Αντίληψη του χώρου και υπολογισμός του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Σωτήρης Γεωργίου, Μιχάλης Μάγος και Γιώργος Φιλίππου
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής - Πανεπιστήμιο Κύπρου
gesot13@cytanet.com.cy , mmagos@cytanet.com.cy , edphilip@ucy.ac.cy

Περίληψη

Η αντίληψη του χώρου αναφέρεται σε ένα σύνολο γνωστικών διαδικασιών, μέσω των οποίων το άτομο οικοδομεί και χειρίζεται νοητικές αναπαραστάσεις των αντικειμένων του χώρου, των σχέσεων και των μετασχηματισμών τους. Η ικανότητα αντίληψης του χώρου είναι θεμελιώδης στην κατανόηση και υπολογισμό του όγκου τρισδιάστατων αντικειμένων. Η παρούσα έρευνα εξετάζει τις στρατηγικές που εφαρμόζουν οι μαθητές Στ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου κατά τον υπολογισμό του όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν, τα λάθη που κάνουν και αναζητά τρόπο αντιμετώπισής τους. Σε 120 μαθητές χορηγήθηκε δοκίμιο που περιλάμβανε πέντε έργα υπολογισμού όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Στη συνέχεια έγινε διδακτική παρέμβαση, που περιλάμβανε τη συμπλήρωση του δοκιμίου με πραγματικά αντικείμενα, σε 12 μαθητές μέτριας επίδοσης, οι οποίοι είχαν αποτύχει να συμπληρώσουν το δοκίμιο. Τέλος, οι 12 μαθητές συμπλήρωσαν παρόμοιο δοκίμιο χωρίς τη χρήση αντικειμένων. Βρέθηκε ότι οι μαθητές εφαρμόζουν δύο είδη στρατηγικών, με βάση τα στρώματα που αποτελούν το στερεό και με βάση τον τύπο. Τα πιο συνηθισμένα λάθη των μαθητών οφείλονται στην κατανόηση του όγκου ως επιφάνειας, στην άθροιση των κυβικών μονάδων που διακρίνονται στο σχεδιάγραμμα ή και στο διπλασιασμό τους. Οι παρανοήσεις αυτές είναι αποτέλεσμα της μειωμένης αντίληψης του χώρου. Η ικανότητα αυτή φάνηκε να βελτιώνεται όταν οι μαθητές χρησιμοποίησαν πραγματικά τρισδιάστατα αντικείμενα.

Λέξεις κλειδιά

αντίληψη του χώρου, οπτικοποίηση, στρατηγικές, στρώματα

Εισαγωγή

Πρωταρχικός σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών να επιλύουν προβλήματα. Η ικανότητα αυτή αντανακλά το επίπεδο της μαθηματικής σκέψης και περιλαμβάνει τόσο τη δημιουργική όσο και την κριτική σκέψη. Η γεωμετρία είναι ένας σημαντικός κλάδος των μαθηματικών, που παρέχει το πλαίσιο για την ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλήματος και της μαθηματικής σκέψης γενικότερα (Φιλίππου & Χρίστου, 1995). Λέγεται ότι η γεωμετρία είναι τα μαθηματικά του χώρου και αποτελεί τον τρόπο σύνδεσης των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου. Ο Freudenthal (NCTM, 1989) περιγράφει τη γεωμετρία ως «…το χώρο, μέσα στον οποίον το παιδί ζει, αναπνέει και κινείται. Είναι ο χώρος, τον οποίον το παιδί πρέπει να διδαχθεί να τον γνωρίζει, να τον εξερευνά, να τον κατακτά, έτσι ώστε να ζει, να αναπνέει και να κινείται καλύτερα μέσα σε αυτόν» (σ.112).

Μια από τις σημαντικότερες ικανότητες, που απαιτείται στη γεωμετρία, είναι η ικανότητα αντίληψης του χώρου. Η αντίληψη του χώρου «…είναι απαραίτητη για την ερμηνεία, την κατανόηση και εκτίμηση του συμφυή γεωμετρικού μας κόσμου» (NCTM, 1989, σ.48). Ο συλλογισμός που βασίζεται στην αντίληψη του χώρου αποτελείται από ένα σύνολο γνωστικών διαδικασιών, μέσω των οποίων το άτομο οικοδομεί και χειρίζεται τις νοητικές αναπαραστάσεις των αντικειμένων του χώρου, των σχέσεων και των μετασχηματισμών τους. Οι σύγχρονες τάσεις της μαθηματικής παιδείας και τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών περιλαμβάνουν το συλλογισμό χώρου ως μέρος του αναλυτικού προγράμματος της γεωμετρίας και δίνουν έμφαση στην ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης του χώρου (NCTM, 2000).

Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας

Ικανότητα αντίληψης του χώρου

Η αντίληψη του χώρου αποτελεί πρωτεύων στοιχείο της ανθρώπινης προσαρμογής. Η γνώση του χώρου είναι απαραίτητη στη ζωή μας μέσα στον κόσμο, καθώς οτιδήποτε απτό υπάρχει, κατέχει μια θέση μέσα στο χώρο. Σύμφωνα με τις Newcomb & Huttenlocher (2000), στον κόσμο του σήμερα η ικανότητα αντίληψης του χώρου είναι βασική για τις καθημερινές μας δραστηριότητες, καθώς και για υψηλού επιπέδου δραστηριότητες, όπως στη σύνθετη μαθηματική σκέψη. Κατά τον Gardner (1983), η ικανότητα αντίληψης του χώρου αποτελεί μια από τις αυτόνομες νοητικές ικανότητες του ανθρώπου, τις οποίες αποκαλεί «ανθρώπινες νοημοσύνες».

