Σχεδιασμός και ανάλυση διδακτικών καταστάσεων πολλαπλασιαστικών δομών στο νηπιαγωγείο

Μαρία Καλδρυμίδου[1], Κατερίνα Καπέλου[2], Μαριάνα Τζεκάκη[3]

[1]Παν/μιο Ιωαννίνων, mkaldrim@cc.uoi.gr

[2]Νηπιαγωγός, Δρ. ΤΕΠΑΕΣ, Παν/μιο Αιγαίου, kapelou@rhodes.aegean.gr

3ΑΠΘ, tzekaki@nured.auth.gr

Περίληψη

Η εργασία αυτή διαπραγματεύεται το σχεδιασμό και την πραγματοποίηση ενός προγράμματος δραστηριοτήτων για την προσέγγιση των πρώτων πολλαπλασιαστικών εννοιών και σχέσεων σε παιδιά προσχολικής ηλικίας. Οι διδακτικές καταστάσεις αναλύονται ως προς το μαθηματικό νόημα που αναδεικνύεται με βάση το σχεδιασμό τους και εξετάζονται ως προς τη λειτουργία τους με βάση τη μαθηματική συμπεριφορά των παιδιών.

Λέξεις κλειδιά

Αριθμητικές έννοιες, Πολλαπλασιαστικές σχέσεις, Διδακτικές καταστάσεις, Νηπιαγωγείοι

Εισαγωγή

Η εργασία αυτή μελετά και αναλύει διδακτικά δεδομένα που προέρχονται από μια ευρύτερη έρευνα (Καπέλου, 2004, Καπέλου & Καλδρυμίδου, 2003) που πραγματοποιήθηκε με στόχο τη διερεύνηση της δυνατότητας των παιδιών προσχολικής ηλικίας (5-5.30 χρόνων) να αντιληφθούν την έννοια του πολλαπλασιασμού. Η έρευνα μελέτησε ευρύτερα την επίδραση της ανάπτυξης των πολλαπλασιαστικών δομών στις αντιλήψεις των παιδιών για τις αριθμητικές έννοιες και τις αριθμητικές σχέσεις.

Συγκεκριμένα, θα παρουσιασθούν τα κριτήρια με τα οποία σχεδιάσθηκε το προγράμμα δραστηριοτήτων για την προσέγγιση των πρώτων πολλαπλασιαστικών εννοιών και θα εξετασθεί η μαθηματική συμπεριφορά των μαθητών κατά την εφαρμογή τους στην τάξη.

Θεωρητικό Πλαίσιο

Το πλαίσιο προσέγγισης των φυσικών αριθμών στο Νηπιαγωγείο

Η πρώτη αρίθμηση και οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν ένα από τα βασικά στοιχεία του προγράμματος των Μαθηματικών στην προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία (4-8 ετών) και για το λόγο αυτό οι περισσότερες έρευνες σχετικά με την εξέλιξη της σκέψης και της ανάπτυξης των παιδιών σχετίζονται με τους αριθμούς, (J. Bideaud et al., 1991). Ο τρόπος με τον οποίο τα παιδιά αντιλαμβάνονται και κατασκευάζουν τις αριθμητικές έννοιες αποτελεί από χρόνια πεδίο έντονης επιστημονικής διαμάχης. Η παρουσίαση των διαφορετικών απόψεων για το ζήτημα δεν αποτελεί περιεχόμενο της εισήγησης αυτής, ωστόσο είναι απαραίτητο να επισημανθούν τα εξής στοιχεία σχετικά με την ανάπτυξη των αριθμητικών εννοιών:

Η πλειοψηφία των ερευνών αναφορικά με την προσέγγιση της έννοιας του φυσικού αριθμού στην προσχολική ηλικία (4-6 ετών) εστιάζονται στην πληθική και τακτική φύση των αριθμών (Fuson, 1988). Έτσι, ένα μεγάλο μέρος των προγραμμάτων σπουδών για τις πρώτες αριθμητικές έννοιες στο Νηπιαγωγείο επικεντρώνεται σ' αυτά τα δύο χαρακτηριστικά των φυσικών αριθμών, δίνοντας σχεδόν αποκλειστική έμφαση στις προσθετικές σχέσεις και δομές.

Σημαντικός αριθμός ερευνών έχει δείξει πώς τα παιδιά του νηπιαγωγείου μπορούν να αντιληφθούν τις προσθετικές σχέσεις, αν οι ποσότητες που χειρίζονται αναφέρονται σε μικρούς αριθμούς και σε πραγματικά αντικείμενα (Starkey & Gelman 1982, Starkey 1983, Fuson 1988, Hughes 1996).

