Σχεδιασμός και ανάλυση διδακτικής παρέμβασης εισαγωγής στη κλασματοειδή (fractal) γεωμετρία στη ΣΤ τάξη του δημοτικού.

Βασίλειος Γούναρης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

vagounaris@pre.uth.gr

Περίληψη

Η εργασία αυτή αφορά την διδακτική παρέμβασή μας με θέμα την κλασματοειδή γεωμετρία που πραγματοποιήθηκε σε πέντε δημοτικά σχολεία, τρία στην Ελλάδα και δύο στη Γερμανία, στο χρονικό διάστημα 2003/2005. Η παρέμβασή μας αποσκοπούσε στη συλλογή και μελέτη των περιγραφών και διαπιστώσεων των μαθητών/τριών που συμμετείχαν και στη διερεύνηση της δυνατότητας εισαγωγής στη κλασματοειδή γεωμετρία από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η εισαγωγή στη κλασματοειδή γεωμετρία στην ΣΤ δημοτικού είναι δυνατή και αναδεικνύουν την ισχυρή εντύπωση που προκάλεσε στους μαθητές/τριες η νέα οπτική της φύσης.

Λέξεις κλειδιά

Κλασματοειδής γεωμετρία, φράκταλ, μη γραμμικότητα, διάσταση αυτοομοιότητας.

Εισαγωγή

Η κλασματοειδής (fractal) γεωμετρία προτάθηκε από τον Mandelbrot το 1975 ως νέα προσέγγιση των γεωμετρικών δομών στη φύση: «Τα σύννεφα δεν είναι σφαίρες, τα βουνά δεν είναι κώνοι, οι ακτογραμμές δεν είναι κύκλοι ούτε η αστραπή διανύει ευθεία γραμμή» (Mandelbrot, 1983).

Οι γεωμετρικές δομές της φύσης προσεγγίζονται με έναν αλγόριθμο, μια συνεχή επανάληψη μιας αρχικής γεννήτριας δομής με μια χαρακτηριστική διάσταση αυτοομοιότητας. Ο αριθμός που χαρακτηρίζει τη διάσταση αυτοομοιότητας είναι δεκαδικός. Παραδείγματα τέτοιων σχημάτων που οδηγούν σε γνωστά κλασματοειδή σχήματα είναι τα σύνολα Cantor και Julia, οι γραμμές Peano, von Koch κ.α. (Peitgen, 1988).

Ο όρος fractal προέρχεται από το λατινικό fractus που αποδίδεται σαν *κλάσμα* ή και *ακανόνιστο* (Mandelbrot, 1983).

Η κλασματοειδής γεωμετρία είναι αλληλένδετη με τη θεωρία δυναμικών συστημάτων (θεωρία χάους). Μαζί συνθέτουν τη σύγχρονη μη γραμμική αντίληψη των μαθηματικών (Χατζηκυριάκου, 2004· Mandelbrot, 1983). Αν και μέρος της θεωρίας προϋπήρχε, η μη γραμμική προσέγγιση έγινε ουσιαστικά δυνατή με την εξέλιξη των υπολογιστών.

Αιτιολόγηση της πρότασης

Έως τώρα, η γραμμικότητα στην προσέγγιση των θετικών επιστημών αποτελεί το υπόβαθρο της διδακτικής τους στη γενική εκπαίδευση. Αυτό είναι εύλογο αφού η γραμμικότητα ήταν και είναι το κυρίαρχο παράδειγμα της μαθηματικής προσέγγισης στη φύση.

Η ανάδυση όμως της μη γραμμικότητας και η επιστημονική μελέτη της καθιστά αναγκαία την διδακτική αξιοποίηση και εισαγωγή της στη γενική εκπαίδευση (Mandelbrot, 1983· Peitgen, 1992a. Stauffer, 1996). Στην κατεύθυνση αυτή έχουν προηγηθεί έρευνες σε Γερμανία, Η.Π.Α κ.α. (Komorek, 2004· Duit, 2001· Peitgen, 1999· Peitgen, 1992b· Devaney, 2003· Χατζηκυριάκου, 2004).

Σύμφωνα με το National Council of Teachers of Mathematics στις Η.Π.Α (1988-1989), η παραπάνω προσέγγιση αποτελεί μια νέα γλώσσα των μαθηματικών για την κατανόηση της φύσης, με μεταγνωστική μεταφορά της στην καθημερινή ζωή. Η διδακτική αξιοποίηση προτείνεται στη γενική εκπαίδευση (Peitgen, 1992a· Hartmut, 1989).

Εξάλλου η μη γραμμική προσέγγιση μπορεί να αποτελέσει έξοχο πεδίο διαθεματικής αξιοποίησης και ‹‹ολοκλήρωσης›› αναλυτικών προγραμμάτων διδασκαλίας φυσικών επιστημών (Κουλαϊδής, 1994).

Από τις μη γραμμικές προσεγγίσεις επιλέχθηκαν στοιχεία της κλασματοειδούς γεωμετρίας γιατί εφαρμόζονται στο άμεσο περιβάλλον των μαθητών (Peitgen, 1992a· Zeitler, 1994· Barnsley, 1993· Peitgen, 1986).

