Η ικανότητα κατασκευής και ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος

Λούκας Τσούκκας, Χρύσω Κύπρου, Γεώργιος Φιλίππου
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής - Πανεπιστήμιο Κύπρου
louevge@cytanet.com.cy, kyprouc@yahoo.com, edphilip@ucy.ac.cy

Περίληψη

Η παρούσα έρευνα εξετάζει τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα των μαθητών Στ΄ τάξης δημοτικού να επιλύουν προβλήματα και την ικανότητά τους να κατασκευάζουν προβλήματα με βάση διάφορες μαθηματικές καταστάσεις. Σε 236 μαθητές Στ΄ τάξης δημοτικού χορηγήθηκε δοκίμιο επίλυσης και δοκίμιο κατασκευής μαθηματικού προβλήματος. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι οι πιο ικανοί στη λύση προβλήματος μαθητές κατασκευάζουν περισσότερα και πιο πολύπλοκα μαθηματικά προβλήματα, από ότι οι λιγότερο ικανοί λύτες προβλημάτων.

Λέξεις κλειδιά

Λύση προβλήματος, κατασκευή προβλήματος, πολυπλοκότητα

Εισαγωγή

Η κατασκευή και η επίλυση προβλήματος θεωρούνται κεντρικά θέματα στη μαθηματική εκπαίδευση και βρίσκονται για χρόνια στην καρδιά της παιδαγωγικής μαθηματικής έρευνας. Η κατασκευή προβλήματος αφορά στην παραγωγή νέων προβλημάτων από μια κατάσταση ή ένα δοσμένο πρόβλημα (English, 1997a˙ Silver & Cai, 1996). Η έρευνα εστιάζει ανάμεσα σε άλλα και στην ποιότητα των προβλημάτων που κατασκευάζουν οι μαθητές, αφού μπορεί να θεωρηθεί μέτρο της ικανότητας επίλυσης προβλήματος (Kilpatrick, 1987). Πρόσφατες υποδείξεις για καινοτομίες στη μαθηματική εκπαίδευση προτείνουν να συμπεριληφθούν στη διδασκαλία δραστηριότητες, στις οποίες οι μαθητές να λύνουν, αλλά και να κατασκευάζουν προβλήματα (NCTM, 2000).

Δεδομένης της σημασίας των δραστηριοτήτων κατασκευής προβλήματος στα σχολικά μαθηματικά, πολλοί ερευνητές έχουν διερευνήσει ποικίλες πλευρές των διαδικασιών κατασκευής προβλήματος (Silver, 1993). Ανάμεσα σε άλλα έχει βρεθεί ότι οι δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος βοηθούν στη μείωση του φόβου των μαθητών, συντελούν στην ανάπτυξη πιο θετικών στάσεων απέναντι στα μαθηματικά, εμπλουτίζουν και βελτιώνουν την κατανόηση και τη λύση προβλήματος από τους μαθητές (Brown & Walter, 1990˙ NCTM, 2000˙ Silver, 1993). Μια σημαντική κατεύθυνση αυτής της διερεύνησης ήταν και η εξέταση της συσχέτισης ανάμεσα στην κατασκευή και την επίλυση προβλήματος (Cai & Hwang, 2002˙ English, 1997b˙ Silver & Cai, 1996).

Θεωρητικό υπόβαθρο

Σ' αυτό το μέρος περιγράφονται τρεις κατηγορίες ερευνών. Στην πρώτη το ενδιαφέρον εστιάζεται στη συσχέτιση ανάμεσα στην ικανότητα κατασκευής και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος, στη δεύτερη κατηγοριοποιούνται τα έργα κατασκευής προβλήματος και εξετάζεται πώς το είδος του έργου επηρεάζει την ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν προβλήματα, ενώ στην τρίτη εξετάζεται η πολυπλοκότητα των προβλημάτων που κατασκευάζονται.

Μαθηματική Ικανότητα και Κατασκευή Προβλήματος

Το ενδιαφέρον για την κατασκευή προβλήματος είχε αφετηρία τη θεωρούμενη συμβολή της ικανότητας αυτής στην ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών να λύνουν προβλήματα (Silver, 1993). Αν και η κατασκευή προβλήματος έχει μόλις πρόσφατα καταστεί κοινό γνώρισμα της διδασκαλίας των μαθηματικών, η θεώρησή της ως ένα μέσο για τη βελτίωση της ικανότητας λύσης προβλήματος δεν είναι κάτι καινούριο. Για παράδειγμα, οι Connor and Hawkins (1936) υποστήριξαν ότι η κατασκευή από τους μαθητές των δικών τους προβλημάτων βελτιώνει την ικανότητά τους να χρησιμοποιούν αριθμητικές έννοιες κατά τη λύση προβλημάτων. Είκοσι χρόνια αργότερα, ο Koenker (1958) θεώρησε την κατασκευή προβλήματος ως έναν τρόπο βελτίωσης της ικανότητας των μαθητών να λύνουν προβλήματα.

Η σχέση ανάμεσα στις δύο αυτές ικανότητες απασχόλησε πολλούς ερευνητές. Στο θεωρητικό επίπεδο, οι Brown and Walter (1990) εκτιμούν ότι είναι αδύνατο να κατανοήσει κανείς ένα πρωτότυπο πρόβλημα χωρίς πρώτα να αναλύσει τη δομή και τις συνδέσεις που συντελούν στην επίλυσή του και ότι συχνά κατανοεί τη σημασία αυτού που έχει κάνει, αφού διαφοροποιήσει ή προεκτείνει τα δεδομένα και κατασκευάσει νέα προβλήματα. Από ένα πλήθος εμπειρικών ερευνών προκύπτει ότι υφίσταται σχέση ανάμεσα στην κατασκευή και τη λύση προβλήματος. Για παράδειγμα, οι Silver and Cai (1996) βρήκαν ότι υπήρχε σημαντική συσχέτιση ανάμεσα στην ικανότητα λύσης και ικανότητα κατασκευής προβλήματος σε μαθητές γυμνασίου. Οι πιο ικανοί λύτες προβλήματος κατασκεύασαν περισσότερα και πιο πολύπλοκα προβλήματα από ότι οι λιγότερο ικανοί λύτες.

Σε δύο έρευνες των Cai and Hwang (2002, 2003) με Αμερικανούς και Κινέζους μαθητές Στ΄ τάξης δημοτικού και Α΄ τάξης γυμνασίου βρέθηκε θετική συσχέτιση ανάμεσα στην ικανότητα κατασκευής και στην ικανότητα λύσης προβλήματος. Οι Θεοδούλου, Φιλίππου και Χρίστου (2000) βρήκαν ότι υπάρχει θετική συσχέτιση ανάμεσα στην ικανότητα κατασκευής και την ικανότητα επίλυσης προβλήματος σε μαθητές Στ΄ τάξης δημοτικού. Αντίθετα, οι Silver and Mamona (1989) δε βρήκαν σχέση ανάμεσα στην ικανότητα κατασκευής και την ικανότητα λύσης προβλήματος σε δασκάλους μαθηματικών γυμνασίου. Δεδομένων των πιο πάνω είναι φανερό ότι υπάρχει η ανάγκη περαιτέρω έρευνας, η οποία να εξετάζει την πολύπλοκη σχέση ανάμεσα στην κατασκευή και την επίλυση προβλήματος.

Κατηγοριοποίηση των έργων κατασκευής προβλήματος

Οι ερευνητές διακρίνουν τρεις κατηγορίες έργων με βάση τα οποία οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν μαθηματικά προβλήματα. Από *Ελεύθερες μαθηματικές καταστάσεις*, στις οποίες δίνεται ένα γενικής μορφής θέμα και καλούνται οι μαθητές να προσδώσουν νόημα στα δεδομένα και στις πληροφορίες και να κατασκευάσουν προβλήματα. Η English (1998) αναφέρεται σε τυπικές και άτυπες μαθηματικές καταστάσεις. Στις τυπικές καταστάσεις εντάσσει μαθηματικές προτάσεις και στις άτυπες καταστάσεις εικόνες, λογοτεχνικά κείμενα, κτλ.

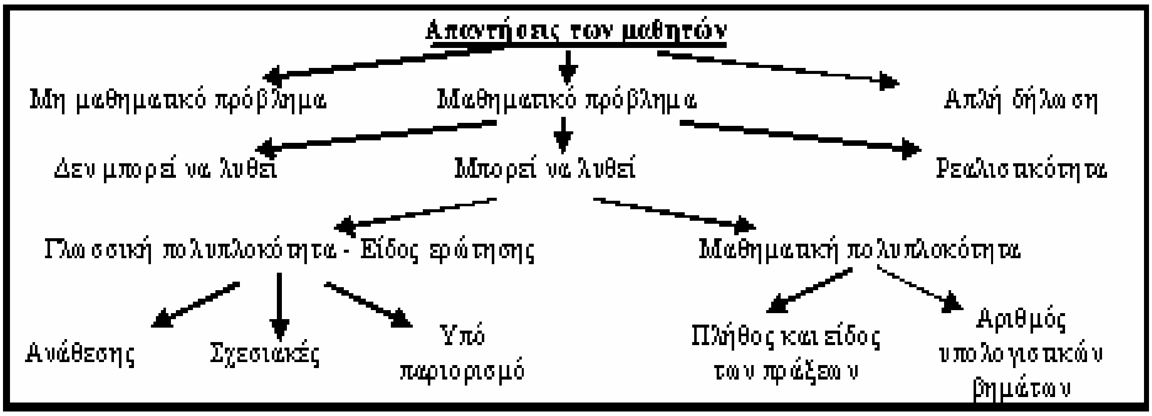
Ημι-δομημένες μαθηματικές καταστάσεις, είναι «μαθηματικά πλούσια περιβάλλοντα» από την άποψη ότι περιέχουν δεδομένα και πληροφορίες, αλλά δεν υπάρχει έργο, δεν υπάρχει ερώτηση. Ο μαθητής καλείται να διατυπώσει μια ερώτηση, αναλύοντας και συνθέτοντας τις πληροφορίες, μετατρέποντας με τον τρόπο αυτό την κατάσταση σε πρόβλημα (Menon, 1996). Οι λεκτικές καταστάσεις παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να εμπλακούν σε παραγωγικές πτυχές της μαθηματικής σκέψης, όπως η κατασκευή μαθηματικού προβλήματος (English, 1998). Εκτός από τις λεκτικές καταστάσεις, δυνατότητες για κατασκευή προβλήματος προσφέρουν συγκεκριμένες εικόνες και διαγράμματα. Η Gonzales (1998) αναφέρει ότι οι γραφικές παραστάσεις αποτελούν ένα εξαιρετικό παράδειγμα μαθηματικών καταστάσεων με πολλά δεδομένα που μπορούν να αξιοποιηθούν για την κατασκευή προβλημάτων.

Δομημένες μαθηματικές καταστάσεις, αναφέρονται στην κατασκευή νέων προβλημάτων από ένα δοσμένο πρόβλημα. Πρόκειται για την πιο συνηθισμένη δραστηριότητα κατασκευής προβλήματος, που μπορεί να επιτευχθεί με διάφορες στρατηγικές. Ο Polya (1957) πρότεινε τρεις δυνατές προσεγγίσεις: i) διατήρηση σταθερού του αγνώστου με αλλαγή των υπόλοιπων δεδομένων και περιορισμών του προβλήματος, ii) διατήρηση των δεδομένων σταθερών με αλλαγή των ζητούμενων ή/και περιορισμών και iii) αλλαγή τόσο των ζητούμενων όσο και των δεδομένων του προβλήματος.

Σε έρευνα των Philippou, Charalambous and Christou (2001) βρέθηκε ότι μελλοντικοί δάσκαλοι δυσκολεύτηκαν περισσότερο να κατασκευάσουν προβλήματα με βάση μια αριθμητική πρόταση παρά με βάση μια μαθηματική κατάσταση ή ένα δοσμένο πρόβλημα. Οι Θεοδούλου κ.ά., (2000) βρήκαν ότι υπάρχει μεγαλύτερη δυσκολία στην κατασκευή προβλήματος από αριθμητικές προτάσεις παρά από άλλες καταστάσεις περιλαμβανομένου του ιστογράμματος.

Ποιότητα - Πολυπλοκότητα των προβλημάτων

Για την αξιολόγηση της ποιότητας των προβλημάτων έχουν προταθεί από ερευνητές διάφορα κριτήρια. Στην παρούσα έρευνα εφαρμόζουμε ένα σχέδιο αξιολόγησης της ποιότητας των προβλημάτων που κατασκευάζουν οι μαθητές, που βασίζεται σε γλωσσικά και δομικά κριτήρια (Διάγραμμα 1), τα οποία έχουν εισηγηθεί άλλοι ερευνητές (Silver & Cai, 1996˙ English, 1997b˙ Philippou, et al, 2001).



Διάγραμμα 1: Σχέδιο αξιολόγησης της ποιότητας των προβλημάτων

Αρχικά, είναι σημαντικό να καθοριστεί αν οι απαντήσεις των υποκειμένων στα διάφορα έργα είναι μαθηματικά προβλήματα, απλές δηλώσεις ή μη μαθηματικά προβλήματα, καθώς επίσης και αν ένα πρόβλημα μπορεί να λυθεί ή όχι. Η ρεαλιστικότητα ή όχι ενός μαθηματικού προβλήματος αποτελεί βασικό κριτήριο για τον καθορισμό της ποιότητάς του. Ρεαλιστικά θεωρούνται τα προβλήματα που αντανακλούν καταστάσεις της καθημερινής ζωής και απαιτούν τη χρησιμοποίηση της κοινής λογικής γνώσης και της εμπειρίας της πραγματικής ζωής. Έτσι για παράδειγμα, προβλήματα όπως είναι : «Ο πατέρας του Κώστα έχει πλυντήριο αυτοκινήτων. Το Σάββατο ο Κώστας έπλυνε 480 αυτοκίνητα και ο αδελφός του 8. Πόσα έπλυναν και οι δύο μαζί;», δεν μπορούν να θεωρηθούν ρεαλιστικά.

Η γλωσσική πολυπλοκότητα των προβλημάτων προσδιορίζεται με βάση τη γλωσσική ή συντακτική τους δομή. Για το σκοπό αυτό εξετάζεται το είδος της ερώτησης, που αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά στοιχεία του προβλήματος. Οι ερωτήσεις μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε ερωτήσεις ανάθεσης, σε σχεσιακές και ερωτήσεις υπό περιορισμό. Οι ερωτήσεις ανάθεσης όπως : «Πόσα χιλιόμετρα οδήγησαν και οι τρεις φίλοι μαζί;», αναφέρονται σε μια μεταβλητή, οι σχεσιακές όπως «Πόσα περισσότερα χιλιόμετρα οδήγησε ο Κώστας από το Μάριο;» συγκρίνουν δύο μεταβλητές και τέλος οι ερωτήσεις υπό περιορισμό όπως «Αν ο Κώστας οδήγησε 60 χιλιόμετρα περισσότερα από τον Αντρέα, πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ο Κώστας;», θέτουν ένα περιορισμό. Είναι φανερό πως πιο πολύπλοκα είναι τα προβλήματα με σχεσιακές και ερωτήσεις υπό περιορισμό. Ένα άλλο είδος πολυπλοκότητας των προβλημάτων, η *μαθηματική πολυπλοκότητα*, σχετίζεται με τη μαθηματική δομή του προβλήματος και αναφέρεται στον αριθμό των σχέσεων που περιλαμβάνονται σ' αυτό. Η μαθηματική πολυπλοκότητα ενός προβλήματος αυξάνει, όσο αυξάνει ο αριθμός των υπολογιστικών βημάτων που χρειάζονται για να λυθεί, καθώς και ο αριθμός των πράξεων που περιέχονται σ' αυτό.

Οι Silver & Cai (1996) διαπίστωσαν ότι μαθητές γυμνασίου δεν κατάφεραν να κατασκευάσουν προβλήματα με πολύπλοκη γλωσσική δομή, ενώ τα περισσότερα προβλήματα που κατασκεύασαν είχαν πολύπλοκη μαθηματική δομή και περιείχαν δύο ή περισσότερες πράξεις. Σε έρευνα των Philippou et al, (2001) βρέθηκε ότι μελλοντικοί δάσκαλοι δυσκολεύτηκαν να κατασκευάσουν προβλήματα με πολύπλοκη γλωσσική δομή. Τέλος, η English (1997b) σε έρευνά της με παιδιά Α΄ τάξης γυμνασίου βρήκε ότι η ικανότητα λύσης προβλήματος σχετίζεται με την κατασκευή υπολογιστικά πολύπλοκων προβλημάτων και ότι οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο να κατασκευάσουν προβλήματα με σχεσιακές ερωτήσεις. Στην έρευνα αυτή εξετάζεται η ικανότητα κατασκευής και επίλυσης προβλήματος καθώς και η ποιότητα των προβλημάτων που μπορούν να κατασκευάζουν οι μαθητές. Ειδικότερα, δίνονται απαντήσεις στα ακόλουθα ερωτήματα:

1. Υπάρχει στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ της ικανότητας των μαθητών να λύνουν και της ικανότητάς τους να κατασκευάζουν μαθηματικά προβλήματα;
2. Πόσο ικανοί είναι οι μαθητές της Στ΄ τάξης δημοτικού να κατασκευάζουν προβλήματα από μια λεκτική κατάσταση, από μια γραφική παράσταση, από ένα δοσμένο πρόβλημα και από μια αριθμητική πρόταση;
3. Υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας επίλυσης και κατασκευής μαθηματικού προβλήματος και της ποιότητας των προβλημάτων που κατασκευάζουν οι μαθητές;

Μεθοδολογία

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 236 μαθητές Στ΄ τάξης δημοτικού από έντεκα τμήματα δημοτικών σχολείων μιας αγροτικής περιφέρειας της Κύπρου, 122 κορίτσια και 114 αγόρια. Πριν από την έρευνα οι μαθητές δε συμμετείχαν συστηματικά σε δραστηριότητες κατασκευής προβλήματος.

Κάθε μαθητής συμπλήρωσε πρώτα ένα δοκίμιο λύσης προβλήματος στο διάστημα μιας διδακτικής περιόδου, με σαφείς οδηγίες να επεξηγεί γραπτώς τη σκέψη του κατά τη διαδικασία λύσης κάθε προβλήματος. Μετά από μια βδομάδα, χορηγήθηκε στους μαθητές το δοκίμιο κατασκευής προβλήματος διάρκειας 80 λεπτών. Για την κατασκευή των δοκιμίων αυτών οι ερευνητές βασίστηκαν σε προηγούμενες έρευνες (Silver & Cai, 1996) και σε μεγαλύτερο βαθμό στην έρευνα των Θεοδούλου, κ.ά. (2000). Στη συνέχεια αναφέρονται τα κριτήρια με βάση τα οποία έγινε η επιλογή των έργων στα δύο δοκίμια από τους συγκεκριμένους ερευνητές.

Δοκίμιο Λύσης Προβλήματος

Το δοκίμιο για μέτρηση της ικανότητας επίλυσης προβλήματος περιλάμβανε έξι προβλήματα διαβαθμισμένης δυσκολίας, τρία προβλήματα πράξεων και τρία διαδικασίας. Παραδείγματα των έργων φαίνονται στον Πίνακα 1.

Δοκίμιο Λύσης Προβλήματος (Πρόβλημα πράξεων – Πρόβλημα διαδικασίας)
Ο κ. Κώστας αγόρασε μια τηλεόραση αξίας £780. Έδωσε προκαταβολή £185. Το υπόλοιπο ποσό θα το εξοφλήσει σε 7 ίσες μηνιαίες δόσεις. Πόσα πρέπει να πληρώνει σε κάθε δόση;
Στο σχολείο του Γιώργου αγόρασαν μπάλες ποδοσφαίρου προς £5 τη μια και μπάλες πετόσφαιρας προς £3 τη μια. Αν όλες οι μπάλες ήταν 19 και στοίχισαν £79, πόσες μπάλες από το κάθε είδος αγόρασαν;

Πίνακας 1: Παραδείγματα έργων λύσης προβλήματος

Τα προβλήματα πράξεων περιλάμβαναν ένα πρόβλημα δύο πράξεων, ένα πρόβλημα τριών πράξεων και ένα πρόβλημα τεσσάρων πράξεων, τα οποία είναι παρόμοια με προβλήματα που συναντούν οι μαθητές στο δημοτικό σχολείο. Στόχος των προβλημάτων αυτών ήταν η διερεύνηση: α) της ικανότητας των παιδιών να επιλέγουν και να εφαρμόζουν τις κατάλληλες πράξεις για τη λύση ενός προβλήματος και β) του επιπέδου μαθηματικής και λογικής σκέψης των παιδιών.

Τα προβλήματα διαδικασίας, που απαιτούν ενεργοποίηση ανώτερων νοητικών λειτουργιών είχαν στόχο να εξετάσουν: α) την ικανότητα των παιδιών να εφαρμόζουν σωστά διάφορες στρατηγικές λύσης προβλήματος και β) την ικανότητα των παιδιών να επιλύουν πρωτότυπα προβλήματα. Τα προβλήματα μπορούσαν να λυθούν με τις στρατηγικές «κατασκευή πίνακα», «μαντεύω και ελέγχω», «εύρεση μοτίβου» και «λογική αιτιολόγηση».

Δοκίμιο Κατασκευής Μαθηματικού Προβλήματος

Το δοκίμιο κατασκευής προβλήματος περιλάμβανε τέσσερα έργα κατασκευής προβλήματος, τρία από τα οποία φαίνονται στον Πίνακα 2. Στη συνέχεια γίνεται σύντομη περιγραφή των μαθηματικών καταστάσεων.

Δοκίμιο Κατασκευής Προβλήματος
Διάβασε την πιο κάτω μαθηματική κατάσταση και προσπάθησε να υποβάλεις τρεις διαφορετικές ερωτήσεις. Ο Μάριος, ο Αντρέας και ο Κώστας οδήγησαν το αυτοκίνητο με τη σειρά κατά τη διάρκεια μιας εκδρομής. Ο Κώστας οδήγησε 60 χιλιόμετρα περισσότερα από τον Αντρέα. Ο Αντρέας οδήγησε διπλάσιο αριθμό χιλιομέτρων από το Μάριο. Ο Μάριος οδήγησε 40 χιλιόμετρα.
Πιο κάτω δίνεται ένα μαθηματικό πρόβλημα. Προσπάθησε να κατασκευάσεις τρία νέα προβλήματα τροποποιώντας αυτό το πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο κάθε φορά. «Ο κ. Γιάννης μάζεψε τη Δευτέρα 800 kg πατάτες. Φύλαξε τα 200 kg στην αποθήκη του και τις υπόλοιπες πατάτες τις πούλησε προς 40 σεντ το κιλό. Πόσα λεφτά πήρε ο κ. Γιάννης από την πώληση των πατατών;»
Κατασκεύασε ένα πρόβλημα που να λύεται με την καθεμιά από τις μαθηματικές προτάσεις : α) 480 : 8 = ν, β) (35 + 25) : 4 =ν, γ)(40 - 25) Χ 20 = ν

Πίνακας 2: Παραδείγματα έργων κατασκευής προβλήματος

Λεκτική μαθηματική κατάσταση: Η λεκτική μαθηματική κατάσταση περιλάμβανε ένα πρόβλημα από το οποίο έλειπε η ερώτηση. Οι μαθητές καλούνταν να κατασκευάσουν τρία προβλήματα, που θα μπορούσαν να απαντηθούν με βάση τα δεδομένα της συγκεκριμένης μαθηματικής κατάστασης, μετατρέποντας έτσι την κατάσταση σε πρόβλημα.

Ιστόγραμμα: Το ιστόγραμμα που δόθηκε στους μαθητές αναφερόταν στις προτιμήσεις των παιδιών ενός σχολείου στα αθλητικά. Το ζητούμενο ήταν η κατασκευή τριών προβλημάτων, τα οποία θα μπορούσαν να λυθούν με βάση τα δεδομένα.

Δοσμένο πρόβλημα: Το τρίτο έργο του δοκιμίου περιλάμβανε ένα δοσμένο πρόβλημα, το οποίο τα υποκείμενα καλούνταν να τροποποιήσουν με σκοπό να κατασκευάσουν τρία νέα προβλήματα.

Αριθμητικές προτάσεις: Στο τέταρτο έργο δίνονταν τρεις αριθμητικές προτάσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας, οι οποίες περιλάμβαναν τις τέσσερις πράξεις των ακεραίων. Οι μαθητές καλούνταν να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα για κάθε μία από αυτές τις προτάσεις. Σκοπός του έργου αυτού ήταν να διερευνηθεί η ικανότητα των παιδιών να κατασκευάζουν προβλήματα με βάση τυπικές μαθηματικές καταστάσεις.

Αποτελέσματα

Οι συντελεστές συσχέτισης της επίδοσης των μαθητών στα επιμέρους έργα κατασκευής και στο σύνολό τους ήταν σε όλες τις περιπτώσεις ψηλοί ($r>0,7$, $p<0,01$). Ψηλοί ήταν και οι συντελεστές συσχέτισης της ικανότητας των μαθητών στην κατασκευή προβλήματος και της επίδοσής τους στα προβλήματα πράξεων ($r=0,862$, $p<0,01$) και διαδικασίας ($r=0,886$, $p<0,01$). Τα πιο πάνω αποτελούν ένδειξη για την καταλληλότητα των έργων που επιλέγηκαν στα δύο δοκίμια. Επιπλέον διαπιστώθηκε σημαντική θετική σχέση (Πιν. 3) μεταξύ της επίδοσης των μαθητών στη λύση προβλήματος και στην κατασκευή προβλήματος ($r=0,572$, $p<0,01$), ως επίσης και μεταξύ της ικανότητας των μαθητών στην κατασκευή προβλήματος και της επίδοσής τους στην επίλυση προβλημάτων πράξεων και διαδικασίας χωριστά ($r=0,534$, $r=0,469$, $p<0,01$, αντίστοιχα). Τα πιο πάνω έρχονται σε συμφωνία με ευρήματα προηγούμενων ερευνών (Silver & Cai, 1996˙ English, 1997b˙ Θεοδούλου, κ.ά., 2000) που υποδεικνύουν ότι υπάρχει σύνδεση ανάμεσα στην ικανότητα κατασκευής και επίλυσης μαθηματικού προβλήματος.

Έργα ΚΜΠ (**p<0,01)	Επίδοση στη λύση προβλήματος
Λεκτική μαθηματική κατάσταση	0,473**
Ιστόγραμμα	0,439**
Δοσμένο πρόβλημα	0,446**
Αριθμητικές προτάσεις	0,472**
Γενική Ικανότητα ΚΜΠ	0,572**

Πίνακας 3: Συντελεστές συσχέτισης της επίδοσης στη λύση προβλήματος και της επίδοσης στα επιμέρους έργα κατασκευής προβλήματος

Για την περαιτέρω διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της ικανότητας επίλυσης και της ικανότητας κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων, οι μαθητές χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες με βάση την επίδοσή τους στο δοκίμιο λύσης προβλήματος: εκείνων με υψηλή επίδοση στην επίλυση προβλήματος (ΥΕΠ), εκείνων με μέση επίδοση (ΜΕΠ) και εκείνων με χαμηλή επίδοση (ΧΕΠ). Στον Πίνακα 4 συνοψίζονται οι επιδόσεις των τριών ομάδων στην κατασκευή προβλήματος, με βάση τις τέσσερις μαθηματικές καταστάσεις.

	ΧΕΠ στη	ΜΕΠ στη	ΥΕΠ στη	Μέση

	ΛΠ	ΛΠ	ΛΠ	επιτυχία
Λεκτική μαθηματική κατάσταση	56	64	69	61
Δοσμένο πρόβλημα	39	51	56	47
Αριθμητικές προτάσεις	51	57	65	56
Ιστόγραμμα	44	52	66	52
Γενική Ικανότητα ΚΠ	35	51	79	51

Πίνακας 4: Ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος και επίδοση στα έργα κατασκευής προβλήματος

Η διαφορά επίδοσης στην κατασκευή προβλήματος ανάμεσα στις τρεις ομάδες μαθητών ήταν στατιστικά σημαντική ($p<0,01$), κάτι που έρχεται σε συμφωνία με παρόμοιες έρευνες (Θεοδούλου, κ.ά., 2000). Επίσης, οι μαθητές με ΥΕΠ είχαν σε στατιστικά σημαντικό βαθμό ($p=0,01$) ψηλότερη επίδοση από τους μαθητές με ΧΕΠ σε όλα τα επιμέρους έργα κατασκευής προβλήματος.

Για να απαντηθεί το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, έγινε σύγκριση της επίδοσης των μαθητών, καθώς και του πλήθους των προβλημάτων που κατασκεύασαν στα διάφορα έργα κατασκευής προβλήματος (Πιν. 5). Και για τα δύο η στατιστική ανάλυση (t-test για συσχετισμένα δείγματα) έδειξε σημαντικές διαφορές ($p<0,01$). Συγκεκριμένα βρέθηκε ότι οι μαθητές είχαν ψηλότερη επίδοση ($\overline{X}=61,43$ με μέγιστο το 100) και κατασκεύασαν περισσότερα προβλήματα (Ν=642) στο έργο με τη λεκτική μαθηματική κατάσταση. Δεύτερη ευκολότερη κατάσταση κατασκευής προβλήματος ήταν η τροποποίηση ενός δοσμένου προβλήματος ($\overline{X}=55,59$, Ν=591)

	$\overline{X}$	SD	Αριθμός προβλημάτων (Ν)
Λεκτική μαθηματική κατάσταση	61,43	18,32	642
Δοσμένο πρόβλημα	55,59	22,32	591
Αριθμητικές προτάσεις	51,44	21,99	564
Ιστόγραμμα	47,37	23,17	557
Γενική Ικανότητα ΚΠ	53,96	15,91	2354

Πίνακας 5: Επίδοση και αριθμός προβλημάτων που κατασκευάστηκαν σε κάθε έργο κατασκευής προβλήματος

Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν περισσότερο να κατασκευάσουν προβλήματα με βάση τις αριθμητικές προτάσεις ($\overline{X}=51,44$, Ν=564), ενώ η κατασκευή προβλήματος από ιστόγραμμα ήταν η πλέον δύσκολη ($\overline{X}=47,37$, Ν=557). Οι διαφορές στον αριθμό προβλημάτων που κατασκευάστηκαν μεταξύ των έργων δοσμένο πρόβλημα, αριθμητικές προτάσεις και ιστόγραμμα δεν ήταν στατιστικά σημαντικές.

Όσον αφορά στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα, θεωρήθηκε αναγκαίο να γίνει αναφορά στη σχέση της ικανότητας ΕΜΠ και της ικανότητας ΚΜΠ με τα επιμέρους κριτήρια, που καθορίζουν την ποιότητα και πολυπλοκότητα των προβλημάτων. Είναι σημαντικό να ελεγχθεί αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος και την ποιότητα και πολυπλοκότητα των προβλημάτων που κατασκευάζουν οι μαθητές. Σε τελική ανάλυση ο σκοπός της μαθηματικής παιδείας δεν περιορίζεται στην ποσότητα, αλλά επεκτείνεται και στην ποιότητα της μαθηματικής παραγωγής των μαθητών. Χρειάζεται δηλαδή να εξετάσουμε καλύτερα τη σχέση ανάμεσα στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος και στα κριτήρια που καθορίζουν την ποιότητα των προβλημάτων που κατασκευάζουν οι μαθητές.

Ένας σημαντικός παράγοντας για τον καθορισμό της ποιότητας των προβλημάτων είναι και ο βαθμός στον οποίο αυτά είναι ρεαλιστικά. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το 84% των προβλημάτων που κατασκευάστηκαν από τα υποκείμενα ήταν ρεαλιστικά, 7% είχαν κάποιο στοιχείο τους μη ρεαλιστικό και 8% ήταν κατά μεγάλο βαθμό μη ρεαλιστικά. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν περισσότερο να κατασκευάσουν προβλήματα στο έργο με τις αριθμητικές προτάσεις, όπου το 37,88% των προβλημάτων δεν ήταν ρεαλιστικά.

Για να διαπιστωθεί αν υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας λύσης προβλήματος και κατασκευής προβλήματος και της ποιότητας των προβλημάτων που κατασκευάζουν, έγινε διερεύνηση όσον αφορά: α) τη μαθηματική πολυπλοκότητα και β) τη γλωσσική πολυπλοκότητα των προβλημάτων που κατασκευάστηκαν.

Για τον καθορισμό της μαθηματικής πολυπλοκότητας των προβλημάτων εξετάστηκε ο αριθμός των πράξεων (σημασιολογικών σχέσεων) που περιέχονται στο πρόβλημα, καθώς επίσης και ο αριθμός των υπολογιστικών βημάτων που χρειάζονται για να λυθεί. Αυτός ο συνδυασμός κρίθηκε αναγκαίος, ώστε να καθοριστεί καλύτερα ο βαθμός μαθηματικής πολυπλοκότητας των προβλημάτων.

Το 42% των προβλημάτων που κατασκευάστηκαν ήταν μιας πράξης, το 56% δύο πράξεων και μόνο το 2% τριών ή περισσοτέρων πράξεων. Επίσης, το 37% απαιτούσαν ένα υπολογιστικό βήμα για να λυθούν, 42% δύο και 21% τρία ή περισσότερα υπολογιστικά βήματα. Μόνο 5% των μαθητών δεν κατάφεραν να γράψουν πρόβλημα με δύο ή περισσότερες πράξεις. Το 5% των μαθητών έγραψαν ένα πρόβλημα με περισσότερες από μια πράξεις και το 12% δύο προβλήματα με περισσότερες από μια πράξεις. Το 77% των μαθητών κατάφεραν να γράψουν τρία ή περισσότερα προβλήματα με πολύπλοκη μαθηματική δομή στα τρία πρώτα έργα του δοκιμίου (εκτός του έργου με τις μαθηματικές προτάσεις), κάτι που έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα παρόμοιας έρευνας των Silver and Cai (1996). Αυτό υποδεικνύει ότι η πλειοψηφία των μαθητών Στ΄ τάξης δημοτικού έχουν την ικανότητα να γράφουν προβλήματα με σχετικά πολύπλοκη μαθηματική δομή. Η διαπίστωση των Silver and Cai (1996) και των Philippou et al, (2001) πως η πολυπλοκότητα των προβλημάτων αυξάνεται προχωρώντας από το πρώτο προς το τρίτο πρόβλημα που κατασκεύασε κάθε υποκείμενο, επιβεβαιώνεται και από τα ευρήματα της παρούσας έρευνας, μόνο για το έργο με τη Λεκτική Μαθηματική Κατάσταση. Για το συγκεκριμένο έργο σε ποσοστό 37% των περιπτώσεων το τρίτο πρόβλημα ήταν πιο πολύπλοκο από το πρώτο.

Η ανάλυση διασποράς ANOVA έδειξε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ($p<0,01$) μεταξύ των μέσων όρων των τριών ομάδων μαθητών, με χαμηλή, μέση και ψηλή επίδοση στη λύση προβλήματος, που αφορούν στον αριθμό πράξεων, καθώς και υπολογισμών που περιέχουν τα προβλήματα που κατασκευάζουν. Οι ικανότεροι στη λύση προβλήματος μαθητές κατασκευάζουν προβλήματα με πολυπλοκότερη μαθηματική δομή, που περιέχουν περισσότερες σημασιολογικές σχέσεις και απαιτούν περισσότερα υπολογιστικά βήματα για να λυθούν.

Η γλωσσική πολυπλοκότητα των προβλημάτων καθορίστηκε με βάση την ερώτηση που περιέχει το κάθε πρόβλημα (ερώτηση υπό περιορισμό, σχεσιακή ερώτηση ή ερώτηση ανάθεσης). Όπως φαίνεται στον Πίνακα 6 τα περισσότερα προβλήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές ήταν με ερωτήσεις ανάθεσης, ενώ σε ελάχιστα οι ερωτήσεις ήταν σχεσιακές και υπό περιορισμό. Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται σε συμφωνία με άλλες έρευνες (Silver & Cai, 1996˙ Philippou et al, 2001), οι οποίες φανερώνουν τη δυσκολία των υποκειμένων να κατασκευάσουν προβλήματα με σχεσιακές και ερωτήσεις υπό περιορισμό. Η ανάλυση διασποράς ANOVA έδειξε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ($p= 0,01$) μεταξύ των μέσων όρων των μαθητών με χαμηλή, μέση και ψηλή επίδοση στη λύση προβλήματος και του είδους των ερωτήσεων που κατασκεύασαν. Οι μαθητές με ψηλή επίδοση στη λύση προβλήματος κατασκευάζουν περισσότερα προβλήματα με σχεσιακές και ερωτήσεις υπό περιορισμό. Διαφορές παρατηρήθηκαν και ανάμεσα στα έργα κατασκευής προβλήματος. Οι μαθητές κατασκεύασαν περισσότερα προβλήματα με σχεσιακές και ερωτήσεις υπό περιορισμό στο ιστόγραμμα και στη λεκτική μαθηματική κατάσταση.

	Λεκτική μαθημ. κατάσταση	Ιστό-γραμμα	Δοσμένο πρόβλημα	Αριθμητ. προτάσεις	Σύνολο
Ανάθεσης	80%	66%	96%	97%	86%
Σχεσιακή	17%	31%	2%	2%	12%
Υπό περιορισμό	3%	3%	2%	1%	2%

Πίνακας 6: Είδος ερώτησης και έργα κατασκευής προβλήματος

Συζήτηση

Το πρώτο εύρημα της έρευνας ήταν η ύπαρξη θετικής σχέσης ανάμεσα στην ικανότητα λύσης και την ικανότητα κατασκευής προβλήματος. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνει προηγούμενα ευρήματα και βρίσκεται σε αρμονία με το επιχείρημα του Kilpatrick (1987), ότι η ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν προβλήματα είναι ένδειξη της ικανότητάς τους να λύνουν προβλήματα. Έρευνα των Silver and Cai (1996) έδειξε ότι οι ικανότεροι στη λύση προβλήματος μαθητές γυμνασίου κατασκεύασαν περισσότερα και πολυπλοκότερα προβλήματα. Σε ανάλογα αποτελέσματα κατέληξε και η English (1997b, 1998) με παιδιά πρώτης γυμνασίου και τρίτης δημοτικού. Βρήκε ότι η ικανότητα λύσης, τόσο πρωτότυπων προβλημάτων όσο και προβλημάτων ρουτίνας, σχετίζεται με την ικανότητα κατασκευής προβλημάτων από ανοικτού τύπου καταστάσεις. Τα ευρήματα αυτά ενισχύουν την άποψη ότι η κατασκευή μαθηματικού προβλήματος πρέπει να αποτελεί αναγκαίο και αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Το εύρημα ότι ήταν πιο δύσκολο για τα παιδιά να κατασκευάσουν προβλήματα από ιστόγραμμα παρά με βάση μια λεκτική κατάσταση ή ένα δοσμένο πρόβλημα χρήζει εκτενέστερης ερευνητικής εξέτασης. Η ευκολία στην κατασκευή προβλήματος από λεκτική κατάσταση παρά από ιστόγραμμα μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι πριν την κατασκευή απαιτείται η μετάφραση των δεδομένων από τη γραφική σε λεκτική μορφή. Είναι ένα πρόσθετο βήμα που καθιστά το έργο πιο σύνθετο.

Η διαπίστωση ότι οι ικανότεροι στη λύση προβλήματος μαθητές κατασκευάζουν προβλήματα με πολυπλοκότερη μαθηματική και γλωσσική δομή, αποτελεί αξιόλογο εύρημα, το οποίο επιβεβαιώνει προηγούμενες έρευνες (Silver & Cai, 1996˙ English, 1997). Το σχέδιο αξιολόγησης των προβλημάτων, που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα και που ενσωματώνει πολλά στοιχεία από προηγούμενες έρευνες (Silver & Cai, 1996˙ English, 1997b ˙ Philippou et al, 2001), μπορεί να αποτελέσει ένα αξιόπιστο εργαλείο για τους παιδαγωγούς μαθηματικών και τους ερευνητές για την εξέταση της ποιότητας και πολυπλοκότητας των προβλημάτων που κατασκευάζονται από τους μαθητές.

Από την πλευρά των παιδαγωγών, ο ψηλός βαθμός συσχέτισης των στοιχείων που καθορίζουν την ποιότητα και πολυπλοκότητα των προβλημάτων (όπως είναι η ρεαλιστικότητά τους, η μαθηματική και η γλωσσική τους δομή) με την ικανότητα των υποκειμένων να λύσουν προβλήματα, μπορεί να αποτελέσει κίνητρο, αλλά και οδηγό, ώστε να ενσωματώσουν στη διδασκαλία τους δραστηριότητες που να στοχεύουν στη βελτίωση των ικανοτήτων των μαθητών που σχετίζονται με τα στοιχεία αυτά.

Τα συμπεράσματα της έρευνας μπορούν να αποτελέσουν βάση για τη διδασκαλία της κατασκευής προβλήματος. Συγκεκριμένα, δείχνουν ότι είναι προτιμότερο να αρχίζει η διδασκαλία με δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων από λεκτικές μαθηματικές καταστάσεις και τροποποίηση δοσμένου προβλήματος και να επεκτείνεται σε δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων από αριθμητικές προτάσεις. Οι μαθητές πρέπει να ενθαρρύνονται να κατασκευάζουν προβλήματα σε κάθε ευκαιρία. Έτσι θα αποκτήσουν πιο θετικές στάσεις απέναντι στα μαθηματικά και καλύτερη κατανόηση των διάφορων μαθηματικών εννοιών.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Brown, S.I., & Walter, M.I. (1990). *The art of problem posing.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 401-421.

Cai, J., & Hwang, S. (2003). A perspective for examining the link between problem posing and problem solving. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (eds.). *Proceedings of the 2003 joint meeting of PME and PMENA, vol. 3*, (pp. 103-110). Honolulu: University of Hawai'i.

English, L. D. (1997b). Development of seventh-grade students' problem posing. In E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the PME 21, vol. II* (pp. 241-248). Helsinki.

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29* (1), 83-106.

Gonzales, N. A. (1998). A blueprint for problem posing. In *School Science and Mathematics, 98* (8), 448-456.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Menon, R. (1996). Mathematical communication through student-constructed questions. *Teaching Children Mathematics, 2* (9), 530-533.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Philippou, G., Charalampous, C., & Christou, C. (2001). Efficacy in problem posing and teaching problem posing. *Proceedings of the PME 25, vol. 4* (pp. 41-48). Netherlands.

Polya, G. (1957). How to solve it (2nd ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Silver, E. A. (1993). On mathematical problem posing. In I. Hirabayashi, N. Nohada, K. Shigematsu, & F. L. Lin (eds.) *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* vol. III (pp. 66-85). Tsukuba, Japan: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by Middle School students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (5), 521-539

Θεοδούλου, Ρ., Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2000). Η ικανότητα κατασκευής και ικανότητα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. Στα: Πρακτικά 17ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας. Αθήνα.