Είναι γενικότερα αποδεκτό ότι η έννοια του αριθμού σχηματίζεται βαθμιαία μέσα από κατάλληλες δραστηριοτήτες, οι οποίες από τη μία πλευρά συνδυάζουν τις διαφορετικές λειτουργίες του στον πραγματικό κόσμο (προφορική αρίθμηση, μέτρηση, αναγνώριση συμβόλων, αναγνώριση ποσοτήτων κ.λ.π.). και από την άλλη επιτρέπουν το πέρασμα από τη δράση με τα πραγματικά αντικείμενα στις αναπαραστάσεις και το συμβολισμό. Το πέρασμα αυτό προϋποθέτει μια νοητική εξέλιξη χωρίς την ύπαρξη της οποίας το αριθμητικό σύμβολο μένει κενό περιεχομένου (Τζεκάκη 2000).

Ανεξάρτητα από την την υποκείμενη θεωρία μάθησης για τις αριθμητικές έννοιες, πολλά πρόγραμμα σπουδών πρότειναν μέχρι πρόσφατα σχεδόν αποκλειστικά προσθετικά προβλήματα και καταστάσεις. Τα τελευταία όμως χρόνια τα νέα προγράμματα ολοκληρώνουν την προσέγγιση των φυσικών αριθμών με την εισαγωγή και των πολλαπλασιαστικών αριθμητικών σχέσεων, αναγνωρίζοντας ότι οι προσθετικές και οι πολλαπλασιαστικές δομές αποτελούν τα βασικά στοιχεία της ανάπτυξης του εννοιολογικού πλαισίου της πρώτης αρίθμησης.

Είναι γνωστό ότι η εισαγωγή των αριθμητικών εννοιών στο Νηπιαγωγείο, τουλάχιστον με το παρόν πρόγραμμα σπουδών, γίνεται χωρίς την επέκταση σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις οι οποίες εισάγονται ουσιαστικά στη Β' Δημοτικού, όπου μπορεί να θεωρηθεί ότι ολοκληρώνεται το εννοιολογικό πλαίσιο των αριθμών.

Το βασικότερο ερώτημα που προκύπτει για την επιλογή αυτή είναι κατά πόσο η προσέγγιση των αριθμητικών εννοιών σε ένα περιορισμένο εννοιολογικό πλαίσιο έχει επιπτώσεις στην ανάπτυξη και κατανόηση των φυσικών αριθμών. Για το λόγο αυτό κρίνεται σημαντικό να μελετηθεί αν η προσέγγιση των αριθμητών εννοιών στην προσχολική ηλικία μπορεί να συμπεριλάβει και στοιχεία πολλαπλασιαστικών σχέσεων Προκειμένου να μελετηθεί η δυνατότητα αυτή σχεδιάστηκε και αναλύεται μια διδακτική προσέγγιση που προτείνει πολλαπλασιαστικά προβλήματα σε παιδιά ηλικίες 5-6 χρόνων.

Η έρευνα γύρω από τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις και δομές

Οι περισσότερες έρευνες που σχετίζονται με την μελέτη και την κατασκευή πολλαπλασιαστικών δομών αφορούν παιδιά της πρώτης σχολικής ηλικίας. (Vergnaud 1983, Steffe 1994, Yamanoshita & Matsushita 1996, Schwartz 1988, Μπούφη 1996).

Σε μια πρώτη προσέγγιση η Steffe (1994) υποστηρίζει ότι η κατασκευή των πολλαπλασιαστικών σχημάτων αποτελεί εξέλιξη στην πορεία ανάπτυξης της πρώτης αρίθμησης, δεδομένου ότι η αρίθμηση εξελίσσεται προοδευτικά για να συμπεριλάβει σύνθετες μονάδες. Και αυτό γιατί, σύμφωνα με τη συγγραφέα, τα παιδιά πετυγχαίνουν μια αρχική αντίληψη των πολλαπλασιαστικών δομών όταν, μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες, αναγνωρίζουν τις σύνθετες μονάδες ως «ένα όλο» το οποίο ωστόσο περιέχει τον συγκεκριμένο αριθμό διακριτών αντικειμένων.

Μια διαφορετική προσέγγιση των πολλαπλασιαστικών σχημάτων μπορούν να επιτύχουν τα παιδιά πρώτης σχολικής ηλικίας με δραστηριότητες «τελεστή κλίμακας» (Vergnaud 1983, Nesher 1988, Schwartz 1988).

Ο «τελεστής κλίμακας» είναι ο λόγος δύο μεγεθών ($M_1 : M_2$) και έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Λειτουργεί ως «μηχανή» μετασχηματισμού μιας ποσότητας σε μία άλλη (multiplying factor) (Yamanoshita & Matsushita,1996).
- Ενεργεί σε φυσικούς αριθμούς και έχει ως αποτέλεσμα πάντα φυσικούς αριθμούς.
- Δεν αλλάζει την φύση του μεγέθους αλλά το το μέγεθος της ποσότητας στην οποία ενεργεί (Schwartz,1988).
- Είναι ποσότητα χωρίς διαστάσεις (Nesher, 1988, Vergnaud, 1983).