Διδακτικός ανασχηματισμός του επιστημονικού περιεχομένου

Το γενικό πλαίσιο του σχεδιασμού διδακτικών καταστάσεων για την ανάδειξη εννοιών μη γραμμικής προσέγγισης στην έρευνά μας, αποτέλεσε η θεωρία διδακτικών καταστάσεων του Guy Brousseau (Brousseau, 1997) και πιο συγκεκριμένα η εφαρμογή δραστηριοτήτων στη διδασκαλία στο παραπάνω πλαίσιο (Cobb, 1992). Το γενικό γνωσιοθεωρητικό υπόβαθρο της διδακτικής μας παρέμβασης ήταν ο εποικοδομισμός (κονστρουκτιβισμός, ενδεικτικά: Glaserfeld, 1988), ενώ σημαντική για το μαθησιακό μας περιβάλλον ήταν η χρήση Η.Υ. (Papert, 1980) και η συνεργατική μάθηση (Jonson, 1990· Jonson, 1991).

Ειδικότερα για τον διδακτικό ανασχηματισμό του επιστημονικού περιεχομένου της κλασματοειδούς γεωμετρίας, στηριχθήκαμε στον ανασχηματισμό του επιστημονικού περιεχομένου ανάλογων ερευνών (Duit, 2001· Duit, 1997· Komorek, 2001· Komorek, 2004). Σύμφωνα με το παραπάνω μοντέλο διδακτικού ανασχηματισμού η επιλογή των σημαντικών για τη διδασκαλία σημείων του επιστημονικού περιεχομένου, η κατασκευή οδηγιών διδακτικής κατάστασης και η εμπειρική έρευνα αλληλεξαρτώνται και ανατροφοδοτούνται.

Η εμπειρική έρευνα για την εισαγωγή στην κλασματοειδή γεωμετρία, έγινε αρχικά στην ΣΤ τάξη τριών δημοτικών σχολείων της Θεσσαλονίκης (9ο,10ο,11ο) και οδήγησε στον τελικό σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης.

Στη συνέχεια, σε συνεργασία με την Ανώτερη Παιδαγωγική Σχολή Weingarten στη Γερμανία, επαναλήφθηκε η διδακτική παρέμβαση σε ένα διαφορετικό σχολικό και γενικότερα πολιτισμικό και γλωσσικό περιβάλλον (Ascher, 1991· Lerman, 1994). Για την απόδοση του όρου fractal και τη σχετική ορολογία υπάρχουν περισσότερες από μια εκδοχές, τόσο στην ελληνική όσο και στην γερμανική γλώσσα. Η διδακτική παρέμβαση που εφαρμόστηκε ήταν η ίδια, με τα φύλλα εργασίας προσαρμοσμένα στη γερμανική γλώσσα. Η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε δύο τάξεις, στην

ΣΤ τάξη του Alb. Einstein Gymnasium Ravensburg και του Realschule Weingarten αντίστοιχα.

Σε κάθε τάξη η διδακτική παρέμβαση ήταν διάρκειας δυο διδακτικών ωρών και πραγματοποιήθηκε από τον δάσκαλο ή τον καθηγητή των μαθηματικών της τάξης, παρουσία του ερευνητή.

Η διάρκεια της έρευνας ήταν δυο περίπου έτη. Η τελική μορφή της διδακτικής παρέμβασης εφαρμόστηκε στο 11^{ο} δημοτικό σχολείο Θεσσαλονίκης και στο Alb. Einstein Gymnasium Ravensburg.

Στόχοι

Στην έρευνά μας έγινε προσπάθεια να καλυφθεί το επιστημονικό περιεχόμενο με έξι δραστηριότητες, οι οποίες αποσκοπούσαν σε συγκεκριμένους γνωστικούς στόχους.

Οι κύριοι γνωστικοί μας στόχοι ήταν η κατανόηση της συνεχούς επανάληψης και της δεκαδικής διάστασης αυτοομοιότητας ως χαρακτηριστικά των κλασματοειδών σχημάτων και η κατασκευή κλασματοειδούς σχήματος από γεννήτρια. (Komorek, 2001· Peitgen, 1992a). Η επιλογή και περιγραφή αντικειμένων στη φύση από τους μαθητές/τριες με βάση τα παραπάνω χαρακτηριστικά, όπως αναμενόταν στην τελευταία δραστηριότητα, θα έδειχνε την επιτυχία ή όχι των γνωστικών στόχων στο σύνολό τους. Οι σχετικοί με την εκάστοτε δραστηριότητα επιμέρους γνωστικοί στόχοι, αναφέρονται αναλυτικά στην περιγραφή των δραστηριοτήτων στην επόμενη ενότητα.

Σημαντική για την έρευνά μας ήταν και η επιδίωξη συναισθηματικών στόχων, στη νέα αυτή γεωμετρία για τους μαθητές.

Μετά την εμπειρική έρευνα και μελέτη των καταγραφών στα φύλλα εργασίας, πραγματοποιήθηκαν επιλεκτικά συνεντεύξεις με μαθητές/τριες, αναφορικά με την αιτιολόγηση των καταγραφών της δεκαδικής διάστασης, αλλά κυρίως αναφορικά με την περιγραφή αντικειμένων στη φύση. Σε πολλές περιπτώσεις ζητήθηκε από τους μαθητές να σχεδιάσουν τα αντικείμενα που πρότειναν.

Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες δόθηκαν διαδοχικά και εκτελέστηκαν από τους μαθητές ατομικά ή σε μικρές ομάδες εργασίας, ακολουθώντας τις οδηγίες των φύλλων εργασίας. Το εποπτικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε προέρχεται από σχετικές προτάσεις και πηγές της βιβλιογραφίας και του διαδικτύου (Peitgen, 1999· Cynthia, L· AOL).

