Η αναστοχαστική αφαίρεση στη δόμηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος: Μια μελέτη περίπτωσης

Θόδωρος Πάσχος Βασιλική Φαρμάκη
Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Αθηνών
tpaschos@math.uoa.gr vfarmaki@math.uoa.gr

Περίληψη
Σ' αυτό το άρθρο παρουσιάζουμε μια μελέτη περίπτωσης. Μέσα από μια δραστηριότητα και μια συνέντευξη, προσπαθούμε να αναλύσουμε τη νοητική πορεία της Μαρίας, μιας φοιτήτριας του πρώτου έτους του Μαθηματικού τμήματος. Αξιοποιώντας το θεωρητικό πλαίσιο της αναστοχαστικής αφαίρεσης επιχειρούμε να ερμηνεύσουμε τον τρόπο με τον οποίο επεξεργάζεται μαθηματικά ένα πρόβλημα μη ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, στα πλαίσια μιας ενότητας προβλημάτων που αποσκοπεί στη δόμηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος. Η εστιακή ανάλυση του περιεχομένου της συνέντευξης μας επιτρέπει να διερευνήσουμε σε βάθος τα ποιοτικά στοιχεία της μαθηματικής σκέψης της φοιτήτριας. Η μελέτη αυτή είναι μέρος μιας ευρύτερης ερευνητικής δραστηριότητας με πρωτοετείς φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος με στόχο την διαισθητική προσέγγιση και κατανόηση εννοιών του Λογισμού, μέσω προβλημάτων κίνησης.

Λέξεις κλειδιά
Αναστοχαστική αφαίρεση, εστιακή ανάλυση, ορισμένο ολοκλήρωμα.

Εισαγωγή
Η μετάβαση στη τυπική μαθηματική σκέψη δεν είναι μια εύκολη, αυτονόητη νοητική διαδικασία για την πλειονότητα των σπουδαστών. Η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών έχει αναδείξει τις πολυποίκιλες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση ορισμών, εννοιών, προτάσεων και των αποδείξεών τους, όταν επιχειρείται η αυστηρή διατύπωσή τους. Η διαισθητική προσέγγιση μέσα από καταστάσεις (μαθηματικές ή βιωματικές), που είναι οικείες στους σπουδαστές, είναι δυνατόν να αποτελέσει ένα ουσιαστικό βήμα στην ανάδυση νέων εννοιών και στη μετάβαση από την άτυπη στην τυπική μαθηματική γνώση. Μέσω της προοδευτικής μαθηματικοποίησης του εμπειρικού υλικού, μπορούν να αναπτυχθούν από τους σπουδαστές μοντέλα μαθηματικής επεξεργασίας ώστε οι αρχικές διαισθητικές διαπιστώσεις να είναι δυνατόν να ερμηνευθούν και τεκμηριωθούν, σε δεύτερο χρόνο, με αυστηρά μαθηματική επιχειρηματολογία. Πολλοί ερευνητές προτείνουν μια ευρεία στρατηγική επίλυσης προβλήματος, στην οποία οι έννοιες αναδύονται και χρησιμοποιούνται κατάλληλα, πριν δομηθούν οι ορισμοί που θα αποτελέσουν τη βάση για μια τυπική θεωρία (Poincare, 1982; Hadamard, 1945).

Σ' αυτό το κείμενο παρουσιάζουμε μια μελέτη περίπτωσης, της Μαρίας, επιδιώκοντας να ερμηνεύσουμε τις μαθηματικές της ενέργειες και τις απαντήσεις που έδωσε σε μια συνέντευξη, σχετικά μ' ένα πρόβλημα μη ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης. Η μελέτη της κίνησης μέσω της γραφικής αναπαράστασης σ' ένα σύστημα αξόνων ταχύτητας – χρόνου, την οδηγεί στο αλγεβρικό πλαίσιο με στόχο να περιγράψει μια γενική μεθοδολογία υπολογισμού της διανυόμενης απόστασης ως εμβαδού του χωρίου που δημιουργείται στο γράφημα. Με αφορμή τη συνέντευξη που έγινε προκειμένου να αναλυθεί σε βάθος η νοητική της πορεία, η φοιτήτρια επιχειρεί να θεμελιώσει τις αρχικές της επιλογές αποκαλύπτοντας ενδιαφέρουσες πλευρές της μαθηματικής της σκέψης. Αξιοποιήσαμε το θεωρητικό πλαίσιο της αναστοχαστικής αφαίρεσης (Piaget, 1980), ως γενικό σχήμα το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει την ανάδυση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος όπως προκύπτει από τις νοητικές λειτουργίες της Μαρίας.

Η εργασία μας αυτή εντάσσεται σε μια ευρύτερη ερευνητική δραστηριότητα, η οποία αφορά στην εισαγωγή της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και της προσέγγισης του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού, σε πρωτοετείς φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος.

Στην ανάλυση περιεχομένου της συνέντευξης ακολουθούμε την ***εστιακή ανάλυση*** (Sfard, 2001; Kieran and Sfard, 2001). Πρόκειται για ένα μεθοδολογικό εργαλείο του οποίου τα χαρακτηριστικά περιγράφουμε στη μεθοδολογία.