Η προσέγγιση των αριθμητικών εννοιών στην πρώτη παιδική ηλικία μέσα από καταστάσεις και διαδικασίες τελεστών αποτέλεσε και το πλαίσιο των πρώτων ερευνητικών προσπαθειών για την πρώιμη διδακτική εισαγωγή των πολλαπλασιαστικών σχέσων (Hunting & Davis, 1991, Cobb et al., 1996). Για το λόγο αυτό, η προσέγγιση του φυσικού αριθμού ως τελεστή και από παιδιά της προσχολικής ηλικίας, παρουσιάζει ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον. Ο σχεδιασμός και η εφαρμογή κατάλληλων διδακτικών καταστάστεων έδειξε ερευνητικά πως παιδιά ηλικίας 5-6 χρόνων είναι σε θέση να προσεγγίσουν τις πολλαπλασιαστικές δομές και με τον τρόπο αυτό να διευρύνουν την αντίληψή τους για την έννοια του αριθμού (Καλδρυμίδου & Καπέλου, 2003, Καπέλου, 2004).

Σχεδιασμός διδακτικής προσέγγισης

Ο σχεδιασμός της διδακτικής προσέγγισης στηρίχθηκε:

- Στη οργάνωση ενός διδακτικού περιβάλλοντος με βάση τη θεωρία της κοινωνικο-γνωστικής προσέγγισης που δίνει έμφαση στο ρόλο των λέξεων, των αναπαραστάσεων και του συμβολικού παιχνιδιού ως διαμεσολαβητές στην ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών (Vygotsky, 1978).
- Στη θεωρία των διδακτικών καταστάσεων (Brousseau, 1996) που δίνει έμφαση στην οργάνωση δραστηριοτήτων με βάση το μαθηματικό περιεχόμενο και την εκχώρηση από τη μεριά του εκπαιδευτικού της ευθύνης ανάδειξης της νέας γνώσης στους μαθητές. Με άλλα λόγια, τα ίδια τα παιδιά ανακαλύπτουν τις μαθηματικές αλήθειες και πρακτικές ενώ ο δάσκαλος έχει μόνο ρόλο «καθοδηγητή» ή «διαμεσολαβητή» στις αναζητήσεις των παιδιών.

Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με τη μορφή παιγνιδιού ή μικρής ιστορίας, με ένα σενάριο που να ανταποκρίνεται στα ενδιαφέροντα των παιδιών και τις καθημερινές τους εμπειρίες (Renshaw 1992, Van Oers 1996). Ο ρόλος του παιχνιδιού είναι ιδιαίτερα σημαντικός, γιατί επιτρέπει στο παιδί να δράσει και έτσι η μάθηση στηρίζεται στις προσεγγίσεις που κάνουν τα ίδια τα παιδιά στα νοήματα και τις αναπαραστάσεις, ιδιαίτερα, αν από την πλευρά του δασκάλου, τίθενται ερωτήσεις που προκαλούν τα παιδιά να σκέφτονται για την ορθότητα των μαθηματικών πράξεων, συμβόλων και σημασιών που χρησιμοποίησαν. Απαραίτητη προυποθέση για την καταλληλότητα των προτεινόμενων παιχνιδιών, εκτός από το μαθηματικό περιεχόμονο, αποτελεί το γεγονός ότι οι προς μάθηση ενέργειες πρέπει να είναι λειτουργικές και αναπτυξιακά παραγωγικές για τα παιδιά (Van Oers,1996).

Από την πλευρά του μαθηματικού περιεχομένου, οι δραστηριότητες που δόθηκαν για την προσέγγιση των πολλαπλασιαστικών δομών στα νήπια στηρίχθηκαν τόσο στις ερευνητικές απόψεις για την προσέγγιση των «σύνθετων μονάδων» αρίθμησης όσο και στην αντίληψη των «τελεστών».

Συγκεκριμένα προτάθηκαν:

- Καταστάσεις προσέγγισης σύνθετων μονάδων.
- Καταστάσεις στις οποίες ζητείται το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είτε ο ένας παράγοντας του γινομένου (του τύπου ExA όπου E: εξαρτημένη ποσότητα και A: ανεξάρτητη ποσότητα), και
- Καταστάσεις στις οποίες ο ένας παράγοντας λειτουργεί ως τελεστής και ζητείται το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού (του τύπου SxA, όπου S:τελεστής κλίμακας και A:ανεξάρτητη ποσότητα).

Οι δραστηριότητες ενέπλεκαν αριθμούς μέχρι το 10, και κατά συνέπεια χρησιμοποιήθηκαν ως έννοιες τα ζεύγη, οι τριάδες, τετράδες και ως τελεστές οι διπλασιασμοί και τριπλασιασμοί μικρών ποσοτήτων.

Πιο αναλυτικά οι δραστηριότητες-διδακτικές καταστάσεις οργανώθηκαν ως εξής:

1. Σύνθετες μονάδες:

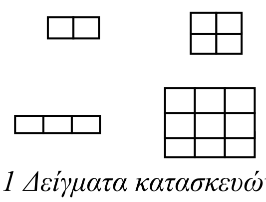
Τα μέλη του σώματος: Πρώτη προσέγγιση σύνθετης μονάδας με εισαγωγή του όρου «ζευγάρι» και βιωματική δραστηριότητα αναγνώρισης των μελών του σώματος που είναι ζευγάρια.