Στην δραστηριότητα Α ζητήθηκε από τους μαθητές να παρατηρήσουν προσομοιώσεις fractal σε υπολογιστή, να μελετήσουν σε ομάδες εργασίας fractal εικόνες και να ακούσουν καλλιτεχνική απόδοση fractal μουσικής. Ζητήθηκε να καταγράψουν στη δραστηριότητα Α κοινά χαρακτηριστικά εικόνων, προσομοιώσεων και μουσικής, αλλά και να ονομάσουν (σε συμφωνία) τις εικόνες αυτές.

Στην ποιοτική αυτή προσέγγιση του επιστημονικού περιεχομένου αναμενόταν να καταγραφούν από τους μαθητές, τα κοινά χαρακτηριστικά της επανάληψης χωρίς τέλος μιας αρχικής δομής και της αυτοομοιότητας ως κύρια χαρακτηριστικά των fractal (Komorek, 2004· Mandelbrot, 1983· Schroeder, 1991).

Οι δραστηριότητες Β, Γ, Δ αναφερόταν στην κατασκευή από τους μαθητές της επόμενης επανάληψης της γεννήτριας von Koch και του τριγώνου Sierpinski. Μετά την κατασκευή, ακολουθούσαν παρατηρήσεις περισσότερων επαναλήψεων των παραπάνω γεννητριών στον υπολογιστή και καταγραφή των διαπιστώσεων των μαθητών (Devaney, 1990· Peitgen, 1988).

Επιμέρους γνωστικοί στόχοι των δραστηριοτήτων Β, Γ, Δ ήταν η κατανόηση της έννοιας της συνεχούς επανάληψης της αρχικής δομής (iteration), η κατασκευή πολύπλοκου σχήματος από απλή γεννήτρια και διαπίστωση συνεχούς αύξησης της περιμέτρου της χιονονιφάδας von Koch.

Για την κάλυψη του επιστημονικού περιεχομένου είναι απαραίτητη η προσέγγιση της δεκαδικής διάστασης αυτοομοιότητας των fractal σχημάτων. Η απλούστερη μέθοδος είναι η απλοποίηση της διάστασης αυτοομοιότητας Hausdorf-Besicowitch (Devaney, 1990· Kaye, 1994· Takayasu, 1990). Στην περίπτωση της έρευνάς μας, χρησιμοποιήθηκε η διάσταση αυτοομοιότητας του γνωστού από την προηγούμενη δραστηριότητα τριγώνου Sierpinski, σε σύγκριση με τη διάσταση αυτοομοιότητας ευθύγραμμου τμήματος, τετραγώνου και κύβου. Αναμενόταν να καταγραφεί παραστατικά ένας αριθμός $1<\chi<2$ και να κατανοηθεί από τους μαθητές ότι η διάσταση με την οποία χαρακτηρίζονται τα νέα σχήματα της διδασκαλίας μπορεί να είναι δεκαδικός αριθμός.

Στην δραστηριότητα Ε με διπλασιασμό της αρχικής πλευράς σχημάτων στο φύλλο εργασίας, συμπληρώνεται από τους μαθητές/τριες ο παρακάτω πίνακας:

ΣΧΗΜΑ ΙΔΙΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΙΔΙΩΝ ΚΟΜΜΑΤΙΩΝ ΣΕ ΜΟΡΦΗ ΔΥΝΑΜΗΣ	ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΟΠΩΣ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΑΠΟ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Ευθεία 2	$2 = 2^{\square}$	Μήκος
Τετράγωνο 4	$4 = 2^{\square}$	Μήκος και πλάτος
Κύβος 8	$8 = 2^{\square}$	Μήκος, πλάτος και ύψος

Πίνακας 1.

Διαπιστώνεται από τους μαθητές ταύτιση του εκθέτη και των γεωμετρικών διαστάσεων. Ακολουθεί διπλασιασμός πλευράς του τριγώνου Sierpinski και καταγραφή 3 αντί 4 ίδιων κομματιών.

ΣΧΗΜΑ ΚΟΜΜΑΤΙΑ	ΣΕ ΜΟΡΦΗ ΔΥΝΑΜΗΣ	ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ
Ευθεία 2	$2=2^1$	1
Το νέο τρίγωνο 3	$3=2^{\square}$	$\square$
Τετράγωνο 4	$4=2^2$	2
Κύβος 8	$8=2^3$	3

Πίνακας 2.

Η δραστηριότητα Ε προαπαιτεί γνώση απλών δυνάμεων με βάση το 2, που διδάσκονται στην ΣΤ δημοτικού. Για τον λόγο αυτό αλλά και γιατί επιδιώκονται κυρίως συναισθηματικοί στόχοι και ποιοτική προσέγγιση των fractal, προτάθηκε η έρευνα για την ΣΤ δημοτικού και την αντίστοιχη τάξη του γερμανικού σχολείου.

Στην τελευταία δραστηριότητα ΣΤ του φύλλου εργασίας, ζητήθηκε η καταγραφή αντικείμενων στη φύση που μοιάζουν με fractal και αιτιολόγηση. (Barnsley, 1993· Couyet, 1996· Nonnenmacher, 1993).

Διαθεματικά η διδακτική παρέμβαση άπτεται κυρίως του μαθήματος της αισθητικής αγωγής (δραστηριότητες Α, Β, Δ, ΣΤ), των φυσικών επιστημών (δραστηριότητα ΣΤ) και της πληροφορικής.

