

Καινοτόμες διδακτικές προσεγγίσεις σε διαφορετικές χώρες

Μαριάννα Τζεκάκη Γιώργος Μπάρμπας

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
tzekaki@nured.auth.gr, gbarbas@nured.auth.gr

Περίληψη

Στην εισήγηση αυτή παρουσιάζονται ορισμένα από τα αποτελέσματα του δεύτερου χρόνου υλοποίησης του προγράμματος «Εφαρμογή καινοτόμων προσεγγίσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών» (IATM, “Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics”, Erasmus/Comenius). Το πρόγραμμα πραγματοποιείται με τη συνεργασία τεσσάρων ευρωπαϊκών Πανεπιστημίων και επιδιώκει να φέρει σε επαφή δασκάλους και εκπαιδευτές από διαφορετικές ευρωπαϊκές χώρες, με την ανάπτυξη καινοτόμων δραστηριοτήτων, την εφαρμογή τους στη σχολική τάξη και την ανταλλαγή εμπειριών.

Συγκεκριμένα παρουσιάζονται ορισμένες από τις προτεινόμενες δραστηριότητες και παρατηρήσεις σχετικά με τον τρόπο που υλοποιήθηκαν στις τάξεις των διαφορετικών χωρών

Λέξεις κλειδιά

Μαθηματικές δραστηριότητες διδακτικές εφαρμογές διαχείριση μαθηματικού νοήματος

Εισαγωγή

Το πρόγραμμα «Εφαρμογή καινοτόμων προσεγγίσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών» (IATM, “Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics”, Erasmus/Comenius), υλοποιείται από το 2003 με τη συνεργασία του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης και των Charles University of Prague, University of Derby and Cassell University. Σκοπός του προγράμματος είναι η ανάπτυξη ευρωπαϊκού επιμορφωτικού υλικού που να προέρχεται από την ανάπτυξη και την εφαρμογή καινοτόμων δραστηριοτήτων στις σχολικές τάξεις διαφορετικών ευρωπαϊκών χωρών, την καταγραφή και την ανταλλαγή εμπειριών ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς των χωρών αυτών.

Στη διάρκεια του πρώτου χρόνου, συγκροτήθηκαν ομάδες ερευνητών και εκπαιδευτικών οι οποίες, σε κάθε ίδρυμα, σχεδίασαν και ανέπτυξαν δραστηριότητες για διαφορετικές μαθηματικές ενότητες (Γεωμετρία και Πολύγωνα, Ανάλυση, Ανάπτυξη Αλγεβρικής Σκέψης, Αριθμητικές Έννοιες, Στερεομετρία) (Tzekaki & Littler, 2004). Το υλικό αυτό ανταλλάχθηκε και συζητήθηκε από όλες τις ομάδες. Στη διάρκεια του δεύτερου χρόνου, οι ομάδες αντάλλαξαν τις δραστηριότητες και κατέγραψαν την εφαρμογή τους στα διαφορετικά σχολικά περιβάλλοντα.

Ένα μέρος αυτής της καταγραφής αυτής θα παρουσιαστεί στο κείμενο που ακολουθεί.

Θεωρητικό πλαίσιο και στόχοι του προγράμματος

Πολλές επιμορφωτικές διαδικασίες σε δασκάλους και σπουδαστές σε όλη την Ευρώπη, συστήνουν την χρήση των κονστрукτιβιστικών μεθόδων διδασκαλίας. Παράλληλα, στη βάση αυτού του προσανατολισμού, πραγματοποιούνται σημαντικές αλλαγές στα Προγράμματα Σπουδών. Οι αλλαγές αυτές και οι σύγχρονες διδακτικές προτάσεις

αντιστοιχούν στις κοινωνικές απαιτήσεις για πολίτες που να μπορούν να προσαρμοστούν γρήγορα στις επικείμενες αλλαγές, να λύνουν προβλήματα, να είναι εύκαμπτοι στη σκέψη τους και να χρησιμοποιούν τη μαθηματική γνώση τους σε διαφορετικές καθημερινές ή επαγγελματικές καταστάσεις.

Οι εκπαιδευτές και οι εκπαιδευτικές διαδικασίες ενθαρρύνουν τους δασκάλους να αλλάξουν τον τρόπο διδασκαλίας των Μαθηματικών σε μορφές που επιτρέπουν στους μαθητές να αποκτήσουν τις μαθηματικές γνώσεις και ικανότητες που οι σύγχρονες κοινωνίες επιζητούν. Μέχρι πρόσφατα όμως η διδασκαλία των Μαθηματικών κυριαρχείται από τις καθιερωμένες μορφές μετωπικής διδασκαλίας οι οποίες μεταφέρουν στους μαθητές μια φορμαλιστική γνώση χωρίς κατανόηση και αποκόπτουν τα Μαθηματικά από τα ιδιαίτερα τους χαρακτηριστικά και τις εφαρμογές τους στα καθημερινά προβλήματα. Η Ευρωπαϊκή Ένωση ενθαρρύνει προσπάθειες ανταλλαγών ερευνητικών αποτελεσμάτων και επιμορφωτικών μεθόδων που θα βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να αλλάξουν τις διδακτικές τους προσεγγίσεις σε όλες τις χώρες.

Η διεθνής έρευνα δείχνει ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν σημαντικές δυσκολίες να αλλάξουν τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας (Fennema & Neslon, 1997). Πολλές έρευνες επιβεβαιώνουν ότι οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να εγκαταλείψουν τους τρόπους με τους οποίους έχουν συνηθίσει να λειτουργούν ακόμα κι αν τα προγράμματα σπουδών και οι επιμορφωτές τους προτείνουν ενδιαφέροντα και δημιουργικά μαθησιακά περιβάλλοντα και έργα (Desforjes & Cockburn, 1987, Yackel, 1994, Groves, et als., 2000).