Ζεύγη με γάντια: Δραστηριότητα επεξεργασίας σύνθετων μονάδων, οργάνωση ποσοτήτων με τη σύνθετη μονάδα «ζεύγος» και καθορισμός σχέσεων μεταξύ του πλήθους της συνολικής ποσότητας και πλήθους σύνθετων μονάδων.

Με σενάριο 4 πλαστικά πλαστικά ανθρωπάκια που έπρεπε να ντυθούν καλά για το κρύο, τα παιδιά έπρεπε να βρούν πόσα γάντια χρειάζονταν 1, 2 ή 3 παιδιά και αντίστροφα, πόσα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν 2, 4 ή 6 γάντια

2. Πολλαπλασιασμοί του τύπου ExA

Ραβδάκια και κουτιά: Δραστηριότητα προσέγγισης της επανάληψης δυάδων, τριάδων ή τετράδων Lego για κατασκευές όπως φαίνεται στο σχήμα 1 και εύρεσης του συνόλου των κομματιών που είναι απαραίτητα για τις κατασκευές.

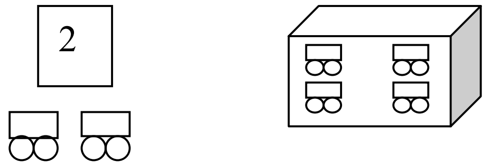


σχ. .1 Δείγματα κατασκευών με κύβους Lego

3. Ο αριθμός ως τελεστής.

Μαγικό Κουτί: Δραστηριότητα εύρεσης του συνόλου των αντικειμένων που προκύπτει από την επανάληψη 2, 3 και 4 φορών δυάδων, τριάδων ή τετράδων αντικειμένων.

Η δραστηριότητα έχει τη μορφή παιχνιδιού όπου τα παιδιά πρέπει να υπολογίσουν πόσα αντικείμενα βρίσκονται μέσα στο αδιαφανές κουτί (αν μετρηθούν ένα – ένα), συνδυάζοντας μια αριθμητική κάρτα που δείχνει τον αριθμό των ζευγών, τριάδων ή τετράδων των αντικειμένων με τα ζεύγη, δυάδες ή τετράδες των αντικειμένων που τους δίνονταν ως μονάδες για την μέτρηση.



(σχ. 2 «μαγικό κουτί»)

Για παράδειγμα, αν η κάρτα έχει τον αριθμό 2, και υπάρχει ως μονάδα για μέτρηση ένα ζευγάρι (ή μια τριάδα) αυτοκινήτων, τότε η σωστή απάντηση είναι: «δύο ζεύγη (ή τριάδες) αυτοκινήτων ή 4 (ή 6) αυτοκίνητα».

Η οδηγία που δίνεται είναι: «Η κάρτα με τον αριθμό δείχνει πόσα ζευγάρια, τριάδες ή τετράδες υπάρχουν μέσα στο κουτί. Προσπάθησε να βρείς πόσα ζεύγη, τριάδες ή τετράδες είναι μέσα στο κουτί και πόσα είναι τα αντικείμενα, αν μετρηθούν ένα-ένα». Η δραστηριότητα πραγματοποιήθηκε με ομάδες παιδιών όπου κέρδιζε η ομάδα που έδινε τις περισσότερες σωστές απαντήσεις.

Ανάλυση της διδακτικής προσέγγισης

Η διδακτική προσέγγιση, ο σχεδιασμός της οποίας περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο, πραγματοποιήθηκε σε 3 Νηπιαγωγεία στη Νέα Ιωνία και το Ηράκλειο Αττικής. Συμμετείχαν 66 νήπια, ηλικίας 5 έως 6 ετών. Τα νήπια γνώριζαν τους αριθμούς μέχρι το 10, σύμφωνα με το ΑΠ του Νηπιαγωγείου.

Ο ρόλος της νηπιαγωγού-ερευνήτριας ήταν κυρίως διαχειριστικός και οι παρεμβάσεις αφορούσαν:

- Την εισαγωγή και επισημοποίηση του όρου «ζευγάρι» (σημεία 6-7)
- Τη διατύπωση των ερωτήσεων στις οποίες έπρεπε να απαντήσουν τα παιδιά

Αναφέρθηκε ήδη ότι ως πρώτο κεντρικό ζήτημα στην προσέγγιση των πολλαπλασιαστικών σχέσεων θεωρείται το να αντιληφθούν τα παιδιά τις σύνθετες μονάδες αρίθμησης οι οποίες γίνονται αντιληπτές αντιληπτές ως ένα όλο. Η ανάλυση της διδακτικής προσέγγισης που πραγματοποιήθηκε καταδεικνύει ότι η αντίληψη των δύο αντικειμένων (γάντια, ραβδάκια) ως ένα αντικείμενο δεν είναι προφανής και αποτελεί πηγή δυσκολιών για τα παιδιά (σημεία 10, 14). Τα παιδιά συγχέουν το πλήθος των αντικειμένων με το πλήθος των σύνθετων μονάδων, παρόλο που χρησιμοποιείται διαμεσολαβητικά ο όρος *ζευγάρι*.