Αποτελέσματα

Η δραστηριότητα Α ανέδειξε καταγραφές που σε ποσοστό 60% αντιστοιχούν σε χαρακτηριστικά των fractal. Οι πιο συνηθισμένες καταγραφές είναι:

Οι εικόνες δεν έχουν τέλος.

Η μουσική περιγράφει τις εικόνες χωρίς τέλος.

Υπάρχει ένα σχήμα που επαναλαμβάνεται συνέχεια.

Υπάρχει ένα υπόδειγμα στο οποίο έρχεται η εικόνα ξανά και ξανά.

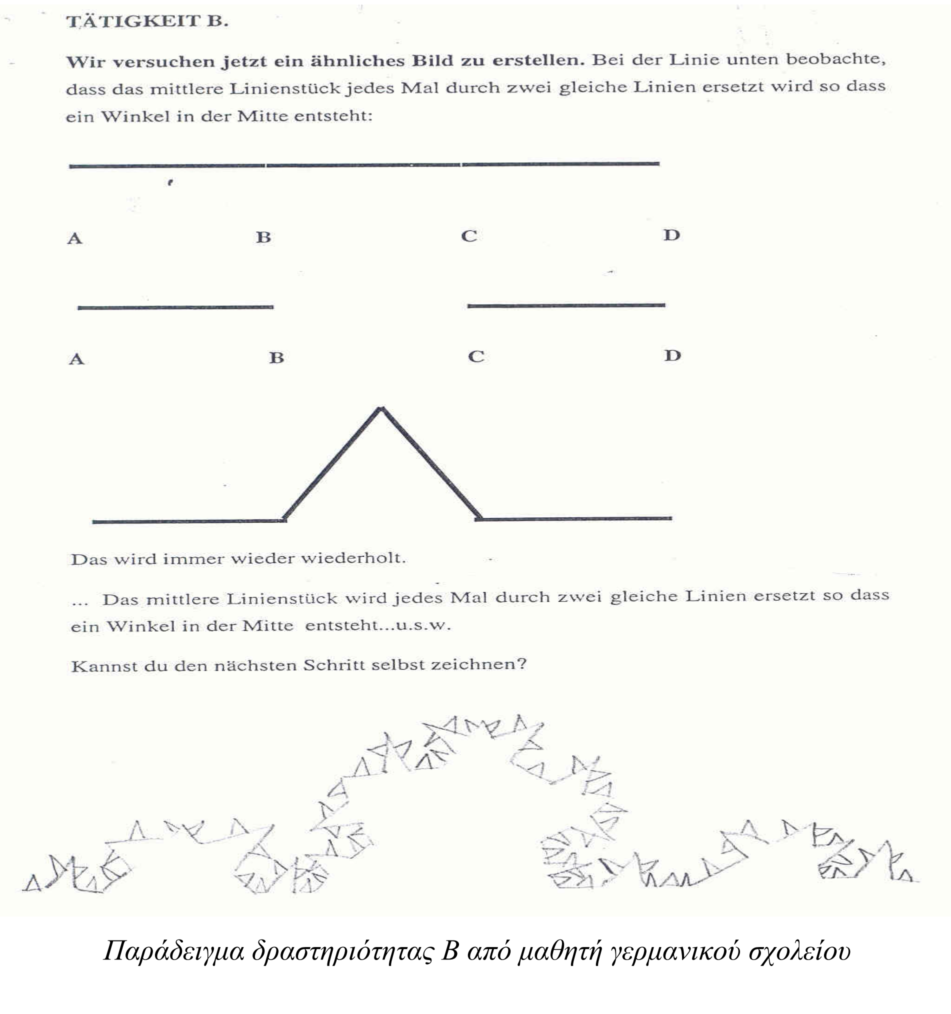
Όλες οι εικόνες μοιάζουν με τον εαυτό τους, οι εικόνες μικραίνουν συνέχεια στη φαντασία μου όπως στον υπολογιστή κ.λπ.

Στην ερώτηση για μια πιθανή ονομασία των εικόνων προτάθηκαν κυρίως:

Επαναλαμβανόμενες εικόνες , εικόνες χωρίς τέλος.

Στις υπόλοιπες απαντήσεις, αναφέρονται οι εικόνες σαν περίεργες, ή γίνονται συναισθηματικές αναφορές στη μουσική, στα χρώματα κ.λπ.

Στη δραστηριότητα Β, μετά από συνεχείς βελτιώσεις του φύλλου εργασίας αναφορικά με τις οδηγίες προς τους μαθητές, όπως ανέδειξε η συνεχής εμπειρική έρευνα, το 50% περίπου των μαθητών της τάξης έδειξε να κατανοεί την έννοια της συνεχούς επανάληψης της αρχικής δομής (iteration) και να σχεδιάζει σωστά την τρίτη επανάληψη της γραμμής von Koch. Στη συνέχεια οι μαθητές της τάξης παρατήρησαν τις σωστές εκτελέσεις και τον σχηματισμό χιονονιφάδας von Koch στον υπολογιστή.


TÄTIGKEIT B.

Wir versuchen jetzt ein ähnliches Bild zu erstellen. Bei der Linie unten beobachte, dass das mittlere Linienstück jedes Mal durch zwei gleiche Linien ersetzt wird so dass ein Winkel in der Mitte entsteht:

A B C D

A B C D

Das wird immer wieder wiederholt.

... Das mittlere Linienstück wird jedes Mal durch zwei gleiche Linien ersetzt so dass ein Winkel in der Mitte entsteht...u.s.w.

