

## Θεματική ενότητα 2: Έκφραση μαθηματικής σκέψης: ψυχολογικές και κοινωνικές προσεγγίσεις

Χαράλαμπος Σακονίδης

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης  
xsakonid@eled.duth.gr

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην ανάπτυξη της ανθρώπινης σκέψης, ιδιαίτερα σε ό,τι αφορά στις υψηλότερες νοητικές λειτουργίες είναι, όπως έχει πλέον διαπιστωθεί, καθοριστικός: ενεργοποιούν, κατευθύνουν, δομούν και συχνά οριοθετούν το συλλογισμό μέσα από τη διαμεσολαβητική τους λειτουργία. Ειδικότερα στα μαθηματικά, την επιστήμη της συστηματικής περιγραφής και μελέτης κανονικοτήτων, της πρωτοκαθεδρίας της φόρμας έναντι του περιεχομένου, η πρόσβαση στη μαθηματική γνώση και η ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης από το μαθητευόμενο προϋποθέτουν την ανάπτυξη ικανοτήτων και δεξιοτήτων έκφρασης και χειρισμού ενός πλήθους αναπαραστάσεων, οι οποίες είτε έχουν καθιερωθεί μέσα στο χρόνο ως κοινά αποδεκτοί τρόποι σηματοδότησης συγκεκριμένων μαθηματικών ιδεών είτε αποτελούν ατομικές επινοήσεις, συχνά πρόσκαιρου χαρακτήρα, που προκύπτουν, κατά κανόνα, στο πλαίσιο της μάθησης και της διδασκαλίας του αντικειμένου.

«Η αναπαράσταση αποτελεί εξαιρετικά κρίσιμο στοιχείο για μια θεωρία της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών, όχι μόνο γιατί η χρήση συμβολικών συστημάτων - των οποίων η σύνταξη και η σημασιολογία είναι πλούσια, ποικίλη και παγκόσμια - είναι τόσο σημαντική στα μαθηματικά, αλλά, επίσης, και για δύο ισχυρούς επιστημολογικούς λόγους: (α) τα μαθηματικά διαδραματίζουν ένα σημαντικό ρόλο στην κατανόηση / αντίληψη του πραγματικού κόσμου, (β) τα μαθηματικά κάνουν εκτεταμένη χρήση ομοιομορφισμών, όπου ο περιορισμός των δομών του ενός ομοιομορφισμού σε σχέση με τους άλλους αποτελεί σημαντικό στοιχείο» (Vergnaud, 1987, σελ. 227).

Γενικά, μια αναπαράσταση είναι ένας σχηματισμός (δηλαδή, ένας συνδυασμός χαρακτήρων ή συμβόλων-σημείων), ο οποίος αναπαριστά κάτι άλλο με έναν συγκεκριμένο τρόπο. Κατά τον Goldin (2002), ο σχηματισμός αυτός «μπορεί, για παράδειγμα, να δρα στη θέση, να ερμηνεύεται ως, να αντιστοιχεί σε, να υποδηλώνει, να απεικονίζει, να ενσαρκώνει, να κωδικοποιεί, να επικαλείται, να ονοματίζει, να συνδέεται με, να σημαίνει, να παράγει, να αναφέρεται σε, να μοιάζει με, να εξυπηρετεί ως μεταφορά για, να σηματοδοτεί, να αντικαθιστά, να αντιπροσωπεύει, να προτείνει ή να συμβολίζει αυτό που αναπαρίσταται». Μπορεί να επιτελεί μια ή περισσότερες από τις παραπάνω λειτουργίες δια μέσου ενός φυσικού δεσμού ή κάποιας άλλης διαδικασίας παραγωγής στη σκέψη ενός ατόμου, με βάση ρητώς συμφωνημένες συμβάσεις ή σιωπηρώς συμφωνημένες πρακτικές στο πλαίσιο μιας κοινωνικής ομάδας, ενός πολιτισμού ή ενός μοντέλου που έχει αναπτυχθεί από κάποιον ερευνητή.

Η παραπάνω οριοθέτηση αφορά σε αυτό που στη σχετική βιβλιογραφία αναφέρεται ως 'εξωτερικές αναπαραστάσεις'. Ωστόσο, είναι φανερό ότι η μελέτη του ρόλου των αναπαραστάσεων επιβάλλει τη θεώρηση, εκτός των σχηματισμών που είναι εξωτερικοί προς το μαθητευόμενο, και αυτών που είναι εσωτερικοί σε αυτόν, αλλά και των μεταξύ τους σχέσεων. Στην περίπτωση των μαθηματικών, οι έννοιες αυτές είναι σημαντικές τόσο για το χαρακτηρισμό της φύσης των κανονικοτήτων, που αποτελούν το κατ' εξοχήν αντικείμενο της μαθηματικής επιστήμης, όσο και για μια από ψυχολογικής άποψης επαρκή προσέγγιση του περιεχομένου της μαθηματικής κατανόησης και του τρόπου που αυτή συγκροτείται. Τα παραπάνω οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η έρευνα που αφορά στις αναπαραστάσεις ενδιαφέρεται για κάποιες εξωτερικές μεταβλητές, που είναι άμεσα παρατηρήσιμες, μαζί με άλλες, εσωτερικές κατασκευές, οι οποίες απαιτούν την προσεκτική εξαγωγή συμπερασμάτων, που συνδέονται άμεσα με το πλαίσιο ανάδειξής τους. Κατά συνέπεια, επιβάλλεται να αξιοποιούνται τόσο ποσοτικές, όσο και ποιοτικές μέθοδοι έρευνας. Η μελέτη των αναπαραστάσεων κατά τη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών επιτρέπει τη λεπτομερειακή περιγραφή της μαθηματικής ανάπτυξης των μαθητών σε αλληλεπίδραση με το σχολικό περιβάλλον και τη διαμόρφωση διδακτικών προσεγγίσεων, οι οποίες παρέχουν τη δυνατότητα απόκτησης μαθηματικής ισχύος από το μαθητή.

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις μπορούν να διακριθούν σε ατομικές επινοήσεις και σε ιδεαλιστικούς σχηματισμούς αναπαράστασης, οι οποίοι εκφράζουν κοινωνικά συμφωνημένες νόρμες. Οι τελευταίοι και οι σχέσεις που αναπαριστούν καθιερώθηκαν με το πέρασμα του χρόνου, αρχικά μέσω ατομικών επινοήσεων και στη συνέχεια μέσα από κοινά αποδεκτές συμβάσεις (Goldin, 1998). Οι συμβάσεις αυτές εξελίχθηκαν σε νόρμες και είναι σήμερα αποτυπωμένες στο νου των ανθρώπων που έχουν μελετήσει μαθηματικά, καθιστώντας έτσι δυνατή τη σαφή επικοινωνία μεταξύ τους. Είναι εμφανές ότι, για να είμαστε σε θέση να ανιχνεύσουμε αυτήν την πορεία με την απαιτούμενη λεπτομέρεια, είναι σημαντικό να μετακινηθούμε πέρα από τις εξωτερικές αναπαραστάσεις, στις διεργασίες που επιτελούνται εσωτερικά σε συγκεκριμένα μέλη αυτής της ομάδας.

Μια εξωτερική αναπαράσταση (π.χ., λέξη, αριθμητικό ψηφίο, γραφική παράσταση, εξίσωση), όπως είναι αυτονόητο, σπάνια μπορεί να γίνει κατανοητή απομονωμένα· συνήθως ανήκει σε ευρύτερα συστήματα, δηλαδή σε ευρύτερες οργανώσεις σχηματισμών. Για παράδειγμα, τα αριθμητικά ψηφία ανήκουν σε ένα σύστημα ινδοαραβικών συμβόλων, τα δομικά στοιχεία του οποίου οργανώνονται έχοντας ως σημείο αναφοράς (βάση) το δέκα. Η αναγνώριση αυτού του γεγονότος οδηγεί στην αναγκαιότητα εισαγωγής της έννοιας του (εξωτερικού) συστήματος αναπαράστασης. Ένα τέτοιο σύστημα αποτελείται από (Goldin, 2002):

- Χαρακτήρες ή σημάδια, που μπορεί να ανήκουν σε ένα καλώς ορισμένο σύνολο (π.χ., γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου) ή να είναι μερικώς ή ασαφώς ορισμένες οντότητες (π.χ., φυσικά αντικείμενα και οι ιδιότητές τους)
- Τρόπους συνδυασμού των χαρακτήρων σε επιτρεπτούς σχηματισμούς, που μπορεί να είναι σαφώς ή ασαφώς ορισμένοι
- Δομές που συνίστανται σε σχηματισμούς σχηματισμών, οι οποίοι προκύπτουν με βάση κάποιους σαφώς ή ασαφώς ορισμένους κανόνες.

Σε μια ανάλογη προσπάθεια ορισμού του συστήματος αναπαράστασης, ο Kaput (1987) υποστήριξε ότι ένα σύστημα αναπαράστασης περιλαμβάνει τον κόσμο που αναπαρίσταται, τον κόσμο που αναπαριστά και έναν κανόνα που ορίζει μια αντιστοιχία μεταξύ των δύο αυτών κόσμων. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης χαρακτηρίζονται από τις συμβάσεις που διέπουν τη δομή τους και η σωστή χρήση τους κρίνεται με βάση την τήρηση αυτών των συμβάσεων, οι οποίες, από τη στιγμή που έχουν καθιερωθεί, αποτελούν αντικείμενο προς ανακάλυψη για το μαθητευόμενο.

Σε ό,τι αφορά τα εσωτερικά συστήματα αναπαράστασης (π.χ., προσωπικές συμβολικές κατασκευές, ερμηνευτικές προσεγγίσεις επίλυσης προβλήματος, κτλ) και τη σχέση τους με τα εξωτερικά, τα πρώτα, όπως έχει ήδη επισημανθεί, δεν μπορούν να παρατηρηθούν άμεσα, αλλά συνάγονται από τις πράξεις των ατόμων σε μια ποικιλία από καταστάσεις, δηλαδή από την παρατήρισιμη συμπεριφορά τους. Με άλλα λόγια, η άποψη ότι τα άτομα διαθέτουν εσωτερικές αναπαραστάσεις (συχνά αποκαλούμενες νοητικές αναπαραστάσεις) συνιστά μια θεωρία επεξήγησης της συμπεριφοράς των ατόμων με εσωτερικά κριτήρια, η οποία ανάγεται σε ένα ορισμένο επίπεδο περιγραφής.

Η διδασκαλία των μαθηματικών περιλαμβάνει κατά κύριο λόγο τη μάθηση της ερμηνείας συμβατικών (εξωτερικών) συστημάτων αναπαράστασης και της χρήσης τους στην επίλυση προβλημάτων από τους μαθητές. Μερικά από αυτά τα συστήματα αφορούν κυρίως σε σύμβολα, ενώ άλλα σε σχέσεις που δηλώνονται με εικονιστικό (visual) ή χωρικό τρόπο και έχουν συχνά στατικό χαρακτήρα. Ωστόσο, τα συστήματα αυτά αναπαρίστανται και τυγχάνουν, επιπλέον, και εσωτερικής επεξεργασίας από το μαθητή. Αυτή η εσωτερική διεργασία είναι που καθορίζει τη χρησιμότητα των εξωτερικών συστημάτων αναπαράστασης, η οποία συνδέεται άμεσα με τον τρόπο που το άτομο τα κατανοεί και αλληλεπιδρά με αυτά.

Στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής πράξης, οι εκπαιδευτικοί συνεχώς εξάγουν συμπεράσματα για τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των μαθητών, τις αντιλήψεις και τις παρανοήσεις τους, με βάση την παραγωγή εξωτερικών αναπαραστάσεων ή την αλληλεπίδρασή τους με αυτές. Ορισμένες φορές, η εξωτερική αναπαράσταση θεωρείται ότι αναπαριστά την εσωτερική και άλλες φορές το αντίστροφο. Αυτό υποδηλώνει μια διπλής κατεύθυνσης σχέση μεταξύ των δύο και αναδεικνύει ένα εξαιρετικά σημαντικό στοιχείο, ότι εσωτερικοί σχηματισμοί διαφορετικών ειδών μπορούν να αναπαραστήσουν ο ένας τον άλλο με πολλούς διαφορετικούς τρόπους (Goldin & Kaput, 1996). Για παράδειγμα, μια εσωτερική εικονιστική αναπαράσταση μπορεί να προκαλέσει έναν εσωτερικό αλγεβρικό σχηματισμό, μια σειρά από ενέργειες που αποτυπώνονται με αισθησιοκινητικό τρόπο, κτλ. Ένας τρόπος για να μελετηθεί η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας από ένα μαθητή είναι η διερεύνηση της ποικιλίας των διακριτών, κατάλληλων ή μη αναπαραστάσεων που αυτός έχει διαμορφώσει και η προσπάθεια περιγραφής και ανάλυσης των σχέσεων αναπαράστασης που έχει αναπτύξει.

Συνοψίζοντας, η αφηρημένη έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει μια σχέση μεταξύ δύο (ή περισσότερων) σχηματισμών, με τον ένα να αναπαριστά τον άλλο με συγκεκριμένο τρόπο. Στο πλαίσιο της ψυχολογίας της μάθησης των μαθηματικών, η συστηματική μελέτη της σημασίας των αναπαραστάσεων επιβάλλει τη θεώρηση:

- σχηματισμών που είναι εξωτερικοί προς το μαθητή ή τον εκπαιδευτικό, γενικά παρατηρήσιμων στο άμεσο περιβάλλον (λέξεις, εξισώσεις, γραφικές παραστάσεις, γεωμετρικά σχήματα, μικρόκοσμοι, κτλ)
- σχηματισμών που είναι εσωτερικοί στο μαθητή ή τον εκπαιδευτικό, που κωδικοποιούνται στο νου (λεκτικοί σχηματισμοί, εσωτερικοποιημένα μαθηματικά σύμβολα, ευρετικά σχέδια, γεωμετρικά σχήματα, κτλ) και
- πιθανών ή υποτιθέμενων σχέσεων αναπαράστασης (εξωτερικών ή εσωτερικών) του μαθητή ή του εκπαιδευτικού.

Στο πλαίσιο της παραδοσιακής προσέγγισης (συμπεριφορισμός), οι εσωτερικοί σχηματισμοί απορρίπτονται ως μη παρατηρήσιμοι, ενώ πιο σύγχρονες προσεγγίσεις (κονστρουκτιβισμός, ριζοσπαστικός κονστρουκτιβισμός) είναι διστακτικές στην αποδοχή των εξωτερικών σχηματισμών εξαιτίας της εγγενούς αδυναμίας αντικειμενικής πρόσβασής τους από το μαθητευόμενο. Το ίδιο ισχύει και για τον κοινωνικό κονστρουκτιβισμό, σύμφωνα με τον οποίο οι μαθηματικές αλήθειες αποτελούν απλώς κοινωνικές συναινέσεις και, κατά συνέπεια, δεν είναι δυνατό να υπάρχουν αντικειμενικά σωστοί ή λανθασμένοι συλλογισμοί. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία, καθώς η απόρριψη ή η υποβάθμιση των εσωτερικών αναπαραστάσεων (παραδοσιακή προσέγγιση) οδηγεί στην εστίαση στις παρατηρήσιμες παραγωγές των μαθητών - την επίδοσή τους, δηλαδή, σε έργα που αφορούν σε μαθηματικές δεξιότητες, με άλλα λόγια σε συμπεριφοριστικούς στόχους -, αγνοώντας τη μαθηματική τους κατανόηση ή την ανάπτυξή της. Αντίθετα, η αγνόηση ή η υποβάθμιση των εξωτερικών αναπαραστάσεων (καινοτόμες προσεγγίσεις) οδηγεί στην έμφαση στις γνωστικές διαδικασίες του μαθητή, στην ποιοτική εννοιολογική κατανόηση, που συχνά συνάγεται με αναξιόπιστο τρόπο, με συνέπεια τον αποκλεισμό των επιτευγμάτων των μαθητών που αφορούν σε μετρήσιμες δεξιότητες. Όποια προσέγγιση και αν υιοθετήσει κανείς, η έννοια της αναπαράστασης ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων ακυρώνεται.

Με βάση το παραπάνω πλαίσιο προβληματισμού, επιχειρείται στη συνέχεια μια πρώτη ανάγνωση των δεκαεπτά εργασιών που υποβλήθηκαν στη θεματική ενότητα «Έκφραση μαθηματικής σκέψης: ψυχολογικές και κοινωνικές προσεγγίσεις» και έγιναν αποδεκτές. Καταρχήν, στο σύνολό τους αποτυπώνουν μια ενδιαφέρουσα ποικιλία από θεωρητικές και μεθοδολογικές προσεγγίσεις σχετικά με τις αναπαραστάσεις στο χώρο της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης, οι οποίες συνδέονται κατ' εξοχήν (13/17) με θέματα μαθηματικών γνώσεων (γνωστικά) και λιγότερο (4/17) με θέματα πεποιθήσεων, στάσεων και συναισθημάτων προς το αντικείμενο των μαθηματικών ή τον τρόπο προσέγγισής του (κοινωνικο-πολιτισμικά). Η πλειοψηφία τους εμφανίζεται να υιοθετεί το κονστρουκτιβιστικό πλαίσιο (αν και αυτό δεν γίνεται πάντοτε σαφές με ρητό τρόπο), ένας μικρός αριθμός εργασιών αυτό του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού, ενώ δύο εργασίες αξιοποιούν τις πρόσφατες θεωρητικές οπτικές στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως αυτήν της περιστασιοποιημένης μάθησης, της συμβολικής αλληλεπίδρασης ή της θεωρίας λόγου. Ωστόσο, ανεξάρτητα από το θεωρητικό πλαίσιο που ρητά ή άρρητα υιοθετείται, οι μεθοδολογικές προσεγγίσεις που επιλέγονται στο εμπειρικό μέρος (κυρίως ποιοτικού χαρακτήρα) επικεντρώνονται σε εξωτερικές αναπαραστάσεις, οι οποίες παράγονται από τα υποκείμενα στο πλαίσιο συγκεκριμένων έργων και μέσα από διάφορα σχήματα ανάλυσης των δεδομένων επιχειρείται να συνδεθούν (άμεσα ή έμμεσα) με τις αντίστοιχες εσωτερικές τους αναπαραστάσεις. Στις

περισσότερες περιπτώσεις αυτή η σύνδεση, αν και δεν δηλώνεται με ρητό τρόπο, είναι εμφανής είτε στη συζήτηση είτε στα συμπεράσματα των εργασιών. Με άλλα λόγια, οι συγγραφείς, στην πλειοψηφία τους, τείνουν να θεωρούν την παραγωγή κάποιας εξωτερικής αναπαράστασης από έναν εκπαιδευτικό (11 στις 17 εργασίες) ή έναν μαθητή (6/17) ως δηλωτική, σε μικρό ή μεγάλο βαθμό, μιας εσωτερικής σχετικής αναπαράστασης ή/ και αντίστροφα. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η μελέτη της σχέσης μεταξύ εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων αποτελεί σημαντικό κεφάλαιο της έρευνας που αφορά στις αναπαραστάσεις, η οποία, όμως, οφείλει να πληροί κάποιες προϋποθέσεις. Μεταξύ αυτών κυρίαρχη θέση καταλαμβάνουν η προσεκτική διερεύνηση της φύσης και της κατεύθυνσης αυτής της σχέσης, καθώς και του τρόπου λειτουργίας του συστήματος αναπαράστασης που ενεργοποιείται κάθε φορά, αλλά και των περιορισμών που θέτει το πλαίσιο μέσα στο οποίο αυτές αναδεικνύονται. Ωστόσο, στις περισσότερες από τις δεκαεπτά εργασίες οι προϋποθέσεις αυτές παραμένουν στο παρασκήνιο της επιχειρηματολογίας που συγκροτείται, δίνοντας συχνά την εντύπωση ότι η σύνδεση αυτή είναι αυτονόητη και δεδομένη. Ως αποτέλεσμα, υποβαθμίζεται ή και ακυρώνεται η καθοριστική και ταυτόχρονα πολύπλοκη σχέση μεταξύ εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία στα μαθηματικά, τα οποία τείνουν να παρουσιάζονται πολύ γρήγορα ως μια απερίστασιοποιημένη (decontextualised) αναπαράσταση, χωρίς να έχει προηγηθεί η απαραίτητη επεξεργασία των μαθηματικών ιδεών σε συγκεκριμένα πλαίσια, δηλαδή, χωρίς να έχει δοθεί ο απαραίτητος χρόνος και η αναγκαία πλαισίωση για την κατασκευή σχετικών εσωτερικών αναπαραστάσεων. Η αδυναμία αυτή γίνεται ιδιαίτερα εμφανής στην περιορισμένη ή συχνά απύουσα προσεκτική τεκμηρίωση του ακριβούς περιεχομένου, της δομής και της λειτουργίας των εσωτερικών αναπαραστάσεων, με αναφορά στο εκπαιδευτικό και στο ευρύτερο κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο, μέσα στο οποίο αυτές προκύπτουν.

Για μια πιο συγκεκριμένη σκιαγράφηση της θεματικής, της μεθοδολογίας και των συμπερασμάτων, στα οποία κατέληξαν οι έρευνες που εντάσσονται στην ενότητα «Έκφραση μαθηματικής σκέψης: ψυχολογικές και κοινωνικές προσεγγίσεις», επιχειρείται παρακάτω μια σύντομη παρουσίασή τους, με βάση το είδος της (εξωτερικής) αναπαράστασης που αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης τους. Έτσι, δεκάξι εργασίες στρέφονται κατά κύριο λόγο στο γλωσσικό σύστημα αναπαράστασης, που συχνά σε συνδυασμό με άλλα συστήματα (εξωτερικής) αναπαράστασης εκλαμβάνεται (ρητά ή άρρητα) ότι υποδηλώνουν διάφορα επίπεδα πρόσβασης των υποκειμένων σε συγκεκριμένες μαθηματικές γνώσεις ή μια ποικιλία από (διαμορφωμένες ή υπό διαμόρφωση) αντιλήψεις ή πεποιθήσεις τους για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους. Ειδικότερα, οκτώ από τις μελέτες αξιοποιούν δεδομένα που αφορούν στο λόγο και σε εικονιστικές, συμβολικές ή/και γραφικές αναπαραστάσεις μαθητών ή εκπαιδευτικών, πέντε σε λέξεις ή διατυπώσεις και τρεις σε συγκεκριμένες μορφές δόμησης και χρήσης του λόγου σε μια σειρά από έργα που σχετίζονται με τα μαθηματικά ή την εκπαίδευση σε αυτά. Επιπλέον, η δέκατη έβδομη εργασία επικεντρώνεται αποκλειστικά στο γραφικό αναπαραστατικό σύστημα και μάλιστα σε υπολογιστικό περιβάλλον.

Πιο συγκεκριμένα, σε ό,τι αφορά στην πρώτη ομάδα ερευνών, οι Χρονάκη και Δημουλά μελετούν τις χωρικές εικόνες και δεξιότητες σχετικά με τα τρίγωνα, που αποτυπώνονται στα έργα και στις προφορικές ερμηνείες παιδιών της πρώτης τάξης του Δημοτικού Σχολείου, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι παρά το ικανοποιητικό επίπεδο σχεδιαστικών δεξιοτήτων, οι ερμηνείες των παιδιών του δείγματος υποδεικνύουν τον

υποκειμενικό χαρακτήρα των σχεδίων τους που φαίνεται να επηρεάζονται από στερεοτυπικές αντιλήψεις περί τριγώνων. Ο Σδρόλιας εστιάζει στη συμβολή του χειραπτικού υλικού στην ενίσχυση της επικοινωνίας και της συμμετοχής στο μάθημα των μαθηματικών μιας μαθήτριας της Δευτέρας τάξης του Δημοτικού Σχολείου με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες, αναδεικνύοντας όψεις του τρόπου αξιοποίησης τέτοιων υλικών στην προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών στην τάξη. Οι Παπαδόπουλος και Μαμμωνά-Downs επιχειρούν τη διερεύνηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν μαθητές της Ε΄ και της Στ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου στην εφαρμογή δύο στρατηγικών υπολογισμού του εμβαδού μη κανονικών σχημάτων, της αποκοπής και της επικόλλησης. Ανάμεσα στα ευρήματά τους, ενδιαφέρον παρουσιάζει η διαπίστωση ότι καθεμιά από αυτές τις στρατηγικές αναδεικνύει διαφορετικές διαστάσεις της έννοιας του εμβαδού και αυτό αντανακλάται τόσο στο επίπεδο της εικονιστικής επιχειρηματολογίας όσο και, γενικά, στην επίλυση προβλήματος. Αντικείμενο της έρευνας των Χαραλάμπους και Πίττα-Πανταζή αποτελεί η εξέταση του ρόλου της αριθμογραφικής στην ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού-μέτρου, με βάση τις απαντήσεις μαθητών των δύο τελευταίων τάξεων του Δημοτικού Σχολείου σε έναν αριθμό από σχετικά έργα. Η ανάλυση των δεδομένων αποκαλύπτει τον καταλυτικό ρόλο της επιτυχίας σε έργα αριθμητικών γραμμών στην ανάπτυξη της σχετικής έννοιας από τους μαθητές κάτω, όμως, από ορισμένες προϋποθέσεις. Στην εργασία των Βερύκιου και Φαρμάκη, αντικείμενο έρευνας αποτελούν οι στρατηγικές επίλυσης μιας ανίσωσης πρώτου βαθμού από μαθητές της Β΄ τάξης του Γυμνασίου, μετά από μια διδακτική παρέμβαση που στηριζόταν στη συναρτησιακή προσέγγιση των αλγεβρικών ιδεών. Στα συμπεράσματά τους οι ερευνητές εντοπίζουν τόσο τα θετικά στοιχεία αυτής της προσέγγισης σε σύγκριση με την παραδοσιακή όσο και τους περιορισμούς της. Οι Σπύρου και Κεϊσογλου εστιάζονται στη διδακτική προσέγγιση της έννοιας της τριγωνομετρικής συνάρτησης με βάση την έννοια της διαμεσολαβούμενης εκτίμησης, στο πλαίσιο της οποίας ζητήθηκε από μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου να εργαστούν σε ένα ποικίλο σε εργαλεία υπολογιστικό περιβάλλον. Η ανάλυση των δεδομένων αναδεικνύει, κατά τους συγγραφείς, τις σημαντικές δυνατότητες αυτού του περιβάλλοντος. Οι τελευταίες δύο εργασίες αυτής της ομάδας αφορούν σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς. Συγκεκριμένα, οι Τσελεπίδης και Μαρκόπουλος μελετούν τις αντιλήψεις φοιτητών του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης σχετικά με την έννοια της συμμετρίας, μέσα από τις γραπτές απαντήσεις και τις προφορικές τους ερμηνείες σε μια σειρά από σχετικά ερωτήματα που τους τέθηκαν. Βασικό τους συμπέρασμα είναι ότι τα υποκείμενα της έρευνάς τους θεωρούν τη συμμετρία ως διαδικασία απόδειξης της ισότητας γεωμετρικών αντικειμένων και όχι ως γεωμετρικό μετασχηματισμό. Τέλος, οι Pitta-Pantazi, Tsamir και Christou διαπιστώνουν στην έρευνά τους με μελλοντικούς εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης την ισχύ του διαισθητικού κανόνα «ίδιο Α, ίδιο Β» στον τρόπο με τον οποίο αυτοί κατανοούν τις συνέπειες του μετασχηματισμού συγκεκριμένων τετραπλεύρων στο μέγεθος της περιμέτρου και του εμβαδού τους.

Αναφορικά με τις εργασίες που τα δεδομένα τους αφορούν αποκλειστικά σε λεξιλογικά στοιχεία ή σε προφορικές ή γραπτές διατυπώσεις των υποκειμένων τους, οι Δεσλή και Μπάρκα μελετούν τον τρόπο με τον οποίο μαθητές της Β΄ τάξης και της Ε΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου αντιλαμβάνονται και ερμηνεύουν λέξεις που έχουν ταυτόχρονα καθημερινό και μαθηματικό νόημα, εντοπίζοντας διαφορές κυρίως στον τρόπο

κατανόησης και χρήσης των διαφορετικών λέξεων από τους μαθητές των δύο τάξεων. Οι Ανέστη και Τριανταφυλλίδης παρουσιάζουν μια διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε στην πρώτη τάξη του Δημοτικού Σχολείου, στο πλαίσιο της οποίας επιχείρησαν να συνδέσουν την παιδική λογοτεχνία με τα μαθηματικά. Οι αναλύσεις των δεδομένων τους, κατά τους ερευνητές, υποδεικνύει ότι τέτοιες προσεγγίσεις μπορούν, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, να οδηγήσουν στην εξέλιξη των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών, καθώς και της ταυτότητάς τους ως μελών μιας κοινότητας μάθησης. Τα συναισθήματα και οι αντιλήψεις φοιτητών του Παιδαγωγικού Τμήματος προς τη στατιστική είναι το αντικείμενο μελέτης των Αναστασιάδου, Παπαριστοδήμου και Φιλίππου. Η συνεπαγωγική ανάλυση που εφαρμόστηκε στις απαντήσεις των υποκειμένων σε ένα σχετικό ερωτηματολόγιο έδειξε, ανάμεσα στα άλλα, ότι τα θετικά συναισθήματα των φοιτητών για το συγκεκριμένο μαθηματικό κλάδο συνδέονται με υψηλή γνωστική ικανότητα. Η Δεληκάρη εστιάζεται στο λόγο των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, οι οποίοι διδάσκουν μαθηματικά, σχετικά με τη βαθμολογία και επιχειρεί να διερευνήσει μέσα από αυτόν τις πολύπλοκες διαδικασίες συγκρότησης της επαγγελματικής τους ταυτότητας. Η επεξεργασία των δεδομένων της έρευνας αποκαλύπτει την ενεργοποίηση ανομοιογενών και χωρίς συνοχή λόγων από τους εκπαιδευτικούς του δείγματος, που αποδίδεται στην προσπάθειά τους να διαχειριστούν την εμπειρία της άσκησης της εξουσίας που συνιστά η βαθμολόγηση. Τέλος, οι Καφούση, Σκουμπουρδή και Καλαβάσης διαπιστώνουν στην έρευνά τους διαφοροποιήσεις στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών και των γονιών για τις άτυπες μαθηματικές γνώσεις των παιδιών κατά την είσοδό τους στο νηπιαγωγείο, όπως αναδεικνύονται μέσα από τις απαντήσεις τους σε σχετικό ερωτηματολόγιο.

Οι τρεις εργασίες που επικεντρώνονται στη δομή του λόγου των υποκειμένων τους αφορούν σε μαθητές λυκείου και μελλοντικούς εκπαιδευτικούς. Συγκεκριμένα, οι Κολέζα και Καμπάνη διερευνούν τις μορφές αιτιολόγησης που χρησιμοποιούν μαθητές της Α΄ τάξης του Λυκείου κατά την επίλυση προβλημάτων που αναφέρονται σε ισοσκελή τρίγωνα, εντοπίζοντας τη μη γραμμικότητα της εξέλιξης αυτών των μορφών, καθώς και τους παράγοντες που την επηρεάζουν. Οι Τάσης και Κολέζα εξετάζουν την επίδραση της γλώσσας και άλλων κοινωνικών παραγόντων στην από κοινού συγκρότηση της μαθηματικής γνώσης κατά τη συνεργατική επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων από φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης. Η ανάλυση των δεδομένων τους φανερώνει τη σημασία δημιουργίας ενός αλληλεπιδραστικού πλαισίου μάθησης από τον εκπαιδευτικό, εντός του οποίου αξιοποιούνται οι αντιλήψεις που διέπουν τις πρακτικές επίλυσης προβλήματος και παρέχεται η δυνατότητα στους εκπαιδευόμενους να διεκδικήσουν για τον εαυτό τους ρόλους, στους οποίους αποδίδουν θετική κοινωνική αξία. Τέλος, οι Τσελεπιδής, Σπηλιωτοπούλου και Πόταρη αναλύουν τα επιχειρήματα που αναπτύσσουν μελλοντικοί εκπαιδευτικοί σχετικά με ερωτήματα που αφορούν την έννοια του όγκου, αξιοποιώντας ένα συστημικό δίκτυο που επιτρέπει την περιγραφή αυτών των επιχειρημάτων τόσο ως προς την ολότητα, όσο και ως προς τα συστατικά τους στοιχεία. Τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης φανερώνουν ότι τα εννοιολογικά εργαλεία και οι επεξηγήσεις των υποκειμένων δεν τους παρέχουν τη δυνατότητα συνδέσεων και, κατά συνέπεια, ουσιώδους επιχειρηματολογίας.

Τέλος, ο Διακουμόπουλος περιγράφει μια διδακτική προσέγγιση, η οποία στηρίζεται στη θεώρηση ότι η ενεργοποίηση πολλαπλών (εξωτερικών) συστημάτων αναπαράστασης και η εναλλαγή-μετάφραση από το ένα σύστημα στο άλλο μπορούν να βοηθήσουν

αποτελεσματικά την κατανόηση βασικών εννοιών του απειροστικού λογισμού. Για το σκοπό αυτό προτείνεται η αξιοποίηση ενός υπολογιστικού περιβάλλοντος, το οποίο επιτρέπει τον ενεργό χειρισμό των παραμέτρων μιας συνάρτησης και παρέχει τη δυνατότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων της (συμβολικά, αναλυτικά, γραφικά, γεωμετρικά, κτλ), καθώς και τη διατύπωση και τον έλεγχο εικασιών.

Από όσα έχουν προηγηθεί μπορεί να υποστηριχθεί ότι οι εργασίες που εντάσσονται στην ενότητα «Έκφραση μαθηματικής σκέψης: ψυχολογικές και κοινωνικές προσεγγίσεις» αποτυπώνουν μια ιδιαίτερα δυναμική ερευνητική περιοχή της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Η ποικιλία στη θεματική, στα θεωρητικά πλαίσια, στην ερευνητική μεθοδολογία, στα υποκείμενα και στα σχήματα ανάλυσης των δεδομένων, καθώς και ο τρόπος αξιοποίησής τους στην ελληνική πραγματικότητα, ο οποίος είναι συμβατός με αυτόν που εμφανίζεται στην αντίστοιχη περιοχή στο διεθνές πεδίο της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση, διαγράφουν ένα ιδιαίτερα δυναμικό και γόνιμο ξεκίνημα. Ωστόσο, η περαιτέρω εξέλιξη της συγκεκριμένης ερευνητικής δραστηριότητας θα εξαρτηθεί από το βαθμό στον οποίο οι ερευνητές που δραστηριοποιούνται στο συγκεκριμένο χώρο θα κατορθώσουν να ενοποιήσουν τις κατανοήσεις της έννοιας της αναπαράστασης ως περιγραφικής της αλληλεπίδρασης μεταξύ εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων, που έχει επιτευχθεί στο πλαίσιο ανόμοιων οπτικών, αξιοποιώντας αποτελεσματικά τα ευρήματα και τους περιορισμούς που ανέδειξαν οι μέχρι σήμερα ερευνητικές προσπάθειες.

## **Βιβλιογραφία**

- Goldin, G. A. (2002) Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Goldin, G. A. (1998) Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. In Journal of Mathematical Behavior 17, 137-165.
- Goldin, G. A. & Kaput, J. J. (1996) A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin (Eds.), Theories of mathematical learning (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J. (1987) Representation systems in mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vergnaud, G. (1987) Conclusion. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 227-232). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.