Διδακτικό επεισόδιο 1. Ζεύγη με γάντια

1. *Ερευνήτρια: Πόσα γάντια χρειάζεται αυτό το παιδάκι;*
2. *Παιδιά: Δύο!*
3. *Ερευνήτρια: Πόσα γάντια δώσαμε σε αυτό το παιδάκι;*
4. *Παιδιά: (επαναλαμβάνουν) Δύο!*
5. *Ερευνήτρια: Σκέφτεστε πώς αλλιώς θα μπορούσαμε να το πούμε;*
6. *Γιώργος : Ζευγάρι*
7. *Ερευνήτρια: Ζευγάρι, τι...;*
8. *Γιώργος : Ένα ζευγάρι γάντια. ή.....*
9. *Ερευνήτρια: Πόσα είναι όλα μαζί τα ζευγάρια των γαντιών που βλέπετε(δείχνει τον πίνακα όπου είναι ζωγραφισμένα οκτώ γάντια);*
10. *Λάζαρος: Είναι οκτώ γάντια. Αν τα μετρήσουμε ένα- ένα είναι οκτώ!*

11. *Χαράλαμπος: (έρχεται καλύπτει με την παλάμη του κάθε ζευγάρι γαντιών)...ένα ζευγάρι, δύο ζευγάρια, τρία ζευγάρια, τέσσερα ζευγάρια!*

Η δυσκολία αυτή οργάνωσης της ποσότητας διαμέσου σύνθετων μονάδων είναι ισχυρή. Έτσι, ενώ σε κάθε δραστηριότητα λύνεται μέσα από την αντιπαράθεση των απαντήσεων των παιδιών και τις εξηγήσεις που δίνει το ένα στο άλλο, είτε λεκτικά, είτε χρησιμοποιώντας στρατηγικές αναπαράστασης της σύνθετης μονάδας (11, 13), η δυσκολία αυτή επανεμφανίζεται στην επόμενη δραστηριότητα (14).

Διδακτικό επεισόδιο 2. Ραβδάκια και κουτιά

12. *Ερευνήτρια: Άκουσα πώς μια παρέα συμφωνεί και μια άλλη διαφωνεί.. Λοιπόν να μας εξηγήσει η κάθε παρέα τις απόψεις της.*
13. *Γιώργος (νήπιο): Κοιτάξτε!. Ένα ζευγάρι (παίρνει ένα ζεύγος), δύο ζευγάρια (παίρνει το άλλο ζεύγος).*
14. *Εύη (προνήπιο): Παιδί μου κοίταξε! Ένα, δύο, τρία, τέσσερα κυβάκια! Τι λες πώς είναι δύο;*
15. *Γιώργος (νήπιο): Εγώ ζευγάρια μέτρησα και είπα δύο.*
16. *Εύη (προνήπιο): Ζευγάρια; ..... ! ! ! ! ! Α! Εγώ νόμιζα ένα- ένα!*

Για να αναπαραστήσουν τις σύνθετες μονάδες, τα παιδιά χρησιμοποίησαν τις ακόλουθες στρατηγικές αναπαράστασης:

Στη δραστηριότητα *ζεύγη με γάντια* κύκλωναν τα 2 γάντια που αποτελούσαν το ζευγάρι, ζωγράφιζαν κάτω από κάθε ζευγάρι γαντιών ένα παιδί ή έγραφαν τον αριθμό 1 ή μια κάθετη γραμμή για κάθε ζευγάρι.

Στη δραστηριότητα *ραβδάκια και κουτιά* κάλυπταν κάθε σύνθετη μονάδα (ζεύγος ή τριάδα κλπ) που ήθελαν να μετρήσουν με το δάχτυλό τους και έλεγαν: «ένα ζευγάρι, δύο ζευγάρια...» ή κύκλωναν τις σύνθετες μονάδες και στη συνέχεια τις απαριθμούσαν ή ακόμη χρωμάτιζαν με διαφορετικό χρώμα τα ραβδάκια.

Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποίησαν τα παιδιά δείχνουν την αντίληψη που έχουν για τις σύνθετες μονάδες, τις οποίες χρησιμοποιούν ως «αριθμητικές» μονάδες στην προσπάθειά τους να δώσουν απάντηση στο ερώτημα που τους είχε τεθεί.

Ωστόσο οι στρατηγικές αυτές δεν οδηγούν σε σταθερό εννοιολογικό αποτέλεσμα. Έτσι, στην τελευταία δραστηριότητα, *το μαγικό κουτί*, όπου ο βαθμός γνωστικής δυσκολίας είναι μεγαλύτερος, δεδομένου ότι ένας αριθμός π.χ. ο 2 χρησιμοποιείται με διπλό ρόλο (ως τελεστής, χωρίς αναφορά σε πλήθος και ως μέγεθος της σύνθετης μονάδας), οι δύο από τις τρεις ομάδες παιδιών (1^{η} και 3^{η}) απαντούν λάθος δείχνοντας ότι συγχέουν τους δύο αριθμούς (20, 25, 31, 40).