Kannst du den nächsten Schritt selbst zeichnen?

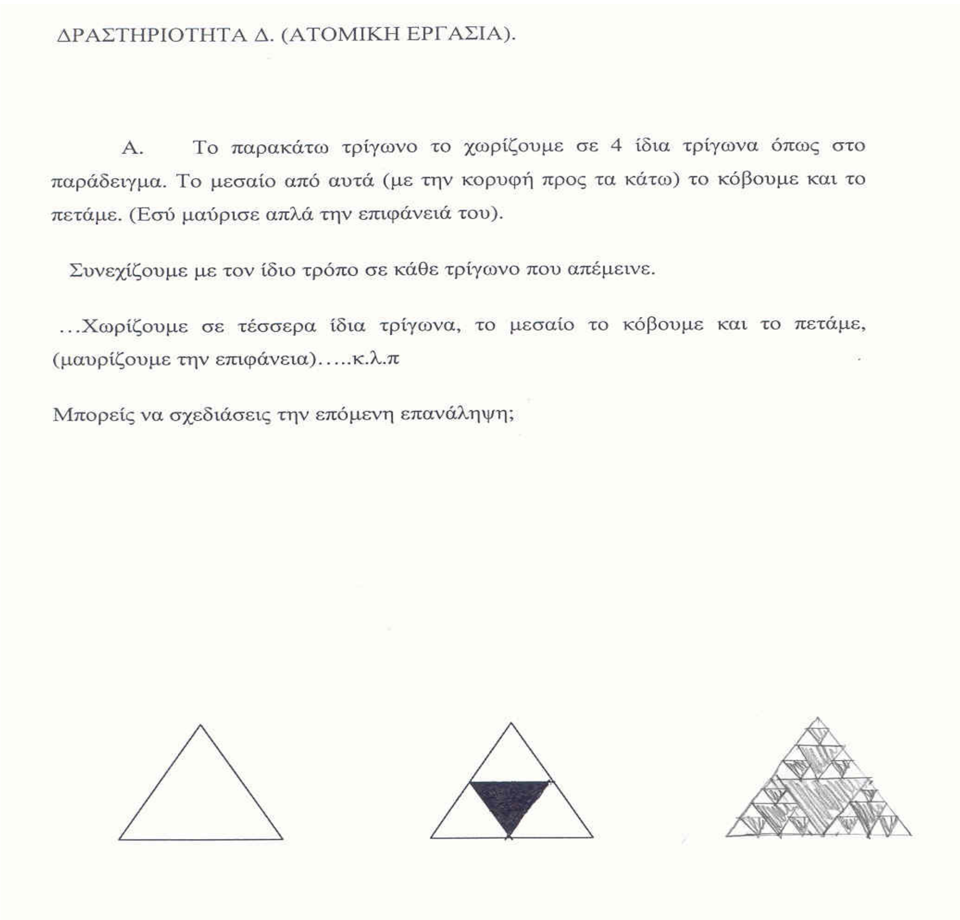
Παράδειγμα δραστηριότητας Β από μαθητή γερμανικού σχολείου

Στην δραστηριότητα Γ αφού παρατηρήθηκαν στον υπολογιστή συνεχείς επαναλήψεις της χιονονιφάδας von Koch, σχεδόν όλοι οι μαθητές κατέγραψαν δυνατότητα χωρίς τέλος επανάληψης και αύξηση της περιμέτρου με κάθε επανάληψη.

Οι καταγραφές σχημάτων στη φύση που θυμίζουν το σχήμα που σχημάτισε ο υπολογιστής (χιονονιφάδα von Koch) είναι κυρίως:

Αστέρι, χιονονιφάδα, λουλούδι, αγκάθι.

Στην δραστηριότητα Δ οι επόμενες επαναλήψεις του τριγώνου Sierpinski, σχεδιάστηκαν από τους μαθητές σε ποσοστό 80% σωστά.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Δ. (ΑΤΟΜΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ).

Α. Το παρακάτω τρίγωνο το χωρίζουμε σε 4 ίδια τρίγωνα όπως στο παράδειγμα. Το μεσαίο από αυτά (με την κορυφή προς τα κάτω) το κόβουμε και το πετάμε. (Εσύ μαύρισε απλά την επιφάνειά του).

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο σε κάθε τρίγωνο που απέμεινε.

...Χωρίζουμε σε τέσσερα ίδια τρίγωνα, το μεσαίο το κόβουμε και το πετάμε, (μαυρίζουμε την επιφάνεια).....κ.λ.π

Μπορείς να σχεδιάσεις την επόμενη επανάληψη;

Παράδειγμα δραστηριότητας Δ από μαθητή ελληνικού σχολείου

Στην δραστηριότητα Ε ένα ποσοστό μαθητών που κυμαίνεται γύρω στο 30% ανά τάξη, υπολόγισε λάθος τις δυνάμεις του 2. Οι μαθητές που υπολόγισαν σωστά τις δυνάμεις του 2, συμπλήρωσαν τον πίνακα σωστά και διαπίστωσαν χωρίς πρόβλημα την ταύτιση διάστασης και εκθέτη.

Ένα ποσοστό που κυμαίνεται από 20% ως 40% ανά τάξη κατέγραψαν δεκαδικό ή κλασματικό αριθμό στο τετραγωνάκι της διάστασης Sierpinski. Ο αριθμός που καταγράφηκε είναι 1,5. Οι υπόλοιποι μαθητές δεν κατέγραψαν αριθμό.

