίστροφη πορεία της σύνθεσης της έννοιας από τις έννοιες του N_0. Η δυσκολία της σύνθεσης μεγαλώνει όσο το επίπεδο βασικής γνώσης N_0 χαμηλώνει. Οι στρατηγικές διαφοροποιούνται και η δράση τους στη βαθιά δομή των προτάσεων, που αποτελούν όρισμα για την έννοια της παραγώγου, παράγουν διαφορετικές επιφανειακές δομές. Η ουσία όμως είναι ότι εσωτερικεύεται η βαθιά δομή των προτάσεων που έχουν ως όρισμα την έννοια της παραγώγου στο νοητικό σύστημα μόνο όταν η σύνθεσή της ξεκινά από το N_0.

Η γνώση του επιπέδου N_0, που αποτελεί το επίπεδο της «βασικής» γνώσης, είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την οργάνωση διδακτικής στρατηγικής από τον δάσκαλο.

Για τη σύνθεση της έννοιας της παραγώγου από άλλες έννοιες που βρίσκονται στα επίπεδα οργάνωσης της σκέψης N_i, i= 0, 1, 2, …, αποδεχόμαστε την ισχύ της θεωρίας των Van Hiele όπως την διαχειρίζεται ο Usiskin.

Η σειρά με την οποία οι μαθητές κατακτούν τα επίπεδα σκέψης είναι αναλλοίωτα για όλους. Με άλλα λόγια ένας μαθητής δεν μπορεί να βρεθεί στο επίπεδο N_n, αν δεν έχει περάσει από το επίπεδο N_{n-1}.

- Σε κάθε επίπεδο οργάνωσης της σκέψης παρατηρείται ότι, εκείνο που στο προηγούμενο επίπεδο ήταν εξωγενές, στο παρόν επίπεδο γίνεται εγγενές.
- Κάθε επίπεδο οργάνωσης της σκέψης, έχει τα δικά του σύμβολα και το δικό του δίκτυο σχέσεων, που συσχετίζουν αυτά τα σύμβολα.
- Δύο υποκείμενα που συζητούν από διαφορετικά επίπεδα σκέψης δεν επικοινωνούν.

Υπογραμμίζεται ότι, δεν έγινε ειδική μνεία για τις ιδιαιτερότητες της συντακτικής ανάλυσης, σχετικά με την έρευνα του παραγωγικού συμπερασμού και θέματα στρατηγικής.

Η έρευνα βασίζεται στο χωρισμό των μαθητών σε ομάδες ανάλογα με το επίπεδο της βασικής γνώσης που βρίσκονται, Bachelard (1965).

Η διδακτική στρατηγική βασίζεται στις ιδιότητες του πυρήνα ενός γραφήματος, και την δημιουργικότητα του Διδάσκοντα να αυτοσχεδιάζει εμπειρικά.

Η ανάλυση δε της ικανότητας επιλογής στρατηγικής από τους μαθητές αλλά και από τους διδάσκοντες ανάγεται σε ένα πρόβλημα ανάλυσης όλων των δυνατών δρόμων ενός γραφήματος.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, η θεωρία των γραφημάτων είναι ο κύριος μοχλός στήριξης της διδακτικής δημιουργικότητας.

Βιβλιογραφία

Bachelard G., (1965), La formation de l’esprit scientifique, ed. J. Vrin.

Batens Diderik, (1992), Menselijke kennis-Pleidooi voor een brukbare rationaliteit, © D. Batens en Garant Uitgevers n.v.

Chevallard Yves et Marie Johsua A., (1991), A transposition didactique, éditions de la pensée Sauvage, ed.

Chomsky Noam, (1991), Συντακτικές Δομές, Μτφρ. Καβουκόπουλος, Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα.

Elements of Discrete Mathematics, 2^{nd} edition, © by McGraw-Hill Inc. © 1985.
Gould R., (1988), Graph Theory, Bejamin Co.
Kosko Bart-Andrew, PhD University of California, Irvine 1987.
Lipschutz S., Lipson M., Discrete Mathematics, McGraw-Hill inc.
Minsky M., (1998), The Society of Mind, Simon & Schuster, Inc..
Vergnaud G., (1991), “La théorie des champs conceptuels”, Recherches en Didactique des Mathématiques, no. 6, Vol. no. 2.3.