Διδακτικό επεισόδιο 3. Μαγικό κουτί

17. *Ερευνήτρια: (παρουσιάζει μια κάρτα με τον αριθμό 2 και έχει ως μονάδα για μέτρηση ένα ζευγάρι αυτοκινήτων)… Τι λέτε, πόσα αυτοκίνητα έχει τώρα το κουτί; Η κάθε ομάδα να κάνει τους υπολογισμούς της.*
18. *Κάποια παιδιά: Δύο!*
19. *Κάποια άλλα παιδιά: Τι δύο; Αφού υπολογίζουμε ζευγάρια!*
20. *Σταμάτης: Δύο αυτοκίνητα;*
21. *Νασούλα: Δύο ζευγάρια!*

1^{η} ομάδα

22. *Μαρία: Εγώ λέω δύο αυτοκίνητα!*
23. *Βικτώρια: Ναι δύο είναι.*

24. *Νασούλα: Όχι, το 2 (της κάρτας) πάει στα ζευγάρια. Δύο φορές τα δύο αυτοκίνητα, είναι δύο ζευγάρια.*
25. *Τόνια: Θα χάσουμε. Δύο αυτοκίνητα να πεις.*
26. *…*
27. *Νασούλα (αρχηγός 1ης ομάδας): Κυρία δεν είναι έτσι! Δεν είναι δύο αυτοκίνητα, αλλά μου λένε να πω δύο!*
28. *Ερευνήτρια: Σε λίγο θα δούμε! Όταν ανοίξουμε το κουτί!*

2η ομάδα

29. *Δημήτρης: Είναι δύο ζευγάρια!*
30. *Θέμις: Αφού είναι δύο ζευγάρια, τότε είναι τέσσερα αυτοκίνητα!*
31. *Γιώργος: Τι τέσσερα; Δύο αυτοκίνητα είναι!*
32. *Θέμις: Καλά, εσύ όλα λάθος τα λες! Αφού η κάρτα δείχνει δύο και έχουμε και δύο αυτοκίνητα, δύο φορές δύο πόσο μας κάνουν; Τέσσερα δεν μας κάνουν;*
33. *Κωνσταντίνος: Εγώ ξέρω πώς δύο και δύο, μας κάνει τέσσερα.*
34. *Ιάσονας: Το ίδιο είναι!*
35. *Παιδιά: Τέσσερα να πεις Δημήτρη!*
36. *Δημήτρης (αρχηγός 2ης ομάδας):: Εντάξει!*

3η ομάδα

37. *Γιάννος: (μιλώντας ψιθυριστά) Εγώ άκουσα τον Δημήτρη που έλεγε δύο ζευγάρια! Αυτός ξέρει τους αριθμούς. Έτσι να πούμε και εμείς!*
38. *…..*
39. *Σπύρος: Καλά λέει. Εγώ λέω, πώς είναι δύο και άλλα δύο, τέσσερα!*
40. *Σταμάτης: (αποφασιστικά) Δύο αυτοκίνητα. Αφού το λέει η κάρτα.*
41. *Γιάννος: Η κάρτα λέει πόσα ζευγάρια έχει το κουτί!*
42. *Οριέλλα: Καλά λέει ο Γιάννος! Τέσσερα να πεις!*
43. *….*
44. *Ερευνήτρια: Λοιπόν τα αυτοκίνητα έξω από το κουτί γίνονται τρία και η κάρτα δείχνει τον αριθμό 2. Πόσα αυτοκίνητα είναι μέσα στο κουτί;*

1η ομάδα

45. *Αγγελική: Δύο ζευγάρια!*
46. *Νασούλα: Όχι! Τώρα είναι τριάδα. Εγώ, τώρα ξέρω τι να κάνω. Δύο φορές αυτά (δείχνει την τριάδα των αυτοκινήτων).*
47. *Βικτόρια: Δηλαδή, τρία κι' άλλα τρία (δείχνει τρία και άλλα τρία δάχτυλα και τα μετράει) έξι αυτοκινητάκια!*
48. *Νασούλα: (σκέφτεται και κάνει νοερούς υπολογισμούς) Έξι! Να πούμε έξι;*
49. *Μαρία: Η Νασούλα το βρήκε πριν. Έξι να πούμε*
50. *Παιδιά: Ναι!*

2η ομάδα

51. *Γιώργος: Τέσσερα!*
52. *Θέμις: Τι λες; Αφού εδώ έχει τρία αυτοκίνητα!*
53. *Γιώργος: Αφού η κάρτα έχει το 2 όπως και πριν!*
54. *Δημήτρης: Άλλο είναι τώρα. Πριν ήταν ζευγάρι. Τώρα είναι τριάδα! Θα κοιτάς αυτή την παρέα (δείχνει την τριάδα αυτοκινήτων). Εντάξει; Μετά θα βλέπεις τον αριθμό (εννοεί στην κάρτα) και αυτός μας λέει πόσες τέτοιες παρέες είναι στο κουτί. Κατάλαβες;*
55. *Γιώργος:............*

56. *Κωνσταντίνος: Τα μέτρησα! Είναι έξι. Τρία κι άλλα τρία έξι!*
57. *Παιδιά: (με ρυθμό)Τρία και άλλα τρία, τρία κι' άλλα τρία, τρία κι' άλλα τρία!*

3η ομάδα

58. *Σταμάτης: (παίρνει στο ένα χέρι τρία αυτοκίνητα και τρία ακόμη στο άλλο χέρι, τα κοιτάει, προφανώς τα μετράει) είναι έξι!*
59. *Ελένη: Μη χάσουμε πάλι! Να τα ξαναμετρήσουμε!*
60. *Σταμάτης: Ναι, ναι! (ενοχλημένος) ξαναμετρήστε τα και θα δούμε ποιος θα χάσει!*
61. *Γιάννος: Πόσο κάνει δύο φορές τρία;*
62. *Ελένη: (μετράει ξεκινώντας από το τέλος της πρώτης τριάδας και συνεχίζει στη δεύτερη τριάδα)Τρία, τέσσερα, πέντε, έξι.*
63. *Γιάννος: (ταυτόχρονα με την Ελένη λέει την απάντηση) Έξι! Έξι! Έξι!*

Η αναγκαιότητα αποσαφήνισης του διαφορετικού ρόλου του 2 (σημεία 20-21, 24, 31, 53-54) και η διαπραγμάτευση της σημασίας του καθενός οδηγεί τα παιδιά στην σταθεροποίηση της σύνθετης μονάδας και την επεξεργασία της πρώτης εννοιολογικής προσέγγισης του πολλαπλασιασμού. Τα περισσότερα παιδιά καταφέρνουν να δώσουν τη σωστή απάντηση στη δεύτερη προσπάθεια. Στην προσπάθειά τους να κερδίσουν βρίσκοντας τον σωστό αριθμό αντικειμένων που υπάρχουν στο μαγικό κουτί, δίνουν λύσεις και επιχειρήματα που περιέχουν είτε επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (σημεία 47, 56), είτε την έκφραση φορές (σημεία 46, 61). Οι εκφράσεις αυτές αποτελούν ενδείξεις του τύπου της προσέγγισης της έννοιας του πολλαπλασιασμού, δεδομένου ότι αν και η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση είναι το βασικό διαισθητικό διδακτικό υπόδειγμα που επηρεάζει το νόημα και τη χρήση του πολλαπλασιασμού (Freudenthal, 1973), η ουσιαστική προσέγγιση των πολλαπλαστικών σχέσων καταδεικνύεται από τις απαντήσεις των παιδιών που περιέχουν την έκφραση «φορές» (Schwartz, 1988).

Συμπεράσματα - Συζήτηση

Συνοψίζοντας την ανάλυση που προηγήθηκε μπορούμε να πούμε ότι τα παιδιά στην προσχολική ηλικία έχουν και την ικανότητα και την διάθεση να προσεγγίσουν πολλαπλασιαστικά σχήματα, αρκεί οι δραστηριότητες που διαπραγματεύονται αυτές τις προσεγγίσεις να είναι κατάλληλα σχεδιασμένες και να έχουν ενδιαφέρον.

Ωστόσο το πιο σημαντικό στοιχείο είναι το μαθηματικό νόημα και η μαθηματική φύση των εννοιών που αναδεικνύονται από τις δραστηριότητες. Έτσι στη διδακτική προσέγγιση που παρουσιάστηκε παρατηρούμε ότι στις πρώτες δραστηριότητες η διαμεσολαβητική χρήση όρων και αναπαραστάσεων (όπως ζευγάρια ή τριάδες) δεν είναι από μόνη της αρκετή για τη δημιουργία σταθερής αντίληψης των σύνθετων μονάδων, ούτε στον υπολογισμό πλήθους μέσω σύνθετων μονάδων, ειδικά στην περίπτωση που οι δύο αριθμητικοί όροι είναι πληθικοί αριθμοί. Τόσο στη δραστηριότητα *ζεύγη με γάντια,* όσο και στη δραστηριότητα *ραβδάκια και κουτιά*, οι σύνθετες μονάδες (ο ένας όρος του πολλαπλασιασμού) και το τελικό σύνολο εκφράζουν πλήθος.

Η δραστηριότητα που προκαλεί την αναγκαία εννοιολογική εξέλιξη είναι το μαγικό κουτί, όπου ο ένας όρος του πολλαπλασιασμού είναι τελεστής, χωρίς αναφορά σε πλήθος αντικειμένων. Αυτή η κατάσταση αναδεικνύει και το ιδιαίτερο μαθηματικό νόημα του πολλαπλασιασμού. Επιπρόσθετα η χρήση του 2 σε διπλό ρόλο, ως τελεστής και ως μέγεθος της σύνθετης μονάδας, και η, με αυτόν τον τρόπο, αύξηση της γνωστικής δυσκολίας αναδεικνύει το πραγματικό πρόβλημα που είναι το «*τι* *σημαίνουν τα δύο 2;»*, που η διαπραγμάτευση του φέρνει την εννοιολογική προσέγγιση του πολλαπλασιασμού.

Κλείνοντας μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο σχεδιασμός και η πραγματοποίηση της διδακτικής προσέγγισης με θετικά γνωστικά αποτελέσματα οφείλεται, εκτός από την δραστηριοποίηση και την εκχώρηση της ευθύνης μάθησης στα ίδια τα παιδιά, στη επεξεργασία και διαχείριση του μαθηματικού περιεχομένου με τρόπο ώστε να αναδεικνύονται τα βασικά χαρακτηριστικά των πολλαπλασιαστικών σχέσεων και του μαθηματικά σημαντικού στις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις μέσα από την προτεινόμενη προς τα παιδιά δράση (Kaldrimidou, 2002)

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Bideud, J., Meljac, Cl., Fischer, J.P. (1991). *Les chemins du nombre*. Lille: Presses Universitaires de Lille.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Publ.

Cobb, P. Perlwitz, M. & Underwood, D. (1996). Construcivism and activity theory: A consideration of their similarities and differences as they relate to Mathematics for Tomorrow's Young Children. In Mansfield H., Pateman N., Bednarz N. (eds), *Mathematics for Tomorrow's Young Children*. Kluwer Academic Publishers. 10-58.

Hughes, M. (1996). *Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών*. Αθήνα:Gutenberg.

Hunting, R. & Davis, G. (1991). *Early fraction learning*. N.York:Springer- Verlag.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht:Reidel.

Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of number*. Springer–Verlag. Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo.

Kaldrimidou, M. (2002). Theacher's role in the management of mathematical knowledge: an analysis of a problem solving process. In A. Cockburn, E. Nardi (eds). *Proceedings of PME26*, Norwich: University of East Anglia, 3:169-176.

Καλδρυμίδου, Μ., Καπέλου Α. (2003). Ποσοτικές και ποιοτικές αλλαγές στο εννοιολογικό πλαίσιο των αριθμητικών εννοιών των παιδιών του Νηπιαγωγείου μετά από διδακτικές δραστηριότητες με τελεστές. Στο Τ. Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Π. Πολίτης, Α. Χρονάκη (επιμ.), *Διδακτική Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση* (πρακτικά 6^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου). Αθήνα:Gutenberg-Τυπωθήτω. 199-206.

Καπέλου, Α. (2004). *Διδακτική των αριθμητικών εννοιών για παιδιά 5-6 ετών: Ανάδειξη των πολλαπλασιαστικών δομών*, διδακτορική διατριβή, ΤΕΠΑΕΣ, Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Μπούφη Α. (1996). Η πολλαπλασιαστική σκέψη των παιδιών ως βάση της διδασκαλίας. Στα *Πρακτικά του 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας με θέμα : Τα μαθηματική στην ¨εκπαίδευση και στην Κοινωνία*. 261-276.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical Approaches and Empirical Findings. *In Hiebert J. & Behr M. (eds), Number, Concepts and Operations in the Middle Grades,* LEA, NCTM.19–40.

Renshaw, P. (1996). A sociocultural view of the Mathematics Education of Young Children. *In Mansfield H., Pateman N., Bednarz N. (eds), Mathematics for Tomorrow's Young Children.* Dordrecht, Boston, London: Kluwer. 59 –78.

Schwartz J. (1988). Intensive quality and referent Transforming Arithmetic Operations. *In Hiebert J. & Behr M. (eds), Number, Concepts and Operations in the Middle Grades,* 2. LEA, NCTM. 42-52.

Starkey P. & Gelman R. (1982). The Development of Addition and Subtraction Prior to formal Schooling in Arithmetic *In Carpenter T. P., Moser J. M. & Romberg T. A. eds), Addition and Subtraction : A Cognitive Perspective,* Hillsdale, N.J: Erlabaum.99-116.

Starkey P. (1983). *Some precursors of Early Arithmetic Competencies. Paper presented at the Biennial Meeting of the Society of Research in Child Developmen*t, Detroit.

Steffe, L.P. (1994). Children's Multiplying Schemes. In Harel G. & Confrey J. (eds), *The development of multipicative reasoning in the learning of Mathematics* State University of New York Press. 3–40.

Τζεκάκη, Μ. (2000). *Μαθηματικές Δραστηριότητες για την Προσχολική Ηλικία*, εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.

Van Oers B., (1996) Are you sure? Stimulating Mathematical Thinking During Young Children's play, *European Early Education Research Journal,* 4(1): 71-87.

Vergnaud, G (1983). Multiplicative structures. *In Lesh R. & Landau M. (eds) Acquisition of mathematics concepts and process* New York: Academic Press. 127-174.

Vygotsky, L.S. *(1978). Mind in Society. The Development of Higher Psychological Process*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Yamanoshita T. & Matsushita K. (1996)._Classroom models for Young Children's Mathematical Ideas. *In Mansfield H., Pateman N., Bednarz N., (eds), Mathematics for Tomorrow' s Young Children,* Dordrecht, Boston, London; Kluwer. 285-301.