Οι μαθητές/τριες που σημείωσαν 1,5 αιτιολόγησαν την καταγραφή με αναφορά σε διαστάσεις. Παραδείγματα:

Μπορεί οι διαστάσεις να μην είναι μόνο 1 ή 2 ή 3.

Ο εκθέτης στο νέο τρίγωνο μπορεί να γίνει 1,5. Οι διαστάσεις μπορεί να είναι και μισές.

Οι διαστάσεις μπορεί να είναι 1,5. Μπορεί να υπάρχει και 0,573.

Μπορούμε να διασπάσουμε μια διάσταση και να πάρουμε άπειρες άλλες.

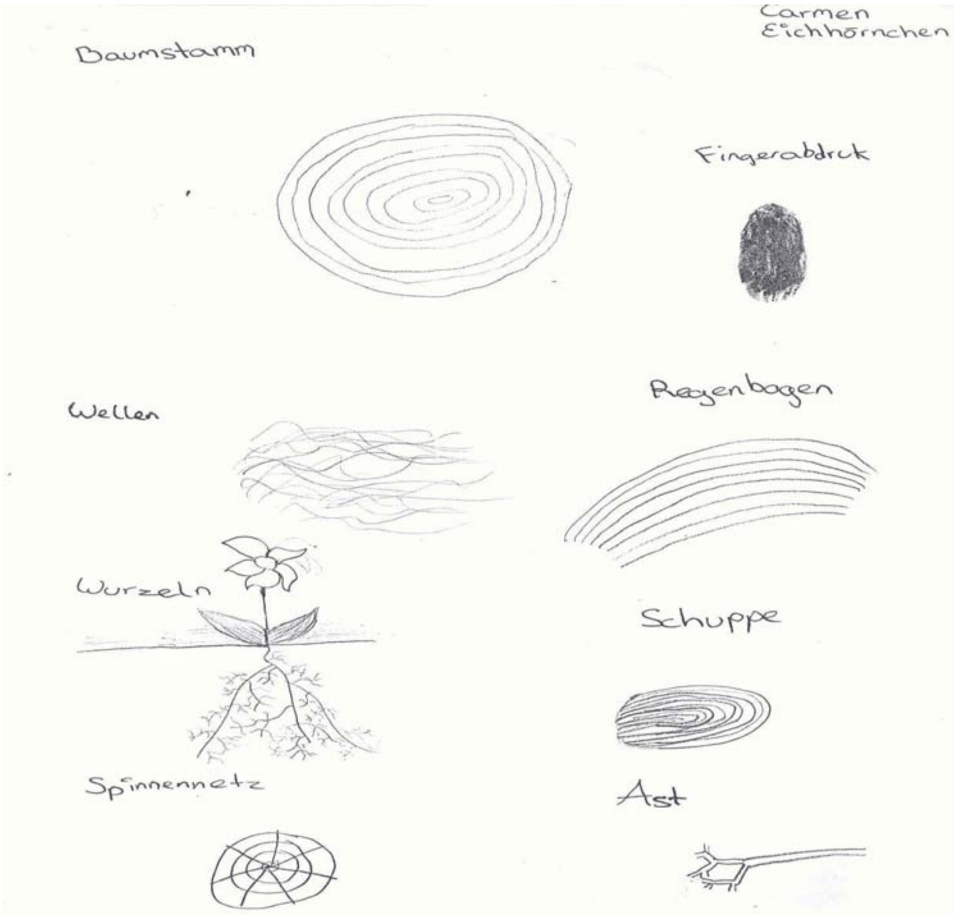
Οι ενδιαφέρουσες αυτές αιτιολογήσεις συζητήθηκαν στις συνεντεύξεις, δεν στάθηκε όμως δυνατό να αποκτηθούν περισσότερες πληροφορίες για την σκέψη των μαθητών, πέραν της αποδοχής της καταγραφής της διάστασης με δεκαδικό αριθμό.

Στη δραστηριότητα ΣΤ αναφέρθηκαν πολλές περιγραφές αντικειμένων στη φύση που θα μπορούσαν να περιγραφούν σαν fractal.

Οι πιο συνηθισμένες είναι:

Δάσος, βουνά, σύννεφα, κουνουπίδι, τριαντάφυλλο, κουκουνάρι, κάκτοι, ρίζες

Και αιτιολογούνται ως πολλαπλές επαναλήψεις ενός αρχικού σχήματος ή μιας λεπτομέρειας.



Σχεδιασμός καταγραφών της δραστηριότητας ΣΤ από μαθήτρια γερμανικού σχολείου

Οι περιγραφές και αιτιολογήσεις αυτές καλύπτουν το 75% των απαντήσεων. Οι υπόλοιπες καταγραφές αναφέρονται μερικά ή δεν αναφέρονται σε κανένα χαρακτηριστικό των fractal. Παράδειγμα:

Διάστημα, ουρανός, θάλασσα γιατί είναι χωρίς τέλος. DNA γιατί μεταφέρει πάντα τις ίδιες πληροφορίες.

Ανάλυση αποτελεσμάτων

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων δείχνει το μεγάλο ενδιαφέρον των μαθητών για τα κλασματοειδή σχήματα και τις ιδιότητές τους. Το ενδιαφέρον αυτό στηρίζει κατά τη γνώμη μας την εισαγωγή στην κλασματοειδή γεωμετρία με τον σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασής μας ή με άλλη ανάλογη παρέμβαση. Αναλυτικά:

Οι συναισθηματικοί στόχοι της διδακτικής παρέμβασης, όπως φαίνεται από τις περιγραφές των μαθητών/τριών θεωρούμε ότι πέτυχαν σε μεγάλο βαθμό.