Θεωρητικό πλαίσιο

Η *αναστοχαστική αφαίρεση* είναι μια έννοια που εισήχθη από τον Piaget για να περιγράψει τις λογικο-μαθηματικές δομές ενός ατόμου στην πορεία της γνωσιακής ανάπτυξης. Περιγράφεται ως *γενικός συντονισμός* των ενεργειών του υποκειμένου (Piaget, 1980, σελ. 89-97), ο οποίος οδηγεί σε μια κατασκευαστική λογική γενίκευσης με αποτέλεσμα να προκύπτουν «νέες συνθέσεις όπου συγκεκριμένοι νόμοι αποκτούν καινούργια σημασία» (Piaget & Garcia, 1989, σελ. 299). Η αναστοχαστική αφαίρεση εσωτερικεύει και συντονίζει τις ενέργειες του υποκειμένου προκειμένου να διαμορφώσει νέες ενέργειες και τελικά νέα αντικείμενα. Σ’ αυτήν «οφείλεται η ανάπτυξη όλων των λογικο – μαθηματικών δομών» (Piaget, 1980, σελ. 92). Ο Piaget διέκρινε διάφορα είδη δόμησης της αναστοχαστικής αφαίρεσης: (α) Την *εσωτερίκευση* (interiorization) ως διαδικασία ερμηνείας και κατανόησης των παρατηρούμενων φαινομένων, μέσα σε ένα σύστημα εσωτερικευμένων λειτουργιών (Piaget, 1980, σελ. 90). Η εσωτερίκευση επιτρέπει την επίγνωση μιας ενέργειας ώστε να μπορεί κάποιος να εκφράζεται με αυτήν και να τη συνδυάζει με άλλες ενέργειες (Dubinsky, 1991). (β) Το *συντονισμό* (coordination) ή σύνθεση δύο η περισσότερων διαδικασιών για το σχηματισμό μιας τρίτης. Σύμφωνα με τους Dubinsky και άλλους (1989), η σύνθεση είναι μια δυαδική λειτουργία η οποία δρα σε πάνω σε δύο αντικείμενα και στις επαγόμενες διαδικασίες τους για να διαμορφώσει ένα τρίτο. (γ) Την *ενσωμάτωση* (encapsulation) ή μετατροπή μιας (δυναμικής) διαδικασίας σ’ ένα (στατικό) αντικείμενο, με την έννοια ότι, «… μαθηματικές οντότητες κινούνται από το ένα επίπεδο στο άλλο, μια πράξη πάνω σε τέτοιες ‘οντότητες’ γίνεται με τη σειρά της ένα αντικείμενο της θεωρίας» (Piaget, 1972, σελ. 70). (δ) Τη *γενίκευση* (generalization) ως αντιληπτικής ικανότητας του υποκειμένου να εφαρμόζει ένα υπάρχον σχήμα σε μια ευρύτερη συγκέντρωση φαινομένων ή να ενσωματώνει μια διαδικασία σ’ ένα μαθηματικό αντικείμενο. Ο Piaget χαρακτήρισε αυτή τη διαδικασία ως ‘αναπαραγωγική ή γενικευτική εξομοίωση’ (Piaget, 1972, σελ. 23) και αποκάλεσε τη γενίκευση *‘επεκτατική’* (Piaget & Garcia, 1989, σελ. 299). Ο Dubinsky (1991) προσαρμόζοντας τις ιδέες του Piaget στο τρόπο δόμησης των εννοιών σ’ ένα επίπεδο ανώτερης μαθηματικής σκέψης, συζητά την *αντιστροφή* ως μια πρόσθετη μορφή δομής της αναστοχαστικής αφαίρεσης. Η εσωτερίκευση μιας διαδικασίας από το υποκείμενο είναι δυνατό να το οδηγήσει σε μια νοητική λειτουργία αντιστροφής της, ώστε να προκύψει μια νέα διαδικασία. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της παραγώγισης – ολοκλήρωσης.

Μεθοδολογία

Πριν παρουσιάσουμε τα δεδομένα που αφορούν στη μελέτη περίπτωσης που εξετάζουμε, κρίνουμε σκόπιμο να αναφερθούμε σύντομα στο πλαίσιο της πειραματικής διδασκαλίας. Η προσέγγιση αυτή πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια ενός αλληλεπιδραστικού περιβάλλοντος στην αίθουσα διδασκαλίας, όπου οι φοιτητές επεξεργάστηκαν, κατά ζεύγη, και συζήτησαν γύρω από μια σειρά προβλημάτων κίνησης. Τα προβλήματα κίνησης είναι οικεία στους φοιτητές από την καθημερινή εμπειρία και μπορούν να λειτουργήσουν ως στήριγμα για επινοήσεις, ευρετικές προσεγγίσεις και ανάπτυξη μοντέλων των οποίων η γενίκευση και τυποποίηση οδηγούν σε μοντέλα για μαθηματικό συλλογισμό. Οι φοιτητές ασχολήθηκαν με τις δραστηριότητες αυτές πριν παρακολουθήσουν τα μαθήματα εισαγωγής στον Ολοκληρωτικό Λογισμό του προγράμματος σπουδών του Μαθηματικού τμήματος. Στο τέλος της διδακτικής περιόδου πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις με τους φοιτητές που είχαν παρακολουθήσει τόσο τις δραστηριότητες αυτές, όσο και τη σειρά των μαθημάτων του τμήματος.

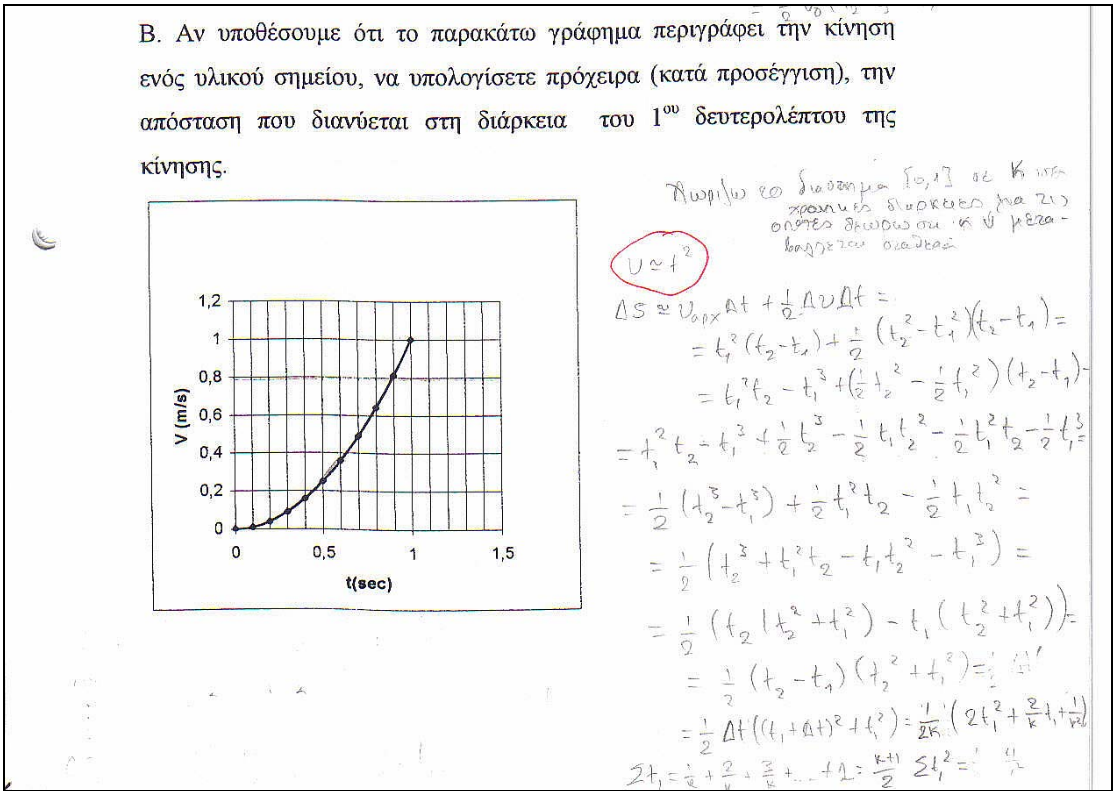
Τα δεδομένα των συνεντεύξεων υποβλήθηκαν σε ανάλυση (*εστιακή ανάλυση*), ώστε να ερευνηθεί η νοητική πορεία των φοιτητών. Σύμφωνα με τη Sfard (2001), η εστιακή ανάλυση είναι ένας τρόπος εξέτασης της αποτελεσματικότητας της επικοινωνίας μεταξύ διαφορετικών ατόμων. Η επικοινωνία θεωρείται αποτελεσματική εφ' όσον οι εμπλεκόμενοι αναφέρονται στα ίδια πράγματα όταν χρησιμοποιούν τις ίδιες λέξεις και φαίνεται να έχουν επίγνωση των ενεργειών τους. Η λέξη *εστίαση* ερμηνεύεται: (1) Ως η έκφραση που χρησιμοποιείται από έναν συνομιλητή για να προσδιορίσει το *αντικείμενο της προσοχής-προσήλωσής* του (*attended focus*). Είναι οι διαδικασίες ανίχνευσης που χρησιμοποιεί για να προσδιορίσει το αντικείμενο της προσοχής του. (2) Ως στοιχείο που υποδηλώνει *προφορά- διατύπωση- έκφραση*, όταν μιλάει ή σκέφτεται γύρω από το αντικείμενο της προσοχής του *(pronounced focus*). (3) Μια τρίτη διάσταση της εστίασης είναι εκείνη που υποδηλώνει το σύνολο των εμπειριών που σχετίζει το άτομο με τις δηλώσεις που κάνει πάνω στην οντότητα που προσδιορίστηκε από την εστίαση στην έκφραση. Το τρίτο συστατικό στοιχείο της εστίασης η Sfard το ονομάζει *εστίαση στην επιδίωξη* (*intented focus*). Η εστίαση στην επιδίωξη, η οποία φαίνεται να είναι η ουσία του θέματος, είναι ουσιαστικά μια μη φανερή δυναμική οντότητα που αλλάζει από μιαν έκφραση σε μιαν άλλη. Ωστόσο, η εστίαση στην προσήλωση και στη διατύπωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο που μπορεί να μας φανερώσει την επιδίωξη. Στην έρευνά μας αξιοποιήσαμε την *εστιακή ανάλυση* ως εργαλείο έρευνας, κατανόησης και ερμηνείας της νοητικής τροχιάς των φοιτητών οι οποίοι συμμετείχαν στις συνεντεύξεις.

Η μελέτη περίπτωσης

Η Μαρία είναι μια φοιτήτρια με αντιληπτική ικανότητα στα μαθηματικά και άριστες επιδόσεις στις εξετάσεις του πρώτου έτους των σπουδών της στο Μαθηματικό τμήμα. Ο στόχος της συγκεκριμένης δραστηριότητας (εικ. 1), ήταν να μπορούν οι φοιτητές: (1) να συσχετίσουν τη διανυόμενη απόσταση με το εμβαδόν του χωρίου κάτω από το γράφημα της ταχύτητας, και (2) να καθορίσουν μονάδα μέτρησης εμβαδού με βάση το πλέγμα που δίδεται στο γράφημα ώστε να υπολογίσουν κατά προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου κάτω από το γράφημα της ταχύτητας.

Στις δραστηριότητες που προηγήθηκαν, οι φοιτητές εργάσθηκαν πάνω σε προβλήματα ομαλής και ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης στα οποία η διανυόμενη απόσταση υπολογίζονταν ως εμβαδόν ευθύγραμμων σχημάτων στο γράφημα της ταχύτητας.

Το φύλλο εργασίας της Μαρίας (εικόνα 1):



Β. Αν υποθέσουμε ότι το παρακάτω γράφημα περιγράφει την κίνηση ενός υλικού σημείου, να υπολογίσετε πρόχειρα (κατά προσέγγιση), την απόσταση που διανύεται στη διάρκεια του 1^{ου} δευτερολέπτου της κίνησης.

Χωρίζω το διάστημα [0,1] σε Κ ίσες χρονικές διάρκειες για τις οποίες θεωρώ ότι η U μεταβάλλεται σταθερά

$U \simeq t^2$

$$\Delta S \simeq U_{\alpha\rho\chi}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta U \Delta t = t_1^2(t_2-t_1) + \frac{1}{2}(t_2^2-t_1^2)(t_2-t_1) =$$
$$= t_1^2 t_2 - t_1^3 + \left(\frac{1}{2}t_2^2 - \frac{1}{2}t_1^2\right)(t_2-t_1) =$$
$$= t_1^2 t_2 - t_1^3 + \frac{1}{2}t_2^3 - \frac{1}{2}t_1 t_2^2 - \frac{1}{2}t_1^2 t_2 + \frac{1}{2}t_1^3 =$$
$$= \frac{1}{2}(t_2^3 - t_1^3) + \frac{1}{2}t_1^2 t_2 - \frac{1}{2}t_1 t_2^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(t_2^3 + t_1^2 t_2 - t_1 t_2^2 - t_1^3) =$$
$$= \frac{1}{2}(t_2(t_2^2 + t_1^2) - t_1(t_2^2 + t_1^2)) =$$
$$= \frac{1}{2}(t_2 - t_1)(t_2^2 + t_1^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\Delta t((t_1+\Delta t)^2 + t_1^2) = \frac{1}{2K}\left(2t_1^2 + \frac{2}{k}t_1 + \frac{1}{k^2}\right)$$
$$\Sigma t_1 = \frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{3}{k} + \dots + 1 = \frac{k+1}{2} \quad \Sigma t_1^2 =$$

Εικόνα 1. Όπως φαίνεται στο φύλλο εργασίας η Μ., χωρίς αιτιολόγηση, γράφει: $U \square t^2$. Γράφει επίσης «Χωρίζω το διάστημα [0, 1] σε κ ίσες χρονικές διάρκειες για τις οποίες θεωρώ ότι η U μεταβάλλεται σταθερά». Γράφει τον τύπο $\Delta S = U_{\alpha\rho\chi.}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta U \Delta t$, μέσω του οποίου επιχειρεί να προσδιορίσει το ΔS, με αλγεβρικές πράξεις.

Η συνέντευξη (ένα επεισόδιο)

[1] Ερευνητής: Ας πάμε στο Β της 6^{ης} δραστηριότητας. Υποθέτουμε ότι το γράφημα [2] που απεικονίζει την κίνηση είναι αυτό του σχήματος και ζητάμε κατά [3] προσέγγιση, με πρόχειρο υπολογισμό, την απόσταση που διανύει το κινητό [4] στο 1^ο δευτερόλεπτο της κίνησης. Εδώ γράφεις ότι $U \square t^2$, γιατί, από [5] πού το βγάζεις αυτό;

[6] Μαρία: Μάλλον από το γράφημα. Μοιάζει, γι' αυτό γράφω περίπου.

[7] Ερ.: Προσδιορίζεις δηλ. τη συνάρτηση. Αν δίναμε ένα άλλο γράφημα, ενδεχόμενα [8] αυτό να μην σε προσανατόλιζε εκεί ;

[9] Μαρ.: Κάτι άλλο θα ήτανε.

[10] Ερ.: Δηλαδή, θα προσπαθούσες να προσομοιώσεις το γράφημα με μια συγκεκριμένη [11] συνάρτηση;

[12] Μαρ.: Ίσως κατά τμήματα, ανάλογα με το γράφημα.

[13] Ερ.: Άρα θα έπαιρνες πολλές συναρτήσεις;

[14] Μαρ.: Ίσως.

[15] Ερ.: Παρακάτω τί προσπαθείς να κάνεις;

[16] Μαρ.: Προσπαθώ να κόψω πάλι σε κομμάτια, κάνω μια διαμέριση, το κόβω (το [17] χρονικό διάστημα) σε κ ίσες χρονικές διάρκειες, θεωρώ ότι η ταχύτητα

[18] μεταβάλλεται σταθερά, ...α!, νομίζω ότι,...η παρατήρηση είναι ότι
[19] μεταβάλλεται σταθερά η ταχύτητα άρα πρέπει να μοιάζει κάπως έτσι,
[20] δηλ. αφού έχω σταθερή μεταβολή χρησιμοποιώ πάλι τη γνώση της
[20] παραγώγου και αφού τη χρονική στιγμή 1, η ταχύτητα είναι 1, σκέφτομαι
[21] ότι πρέπει να είναι κάπως έτσι.

(Η Μαρία δείχνει το γράφημα της ταχύτητας και τον τύπο U □ t^2. Φαίνεται να επανέρχεται προσπαθώντας να αιτιολογήσει την αρχική επιλογή της για την $U=t^2$).

[22] Ερ.: Εδώ βλέπω όμως ότι χρησιμοποιείς τον τύπο $\Delta S = U_{αρχ.}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta U \Delta t$.

[23] Μαρ.: $U_{αρχ.}$*; , α!, μάλλον εννοώ σ' ένα διάστημα που παίρνω. Παίρνω το*
[24] παραλληλόγραμμο και το τρίγωνο από πάνω, σε κάποιο Δt.

[25] Ερ.: Δηλαδή, το στοιχειώδες τόξο, το θεωρείς ως ευθύγραμμο τμήμα;

[26] Μαρ.: Ναι, κάπως έτσι.

[27] Ερ.: Για να υπολογίσεις δηλ. κατά προσέγγιση το εμβαδόν;

[28] Μαρ.: Θα προσπαθούσα, δεν πρόλαβα, με το κ να πω ότι για όσο πιο μεγάλες τιμές
[29] έχω του κ, επειδή πλησιάζει πιο πολύ το ευθύγραμμο τμήμα στη καμπύλη,
[30] εντάξει, πάντα θα είναι μεγαλύτερο το εμβαδόν που θα βρίσκω αλλά θα
[31] πλησιάζει περισσότερο.

[32] Ερ.: Ποιο εμβαδόν;

[33]Μαρ.: Αυτό που προκύπτει αν προσθέσουμε όλα τα στοιχειώδη ΔS.

[34] Ερ.: Η επιλογή σου για την U □ t^2 *και η μεθοδολογία που αναπτύσσεις για να βρεις*
[35] την διανυόμενη απόσταση ως εμβαδόν, προκύπτει ως συνέχεια των
[36] προηγούμενων δραστηριοτήτων, ή προέρχεται από την παλιά γνώση που
[37] έχεις, από το Λύκειο, ας πούμε;

[38] Μαρ.: Βασικά προσπαθούσα να δουλέψω έτσι σαν να μην έχω καμία γνώση... Ενώ
[39] αυτό ήταν κάτι που όσο κι αν προσπαθείς να το δουλέψεις από το
[40] μηδέν, τα ξέρεις αυτά...επιβάλλεται η γνώση που έχεις.

[41] Ερ.: Η παλιά γνώση. Άρα η επιλογή έχει να κάνει και με ένα background που έχεις
[42] από το Λύκειο;

[43] Μαρ.: Ναι.

Εστιακή ανάλυση της συνέντευξης της Μαρίας

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Φράσεις (Utterances)	Εστίαση στη **διατύπωση** (Pronounced focus)	Εστίαση στην **προσήλωση** (Attended focus)	Εστίαση στην **επιδίωξη** (Intended focus)
[1]-[5] / [6] [10]-[11]/ [12]	«από το γράφημα. Μοιάζει γι' αυτό γράφω [U □ t^2]» « Ίσως κατά τμήματα, ανάλογα με το γράφημα»	**Από το γράφημα στον τύπο:** 1. Βρες ένα τύπο που να αντιστοιχεί στο γράφημα. 2. Βρες τους τύπους της συνάρτησης κατά τμήματα από το γράφημα.	Ο τύπος της συνάρτησης

[15]/ [16]-[18]	«…κόβω [το χρονικό διάστημα] σε κ ίσες χρονικές διάρκειες, για τις οποίες θεωρώ ότι η ταχύτητα μεταβάλλεται σταθερά»	Εστίαση στο γράφημα και στον τρόπο μεταβολής της ταχύτητας σε κάθε μια από τις κ ίσες χρονικές διάρκειες.	Αιτιολόγηση της επιλογής της $U \sqcup t^2$.
[17]-[18] [19] [20]- [21]	«…θεωρώ ότι η ταχύτητα μεταβάλλεται σταθερά». «…άρα πρέπει να μοιάζει κάπως έτσι [$U \sqcup t^2$]» «αφού έχω σταθερή μεταβολή χρησιμοποιώ τη γνώση της παραγώγου, … είναι κάπως έτσι»	**Αιτιολόγηση επιλογής της $U \sqcup t^2$** 1.Θεώρησε [*για μια καλή προσέγγιση*], ότι η μεταβολή της ταχύτητας είναι σταθερή. 2. Τότε : $U \sqcup t^2$. 3. Ο σταθερός *[ρυθμός]* μεταβολής της ταχύτητας οδηγεί *στην παράγουσα* $U \sqcup t^2$.	Ο τύπος της συνάρτησης που αντιστοιχεί στο γράφημα.
[22] / [23]-[24]	«….σ' ένα διάστημα. Παίρνω το παραλληλόγραμμο και το τρίγωνο από πάνω σε κάποιο Δt »	**Εστίαση στο γράφημα.** Η κατά προσέγγιση, στοιχειώδης διανυόμενη απόσταση στο Δt είναι το εμβαδόν του ευθύγραμμου σχήματος που αντιστοιχεί στο χωρίο κάτω από τη καμπύλη.	Προσέγγιση του εμβαδού του στοιχειώδους καμπυλόγραμμου χωρίου.
[25], [27] / [28]-[29] [30]-[33]	«…όσο πιο μεγάλες τιμές έχω του κ, πλησιάζει πιο πολύ το ευθύγραμμο τμήμα στη καμπύλη» «πάντα θα είναι μεγαλύτερο το εμβαδόν… που προκύπτει αν προσθέσουμε όλα τα ΔS,… αλλά θα πλησιάζει περισσότερο»	**Προσέγγιση του εμβαδού** 1. Σύγκλιση του ευθύγραμμου στο αντίστοιχο καμπυλόγραμμο τμήμα. 2. Καλύτερη προσέγγιση στο ζητούμενο εμβαδόν	Προσέγγιση του εμβαδού

*Πίνακας 1. **Σημειώστε:** Στη στήλη «Εστίαση στην Προσήλωση»:*
*(1) με τη **normal** γραμματοσειρά περιγράφονται οι συγκεκριμένες ενέργειες που κάνει η Μαρία, όπως προκύπτουν από το διάλογο και μέσω των οποίων φαίνεται η εστίαση της προσοχής-προσήλωσής της.*
*(2) Με την **italic** γραμματοσειρά, περιγράφονται οι ενέργειες που υποτίθεται ότι κάνει η Μαρία, σύμφωνα με την εκτίμηση του ερευνητή – συνομιλητή της.*
*(3) Με **bold** γραμματοσειρά εμφανίζονται οι ονομασίες που δίνει ο ερευνητής στις εστιάσεις προσήλωσης της Μαρίας.*

Ανάλυση περιεχομένου της συνέντευξης

1. Ας επικεντρωθούμε αρχικά στο φύλλο εργασίας πριν αναλύσουμε το διάλογο που ακολουθεί. Φαίνεται ότι το ΔS είναι το εμβαδόν του χωρίου που αντιστοιχεί στο Δt, σε κάποια από τις «κ ίσες χρονικές διάρκειες [Δt]» στις οποίες χώρισε το [0, 1]. Τα σύμβολα ΔS, Δt, $U_{αρχ.}$, t_1, t_2 , που χρησιμοποιεί δεν αναφέρονται στο γράφημα του φύλλου εργασίας της. Η Μ. μετατοπίζεται αμέσως από το γραφικό στο αλγεβρικό

πλαίσιο προκειμένου να επεξεργαστεί τη δραστηριότητα. Ερμηνεύοντας διαισθητικά το γράφημα αποφαίνεται για τον τύπο της συνάρτησης της ταχύτητας με τον οποίο δουλεύει. Η επιφύλαξη που εκφράζει γράφοντας $U \sqcup t^2$ δεν την εμποδίζει στις επεξεργασίες της. Φαίνεται προσκολλημένη στην επεξεργασία των πληροφοριών και στην επίλυση του θέματος αλγεβρικά και όχι γραφικά, γεγονός που κυριαρχεί στον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζουν οι μαθητές τη συνάρτηση (Eisenberg, 1991; Kleiner, 1989). Ωστόσο η Μ. δεν κρατά τις υποθέσεις του προβλήματος προσθέτοντας τον τύπο της συνάρτησης ως ένα επιπλέον στοιχείο στα δεδομένα.

Παρατηρώντας προσεκτικά και αποκωδικοποιώντας το γραπτό της (και με τη συνδρομή της συνέντευξης), φαίνεται ότι επιλέγει ένα ευθύγραμμο σχήμα (τραπέζιο) του οποίου το εμβαδόν ορίζει ως $\Delta S = U_{\alpha\rho\chi.}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta U \Delta t$. Το τραπέζιο ορίζεται από το $\Delta t = t_2 - t_1$, τα ευθύγραμμα τμήματα που αντιστοιχούν στις τιμές U_1 και U_2 της ταχύτητας στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές t_1 και t_2 και τη χορδή πάνω από τη καμπύλη που ορίζεται από τα σημεία (t_1, U_1) και (t_2, U_2). Το ΔU του τύπου είναι το $U_2 - U_1$ και το $U_{\alpha\rho\chi.}$ αντιστοιχεί στο U_1. Αυτή η νοερή εικόνα, η οποία δεν αναφέρεται στο γράφημα του φύλλου εργασίας της Μ., θεωρούμε ότι καθοδηγεί τις ενέργειές της. Γράφει στο φύλλο εργασίας ότι «θεωρεί» - υποθέτει ότι η ταχύτητα μεταβάλλεται σταθερά σε κάθε τέτοιο στοιχειώδες Δt. Φαίνεται ότι επιχειρεί, με κάποιο τρόπο να αθροίσει τα εμβαδά όλων των τραπεζίων που δημιουργούνται στα κ (;) ίσα χρονικά διαστήματα, προκειμένου να προσεγγίσει το ζητούμενο εμβαδόν.

2. Ας επιχειρήσουμε να συνδέσουμε όσα είπαμε παραπάνω με το διάλογο που παραθέτουμε στο επεισόδιο. Με μια πρώτη ματιά θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι για τη Μ., η έννοια της συνάρτησης εμπεριέχεται ολοκληρωτικά στον τύπο. Παρ' ότι μελετάει-παρατηρεί το γράφημα, ψάχνει εναγωνίως το τύπο γιατί προφανώς θεωρεί ότι μέσω αυτού μόνο μπορεί να επεξεργαστεί την δραστηριότητα. Φαίνεται να έχει μια αλγεβρική προσέγγιση της συνάρτησης (Dubinsky, 1991) και μόνο ([6]-[19]). Αν όμως συνδέσουμε αυτή τη προσπάθεια προσδιορισμού του τύπου με όσα λέει στους στίχους ([38]-[43]) προκύπτει ότι στηρίζεται σε γνώση από το Λύκειο όπου στο μάθημα της Φυσικής, χωρίς αιτιολόγηση, δηλώνεται ότι η διανυόμενη απόσταση υπολογίζεται μέσω του εμβαδού του χωρίου κάτω από το γράφημα της ταχύτητας. Το εμβαδόν αυτό προσεγγίζεται, στα μαθηματικά του Λυκείου, ως οριακή τιμή του αθροίσματος των στοιχειωδών εμβαδών που δημιουργούνται από τη διαμέριση του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του γραφήματος μιας συνεχούς συνάρτησης σ' ένα κλειστό διάστημα του πεδίου ορισμού της. Πρόκειται για την εισαγωγή στον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος κατά Riemann, όπου η εποπτεία στο γράφημα της συνάρτησης παίζει σημαντικό ρόλο. Ο υπολογισμός του εμβαδού, στην περίπτωσή μας, προϋποθέτει τη γνώση του τύπου της συνάρτησης της ταχύτητας και το χρονικό διάστημα της κίνησης.

Ας δούμε αναλυτικά τη σκέψη της Μαρίας.

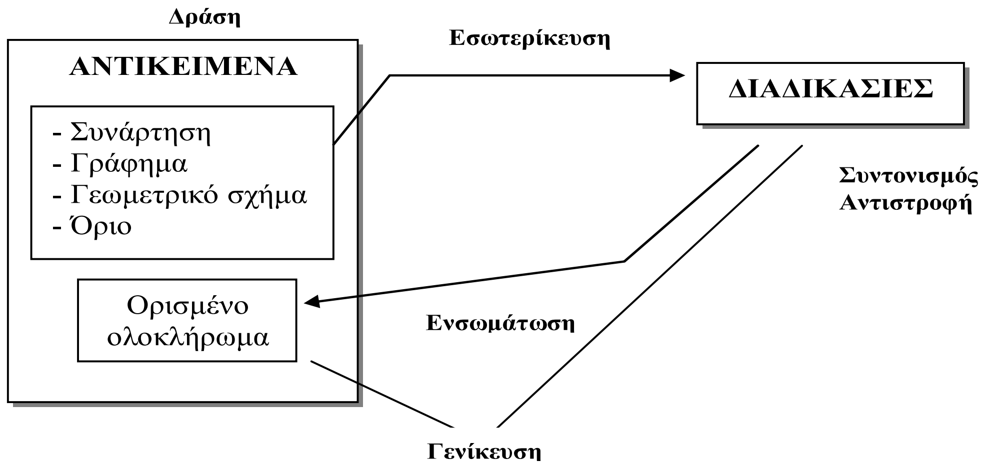
3. Στο πρώτο μέρος του διαλόγου προσπαθεί να απαντήσει στο ερώτημα του ερευνητή «από πού προκύπτει ο τύπος $U \sqcup t^2$;» ([1]-[14]). Αρχικά επιλέγει τη $U \sqcup t^2$ ως αποτέλεσμα της εικόνας που έχει από το γράφημα που δίδεται. Τόσο αυτή η επιλογή, όσο και η εκ των υστέρων προσπάθεια αιτιολόγησή της ([17]-[21]), αποκαλύπτουν ενδιαφέρουσες νοητικές λειτουργίες που πρέπει να συζητηθούν:

(α) Η Μ. «εγκλωβίζεται» στην εικόνα η οποία «μοιάζει» με κάτι που της είναι οικείο. Το νοητικό σχήμα που έχει οικοδομήσει συσχετίζοντας την $U(t) = t^2$ με το γράφημά της, φαίνεται να αποτελεί εμπόδιο στην περίπτωση αυτή κατά την οποία συσχετίζει το δοθέν γράφημα με ένα τύπο συνάρτησης, αξιοποιώντας μόνο την πληροφορία που δίδεται ότι το (1, 1) ανήκει στο γράφημα ([20]). Σύμφωνα με τον Brousseau (1983), ένα *εμπόδιο* εκδηλώνεται από τα όχι τυχαία λάθη. Είναι λάθη που σχετίζονται με μια μέθοδο του γνωρίζειν, μια χαρακτηριστική αντίληψη, μια παλιά «γνώση» η οποία κατάφερε να κυριαρχεί σε μια περιοχή δράσης. Με αυτή την έννοια το εμπόδιο αποτελεί γνώση (και όχι έλλειψη γνώσης) η οποία επιτρέπει να αναπαραχθούν απαντήσεις προσαρμοσμένες σε ορισμένα προβλήματα, οδηγώντας, ωστόσο, σε λανθασμένες απαντήσεις για άλλους τύπους ή κατηγορίες προβλημάτων (Henry, 1999).

(β) Στη συνέντευξη η Μ. επιχειρεί να ερμηνεύσει την αρχική αυτή επιλογή της με αναφορές στο διαφορικό λογισμό ([17]-[21]). Θεωρεί ότι η ταχύτητα μεταβάλλεται σταθερά σε κάποιο Δt, ώστε να προκύπτει μια καλή προσέγγιση στο αντίστοιχο τμήμα της παραβολής. Ωστόσο, μέσω αυτής της επιλογής της γραμμικής συνάρτησης της ταχύτητας οδηγείται σε κάποια αρχική συνάρτηση για την οποία ξέρει, από το διαφορικό λογισμό, ότι είναι δευτεροβάθμια. Στο σημείο αυτό αδυνατεί να δώσει νόημα στις διαδικασίες, να ορίσει πλαίσιο αναφοράς και να καταλήξει σε σωστά συμπεράσματα. Επιχειρώντας μια ερμηνεία της νοητικής πορείας της Μ., θα λέγαμε ότι: (1) Ενώ αναγνωρίζει τη διανυόμενη απόσταση ως εμβαδόν χωρίου στο γράφημα της ταχύτητας ([23],[24], [30]-[33]) δεν τη συσχετίζει με την αρχική συνάρτηση της ταχύτητας, αλλά με την ίδια την ταχύτητα προκειμένου να αιτιολογήσει την επιλογή της $U \sqcup t^2$. Είναι εμφανές ότι αδυνατεί να συσχετίσει τους διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης της διανυόμενης απόστασης, δηλ., ως εμβαδόν χωρίου στο γραφικό πλαίσιο και ως αρχική συνάρτηση της ταχύτητας στο αλγεβρικό πλαίσιο. (2) Η αναφορά της Μ. στην παράγωγο και ο τρόπος μετάβασης από μια γραμμική σε μια δευτεροβάθμια συνάρτηση ([17]-[19]), υποδηλώνει συγκεκριμένες νοητικές ενέργειες πάνω στο αντικείμενο της παραγώγισης οι οποίες έχουν *εσωτερικευθεί*. Η εσωτερίκευση της διαδικασίας της παραγώγισης, φαίνεται να οδηγεί την Μ., στην ενέργεια της *αντιστροφής*, ως μιας *δράσης* η οποία είναι δυνατόν να ανοίξει το δρόμο στη νοητική κατασκευή της διαδικασίας της ολοκλήρωσης.

4. Στο δεύτερο μέρος του διαλόγου και με δεδομένη τη $U \sqcup t^2$, εξηγεί τι έκανε στο φύλλο εργασίας προκειμένου να προσεγγίσει το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου χωρίου. (α) «κόβει το χρονικό διάστημα σε κ ίσες χρονικές διάρκειες και <u>θεωρεί</u> ότι η ταχύτητα μεταβάλλεται σταθερά» ([16]-[18]). (β) Επιλέγει ένα από τα τραπέζια τα οποία δημιουργούνται από τη διαμέριση «παίρνοντας το παραλληλόγραμμο και το τρίγωνο από πάνω σε κάποιο Δt» ([23],[24]) του οποίου το εμβαδόν, ως $\Delta S = U_{\alpha\rho\chi.}\Delta t + \frac{1}{2}\Delta U \Delta t$, αναπαριστά κατά προσέγγιση τη διανυόμενη απόσταση στη χρονική διάρκεια Δt. Φαίνεται ότι στο συγκεκριμένο τραπέζιο «βλέπει» γενικά όλα τα τραπέζια που δημιουργούνται από τη διαμέριση. Η επιλογή του παραπάνω τύπου για τον προσδιορισμό του εμβαδού του τραπεζίου υποδηλώνει το *συντονισμό-σύνθεση* πολλών διαδικασιών και νοητικών αντικειμένων. Εδώ έχουμε αφ' ενός το συντονισμό της διαδικασίας της συνάρτησης της ταχύτητας με τη γραφική της αναπαράσταση, όπου η τιμή της ταχύτητας $U_{\alpha\rho\chi.}$, και η μεταβολή ΔU αντίστοιχα αναπαρίστανται ως μήκη των πλευρών του σχήματος πάνω στο γράφημα, και αφ' ετέρου, το συντονισμό της διαδικασίας της συνάρτησης της διανυόμενης απόστασης με την αναπαράστασή της ως εμβαδόν της επιφάνειας του σχήματος που δημιουργείται στο ίδιο γράφημα (διαφορετικός τρόπος αναπαράστασης συναρτήσεων στο ίδιο γράφημα). Ωστόσο εδώ έχουμε επιπλέον από τη Μ., τη σύνθεση -

συντονισμό του γεωμετρικού αντικειμένου (τραπεζίου), με το γράφημα της συνάρτησης της ταχύτητας. (γ) Βλέπει το τραπέζιο με ένα δυναμικό τρόπο περιγράφοντας *διαδικασίες* οριακής προσέγγισης στο στοιχειώδες καμπυλόγραμμο χωρίο ([28], [29]), ενώ παράλληλα αναφέρεται στο άθροισμα όλων των στοιχειωδών ΔS, ώστε να πετύχει την καλύτερη δυνατή προσέγγιση του εμβαδού του ζητούμενου καμπυλόγραμμου χωρίου το οποίο αναπαριστά τη διανυόμενη απόσταση([30], [33]). (δ) Η περιγραφή της Μ., δείχνει ότι κατέχει την ιδέα της διαδικασίας υπολογισμού του εμβαδού του καμπυλόγραμμου χωρίου. Έχει ένα *γενικό σχήμα* το οποίο μπορεί να ανακατασκευάζει μέσω μιας *κατασκευαστικής αφαίρεσης* (Dörfler, 1991), μιας *κυκλικής ανατροφοδότησης* ώστε μέσω των δομών της αναστοχαστικής αφαίρεσης, της *ενσωμάτωσης* της διαδικασίας και της *γενίκευσής* της, να οδηγείται στη δόμηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος. Σύμφωνα με τον Dubinsky (1991) θα μπορούσαμε να περιγράψουμε σχηματικά αυτή τη νοητική πορεία, ως εξής (σχήμα 1):



Σχήμα 1

Συζήτηση

Στη μελέτη περίπτωσης που παρουσιάσαμε, προσπαθήσαμε να ερμηνεύσουμε τις νοητικές λειτουργίες της Μαρίας μέσα από το θεωρητικό πλαίσιο της *αναστοχαστικής αφαίρεσης*. Σύμφωνα με τον Piaget (1971, σελ. 342) «είναι η μέθοδος με την οποία παράγονται όλες οι λογικο-μαθηματικές δομές». Παράλληλα αξιοποιήσαμε το μεθοδολογικό εργαλείο της *εστιακής ανάλυσης* (Sfard, 2001), προκειμένου να αναλύσουμε σε βάθος το περιεχόμενο της συνέντευξης της φοιτήτριας. Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος είναι μια σύνθετη έννοια στη δόμηση της οποίας εμπλέκονται διάφορα μαθηματικά αντικείμενα (συνάρτηση, όριο, παράγωγος). Η πολυπλοκότητα τόσο της ίδιας της έννοιας, όσο και της μάθησης γενικότερα, δεν επιτρέπουν την παρατήρηση μιας συνεχούς πορείας ανάπτυξης. Παρατηρούμε μέσω της επικοινωνίας (γραπτού και προφορικού λόγου) τα στάδια της γνώσης, τις εννοιολογικές εικόνες που φαίνεται να έχουν οι μαθητές. Μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι η Μαρία κατέχει την *αφηρημένη* έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος η οποία σχετίζεται με τον ορισμό, σε αντιδιαστολή με μια *γενική* έννοια του ολοκληρώματος που, ωστόσο, μπορεί μέσω αυτής να εργαστεί με οτιδήποτε σχετικό σε ένα δεδομένο πλαίσιο;

Η επιλογή της κατάλληλης θεωρίας μάθησης ως εργαλείου μελέτης της ανώτερης μαθηματικής σκέψης και ο τρόπος παρατήρησης της νοητικής λειτουργίας των μαθητών είναι ένα πρώτο βήμα το οποίο πρέπει να ολοκληρωθεί με αποδέκτη το μαθητή. Ποια επιστημολογία, ποιες διδακτικές προσεγγίσεις, ποιες μέθοδοι, ποιο περιεχόμενο, ποια αναλυτικά προγράμματα, ποια εγχειρίδια, μπορούν να βοηθήσουν το μαθητή να κατανοήσει τις μαθηματικές έννοιες;

Βιβλιογραφικές αναφορές

Brousseau, G., (1983), 'Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques', RDM vol. 4 no 2.

Dörfler, W, (1991), 'Forms and Means of Generalization in Mathematics', in Bishop, Mellin-Olsen and Dormolen (eds), *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching,* Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, p. 63-85.

Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D., (1989), 'Development of the Process Conception of Function in Pre- Service Teachers in a Discrete Mathematics Cource', Proceedings of the PME 13, Paris.

Dubinsky, Ed, (1991), 'Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking', in D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht.

Eisenberg, T., (1991), 'Functions and associated learning difficulties', in D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht.

Hadamard, J., (1945), *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton University Press, (Dover edition, New York 1954).

Henry, M., (1999), *Διδακτική των Μαθηματικών*, (μετάφραση Π. Σπύρου), έκδοση του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Kleiner, I., (1989), 'Evolution of the function concept: A brief survey', *The College Mathematics Journal*, 20 (4), 282 – 300.

Piaget, J., (1971), *Biology and Knowledge*, (B. Walsh, trans.), University of Chicago Press, Chicago, (original published 1970).

Piaget, J., (1972), *The Principles of Genetic Epistemology*, (W. Mays trans.), London, Routledge & Kegan Paul,

Piaget, J., (1980), *Adaptation and Intelligence*, (S. Eames, trans.), University of Chicago Press, Chicago (original published 1974).

Piaget, J. and Garcia, R., (1989), *Psychogenesis and the history of science*, (H. Feider, trans.), New York: Columbia University Press.

Poincaré, H., (1982), *The Foundations of Science,* (translated by Halsted, G. B.), The Science Press, New York (reissued in University Press of America edition).

Sfard A., (2001), 'There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning', *Educational Studies in Mathematics* Vol. 46, pp 13–57.

Sfard, A. and Kieran, C., (2001), 'Preparing teachers for handling students' mathematical communication, Gathering knowledge and building tools', To appear in F.L. Lin and T. Cooney (eds.), *Making Sense of Mathematics Teacher Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.