Αντίστοιχες έρευνες στην Ελλάδα δείχνουν ότι οι δάσκαλοι έχουν την τάση να εισάγουν τις παραδοσιακές τους πρακτικές στις νέες μορφές διδασκαλίες, εντοπίζοντας μορφές επικοινωνίας που επαναλαμβάνονται ή διατηρούνται παρά την αλλαγή στην οργάνωση του μαθήματος και τη δράση των μαθητών (Sakonidis et als., 2001).

Ερευνητές που ασχολούνται με την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών υποστηρίζουν ότι εμπειρίες μέσα από τις οποίες οι εκπαιδευτικοί μπορούν να εξετάσουν τις πρακτικές τους και έχουν την ευκαιρία να αναστοχαστούν πάνω σε αυτές, δημιουργεί καλές προϋποθέσεις και διευκολύνει αλλαγές στις διδακτικές προσεγγίσεις που εφαρμόζουν (Aichele & Caste, 1994). Επίσης, η εφαρμογή στη σχολική τάξη κατάλληλα σχεδιασμένων δραστηριοτήτων επιτρέπει τους ερευνητές και τους σχεδιαστές της μαθηματικής εκπαίδευσης να μελετήσουν τα αποτελέσματα στις μαθηματικές γνώσεις των μαθητών όπως και τη διαχείριση των μαθηματικών νοημάτων που πραγματοποιείται.

Στη βάση της προσέγγισης αυτής σχεδιάστηκε και εφαρμόζεται το πρόγραμμα ΠΑΤΜ που συνδυάζει τον σχεδιασμό καινοτόμων δραστηριοτήτων με την εφαρμογή στην τάξη και την ανταλλαγή εμπειρίας από διαφορετικές χώρες. Εκτός από τα οφέλη της εμπειρίας που μοιράζεται, οι δάσκαλοι έχουν την ευκαιρία να δοκιμάσουν καινοτόμες διδακτικές προτάσεις και να αντιληφθούν τα οφέλη μέσα από μία πολυεθνική συνεργασία.

Πιο συγκεκριμένα το ΠΑΤΜ έχει ως στόχους να ενθαρρύνει τους δασκάλους και τους εκπαιδευτές από τις ευρωπαϊκές χώρες που αναφέρθηκαν να βελτιώσουν τις γνώσεις τους στις νέες διδακτικές μορφές, βοηθώντας τους:

- να δοκιμάσουν διδακτικές προσεγγίσεις μέσα στην τάξη, δουλεύοντας με υλικό που έχει προετοιμαστεί στις διαφορετικές χώρες,

- να διαπιστώσουν τις αλλαγές που υφίσταται ο ρόλος τους και η λειτουργία των μαθητών στην τάξη όταν εφαρμόζουν αυτές τις διδακτικές μορφές
- να καταγράψουν τις εμπειρίες που αποκομίζουν από τις πειραματικές διδασκαλίες,
- να αξιολογήσουν τα αποτελέσματα των διδασκαλιών αυτών σε άτομα και ομάδες,
- να αναπτύξουν δεσμούς πέρα από τα εθνικά σύνορα και να επιστρέψουν αυτές τις ιδέες και τις εμπειρίες και στις δικές τους χώρες

Με τον τρόπο αυτό το πρόγραμμα στοχεύει να δημιουργήσει ένα έντυπο και ηλεκτρονικό εκπαιδευτικό υλικό που θα προέρχεται από διαφορετικές ευρωπαϊκές χώρες και θα δημοσιευθεί και διακινηθεί σε όλη την Ευρώπη (Proposal ΠΑΤΜ, 2003).

Στην παρούσα εισήγηση θα παρουσιάσουμε ένα σκέλος από τους παραπάνω στόχους και πιο συγκεκριμένα την σύγκριση εφαρμογής καινοτόμων διδακτικών στρατηγικών με κοινές δραστηριότητες από διαφορετικούς δασκάλους, σε διαφορετικές χώρες. Πιο συγκεκριμένα θα αναλύσουμε:

- Τα κοινά ή διαφορετικά χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων και του τρόπου με τον οποίο παρουσιάστηκαν και λειτούργησαν στην τάξη.
- Τα κοινά ή διαφορετικά χαρακτηριστικά των μαθητών στη δράση που ανέπτυξαν και στα μαθηματικά συμπεράσματα που έβγαλαν.
- Τα κοινά ή διαφορετικά χαρακτηριστικά των εκπαιδευτικών και του τρόπου με τον οποίο εφάρμοσαν τις δραστηριότητες στην τάξη.

Όπως αναφέρθηκε ήδη, οι μαθηματικές ενότητες, ο αριθμός των δραστηριοτήτων που συγκεντρώθηκαν, όπως και ο αριθμός των δασκάλων και ερευνητών που εμπλέκονται στο πρόγραμμα είναι αρκετά μεγάλος. Για το λόγο αυτό περιοριζόμαστε στην παρουσίαση δύο χαρακτηριστικών ενοτήτων γεωμετρίας και άλγεβρας που δοκιμάστηκαν στις συνεργαζόμενες χώρες. Η ανάπτυξη των δραστηριοτήτων του προγράμματος επιδιώκει να φέρει τους μαθητές σε επαφή με έργα που δεν σχετίζονται μόνο με μαθηματικές γνώσεις αλλά διευκολύνουν την ανάπτυξη διαδικασιών και ικανοτήτων (Cobb et al., 1996, Mansfield, 1996).

Η εφαρμογή κοινών μαθηματικών δραστηριοτήτων σε διαφορετικές χώρες επιτρέπει να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί διαχειρίζονται τα μαθηματικά νοήματα που αναδεικνύονται από αυτές. Πολλοί ερευνητές τονίζουν ότι τα παιδιά μαθαίνουν τι είναι σημαντικό για τα Μαθηματικά παρατηρώντας τα στοιχεία και τους τύπους των απαντήσεων που υποδεικνύονται από τον δάσκαλο μέσα στην τάξη. Με την έννοια αυτή ο ρόλος του εκπαιδευτικού στην οργάνωση της μαθηματικής γνώσης είναι αποφασιστικής σημασίας (Steinbring, 1997, Kaldrimidou et als., 2000)

Μεθοδολογία του προγράμματος

Αναφέρθηκε ήδη ότι τον πρώτο χρόνο υλοποίησης του προγράμματος συγκροτήθηκαν πέντε ερευνητικές ομάδες στα τέσσερα πανεπιστήμια με τη συμμετοχή ερευνητών και συνεργαζόμενων εκπαιδευτικών. Κάθε ομάδα που αποτελείται από δύο ερευνητές και τρεις συνεργαζόμενους εκπαιδευτικούς προετοίμασε δραστηριότητες για μία θεματική ενότητα, τις οποίες δοκίμασε πιλοτικά στις τάξεις της αντίστοιχης χώρας. Οι ομάδες δεν απόκλεισαν συνεργασίες με σπουδαστές ή άλλους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν εθελοντικά στις εφαρμογές αυτές.

Κατά το δεύτερο χρόνο υλοποίησης του προγράμματος, πραγματοποιήθηκε ανταλλαγή δραστηριοτήτων και από κάθε χώρα επιλέχθηκαν ενότητες που δοκιμάστηκαν στην πράξη. Οι δοκιμαστικές αυτές εφαρμογές βιντεοσκοπήθηκαν και μέρος τους θα αναλυθεί για τις ανάγκες του προγράμματος.

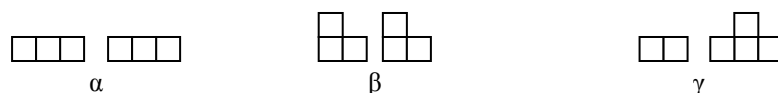
Από τις εφαρμογές αυτές θα παρουσιάσουμε τις δραστηριότητες που προτείνονται στην ενότητα της Γεωμετρίας για τα αναπύγματα του κύβου, και τις δραστηριότητες που προτείνονται στην ενότητα της Άλγεβρας με τα προβλήματα που οδηγούν σε γενικεύσεις, όπως και τις διδασκαλίες τους στην Ελλάδα, Αγγλία και Τσεχία. Οι δραστηριότητες προτάθηκαν σε μαθητές Ε', ΣΤ' τάξης και Α' Γυμνασίου. Ανάλογα με τη χώρα, οι μαθητές δούλεψαν σε ομάδες, δυάδες ή και ατομικά. Στην Ελλάδα, σε όλες τις τάξεις και σε όλες τις δραστηριότητες οι μαθητές δούλεψαν σε ομάδες των τεσσάρων ή πέντε ατόμων.

Για τις ενότητες αυτές έχουν συγκεντρωθεί περισσότερες από 15 καταγεγραμμένες διδασκαλίες για τις οποίες ακολουθεί η ανάλυση των δραστηριοτήτων που προτάθηκαν και η παρουσίαση συνοπτικών παρατηρήσεων από την εφαρμογή τους στις τρεις χώρες, στους άξονες που προαναφέρθηκαν.

Ια. Δραστηριότητες για τα αναπύγματα κύβου

Το ανάπτυγμα κύβου είναι μια σημαντική έννοια στη διδασκαλία της Γεωμετρίας γιατί εκτός από την επαφή και εμπειρία με τρισδιάστατα αντικείμενα, αναπτύσσει νοερές αναπαραστάσεις για τα γεωμετρικά στερεά, τις ιδιότητες και τους μετασχηματισμούς τους. Πολύ συχνά στη Γεωμετρία, οι μαθητές έρχονται σε επαφή μόνο με τις σχεδιαστικές παραστάσεις των γεωμετρικών στερεών και οπωσδήποτε μόνο με ένα ή δύο αναπύγματα κύβου (Berthelot, & Salin, 1994). Η αντιστοίχιση του κύβου με τα αναπύγματά του βοηθά στην ανάπτυξη των σχέσεων ανάμεσα στα δισδιάστατα και τα τρισδιάστατα αντικείμενα και στην αποσαφήνιση εννοιών όπως ακμή, έδρα, παράλληλες και οι καθετότητες εδρών, επιφάνεια στερεού κ.α., σημαντικές στην κατανόηση γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων (Herschkowitz et als. 1996).

Στις προτεινόμενες για το ανάπτυγμα κύβου δραστηριότητες (που σχεδιάστηκαν από το Charles University of Prague), δίνονται στους μαθητές σχήματα όπως τα παρακάτω και τους ζητείται να τα τοποθετήσουν μαζί με όσους περισσότερους τρόπου μπορούν, ώστε το σχήμα που θα δημιουργηθεί να αποτελεί το ανάπτυγμα ενός κύβου. Σημειώνεται ότι για τον συνδυασμό α, οι λύσεις είναι δύο για τον συνδυασμό β, έξη και για τον συνδυασμό γ, δύο ακόμα. Στο σύνολο τα προτεινόμενα σχήματα δημιουργούν τα δέκα από τα έντεκα αναπύγματα του κύβου.



Οι δραστηριότητες αυτές είναι πλούσιες σε εμπειρίες αναφορικά με τις σχέσεις δισδιάστατων και τρισδιάστατων αντικειμένων, τις ιδιότητές τους (παράλληλες έδρες, παράλληλες ακμές), όπως και τις ιδιότητες των δύο χώρων (συγκρίσεις και μετασχηματισμοί στο επίπεδο και στο χώρο).

Παράλληλα δίνουν ευκαιρίες ανάπτυξης κριτηρίων σύγκρισης (ποια αναπύγματα είναι ίδια), στρατηγικών συνδυασμών και ομαδοποίησης (πόσοι πιθανοί συνδυασμοί, πόσες διαφορετικές κατηγορίες αναπυγμάτων δημιουργούνται) αλλά και διαδικασιών επιβεβαίωσης και ύπαρξης (υπάρχουν άλλοι συνδυασμοί και πώς επιβεβαιώνονται). Οι μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων καλούνται, μετά τις δοκιμές, να παρουσιάσουν με

σχήματα τα πιθανά αναπτύγματα και να λειτουργήσουν με πραγματικές και νοερές αναπαραστάσεις.

Ιβ. Παρατηρήσεις από την εφαρμογή στην τάξη

Οι μαθητές σε όλες τις τάξεις δοκιμάζουν να βρουν τους τρόπους με τους οποίους συνδυάζονται τα προτεινόμενα σχήματα ώστε με τη δίπλωση να δημιουργήσουν κύβο. Λειτουργούν πρακτικά και συγκεκριμένα, κολλώντας, διπλώνοντας και συγκρίνοντας τα αναπτύγματα που βρίσκουν. Στις τάξεις της Ελλάδας, τα παιδιά επιτυγχάνουν να βρουν όλα τα αναπτύγματα, στις τάξεις της Αγγλίας και της Τσεχίας οι λύσεις είναι λιγότερες.

Μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάστηκε στην Αγγλία (με ενθάρρυνση των εκπαιδευτικών) για τον εντοπισμό κριτηρίων σύγκρισης, ενώ στην Ελλάδα, αν και ενθαρρύνεται η αναζήτηση κριτηρίων ύπαρξης και επιβεβαίωσης το τελικό αποτέλεσμα είναι περιορισμένο. Για τα μεγαλύτερα παιδιά στην Ελλάδα ζητούνται διαδικασίες γενίκευσης, ενώ στην Τσεχία το κύριο βάρος πέφτει στην πιο πρακτική προσέγγιση. Ανάλογα με το πρόγραμμα σπουδών που εφαρμόζεται σε κάθε χώρα, η ικανότητα των μαθητών να λειτουργήσουν με πραγματικές και νοερές αναπαραστάσεις κλιμακώνεται, γεγονός που επιβεβαιώνεται και από προηγούμενες έρευνες (Boero, Caruti, 1994). Στην Ελλάδα οι μαθητές διαχειρίζονται με μεγαλύτερη άνεση τα γεωμετρικά νοήματα, ενώ στις άλλες χώρες τα παιδιά λειτουργούν πιο αποτελεσματικά στις συγκρίσεις και ομαδοποιήσεις.

Γενικά τα παιδιά των ηλικιών αυτών δεν επιδιώκουν να εντοπίσουν τρόπους που να τους οδηγούν σε ασφαλή και πιο γενικά συμπεράσματα, όπως πχ. πόσοι είναι οι πιθανοί τρόποι για να κολληθούν τα τρία τρίεδρα, με ποιο γενικό κανόνα μπορούν να συγκριθούν νέες λύσεις με τις παλιές, κλπ.

Σε επίπεδο διδακτικής διαδικασίας, οι εκπαιδευτικοί δεν διαφοροποιούνται ως προς τις χώρες, αλλά ως προς την εμπειρία που έχουν σε τέτοιας μορφής διδασκαλίες. Οι εκπαιδευτικοί με προηγούμενη εμπειρία σε δραστηριότητες στην τάξη ενθαρρύνουν την αναζήτηση των μαθητών, παρεμβαίνουν λίγο, ζητούν από τους μαθητές να ελέγξουν τις λύσεις τους και προκαλούν στην τάξη δημιουργικό διάλογο. Εκπαιδευτικοί με λιγότερη εμπειρία στις κονστρουκτιβιστικές προσεγγίσεις επιδιώκουν να προσανατολίσουν τη δράση των μαθητών, δίνουν συχνά βοήθεια και διορθώνουν τις λύσεις των μαθητών.

Συνοπτικά μπορεί να επισημανθεί ότι οι άγγλοι εκπαιδευτικοί (που συνεργάζονται στο πρόγραμμα) είναι λιγότερο παρεμβατικοί αλλά δεν επιδιώκουν να οδηγηθούν οι μαθητές σε κάποιο σαφές μαθηματικό νόημα. Οι τσέχοι εκπαιδευτικοί είναι περισσότερο παρεμβατικοί αλλά επιδιώκουν να αναδειχθεί κάποιο συγκεκριμένο μαθηματικό νόημα μέσα από την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων. Οι έλληνες εκπαιδευτικοί κινούνται ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διαφοροποίηση των εκπαιδευτικών ως προς το τι αποτελεί «μαθηματικά σημαντικό» στην προτεινόμενη δραστηριότητα, γεγονός που προκύπτει από το τι ενθαρρύνουν τους μαθητές να κάνουν και που οδηγούν τη συζήτηση στην τάξη. Ορισμένοι ενδιαφέρονται απλά για την ενεργοποίηση των μαθητών και την εύρεση λύσεων, άλλοι για την αναζήτηση όλων των λύσεων και τέλος ένας μικρός αριθμός για τη γενίκευση του τρόπου εύρεσης λύσεων και την κατηγοριοποίησή τους, όπως και το πέρασμα από τα πραγματικά αντικείμενα στις αναπαραστάσεις και την ανάπτυξη χωρικού συλλογισμού.

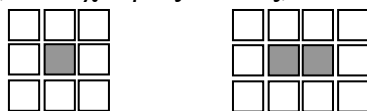
Συμπερασματικά η ίδια δραστηριότητα σε διαφορετικές χώρες και σε διαφορετικές τάξεις, δεν λειτουργεί διαφορετικά μόνο αναφορικά με το πρόγραμμα σπουδών και τον προσανατολισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης της χώρας και την εμπειρία των εκπαιδευτικών και μαθητών σε τέτοιες μορφές διδακτικής λειτουργίας, αλλά επίσης και αναφορικά με το μαθηματικό νόημα που κατά την αντίληψη του εκπαιδευτικού επιδιώκεται να αναπτυχθεί από τη δραστηριότητα αυτή, επιβεβαιώνοντας με τον τρόπο αυτό τις αιτιάσεις που υποστηρίζουν ότι ο ρόλος του εκπαιδευτικού στην οργάνωση της μαθηματικής γνώσης είναι ιδιαίτερα σημαντικός.

Πα. Δραστηριότητες με προβλήματα γενίκευσης

Η γενίκευση είναι θεμελιακή διαδικασία των Μαθηματικών και η ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν επαναλαμβανόμενες μορφές (patterns) και να τις περιγράφουν με γενικό κανόνα (τύπο ή σχέση) είναι σημαντική στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Επαναλαμβανόμενες μορφές εντοπίζονται σε όλες τις μορφές μαθηματικής δραστηριότητας, στην αριθμητική, την άλγεβρα, τη γεωμετρία, τη στατιστική, ακόμα και στα μαθηματικά παιχνίδια. Στα παλαιότερα προγράμματα σπουδών, τέτοιες προσεγγίσεις εμφανίζονταν κυρίως στις αριθμητικές και γεωμετρικές σειρές και παρουσιάζονταν σε μαθητές μεγάλων ηλικιών. Στα σύγχρονα προγράμματα όμως οι μορφές αυτές εντάσσονται σε ένα ευρύτερο πλαίσιο και αναπτύσσονται από τις μικρότερες τάξεις (με σχήματα ή αριθμούς), στοχεύοντας στην ανάπτυξη ικανότητας αναγνώρισης ομοιοτήτων και επαναλήψεων και την έκφρασή τους με γενικευμένη και συμβολική μορφή, με λέξεις ή άλλες μορφές παράστασης. Οι μαθητές έρχονται σε επαφή και αναπτύσσουν την ικανότητα παρατήρησης επαναλαμβανόμενων μορφών πολύ πριν έρθουν σε επαφή με τις μαθηματικές εκφράσεις που περιγράφει ένας τύπος, μια αλγεβρική συνάρτηση ή μια άλλη συμβολική σχέση. Με την έννοια αυτή προβλήματα που αναπτύσσουν αυτή την ικανότητα εντάσσονται στον άξονα ανάπτυξης αλγεβρικής σκέψης (Bell, 1996, Arzarello, 1998).

Στις προτεινόμενες για τα προβλήματα γενίκευσης δραστηριότητες (που σχεδιάστηκαν από το University of Derby), δίνονται στους μαθητές καταστάσεις όπως οι παρακάτω:

- Τέσσερα σπέρτα σχηματίζουν ένα τετράγωνο. Στη συνέχεια, επτά σπέρτα σχηματίζουν δύο τετράγωνα, δέκα σπέρτα τρία τετράγωνα κλπ. Πόσα σπέρτα χρειάζονται για τέσσερα τετράγωνα, δέκα τετράγωνα, εκατό τετράγωνα, n τετράγωνα;
- Γύρω από ένα σιντριβάνι που έχει επιφάνεια όσο μία πλάκα, τοποθετούνται οκτώ πλάκες. Αν το σιντριβάνι είχε επιφάνεια όσο δύο πλάκες, πόσες πλάκες θα τοποθετούσαμε γύρω του; Αν είχε τρεις πλάκες, δέκα πλάκες, εκατό πλάκες, n πλάκες;



Για τους μαθητές οι καταστάσεις αυτές είναι πολύ ιδιαίτερες γιατί ενώ δεν εντάσσονται σε κανένα συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο τους προτείνουν ανοιχτά προβλήματα για λύση και γενίκευση. Μπορούν να πειραματιστούν με αντικείμενα ή με σχήματα και να χρησιμοποιήσουν πίνακες με αριθμητικά αποτελέσματα, αλλά καλούνται να απαντήσουν και σε ένα ερώτημα γενίκευσης για το οποίο απαιτείται η εύρεση ενός κανόνα ή ακόμα και ο εντοπισμός ενός τύπου. Συχνά η εύρεση περισσότερων του ενός τύπων τους οδηγεί σε πράξεις και αλγεβρικές συγκρίσεις.

Από τους μαθητές των μικρότερων τάξεων δεν ζητείται η γενίκευση για n όρους. Οι μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων καλούνται, μετά τις αριθμητικές απαντήσεις, να παρουσιάσουν τύπους και να τους συγκρίνουν.

Πβ. Παρατηρήσεις από την εφαρμογή στην τάξη

Οι μαθητές όλων των τάξεων κατάφεραν με ευκολία, αρχικά υπολογίζοντας με τα σπίρτα στο πρώτο ή τετράγωνο στο δεύτερο πρόβλημα, να εντοπίσουν λύσεις για μεγαλύτερα σχήματα (10 τετράγωνα ή 10 πλάκες), δουλεύοντας ως ένα σημείο με άμεσες μετρήσεις και κάνοντας στη συνέχεια νοερούς υπολογισμούς. Αν και είχαν, ανάλογα με τη χώρα και το πρόγραμμα σπουδών, μεγαλύτερη ή μικρότερη εμπειρία σε τέτοιας μορφής προβλήματα (στο αγγλικό πρόγραμμα τα patterns ξεκινούν από τις μικρότερες τάξεις, ενώ δεν προβλέπονται στο τσέχικο και ελληνικό πρόγραμμα), όλα τα παιδιά κατάφεραν να απαντήσουν στα συγκεκριμένα ερωτήματα.

Το ενδιαφέρον σημείο παρατήρησης βρίσκεται στα ερωτήματα γενίκευσης όπου κάποιες λύσεις των μαθητών μπορούσαν να γενικευθούν άμεσα, ενώ κάποιες άλλες έπρεπε να ανασχηματισθούν. Μερικοί μαθητές δυσκολεύονται να αναδιοργανώσουν τον κανόνα τους για τα σπίρτα (+3) ή για τα πλακάκια (8+2) σε ένα κανόνα που μπορεί να γενικευθεί. Οι διαφορές που εντοπίζονται ανάμεσα στους μαθητές στις διαφορετικές χώρες φαίνεται να συνδέονται με τις διαφορετικές εμπειρίες τους. Στην Αγγλία, οι μαθητές με μεγαλύτερη άνεση σε τέτοια προβλήματα εντοπίζουν ένα γενικευμένο κανόνα ή λύσεις που να οδηγούν σε αυτό, ενώ στην Ελλάδα όπως και στην Τσεχία, εμφανίζονται μαθητές οι οποίοι όταν έφταναν στα ερωτήματα που απαιτούσαν γενίκευση συνήθως εγκατέλειπαν τις εμπειρικές στρατηγικές και δοκίμαζαν ένα «άλμα» έξω από την ελεγχόμενη με δικούς τους λογικούς όρους επεξεργασία. Λειτουργώντας αρκετά μηχανιστικά, επιχειρούσαν να χρησιμοποιήσουν μαθηματικούς τύπους και αλγορίθμους που τους ήταν γνωστοί και «ταίριαζαν» στην περίπτωση, ειδικά όταν έπρεπε να απαντήσουν για την περίπτωση του n , γεγονός που επιβεβαιώνει έρευνες που επισημαίνουν το διαχωρισμό των Μαθηματικό από την ανθρώπινη εμπειρία και τις εμπειρικές στρατηγικές των παιδιών (Baroody & Ginsburg, 1986, Schoonenfeld, 1985).

Επίσης ορισμένα από τα μεγαλύτερα παιδιά προτιμούσαν να βρουν ένα πιο σύνθετο τύπο της μορφής $4 + 3(n-1)$ για τα σπίρτα ή $8 + 2(n-1)$ για τα πλακάκια, από το να αναδιοργανώσουν τη λύση τους για να καταλήξουν σε μια πιο απλή μορφή, γεγονός που δημιουργεί σοβαρές δυσκολίες στην σύγκριση με τις αντίστοιχες μορφές $1+3n$ ή $6+2n$ λύσεις. Στο σημείο αυτό επίσης εντοπίζεται διαφορά ανάλογα με την εμπειρία των παιδιών σε αυτής της μορφής τα προβλήματα.

Οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών στα προβλήματα αυτά είναι αρκετά διαφορετικές, γιατί εκτός από τα στοιχεία που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα, τα μαθηματικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων είναι πιο σαφή και η λύση τους μπορεί να θεωρηθεί ότι οδηγεί σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό κανόνα που ορισμένοι εκπαιδευτικοί επιδιώκουν να προβάλλουν.

Για τους άγγλους εκπαιδευτικούς που τα προβλήματα αυτού του τύπου εντάσσονται βαθμιαία στο πρόγραμμα σπουδών τους, δίνεται περισσότερη ελευθερία στα παιδιά να καταλήξουν στα συμπεράσματά τους χωρίς να επιδιώκεται να δοθεί μια συγκεκριμένη κατάλληλη λύση. Κάποιοι από τους έλληνες ή τους τσέχους εκπαιδευτικούς ενθαρρύνουν με περισσότερη έμφαση τα παιδιά να εντοπίσουν ένα κανόνα πιο «λειτουργικό», γεγονός που οδηγεί σε παρεμβάσεις με συνέπεια, όπως αναφέρθηκε, να επιδιώκουν οι μαθητές να βρουν μια κατάλληλη λύση που δεν ελέγχουν. Επίσης

έλληνες και τσέχοι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνουν τους μαθητές να συγκρίνουν τις διαφορετικές τους λύσεις και μέσα από αλγεβρικές πράξεις να καταλήξουν στην ισότητα $[4 + 3(v-1) = 1+3v]$, χωρίς να είναι βέβαιο αν οι μαθητές κατανοούν τη διαδικασία αυτή ως μέρος της λύσης του προβλήματος.

Συμπερασματικά και στην ενότητα αυτή εντοπίζεται μια αβεβαιότητα στους εκπαιδευτικούς για το τι είναι μαθηματικά σημαντικό και η διαχείριση της δραστηριότητας στην τάξη ποικίλει ανάλογα με τις επιλογές που κάνει ο εκπαιδευτικός για το επιδιωκόμενο μαθηματικό συμπέρασμα. Δυσκολεύονται μάλιστα ιδιαίτερα όταν χρειάζεται να συνδυάσουν τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων που δίνουν έμφαση στη διαδικασία και στις μεθόδους επεξεργασίας και διαχείρισης των προβλημάτων γενίκευσης με το νόημα που οι ίδιοι έχουν διαμορφώσει για τον στόχο της σχολικής μαθηματικής εκπαίδευσης, που συνδέεται με την διδασκαλία και εκμάθηση συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών, συμβόλων και τύπων.

Συζήτηση

Οι δραστηριότητες και οι διδασκαλίες που πραγματοποιήθηκαν αποτέλεσαν για τους μαθητές όλων των χωρών μια ενδιαφέρουσα και ευχάριστη εμπειρία εντός του σχολικού ωραρίου αλλά εκτός του προγράμματος του κανονικού τους μαθήματος. Κατά συνέπεια, οι γενικές παρατηρήσεις αφορούν τον τρόπο που λειτουργούν μαθητές και εκπαιδευτικοί σε πειραματικές διδασκαλίες με αυτή τη μορφή και το περιεχόμενο και είναι πιθανό να μην μπορούν να γενικευθούν έξω από το πλαίσιο αυτό.

Τα κοινά ή τα διαφορετικά χαρακτηριστικά της εφαρμογής των διδασκαλιών αυτών στις τρεις χώρες μπορούν να οργανωθούν όχι μόνο ως προς τα διαφορετικά προγράμματα ή τις ιδιαιτερότητες των χωρών, αλλά και ως προς τη μαθηματική εμπειρία των μαθητών σε αντίστοιχες καταστάσεις, την διδακτική εμπειρία των εκπαιδευτικών σε τέτοιες μορφές διδασκαλίας και στις επιλογές που κάνουν για το μαθηματικά σημαντικό μιας διδασκαλίας.

Ως προς τους μαθητές, τα περισσότερα παιδιά σε όλες τις χώρες εμφανίζονται να εμπλέκονται και να δοκιμάζουν να αντιμετωπίσουν τα συγκεκριμένα ερωτήματα κάθε προβλήματος. Τα παιδιά από τάξεις που δουλεύουν αρκετά συχνά με προβλήματα και δραστηριότητες (στην Ελλάδα και στην Αγγλία), κινήθηκαν με μεγαλύτερη άνεση, είχαν προτάσεις, ανέπτυσαν διάλογο και επιχειρήματα.

Αρκετοί μαθητές (όχι όμως το σύνολο) φάνηκε να διαθέτουν τις απαιτούμενες εμπειρικές στρατηγικές για να δώσουν απαντήσεις στα συγκεκριμένα ερωτήματα του κάθε προβλήματος. Λίγοι όμως φάνηκε να διαθέτουν τις αναγκαίες στρατηγικές για να δώσουν απαντήσεις στα ερωτήματα που απαιτούσαν γενίκευση. Ανεξάρτητα από την άνεση ή όχι να αναζητήσουν και να παρουσιάσουν λύσεις, να επιχειρηματολογήσουν ή να τεκμηριώσουν μια απάντηση, που όπως αναφέρθηκε εξαρτάται σημαντικά από την εμπειρία τους σε αυτή τη μορφή διδασκαλίας, τα περισσότερα παιδιά και από τις τρεις χώρες έδειξαν ότι ανάλογα με το πρόβλημα που αντιμετώπιζαν, αναζητούσαν μια αντιστοιχία με τα πιο τυπικά μαθηματικά που γνώριζαν όταν αυτό τους φαινόταν κατάλληλο. Παρουσίασαν, με άλλα λόγια μια δυσκολία σύνδεσης της δικής τους δουλειάς με γενικότερα μαθηματικά νοήματα, γεγονός που ενισχύει τον προβληματισμό ότι το όποιο χάσμα ανάμεσα στην δική τους εμπειρική και αφαιρετική σκέψη από τη μια, με τις μαθηματικές σχέσεις και αλγορίθμους από την άλλη, συνδέεται περισσότερο με τα χαρακτηριστικά των μεθόδων της σχολικής εργασίας παρά με αυτές καθαυτές τις δυσκολίες των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών.

Ως προς τους εκπαιδευτικούς, οι διαφορές εντοπίζονται, όχι τόσο ανάμεσα στις χώρες, αλλά ανάμεσα στο βαθμό εξοικείωσης των εκπαιδευτικών και των μαθητών τους στον τρόπο εργασίας που τους ζητήθηκε. Οι διαφορές αυτές αφορούν τους τρόπους με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνουν τους μαθητές να αναζητήσουν τις δικές τους λύσεις, παρεμβαίνουν στο έργο των μαθητών, διορθώνουν ή καθοδηγούν σε κάποια συμπεράσματα. Έτσι οι πιο έμπειροι σ' αυτόν τον τρόπο εργασίας εκπαιδευτικοί λειτουργούν αφήνοντας τους μαθητές να καταλήξουν στα δικά τους συμπεράσματα και επιλογές, αν και σε μερικές περιπτώσεις αυτό οδηγεί σε ένα ασαφές μαθηματικό νόημα. Σε κάποιες άλλες περιπτώσεις, εμφανίζεται από τους εκπαιδευτικούς (με λιγότερη εμπειρία σε αυτή τη μορφή διδασκαλίας) μια «στροφή» στην άμεση διδασκαλία της μεθόδου που έπρεπε να χρησιμοποιηθεί (κατά την κρίση τους, ακόμα και έμμεση υπόδειξη της σωστής απάντησης) και όχι στην ενθάρρυνση της αναζήτησης των μαθητών και της επιβεβαίωσης των τρόπων επίλυσής που χρησιμοποιούν.

Ωστόσο μια πολύ σημαντική παρατήρηση που υποδεικνύεται και από προηγούμενες ανάλογες έρευνες αφορά τον τρόπο με τον οποίο διαχειρίζονται οι εκπαιδευτικοί τις λύσεις των μαθητών και τα μαθηματικά νοήματα που αναπτύσσονται ανάλογα με αυτό που ίδιοι πιστεύουν ότι είναι μαθηματικά κατάλληλο για να αναπτυχθεί μέσα στην τάξη και την επιδιωκόμενη κατά την κρίση τους μαθηματική γνώση (Kaldrimidou et al., 2000). Η παρατήρηση αυτή αποκτά ακόμα μεγαλύτερη σημασία αν συσχετιστεί με την επισήμανση ότι, σύμφωνα με τα ευρήματα που αναλύθηκαν, το νόημα που έχουν διαμορφώσει οι εκπαιδευτικοί για τη διδασκόμενη γνώση και τη διδασκαλία της φαίνεται να αντανakλάται στο νόημα που διαμορφώνουν οι μαθητές για τα θέματα αυτά, γεγονός που εντοπίζεται κι από άλλους ερευνητές (Voigt, 1996).

Συνοψίζοντας, η συγκριτική εμπειρία των τριών χωρών στις ίδιες δραστηριότητες, καταδεικνύει τη σημασία της εμπειρίας των εκπαιδευτικών σε νέες διδακτικές μορφές αλλά και την δυσκολία προσαρμογής στις απαιτήσεις που τέτοιες μορφές αναπτύσσουν. Ακόμα και εκπαιδευτικοί με πολύχρονη εμπειρία στη διδασκαλία με δραστηριότητες (τόσο στην Ελλάδα όσο και στην Αγγλία) βρίσκονται αρκετά συχνά σε αμηχανία για τον τρόπο με τον οποίο θα καθοδηγήσουν την εξαγωγή συμπερασμάτων ή θα διαχειρισθούν τα μαθηματικά νοήματα στην τάξη. Έτσι, ένα γενικότερο συμπέρασμα που μπορεί να υποστηριχθεί και από την συγκεκριμένη μελέτη είναι ότι, ανεξάρτητα από τις σημαντικές και ενδιαφέρουσες προτάσεις δραστηριοτήτων και την διαφορετική οργάνωση του προγράμματος σπουδών κατά χώρα, το μαθηματικό αποτέλεσμα στις γνώσεις των μαθητών φαίνεται να σχετίζεται στενά με τον ίδιο τον εκπαιδευτικό, τη διδακτική του εμπειρία, τις γνώσεις του, τις διδακτικές του επιλογές καθώς και με το νόημα που διαμορφώνει για το μαθηματικό περιεχόμενο της διδασκόμενης γνώσης και της σημασίας της στη σχολική εκπαίδευση.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Aichele, D.B. & Caste, k. (1994). Professional development and teacher autonomy. In Aichele, D.B. & Coxford, A.F. (eds.). *Professional development for teachers of mathematics*. Reston, VA: NCTM, pp 1-8.
- Arzarello, F. (1998). The role of natural language in pre-algebraic and algebraic thinking. In H. Steinbring, M. Bartolini-Bussi & A. Sierpiska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (pp. 249-261). Reston, Virginia: NCTM.
- Baroody, A. Ginsburg, H. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical Knowledge of Arithmetic. In J. Hiebert (ed). *Conceptual and*

- Procedural Knowledge: The case of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates. New Jersey.
- Bell, A. (1996). Algebraic thought and the role of a manipulable symbolic language. in N. Bednarz, C. Kieran & Lee L. (eds). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. pp. 151-154.
- Berthelot, R. & Salin, M.H. (1994). Common spatial representations and their effects upon teaching and learning of space and geometry. In J. P. da Ponte & J.F. Matos (eds.). *Proceedings of the 18th PME Conference*. Lisbon, Vol 2, pp. 72-80.
- Boero, P. & Caruti, R. (1994). Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional statements. In J. P. Ponte & J.F. Matos (eds.). *Proceedings of the 18th PME Conference*. Lisbon, Vol 2, pp. 96-103.
- Cobb, P., Perlwitz, M. & Underwood, D. (1996). Constructivist and Activity Theory. In Mansfield, H. et al. (eds.). *Mathematics for tomorrow's Young Children*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 10-58.
- Desforges, C. & Cockburn, A. (1987). *Understanding the Mathematics Teacher*. Lewes: Falmer Press.
- Fenemma, E. & Neslon, B.S. (1997). *Mathematics Teachers in Transition*. N. Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Groves, S., Doig, B., & Splitter, L. (2000). Mathematics Classrooms functioning as communities of inquiry: Possibilities and constraints for changing practice. In Nakahara, T. & Koyama, M. (eds). *Proceedings of the 24th Conference of PME*. Hiroshima University, Japan, vol. 3, pp. 1-8.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B. & Van Dormolen, J. (1996). Space and Shape. In A. Bishop et al. (eds.). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp.161-201.
- Kaldrimidou, M., Sakonidis, H. & Tzekaki, M. (2000) 'Epistemological features in the mathematics classroom: Algebra and Geometry', in Nakahara, T. & Koyama, M. (eds) *Proceedings of the 24th Conference of PME*, Hiroshima Univ., Japan, Vol. 3, pp.111-118.
- Mansfield, H., Pateman, N. & Bednarz, N. (eds.) (1996). *Mathematics for tomorrow's Young Children*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Sakonidis, H., Tzekaki, M. & Kaldrimidou, M. (2001). Mathematics teaching practices in transition: some meaning construction issues. In M. v. den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference PME* (Vol. 4, pp.137-144). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press. Orlando, FL.
- Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*. 32(1), pp. 149-92.
- Tzekaki, M. & Litter, G. (2004). Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics. *Poster in ICME- 10*. Denmark
- Voigt, J. (1996). Negotiation of Mathematical Meaning in Classroom Processes: social interaction and learning Mathematics, in L.Steffe, P.Necher, P. Cobb, G. Goldin, B.Greer, (eds), *Theories of Mathematical Learning*. Lawrence Erlbaum Associates. New Jersey.