Οι γνωστικοί στόχοι της κατανόησης της αυτοομοιότητας και της συνεχούς επανάληψης σαν χαρακτηριστικά των κλασματοειδών σχημάτων, δεν αποτέλεσαν πρόβλημα για τους μαθητές. Αυτό τεκμηριώνεται από το υψηλό ποσοστό (περίπου 70%) των ανάλογων καταγραφών στις δραστηριότητες Α, Γ, ΣΤ καθώς και από την περιγραφή και αιτιολόγηση των σχημάτων από τη φύση που επέλεξαν.

Η κατασκευή κλασματοειδούς σχήματος από γεννήτρια δημιούργησε αρχικά (γραμμή von Koch) δυσκολίες σε μεγάλο ποσοστό των μαθητών. Στη συνέχεια η κατασκευή του τριγώνου Sierpinski δεν αποτέλεσε πρόβλημα.

Αντίθετα ο γνωστικός στόχος της κατανόησης της δεκαδικής διάσταση των κλασματοειδών σχημάτων δεν θεωρούμε ότι επιτεύχθηκε. Η διδακτική προσέγγιση του στόχου αυτού οφείλει να βελτιωθεί ή να αντικατασταθεί.

Μεταγνωστικά όπως διαφαίνεται από τις συνεντεύξεις και συζητήσεις με τους μαθητές/τριες, η παρέμβαση ανέδειξε μια νέα οπτική στην εικόνα τους για τη φύση:

Τώρα καταλαβαίνω καλύτερα τα δέντρα, τις ρίζες, τη φύση γενικά.

Δοκιμάζουμε νέες γεωμετρίες στη φύση.

Δεν χρειάζονται μονάδες μήκους γιατί είναι το ίδιο υπόδειγμα πάντα.

Είναι πολλές φορές (η φύση) χωρίς τέλος και επαναλαμβάνεται πάντα ένα υπόδειγμα.

Τώρα τη βρίσκω πιο εκπληκτική.

Πολύ από το περιεχόμενο των μαθηματικών υπάρχει στη φύση.

Σύγκριση αποτελεσμάτων Γερμανίας-Ελλάδας

Σε σχέση με το σχολικό περιβάλλον, οφείλει να διαπιστωθεί ότι το μάθημα των μαθηματικών στην ΣΤ τάξη, πραγματοποιείται στη Γερμανία από μαθηματικό και στην Ελλάδα κατά κανόνα από τον δάσκαλο της τάξης, με τις ίδιες περίπου ώρες διδασκαλίας και αναλυτικό πρόγραμμα.

Δεν διαπιστώθηκε κάποια εμφανής ποσοτική διαφορά στις καταγραφές των μαθητών. Στους μαθητές της Γερμανίας ωστόσο, εμφανίζεται στην καταγραφή των χαρακτηριστικών fractal (δραστηριότητα Α) πολύ συχνά η λέξη *Muster*, που μπορεί να αποδοθεί σαν *υπόδειγμα*.

Είναι μια λέξη που χρησιμοποιείται από τους μαθητές συχνά στην καθομιλούμενη και βοήθησε τους μαθητές της Γερμανίας να ονομάσουν τις εικόνες και να εκφράσουν τις σκέψεις τους πλησιέστερα προς την μαθηματική ορολογία (γεννήτρια).

Μια συχνή ονομασία που δόθηκε από μαθητές στην Ελλάδα ήταν:

Εικόνες χωρίς τέλος.

Στους μαθητές της Γερμανίας εμφανίστηκε αντίστοιχα η ονομασία:

Εικόνες με υπόδειγμα και χωρίς τέλος.

Η επιρροή του πολιτισμικού και γλωσσικού περιβάλλοντος στην εισαγωγή σε μια νέα ορολογία και ένα νέο τρόπο σκέψης είναι στη διδασκαλία αναμενόμενη (Ascher, 1994), μια βαθύτερη ανάλυση της επιρροής αυτής όμως ξεφεύγει από τα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας.

Συμπεράσματα

Η διδακτική παρέμβασή μας αποκτά νόημα στο πλαίσιο μιας σειράς παρεμβάσεων προσέγγισης της μη γραμμικότητας και σε μεγαλύτερες τάξεις.

Το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών της ΣΤ δημοτικού, όπως διαπιστώσαμε από την έρευνά μας, θα μπορούσε να θεμελιώσει την παραπάνω σειρά από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Η αδυναμία αυστηρής κάλυψης του μαθηματικού περιεχομένου της διάστασης αυτοομοιότητας, αντισταθμίζεται κατά τη γνώμη μας από το ισχυρό ενδιαφέρον των μαθητών/τριών της ΣΤ δημοτικού για τη νέα αυτή γεωμετρία και οπτική της φύσης. Σύμφωνη ήταν στο σημείο αυτό και η γνώμη των συναδέλφων/ισσών που πραγματοποίησαν την διδακτική παρέμβαση στις τάξεις τους.

Η διδακτική παρέμβαση επιδέχεται βελτίωσης, ειδικά στην διδακτική προσέγγιση της διάστασης αυτοομοιότητας, έδειξε ωστόσο ότι η εισαγωγή στην κλασματοειδή γεωμετρία από την ΣΤ δημοτικού είναι κατ' αρχάς δυνατή και ανοίγει για τους μαθητές ένα νέο παράθυρο στην εικόνα τους για τη φύση.