Για την έννοια του χώρου έχουν αναπτυχθεί τρεις σημαντικές θεωρίες. Η πρώτη θεωρία οφείλεται στους Piaget και Inhelder (1967) που θεωρούν ότι η αναπαράσταση του χώρου οικοδομείται από προηγούμενους ενεργούς χειρισμούς του περιβάλλοντος, μέσω προοδευτικής συστηματοποίησης των κινητικών και εσωτερικευμένων δράσεων του παιδιού, που καταλήγουν σε λειτουργικά χειριστικά συστήματα. Οι van Hiele, διακρίνουν επίπεδα γεωμετρικής σκέψης μέσα από τα οποία αναπτύσσεται η γεωμετρική σκέψη των παιδιών με τη βοήθεια της διδασκαλίας (Clements et al.,1999). Το πιο διακεκριμένο χαρακτηριστικό του μοντέλου των van Hiele είναι τα πέντε επίπεδα ιεράρχησης του τρόπου κατανόησης των ιδεών που αναφέρονται στο χώρο. Η τρίτη θεωρία είναι η γνωστική θεωρία, σύμφωνα με την οποίαν οι μαθητές διαμορφώνουν τάξεις σχημάτων, κυρίως διαισθητικά. Η γνωστική θεωρία αναφέρεται σε ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του ατόμου, που διαμορφώνουν την αντίληψή του για το χώρο, και που ενυπάρχουν υποσυνείδητα (Clements & Battista, 1992).

Οι Battista και άλλοι(1998) ορίζουν ως αντίληψη του χώρου τη νοητική λειτουργία οικοδόμησης μιας μορφής ή οργάνωσης ενός αντικειμένου ή ενός συνόλου αντικειμένων. Η οικοδόμηση αντίληψης του χώρου είναι μία μορφή αφαίρεσης, μια διαδικασία με την οποία η νόηση επιλέγει, συντονίζει, ενοποιεί, και καταγράφει στη λειτουργική μνήμη ομάδες από νοητικά αντικείμενα ή ενέργειες που εμφανίζονται στο αντιληπτικό πεδίο. Υπάρχουν διαφορετικά επίπεδα αφαίρεσης ενός αντικειμένου ή ενέργειας, που περιλαμβάνουν (α) την απομόνωσή του από τη ροή της εμπειρίας και πρόσληψή του ως αυτοτελούς μονάδας (β) την εσωτερίκευσή του, όπου καταγράφεται στη λειτουργική μνήμη, έτσι ώστε να μπορεί να αναπαρασταθεί ή να επαναληφθεί στην απουσία του και (γ) την ενσωμάτωσή του, όπου «καθαρίζει» το εσωτερικοποιημένο αντικείμενο από το πρωτότυπο αισθητηριακό του περιεχόμενο, έτσι ώστε να μπορεί να αξιοποιηθεί σε μια καινούρια κατάσταση. Η οικοδόμηση της αντίληψης του χώρου, ως μια μορφή στοχαστικής αφαίρεσης, παίρνει προηγούμενα αφηρημένα ή δομημένα στοιχεία ως περιεχόμενο και τα συνενώνει για να σχηματίσει νέες δομές, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως περιεχόμενο για περαιτέρω ενέργειες της αφαίρεσης ή της δόμησης.

Η ικανότητα αντίληψης του χώρου αποτελείται, σύμφωνα με τον Owens (2002), από δύο βασικές συνιστώσες: (α) Την οπτικοποίηση, που περιλαμβάνει την ικανότητα του ατόμου να φαντάζεται πώς θα φαίνονται τα εικονιζόμενα αντικείμενα όταν περιστραφούν, συστραφούν ή αντιστραφούν, πώς θα φαίνεται ένα διπλωμένο επίπεδο σχήμα αν ξεδιπλωθεί, ή ένα στερεό αντικείμενο αν ξεδιπλωθεί από το ανάπτυγμά του. (β) Τον προσανατολισμό, που περιλαμβάνει την ικανότητα του ατόμου να διακρίνει τις ρυθμίσεις των στοιχείων ενός μοντέλου ή μοτίβου και την ικανότητα να διατηρεί ακριβείς τις αισθητηριακές αντιλήψεις, ενώπιον της αλλαγής προσανατολισμών.

Η οικοδόμηση αντίληψης του χώρου αποτελεί θεμελιώδη αρχή για την κατανόηση και τον υπολογισμό των κύβων που χωράει ένα στερεό, όπως το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, χωρίς τη μετακίνηση και μέτρηση των κύβων, και γίνεται κατανοητή με τη βοήθεια των δύο πιο κάτω θεωριών. Η πρώτη θεωρία αναφέρεται στην οικοδόμηση της αίσθησης της προοπτικής. Είναι μια αναπτυξιακή θεωρία της προοπτικής σκέψης, με εισηγητή το Morss (αναφορά στους Battista & Clements, 1996), που στηρίζεται σε αποτελέσματα σύγχρονων εμπειρικών ερευνών και σε θέσεις της θεωρίας του Piaget. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, οι μαθητές αρχικά αντιλαμβάνονται τα τρισδιάστατα αντικείμενα, ως «σύνθεση οπτικών θεωρήσεων», ως ανοργάνωτο σύνολο των όψεων του αντικειμένου, χωρίς να συσχετίζουν τις όψεις ή τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους. Αργότερα, κατά την πορεία της ανάπτυξης, τα παιδιά οικοδομούν την αίσθηση των διακριτών οπτικών θεωρήσεων, αντιλαμβάνονται δηλαδή τις διάφορες όψεις του στερεού ξεχωριστά. Σε κατοπινό στάδιο καθίστανται ικανά να συνδυάζουν μεταξύ τους τις προοπτικές. Αυτή η αναπτυξιακή πορεία διαπιστώνεται και στα σχέδια των παιδιών. Η δεύτερη θεωρία, η θεωρία της ολοκλήρωσης, αναφέρεται στην οικοδόμηση ενός συνεκτικού νοητικού μοντέλου του αντικειμένου. Εισηγητής της θεωρίας αυτής είναι ο Cooper (1990, αναφορά στους Battista & Clements, 1996), ο οποίος υποστηρίζει ότι οι μαθητές όταν λύνουν προβλήματα που εξετάζουν τις δισδιάστατες όψεις ενός τρισδιάστατου αντικειμένου, οικοδομούν νοητικές αναπαραστάσεις ισομετρικών όψεων του αντικειμένου, αναπαραστάσεις που διατηρούν τις ιδιότητες της τρισδιάστατης δομής του. Ωστόσο, η δημιουργία μιας ολότητας με συνοχή, από συστατικά στοιχεία ή όψεις του αντικειμένου, είναι μία δύσκολη διαδικασία και πολλοί μαθητές δεν είναι ικανοί να την εκτελέσουν.

Η ικανότητα αντίληψης του χώρου οικοδομείται σταδιακά. Αρχικά, τα παιδιά σχηματοποιούν μια πρώτη εικόνα του χώρου, δηλαδή μία διαισθητική αντίληψη του περιβάλλοντος χώρου και των αντικειμένων που υπάρχουν μέσα σε αυτόν. Η αντίληψη του χώρου βελτιώνεται μέσω της εμπειρίας, και το άτομο οικοδομεί πιο σύνθετες νοητικές δομές χώρου, που απορρέουν από τη διαχείριση των δισδιάστατων και τρισδιάστατων αντικειμένων και του χώρου, μέσα στον οποίον ζει και λειτουργεί (Nemirovsky & Noble, 1997). Η αντίληψη του χώρου, που αναφέρεται στον όγκο μιας τρισδιάστατης διάταξης κύβων ή ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, αναπτύσσεται από τις ατομικές, φυσικές και μεταγνωστικές δραστηριότητες του παιδιού πάνω στα αντικείμενα, με αποτέλεσμα το σχηματισμό νοητικών εικόνων από την εμπειρία (Thom & Pirie, 2002). Ο μαθητής επεξεργάζεται αυτές τις γνωστικές και φυσικές εμπειρίες, και αναπτύσσει εννοιολογικές σχέσεις και νοητικές δομές του χώρου, που χρησιμεύουν ως σχήματα, με τα οποία οργανώνει τις αριθμητικές του διαδικασίες. Κατά συνέπεια, ο τρόπος με τον οποίο ο μαθητής αντιλαμβάνεται τη διευθέτηση των κύβων μέσα σε ένα κιβώτιο ή τη δομή της ορθογώνιας παραλληλεπίπεδης διάταξης επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο μετρά τους κύβους και υπολογίζει τον όγκο του (Battista & Clements, 1996).

Ο Owens (2002) τονίζει ότι όλοι οι μαθητές μπορούν και πρέπει να αναπτύξουν την ικανότητα αντίληψης του χώρου. Η ικανότητα αυτή δεν είναι μόνο σημαντικό μέρος στη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας, αλλά εμπλέκεται και σε άλλους τομείς του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών, σε άλλους τομείς του σχολικού αναλυτικού προγράμματος πέραν των μαθηματικών και σε πολλούς τομείς της ζωής και της καριέρας των ανθρώπων. Οι Hershkowitz και Markovits (2002) σημειώνουν ότι η οπτική αντίληψη και ο οπτικοποιημένος τρόπος σκέψης, που είναι μέρος της αντίληψης του χώρου, θα αποτελεί στο μέλλον τον κυριότερο τρόπο σκέψης. Για αυτό πολλοί ερευνητές (Fuys & Liebov, 2002; Herskowitz & Markovits, 2002; Owens, 2002), βασισμένοι σε σύγχρονες μελέτες, συνηγορούν υπέρ ενός πιο πλούσιου, πιο συνεχούς προγράμματος γεωμετρίας, προσανατολισμένου σε ποικιλία δραστηριοτήτων και προτείνουν αποτελεσματικές δραστηριότητες και προσεγγίσεις για την πρακτική μέσα στην τάξη, που θα βοηθήσουν τα παιδιά να αναπτύξουν την ικανότητα αντίληψης του χώρου.

Στρατηγικές υπολογισμού του όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου

Οι Battista και Clements (1996), σε έρευνά τους, ταξινόμησαν τις στρατηγικές, που υιοθέτησαν οι μαθητές κατά τον υπολογισμό του αριθμού των κύβων ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, σε πέντε κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία, ο μαθητής αντιλαμβάνεται το σύνολο των κύβων ως μια τρισδιάστατη ορθογώνια διάταξη, οργανωμένη σε στρώματα, στη δεύτερη κατηγορία αντιλαμβάνεται το σύνολο των κύβων ως γέμισμα χώρου, προσπαθώντας να μετρήσει όλους τους εσωτερικούς και εξωτερικούς κύβους, χωρίς όμως να χρησιμοποιεί στρώματα. Στην τρίτη κατηγορία στρατηγικών, ο μαθητής αντιλαμβάνεται το σύνολο των κύβων με βάση την επιφάνειά τους, ενώ στην τέταρτη κατηγορία χρησιμοποιεί τον τύπο Μ x Π x Υ, χωρίς την ένδειξη ότι τον κατάλαβε από την άποψη των στρωμάτων. Η πέμπτη κατηγορία περιλαμβάνει τις στρατηγικές που δεν ταξινομήθηκαν στις άλλες τέσσερις κατηγορίες.

Η μειωμένη ικανότητα αντίληψης του χώρου, όταν οι μαθητές ασχολούνται με προβλήματα όγκου, οδηγεί συνήθως σε παρανοήσεις. Οι Fuys και Liebov (2002) αναφέρουν ότι πολλοί μαθητές έχουν δυσκολίες στην κατανόηση των βασικών γεωμετρικών εννοιών στα μαθηματικά και παρουσιάζουν διάφορους τύπους παρερμηνειών. Οι Ben-Chaim, Lappan, και Houang (1985) συμπεραίνουν ότι το ποσοστό των μαθητών μεγάλων τάξεων του δημοτικού, που μπορούν να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού του όγκου στερεών, είναι μικρότερο του 50%. Έχουν επίσης εντοπίσει τέσσερα είδη λαθών, που κάνουν οι μαθητές της πέμπτης μέχρι και της όγδοης τάξης, όταν επιλύουν τέτοιου είδους προβλήματα. Οι πιο συνηθισμένοι τύποι λαθών είναι η μέτρηση της επιφάνειας των κύβων, ο διπλασιασμός του αριθμού που βρίσκουν, η καταμέτρηση των κύβων που φαίνονται στο διάγραμμα ή και ο διπλασιασμός τους.

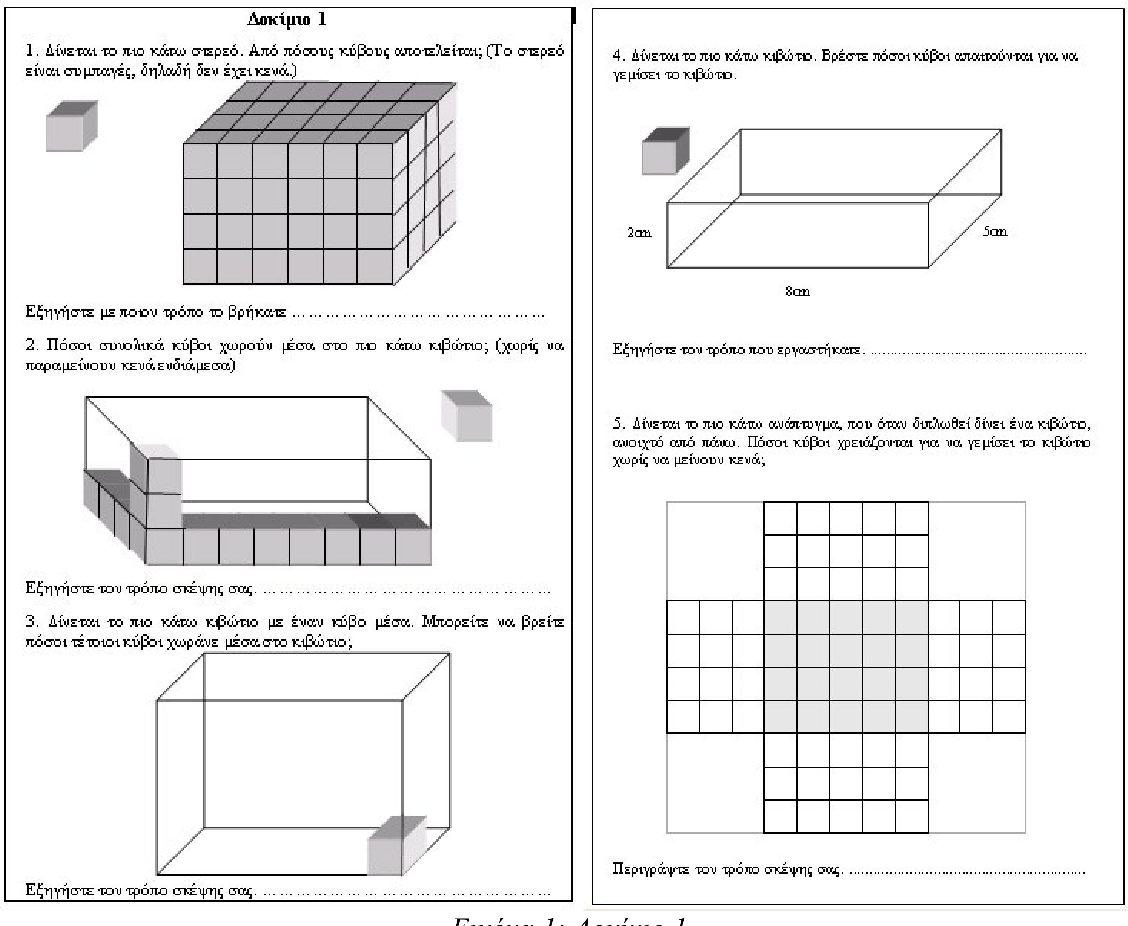
Παρόμοιες διαπιστώσεις για τη δυσκολία των μαθητών στον υπολογισμό του όγκου των στερεών αναφέρονται σε αποτελέσματα αξιολογήσεων ευρείας κλίμακας που έγιναν στις Ηνωμένες Πολιτείες και σε άλλες χώρες (Ben-Chaim et al., 1985). Η αξιολόγηση της NAEP (National Assessment of Educational Progress), που έγινε στις ΗΠΑ το 1978, έδειξε ότι το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών της Δ΄ τάξης του Δημοτικού ήταν 8% και των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου 26.2%. Μια άλλη έρευνα αξιολόγησης (Michigan Educational Assessment Program), που πραγματοποιήθηκε στην πολιτεία Michigan το 1983-84, βρήκε ότι το 47% από 127 420 μαθητές Α΄ τάξης Γυμνασίου απάντησαν σωστά σε δύο τουλάχιστον από τα τρία θέματα υπολογισμού του όγκου. Το σχετικά χαμηλό ποσοστό επιτυχίας των μαθητών σε τέτοιου είδους προβλήματα διαφαίνεται επίσης σε έρευνες που έγιναν και σε άλλες χώρες. Στην έρευνα CSMS, που έγινε στη Μ. Βρετανία τη δεκαετία του ’80 ανάμεσα σε 10 000 μαθητές, ηλικίας 12 και 14 χρόνων, απάντησαν σωστά στα προβλήματα όγκου μόνο το 40% με 50% των μαθητών. Τέλος, σε έρευνα που έγινε στο Ισραήλ το 1984 ανάμεσα σε 193 σχολεία, στην οποία συμμετείχαν μαθητές Στ΄ δημοτικού μέχρι Β΄ Γυμνασίου, φάνηκε πως το ποσοστό επιτυχίας στα πιο πάνω προβλήματα ήταν γύρω στο 50% (Ben-Chaim et al., 1985).

Η παρούσα Έρευνα

Η παρούσα έρευνα εξετάζει και αναζητεί απαντήσεις στα πιο κάτω ερωτήματα:

- Σε ποιο βαθμό οι μαθητές της Στ΄ τάξης δημοτικού είναι σε θέση να επιλύουν προβλήματα υπολογισμού του όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.
- Ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν οι μαθητές Στ΄ τάξης για τον υπολογισμό του όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, σχεδιασμένου σε χαρτί.
- Ποιοι είναι οι πιο συνηθισμένοι τύποι λαθών που κάνουν οι μαθητές Στ΄ τάξης στον υπολογισμό του όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.
- Πώς διαφοροποιείται η ικανότητα αντίληψης του χώρου και υπολογισμού του όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, σχεδιασμένου στο χαρτί: α) με τη χρήση των ανάλογων πραγματικών αντικειμένων και β) μετά από εμπειρία των μαθητών με πραγματικά αντικείμενα.

Το δείγμα της έρευνας ήταν 120 μαθητές Στ΄ τάξης από δύο σχολεία της Λάρνακας και Λεμεσού. Η συλλογή των δεδομένων έγινε με τη μέθοδο χορήγησης δοκιμίων.



Εικόνα 1: Δοκίμιο 1

Σε πρώτη φάση, χορηγήθηκε το Δοκίμιο 1 σε 120 μαθητές, όπου καλούνταν να εργαστούν πάνω σε πέντε έργα υπολογισμού του όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου (Εικόνα 1) και να εξηγήσουν τον τρόπο εργασίας τους.

Στη συνέχεια έγινε παρεμβατική διδασκαλία σε 12 μαθητές μέτριας επίδοσης, οι οποίοι είχαν αποτύχει να συμπληρώσουν ορθά το Δοκίμιο 1. Στους μαθητές αυτούς δόθηκαν τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα του Δοκιμίου 1 σε τρισδιάστατη μορφή και κυβικά εκατοστόμετρα, για να τα γεμίσουν και υπολογίσουν τον όγκο τους. Ταυτόχρονα επαναχορηγήθηκε το Δοκίμιο 1 για να το συμπληρώσουν και να περιγράψουν τον τρόπο εργασίας τους. Τέλος, οι ίδιοι 12 μαθητές που έλαβαν μέρος στην παρεμβατική διδασκαλία, κλήθηκαν να εργαστούν πάνω σε ένα παρόμοιο δοκίμιο - Δοκίμιο 2 – χωρίς τη χρήση πραγματικών αντικειμένων. Το Δοκίμιο 2 περιλάμβανε παρόμοια έργα με το Δοκίμιο 1.

Για τη συμπλήρωση των δοκιμίων δόθηκε στους μαθητές ο χρόνος των 40 λεπτών. Οι μαθητές ασχολήθηκαν με τα έργα του δοκιμίου ατομικά, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής. Στις περιπτώσεις που υπήρχε ασάφεια στις απαντήσεις, οι μαθητές κλήθηκαν να περιγράψουν προφορικά τον τρόπο που εργάστηκαν και να επεξηγήσουν τη στρατηγική που εφάρμοσαν.

Αποτελέσματα της έρευνας

Από την επεξεργασία των δεδομένων προέκυψε ότι το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν ορθά στα προβλήματα του Δοκιμίου 1 κυμαίνεται μεταξύ 32 - 44 % (Πίνακας 1), δείχνοντας έτσι τη δυσκολία που αντιμετώπισε ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις των έργων του δοκιμίου. Το μικρότερο ποσοστό επιτυχίας συγκέντρωσε το πρόβλημα 2, όπου δινόταν το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μόνο μερικούς κύβους να διακρίνονται στις διαστάσεις του κιβωτίου. Το έργο με το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας είναι το τέταρτο, όπου δόθηκαν μόνο οι διαστάσεις του κιβωτίου και τα παιδιά εφάρμοσαν τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού.

Πίνακας 1**:** Μαθητές που απάντησαν ορθά στο Δοκίμιο 1

	1ο Έργο	2ο Έργο	3ο Έργο	4ο Έργο	5ο Έργο	Μ. Ο.
Αρ. μαθητών	49	38	48	53	47	47
Ποσοστό (%)	40.8	31.7	40	44.2	39.2	39.2

N=120

Αξίζει να σημειωθεί ότι μόνο ένα ποσοστό 14.2 % των μαθητών απάντησαν ορθά και στα πέντε έργα του Δοκιμίου 1, ενώ ένα μεγάλο ποσοστό της τάξης του 33.3 % δεν απάντησε ορθά σε κανένα από τα πέντε έργα.

Όσον αφορά τις στρατηγικές, που εφάρμοσαν οι μαθητές κατά τον υπολογισμό του όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, διακρίθηκαν σε επιτυχημένες και ανεπιτυχείς στρατηγικές. Οι επιτυχημένες στρατηγικές των μαθητών κατά την επίλυση των έργων χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, με βάση τα στρώματα που αποτελούν το στερεό και με βάση τον τύπο (Πίνακας 2). Στην πρώτη κατηγορία στρατηγικών, οι μαθητές, παρατηρώντας το σχήμα που τους δόθηκε, επικεντρώνονται σε μία από τις τρεις όψεις - πρόσοψη, πλάγια όψη και κάτοψη -, και βάση αυτής αντιλαμβάνονται τον όγκο σε στρώματα, είτε οριζόντια είτε κάθετα. Ακολούθως, χρησιμοποιούν τον πολλαπλασιασμό για να βρουν το σύνολο των κύβων που υπάρχουν σε όλα τα στρώματα του κιβωτίου. Οι στρατηγικές με βάση τα στρώματα χρησιμοποιήθηκαν περισσότερο στο έργο 1, όπου με ευκολία διακρίνονται στο σχεδιάγραμμα τα στρώματα που αποτελούν το στερεό και στο έργο 5, όπου δινόταν το ανάπτυγμα του στερεού. Η στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε περισσότερο από την πρώτη κατηγορία είναι αυτή που στηρίζεται στο οριζόντιο στρώμα βάσης επί το ύψος, δείχνοντας ότι οι περισσότεροι μαθητές αντιλαμβάνονται τα στρώματα του στερεού σε οριζόντια διάταξη, από τη βάση προς τα πάνω.

Πίνακας 2: Επιτυχημένες στρατηγικές υπολογισμού του όγκου

	Στρατηγικές	1º Έργο	2º Έργο	3º Έργο	4º Έργο	5º Έργο
Με βάση τα στρώματα	Οριζόντιο στρώμα βάσης επί το ύψος	7	10	7	8	31
	Οριζόντιο στρώμα βάσης με πρόσθεση στρωμάτων	-	-	-	-	1
	Οριζόντιο πάνω στρώμα της κάτοψης επί το ύψος	4	-	-	-	-
	Μπροστινό κατακόρυφο στρώμα επί το πλάτος	16	3	5	5	1
	Πλάγιο κατακόρυφο στρώμα επί το μήκος	8	1	1	1	-
Με βάση τον τύπο	Εφαρμογή του τύπου υπολογισμού του όγκου	12	23	33	37	11
	Ασαφής περιγραφή	2	1	2	2	3

Πιο κάτω παρατίθενται ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών, που στηρίχθηκαν σε στρατηγικές με βάση τα στρώματα.

Μαθητής 23: (Για το έργο 2) Σκέφτηκα, αν το μήκος έχει 8 κύβους και το πλάτος 4, τότε θα τα πολλαπλασιάσουμε, για να γεμίσει η πρώτη σειρά (το πρώτο στρώμα). Μετά, εκείνον τον αριθμό που θα βρούμε, θα τον πολλαπλασιάσουμε με το ύψος. Έτσι βρήκα 96 κύβους.

Μαθητής 18: (Για το έργο 1) Εγώ βρήκα πως το πιο πάνω στερεό έχει 96 κύβους. Για να το βρω, πρώτα μέτρησα πόσοι κύβοι υπήρχαν στην πάνω έδρα και μετά αυτό που βρήκα το πολλαπλασίασα Χ 4 γιατί είναι 4 οι σειρές(τα στρώματα) του κιβωτίου.

Η δεύτερη κατηγορία στρατηγικών είναι η εφαρμογή του τύπου Μήκος x Πλάτος x Ύψος και εμφανίζεται να έχει ελαφρά μεγαλύτερη συχνότητα. Τη στρατηγική αυτή εφάρμοσαν επιτυχώς 47 από τους 120 μαθητές, σε τουλάχιστον ένα από τα έργα. Επίσης, παρατηρείται προοδευτική αύξηση στη χρήση του τύπου, από το έργο 1 προς το έργο 4, ενώ στο έργο 5 παρατηρείται η χαμηλότερη τιμή.

Τα λάθη των μαθητών ομαδοποιήθηκαν σε πέντε κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία, οι μαθητές υπολογίζουν τον αριθμό των κύβων που υπάρχουν σε ένα στρώμα, αλλά αποτυγχάνουν να καταλήξουν στην ορθή απάντηση. Στη δεύτερη κατηγορία, υπολογίζουν την εξωτερική επιφάνεια του κιβωτίου αντί του όγκου. Στην τρίτη περιλαμβάνονται τα λάθη των μαθητών, όπου υπολογίζουν το σύνολο των κύβων στις εξωτερικές ή και εσωτερικές επιφάνειες, χωρίς να αντιλαμβάνονται τον όγκο σε στρώματα κύβων. Μια άλλη κατηγορία λαθών αναφέρεται στη λανθασμένη χρήση του τύπου, ενώ τα λάθη που δεν εμπίπτουν στις πιο πάνω κατηγορίες, αποτέλεσαν την πέμπτη κατηγορία. Ένα κοινό χαρακτηριστικό που εντοπίζεται σε όλες τις κατηγορίες λαθών είναι ο διπλασιασμός του τελικού αποτελέσματος για να συμπεριλάβουν τους κύβους ή τις επιφάνειες που βρίσκονται στο πίσω μέρος του κιβωτίου.

Οι 12 μαθητές μέτριας επίδοσης, που έλαβαν μέρος στην παρεμβατική διδασκαλία, είχαν καλύτερα αποτελέσματα κατά τη συμπλήρωση του Δοκιμίου 1 για δεύτερη φορά, από ό,τι είχαν στην συμπλήρωση του δοκιμίου την πρώτη φορά. Έχοντας στη διάθεσή τους τα κιβώτια σε τρισδιάστατη μορφή και κυβικά εκατοστόμετρα για να γεμίσουν τα κιβώτια, σημείωσαν σημαντική βελτίωση στην ορθή επίλυση των προβλημάτων. Επιπρόσθετα, παρουσίασαν μεγάλη πρόοδο κατά τη συμπλήρωση του Δοκιμίου 2, χωρίς να έχουν στη διάθεσή τους πραγματικά αντικείμενα. Το ποσοστό των ορθών έργων αυξήθηκε από το 28.3% στο Δοκίμιο 1 σε 90% στο Δοκίμιο 2, σημειώνοντας αύξηση της τάξης του 61.7% (Πίνακας 3).

Πίνακας 3: Ορθές απαντήσεις των μαθητών μέτριας επίδοσης στο Δοκίμιο 1 και 2

	1^o Έργο	2^o Έργο	3^o Έργο	4^o Έργο	5^o Έργο	Σύνολο ορθών έργων
Δοκίμιο 1	4	1	2	4	6	17
(%)	33.3 %	8.3 %	16.7 %	33.3 %	50 %	28.3 %
Δοκίμιο 2	11	10	11	12	10	54
(%)	91.7 %	83.3 %	91.7 %	100 %	83.3 %	90 %

N=12

Αξιοσημείωτο είναι ότι οι μαθητές συμπλήρωσαν το Δοκίμιο 2 σε λιγότερο χρόνο από πριν - μέσα σε 10΄-20΄ - και στη συνέχεια ήταν σε θέση να υπολογίσουν τον όγκο πραγματικών κιβωτίων, μετρώντας τις διαστάσεις τους και εφαρμόζοντας τον τύπο.

Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο υπολογισμός του όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου αποτελεί μια δύσκολη δραστηριότητα για τα παιδιά της Στ΄ τάξης και απαιτεί ψηλή ικανότητα αντίληψης του χώρου. Τα περισσότερα παιδιά στην ηλικία αυτή έχουν περιορισμένη ικανότητα αντίληψης του χώρου και μόνο ένα ποσοστό γύρω στο 40% των μαθητών είναι σε θέση να επιλύει τέτοιου είδους προβλήματα. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνει τα ευρήματα των ερευνών των Ben-Chaim et al. (1985), της NAEP (1978) και της MEAP (1983-84, αναφορά στους Ben-Chaim et al., 1985). Βρέθηκε ακόμη ότι το 1/3 των μαθητών της Στ΄ τάξης έχουν βασικές ελλείψεις στην αντίληψης του χώρου, για αυτό δεν απάντησαν ορθά σε κανένα από τα έργα, ενώ μόνο το 14.2% απάντησε ορθά και στα πέντε έργα.

Όσον αφορά τις επιτυχημένες στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές Στ΄ τάξης για τον υπολογισμό του όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: (α) στις στρατηγικές που βασίζονται στην κατανόηση του όγκου σε στρώματα και (β) στην εφαρμογή του τύπου. Οι στρατηγικές αυτές χρησιμοποιήθηκαν στον ίδιο περίπου βαθμό από τους μαθητές κατά την επίλυση των έργων. Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν στρατηγικές βασισμένες σε στρώματα, αντιλαμβάνονται το στερεό ως μια συνεκτική ολότητα και έχουν αναπτυγμένη αντίληψη του χώρου. Οι μαθητές αρχίζουν από τον υπολογισμό του όγκου του στρώματος που διακρίνεται στο διάγραμμα σε μια από τις τρεις όψεις του στερεού – πρόσοψη, κάτοψη, πλάγια όψη – και προχωρούν με πολλαπλασιασμό για να υπολογίσουν τον όγκο των παράλληλων στρωμάτων. Αυτό συμβαίνει κυρίως στις περιπτώσεις που ένα στερεό παρουσιάζεται γεμάτο με κύβους, όπως στο έργο 1. Η στρατηγική, που στηρίζεται στο οριζόντιο στρώμα της βάσης εμφανίζεται σε μεγαλύτερη συχνότητα, δείχνοντας ότι οι μαθητές βασίζονται στη διαδικασία νοερού γεμίσματος του κιβωτίου με κυβικά εκατοστόμετρα, από τη βάση προς τα πάνω. Η συγκεκριμένη στρατηγική εφαρμόζεται περισσότερο όταν δίνεται το ανάπτυγμα του στερεού (έργο 5). Αντίθετα, στην περίπτωση που τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα έχουν μερικούς ή καθόλου κύβους μέσα (έργα 2, 3, 4), οι μαθητές χρησιμοποιούν σε μεγάλο ποσοστό την εφαρμογή του τύπου, ενώ σε πλείστες περιπτώσεις η εφαρμογή του γίνεται χωρίς εννοιολογική κατανόηση. Επίσης, παρατηρήθηκε βαθμιαία αύξηση της χρήσης του τύπου από το έργο 1 στο έργο 4, κάτι που συνηγορεί στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές που στα πρώτα έργα κατανοούσαν τον όγκο σε στρώματα, πέρασαν στην εννοιολογική εφαρμογή του τύπου στα επόμενα έργα.

Ένα άλλο συμπέρασμα είναι ότι τα πιο συνηθισμένα λάθη των μαθητών οφείλονται στην αδυναμία τους να κατανοήσουν την ορθή διάταξη και δομή των στρωμάτων. Παρόλο που μπορεί να αντιληφθούν κάποια από τα στρώματα, αδυνατούν να διακρίνουν τις σχέσεις αλληλεξάρτησης μεταξύ των στρωμάτων. Επιπρόσθετα, τα περισσότερα λάθη των μαθητών οφείλονται στην αδυναμία τους να αντιληφθούν τις δισδιάστατες απεικονίσεις στο φυλλάδιο ως τρισδιάστατα αντικείμενα στο χώρο. Αυτό οφείλεται στη μειωμένη αντίληψη του χώρου που διαθέτουν, με αποτέλεσμα να αδυνατούν να οικοδομούν νοητικές αναπαραστάσεις ισομετρικών όψεων του αντικειμένου, που να διατηρούν τις ιδιότητες της τρισδιάστατης δομής του. Για το λόγο αυτό καταμετρούν την επιφάνεια των στερεών αντί του όγκου. Άλλα λάθη των μαθητών οφείλονται στην αδυναμία ορθού συνυπολογισμού των κύβων που φαίνονται και των κύβων που δε φαίνονται στην εικόνα ή στη λανθασμένη εφαρμογή του τύπου. Τα λάθη των δύο πρώτων κατηγοριών συμφωνούν με τα αποτελέσματα της έρευνας των Ben-Chaim et al.(1985) και των Battista & Clements (1996).

Η παρεμβατική διδασκαλία, με τη χρήση πραγματικών αντικειμένων, σε μαθητές μέτριας επίδοσης, οδήγησε σε ένα σημαντικό συμπέρασμα. Οι εμπειρίες που αποκτούν τα παιδιά όταν ασχολούνται με πραγματικά αντικείμενα, διατάξεις κύβων, υπολογισμό και καταμέτρηση κύβων και ο μαθηματικός συλλογισμός πάνω στις ενέργειες αυτές, αυξάνουν σε σημαντικό βαθμό την ικανότητα αντίληψης του χώρου και την ικανότητα υπολογισμού του όγκου ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών αυξήθηκε σημαντικά, από το 28.3% στο 90%. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί με τα αποτελέσματα της έρευνας των Thom & Pirie (2002) και των Ben-Chaim et al. (1988).

Τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας είναι σημαντικά και οδηγούν στη βελτίωση των διδακτικών προσεγγίσεων και γενικά της διδασκαλίας. Παράλληλα, η έρευνα εισηγείται την εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες με πραγματικά αντικείμενα, ώστε αρχίζοντας από το πραξιακό επίπεδο, να περνούν σταδιακά στο εικονικό και μετέπειτα στο συμβολικό, κατασκευάζοντας πιο σύνθετες νοητικές δομές χώρου. Η διεξαγωγή παρόμοιων ερευνών σε διαφορετικές ηλικίες θα μπορούσε να δώσει μια καλύτερη εικόνα της ανάπτυξης της αντίληψης του χώρου και να οδηγήσει στη γενίκευση των συμπερασμάτων. Επίσης, θα παρουσίαζε ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον η διεξαγωγή παρόμοιων ερευνών, που να εξετάζουν την επίδραση της χρήσης των ηλεκτρονικών υπολογιστών και των δυναμικών λογισμικών στην ικανότητα αντίληψης του χώρου. Οι έρευνες του είδους αυτού μπορούν να συμβάλουν στη βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης της γεωμετρίας και στην αναζήτηση νέων αποτελεσματικών πρακτικών και προσεγγίσεων μέσα στην τάξη.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' Understanding of Three-Dimensional Rectangular Arrays of Cubes. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 258-292.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. V. A. (1998). Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(5), 503-532.

Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 16,* 389-400.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. Grows (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Education,* 420-464. New York: Macmillan Publishing Company.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 192-212.

Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Γ. Δαρδανός.

Fuys, D. J., & Liebov, A. K. (2002). Concept Learning in Geometry. In D. L. Chambers (Ed.), *Putting Research into Practice in the Elementary Grades,* 156-159. Reston, VA: NCTM.

Gardner, H. (1983). *Frames of mind: the theory of multiple intelligences.* New York, NY: Basic Books.

Hershkowitz, R., & Markovits, Z. (2002). Conquer Mathematics Concepts by Developing Visual Thinking. In D. L. Chambers (Ed.), *Putting Research into Practice in the Elementary Grades,*168-173. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

Nemirovsky, R., & Noble, T. (1997). On mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics 33,* 99-131.

Newcombe, N. S., & Huttenlocher, J. (2000). *Making Space: The Development of Spatial Representation and Reasoning.* London, England: MIT Press.

Owens, D. T. (2002). Spatial abilities. In D. L. Chambers (Ed.), *Putting Research into Practice in the Elementary Grades,* 160-163. Reston, VA: NCTM.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space.* New York: W.W. Norton & Co.

Thom, J. S., & Pirie, S. E. B. (2002). Problems, perseverance, and mathematical residue. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 1-28.