Ευχαριστίες

Ευχαριστίες οφείλονται Τσελφέ Βασίλειο, ο οποίος είχε την επίβλεψη ανάλογης μεταπτυχιακής εργασίας του ερευνητή, στο μεταπτυχιακό της διδακτικής των φυσικών επιστημών και νέες τεχνολογίες στο Π.Τ.Δ.Ε του Α.Π.Θ., Ιούνιος 2003, και στον Prof. Gerstberger Herbert της Pädagogische Hochschule Weingarten για την υποστήριξη της διερεύνησης της πρότασης στη γερμανική εκπαίδευση.

Αποφασιστική ήταν η συμβολή και ενθάρρυνση του Χατζηκυριάκου Κωνσταντίνου επιβλέποντα της διδακτορικής διατριβής που εκπονώ στο Π.Τ.Δ.Ε του πανεπιστημίου Θεσσαλίας,

Βιβλιογραφικές Αναφορές

A.O.L. *Fractalmusic*. http://members.aol.com/dspontike/fractal

Ascher, M.(1991). *Ethnomathematics: A multicultural view of mathematical ideas*. NY: Chapman & Hall.

Ascher, M., D'Ambrosio, U.(1994). Ethnomathematics: A dialogue. In *For the Learning of Mathematics,* 14 (2), 36-43.

Barnsley, M. F. (1993). *Fractals Everywhere*. Academic Press Professional.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer.

Cobb, P., Yackel, E. Wood, T. (1992). Interaction and learning in Mathematics classroom situations. In *Educational Studies in Mathematics,* (23), 99-122.

Couyet, J-F. (1996). *Physics and Fractal Structures*. Springer Verlag.

Cynthia, L. *Fractional Dimension*. http://math.rice.edu/~lanius/fractals/dim.html

Devaney, R. (1990). *Chaos, Fractals, and Dynamics. Computer experiments in Mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company.

Duit, R. (2001). Educational Reconstruction: Science Subject Matter and Educational Issues in Harmony-Research and Development Intimately Linked. In

Proceedings of the Third International Conference on Science Education Research in the Knowledge Based Society, Thessaloniki 2001, 227-229.

Duit, R., Komorek, M. (1997). Understanding the basic ideas of chaos-theory in a study of limited predictability. In *International Journal of Science Education*, 19, 247-264.

Glaserfeld, E. von (1988). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Reidel.

Hartmut, J., Peitgen, H.O., Saupe, D. (1989). Fraktale - eine neue Sprache für komplexe Strukturen. In *Spektrum der Wissenschaft* 9/1989, S. 52ff.

Kaye, B. H. (1994). *A Random Walk Through Fractal Dimensions*. Weinheim Verlagsgesellschaft VCH.

Komorek, M., Duit, R. (2004). The teaching experiment as a powerful method to develop and evaluate teaching and learning sequences in the domain of non-linear systems. In *International Journal of Science Education* 26 (5), 619-633

Komorek, M., Duit, R., Bucker, N. and Naujack, B. (2001). Learning process studies in the field of fractals. In *Research in science education – past, present, and future* (Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers), 95-100.

Koulaidis, V., Ogborn, J. (1994). Αρχές Κατασκευής Αναλυτικών Προγραμμάτων για τη Διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών – Μια Πρόταση για "Ολοκλήρωση", στο: *Αναπαραστάσεις του Φυσικού Κόσμου* Guttenberg.

Lerman, S. (Ed.). (1994). *Cultural perspectives on the mathematics classroom*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer

Mandelbrot, B. B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman W. H. and Company, New York.

Nonnenmacher, T. F., Losa, G. A., Weibel, E. R. (1993). *Fractals in Biology and Medicine*, Birkhäuser, Basel.

Peitgen, H. O., Hartmut, J., Saupe, D., Maletsky, E., Perciante, T., Yunker, L. (1992a). Fractals for the Classroom, Part 1: Introduction to Fractals and Chaos. Springer-Verlag.

Peitgen, H. O., Hartmut, J., Saupe, D. (1992b). *Fractals for the Classroom, Part 2: Complex Systems and Mandelbrot Set*. Springer Verlag.

Peitgen, H. O., Hartmut, J., Saupe, D., Maletsky, E., Perciante, T., Yunker, L. (1999). *Fractals for the Classroom: Strategic Activities*. Springer Verlag, Berlin.

Peitgen, H. O., Richter, P. H. (1986). *The Beauty of Fractals*. Springer Verlag.

Peitgen, H. O., Saupe, D., Barnsley, M., Devaney, R. L., Mandelbrot B. B. Voss, R.F. Fisher, Y., Guire M. (1988). *The Science of Fractal Images*. Springer Verlag

Schroeder, M. (1991). *Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit*. Spektrum

Stauffer, D., Stanley, H. E. (1996). *From Newton to Mandelbrot*. Springer Verlag.

Takayasu, H. (1990). *Fractals in the physical sciences*. Manchester University Press.

Χατζηκυριάκου, Κ. (2004). Ιχνηλατώντας τρεις εποχές του σχήματος στα σχολικά μαθηματικά. Στα *πρακτικά 3ου διήμερου διαλόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών,* Θεσσαλονίκη 2004.

Zeitler, H., Neidhardt, W. (1994). *Fraktale und Chaos: Eine Einführung*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft.