WORD PROBLEMS AS EXERCISES IN REALISTIC MATHEMATICAL MODELING IN THE ELEMENTARY SCHOOL

Lieven Verschaffel and Wim Van Dooren

Center for Instructional Psychology and Technology

Katholieke Universiteit Leuven, Belgium

Mathematics provides a set of tools for describing, analyzing and predicting the behaviour of systems in different domains of the real world (Burkhardt, 1994). This practical usefulness of mathematics has always provided, and still provides, one of the major justifications for the important role of mathematics in the school curriculum (Blum & Niss, 1991). In particular, the introduction of application and modeling was mainly intended to develop in students the skills of knowing when and how to apply their mathematics effectively in various kinds of problem situations encountered in everyday life and at work.

The application of mathematics to solve problem situations in the real world—otherwise termed mathematical modeling—can be usefully thought of as a complex and cyclic process involving a number of phases (e.g., Burkhardt, 1994; Blum & Niss, 1991; Verschaffel, Greer & De Corte, 2000):

- understanding the key elements in the problem situation;
- constructing a mathematical model of the relevant elements and relations embedded in the situation;
- working through the mathematical model to derive mathematical results(s);
- interpreting the outcome of the computational work;
- evaluating if the interpreted mathematical outcome is appropriate and reasonable;
- communicating the obtained solution of the original real-world problem.

Traditionally, word problems were used as the typical vehicle for introducing modeling and application problems in the mathematics classroom. Ideally, each of the six aforementioned components can also be distinguished in a word problem solving process (Verschaffel et al., 2000).

For a very long time, school word problems have played this application function without much reflection or critical concern. Of course, there have always been individuals showing (some) awareness of the bridging problem between reality and mathematics and the complexities involved (see Verschaffel et al., 2000, pp. 132-4 for a summary of an example from 1880 due to Lewis Carroll). However, many

teachers, textbook writers, and researchers have been using, and still use nowadays, word problems as if there was no serious "bridging problem" at all (Verschaffel et al., 2000).

During the last 20 years, many scholars have argued in various ways that the (traditional) practice of word problems in school mathematics does not foster in students, indeed inhibits, a genuine disposition towards mathematical modeling and applied problem solving. A first line of argumentation relies on philosophical, epistemological, and sociolinguistic analyses of how the abstract structures of mathematics relate to phenomena in the real world in general and on the analysis of word problems as a text genre in particular. Such work poses penetrating questions about the problematic authenticity of school tasks that ostensibly model reality, and about the mathematical school practices within which such tasks are embedded (Lave, 1992; Säljö, Riesbeck, & Wyndhamn, 2009). The analysis is deepened by the multiple ways in which postmodern linguistic and epistemological theories problematize the nature of reality itself (e.g., Gerofsky, 1997, 2009). These kinds of analyses result in serious questionings of the "unproblematic acceptance of concepts of separable mathematical and real worlds and of word problems as a transparent bridge between the two" (Gerofsky, 1997, p. 22). A second, closely related, line of argumentation relies on empirical work, mostly grounded in sociocultural, socioconstructivist and interactional perspectives, that has documented that after being immersed for several years into a traditional mathematics educational culture many students have constructed an approach to mathematical modeling whereby this activity is reduced to the execution of one or more arithmetic operations with the numbers in the problem, without any serious consideration of possible constraints of the realities of the problem context that may jeopardize the appropriateness of their standard models and solutions (Prediger, 2009). Together, these two closely related lines of research-based argumentation have led to serious scepticism about word problems as a vehicle for promoting the development of students' disposition towards authentic mathematical modeling and to a search for alternative ways of promoting mathematical modeling in the classroom.

In this paper we give a brief review and discussion of this research, including a summary of earlier work culminating in the book by Verschaffel, Greer, and De Corte (2000) and with special attention to the more recent empirical work. We begin with presenting the ascertaining studies documenting and illuminating the phenomenon of "suspension of sense-making" when doing school arithmetic word problems. Then we move to studies that have contributed to the explanation of the observed effects. This explanation is followed by a review of some recent design experiments wherein the modeling perspective has been implemented and tested. Afterwards we discuss some recent studies on the difficulties encountered by teachers who try to implement this new perspective into their daily classroom practices. Finally, we discuss a number of educational implications of the research done so far and some challenges for the future of teaching mathematical modeling.

MANIFESTATIONS OF STUDENTS' ABSTENTION FROM SENSE-MAKING WHEN DOING WORD PROBLEMS

There are many examples of responses by children to word problems that show an apparent willingness to ignore things that they know about the world, language, and logic (see the first chapter of Verschaffel et al., 2000, for a survey). The most dramatic and well-known example is probably the French study (prompted by a satirical reflection from Gustave Flaubert, see Verschaffel et al., 2000) in which elementary school children were posed questions of the following type: "There are 26 sheep and 10 goats on a ship. How old is the captain?" A large majority gave a numerical answer, while only a small minority questioned whether an answer is possible. The finding that the majority of the children were prepared to offer an answer to this and similarly nonsensical questions became a *cause célèbre*, both in France (Baruk, 1985) and within international mathematics education circles.

Intrigued by this example and some other manifestations of "suspension of sense-making" when doing school mathematics problems, we carried out in parallel in Northern Ireland and in Flanders pencil-and-paper studies with upper elementary and lower secondary school students, using a set of somewhat different problems including the examples in Table 1 (Greer 1993; Verschaffel, De Corte, & Lasure, 1994).

All problems used in these studies are about sense-making, but differ from the "captain's problem" and related problems in that they admit of sensible answers, albeit of types not generally sanctioned in mathematics classrooms, such as approximations or ranges. We termed each of these items "problematic" (P) in the sense that they require (from our point of view) the application of judgment based on real-world knowledge and assumptions, rather than only the routine application of basic arithmetical operation(s) cued by the problem. In both studies, the P-items were administered in a paper-and-pencil test together with a set of matched standard problems (S-items) that can be solved unproblematically (again, in our judgment) by applying the most obvious arithmetic operation(s) with the given numbers. For instance, the corresponding S-item for the first P-item in Table 1 was: "Pete organized a birthday party for his tenth birthday. He invited 8 boy friends and 4 girl friends. How many friends did Pete invite for his birthday party?" As well as recording answers, students were invited to explain or comment on their responses. When a P-item was answered in the predictable routine-based way without comment, we termed it a "non-realistic reaction" (NR). A response was classified as a "realistic reaction" (RR) if *either* the answer given indicated that realistic considerations had been taken into account *or* if a comment was added to the routine-based answer indicating that the student was aware of the modeling complexity. For example, a classification RR for the planks P-item would be given to a student who gave the (realistic) answer "8" (instead of 10) or who responded with 10 but who made a

comment such as "Steve would have a hard time putting together the remaining pieces of 0.5 meters". In both Greer's (1993) and Verschaffel et al.'s (1994) studies, students demonstrated a very strong overall tendency to exclude real-world knowledge and realistic considerations. (The percentages of correct responses to the corresponding S-items were close to 100%).

*Table 1. Examples of P-items involved in Verschaffel et al.'s (1994) study**

Carl has 5 friends and Georges has 6 friends. Carl and George decide to give a party together. They invite all their friends. All friends are present. How many friends are there at the party? *(Friends item**)*
Steve has bought 4 planks each 2.5 meters long. How many planks 1 meter long can he saw from these planks? *(Planks item)*
450 soldiers must be bussed to the their training site. Each army bus can hold 36 soldiers. How many buses are needed? *(Buses item)*
A man wants to have a rope long enough to stretch between two poles 12m apart, but he has only pieces of rope 1.5m long. How many of these pieces would he need to tie together to stretch between the poles? *(Rope item)*

* The symbol P refers to 'problematic'.

** Each P-item has been given a short verbal label for identification.

The findings of Greer (1993) and Verschaffel et al. (1994) have been replicated in many countries, including Belgium (Verschaffel, De Corte, & Lasure, 1999), China (Xin, Lin, Zhang & Yan, 2007; Xin & Zhang, in press), Germany (Renkl, 1999), Hungary (Csikos, 2003), Japan (Yoshida, Verschaffel, & De Corte, 1997), Northern Ireland (Caldwell, 1995), Switzerland (Reusser & Stebler, 1997a), and Venezuela (Hidalgo, 1997), mostly as part of more extensive investigations of the effects of certain variations in the presentation of the problems or in the experimental setting (see below). The findings were strikingly consistent across all these countries, sometimes to the great surprise and disappointment of these other researcher(s) who

had anticipated that the "disastrous" picture of the Irish and Flemish pupils would not apply to their students.

In an attempt to better understand what happened in these initial studies, several follow-up studies tested the effectiveness of variations in the experimental setting.

A first set of studies used an explicit *warning* at the beginning of the test that some of the problems in the test were non-trivial or might require an unusual way of responding. For instance, besides a replication of the original study by Verschaffel et al. (1994) with Japanese pupils, Yoshida et al. (1997) also made a comparison between groups of Japanese pupils with and without extra hints aimed at encouraging the disposition towards more realistic mathematical problem solving. The additional general warning at the start of the test, aimed at increasing the alertness of the pupils and thereby the number of RR's on the P-items, produced only a small, statistically non-significant difference in favor of the group receiving that warning (20% as opposed to 15% RR's overall).

In a recent study by Xin et al. (2007), fourth and fifth graders were administered the 10 pairs of S- and P-problems from Verschaffel et al.'s original study under two different conditions: a "warning instruction" and a "process-oriented instruction" printed on the top of the test sheets. In the "warning instruction" the children were told that some of the problems were not as easy as they seemed to be, whereas in the "process-oriented instruction" students were asked at the beginning of the test to consider the following two questions that would be helpful to their solutions: (1) What are the real-life situations behind the problem statements? (2) Is it appropriate to solve these problems by using straightforward arithmetic operations? The results showed that the difference in the percentages of realistic considerations reached marginal statistical significance between the two instructions (warning vs. process-oriented) (21% vs. 28%). Even though process-oriented instruction seemed, at least partially, to activate children's real-world knowledge and experience and raise their critical awareness of the appropriateness or otherwise of straightforward arithmetic operations, compared to the standard condition (see above), the impact of these experimental warnings remained disappointingly low.

The results of these studies indicate that variations in the experimental setting intended to make pupils more alert, to sensitize them to the consideration of aspects of reality, and to legitimize alternative forms of answer produce, at best, only weak effects. Apparently, these interventions are not powerful enough to overrule pupils' ingrained beliefs about word problems.

A second set of follow-up studies departed from the idea that complementing purely textually presented P-items with representational *illustrations*, should lead to an increase in RRs to these items. In two related studies, Dewolf, Van Dooren, Ev Cemen, and Verschaffel, 2014) investigated whether representational illustrations positively affected the number of RRs on P-items. More specifically, they presented P-items together with an illustration that represented the (problematic) situation (see

Figure 1), to a large group of Turkish and Flemish upper elementary school pupils. Compared to the same P-items being presented with purely decorative illustrations that had nothing to do with the problem situation being described in the problem statement, these representational illustrations were expected to help pupils to create a more elaborated mental representation of the problem situation, which would help them to build a more appropriate mathematical model of the P-item and, ultimately, answer it more realistically. The authors first of all found that – as in Verschaffel et al.'s initial study (1994) – both Turkish and Flemish pupils tended to largely exclude realistic considerations when solving mathematical word problems; the mean percentages of RRs were, respectively, 12.6% and 11.9%. Second, for both Turkish and Flemish pupils, there was no effect whatsoever of the representational illustrations.

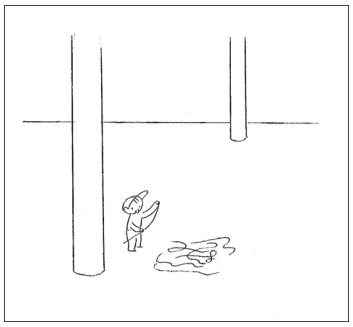


Figure 1. Representational illustration used for the rope item in the Dewolf et al.'s (2014) study

In several follow-up studies, Dewolf and associates investigated why these representational illustrations did not seem to help to react more realistically to P-items. In one study (Dewolf, Van Dooren, Hermens, & Verschaffel, submitted a), they confronted a group of students with a set of P-items and S-items together with the representational illustrations while recording their eye movements, and found that in the majority of cases these students either did not look at all at these illustrations, or looked at them only very briefly and superficially. Apparently, merely confronting learners with representational illustrations such as the ones provided in Figure 1, is not enough to make them actually and productively process them and profit from them. As a logical next step, Dewolf et al (submitted a) set up a study wherein students were experimentally forced to look at these representational illustrations for at least five seconds–before actually solving the P-items, but again no significant effect was found. According to the authors, there remain several explanations for this finding that can be found either in the illustrations or in the subjects

As far as the nature of the illustrations is concerned, one could argue that the representational illustrations did not depict in a sufficiently salient way the realistic modelling complexity involved in the P-items. Indeed, all illustrations were designed in such a way that they evoked the global scene described in the problem, with a view to trigger the problem solver's real-world knowledge about that problem, without, however, pointing directly or explicitly to the specific realistic modelling complexity.

For instance, for the rope item (see Table 1), Dewolf et al.'s (2014) drawing did not show a boy who is actually knotting together two pieces of rope, whereby it is clearly shown that a significant amount of rope is needed for these knots. In an attempt to make the illustrations more helpful, Dewolf, Van Dooren and Verschaffel (submitted b) created a new set of representational illustrations that were designed in such a way that the realistic modeling complexity was made more salient, e.g. by showing the boy from the rope item actually knotting together pieces of rope (see Figure 2). In an extra experimental condition, this added critical element of the illustration was even made more salient by highlighting it with a yellow marker. A comparison of the performance of upper elementary school children who got a set of P-items with the illustrations from the previous study (Dewolf et al., 2014, see Figure 1) with those who received the same problems together with the new illustrations without or with the extra highlighting, showed that, again, neither of these manipulations resulted in a significant increase in the number of RRs.

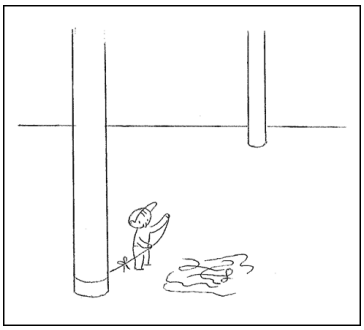


Figure 2. Adapted representational illustration used for the rope item in the Dewolf et al.'s (submitted a) study

From the side of the subjects, it could be argued that the illustrations did not yield the expected effect–even not in the later studies mentioned above–because participants are seriously affected by their metacognitive beliefs about solving mathematical word problems at school (e.g., the belief that there is no room for realistic considerations in mathematical word problem solving) and/or their beliefs about the role of illustrations in their solution of such problems (e.g. the belief that illustrations next to word problems have only a purely decorative function). While there is already some partial and indirect evidence for the role of these beliefs in students' solutions of (illustrated) P-items (as will be explained in the next section), these beliefs about word problems and their illustrations have to be investigated in a more systematic and fine-grained way in future research.

A third and last set of follow-up studies investigated the impact of another kind of experimental variation, namely increasing the *authenticity of the experimental setting*. In these studies, one or more categories of P-items were presented in a more authentic, performance-based setting, for instance, in the context of a group discussion and/or embedded in concrete materials and performance-based goals.

DeFranco and Curcio (1997) examined students' interpretation of DWR problems embedded in (a) a restrictive scholastic setting, and (b) a (relatively) real-world setting. In the first part of the study, 20 sixth graders were confronted with the following version of the buses item in a restrictive context (i.e., an individual interview in which pupils were questioned about mathematical word problem solving): '328 senior citizens are going on a trip. A bus can seat 40 people. How many buses are needed so that all the senior citizens can go on the trip?'. In the second part, the same pupils were asked to make a telephone call using a teletrainer obtained from a telephone company to order minivans to take sixth-graders to a class party. The (oral) request to make a phone call was accompanied with a fact sheet with relevant information about the date, time, and place of the party, and the number of children attending the party. Only two of the 20 children responded appropriately to the buses item in the restrictive setting. Of the 18 children who produced an inappropriate response, 17 made an incorrect interpretation of the remainder (e.g., by responding with an answer involving a remainder or by rounding their result down to 8 buses without any further comment). By contrast, in the real-world setting, 16 out of the 20 students gave a realistically appropriate response. Thirteen of them ordered 7 minivans because they realized part of a vehicle could not be ordered, and the other 3 ordered 6 minivans but gave good reasons for doing so (e.g., they explained that another, smaller vehicle 'like a car or something' would be needed to transport the remaining two students).

In contrast to the research reviewed in the first set of studies involving a general warning, changing the experimental setting in the way DeFranco and Curcio (1997) and others (see, e.g., Reusser & Stebler, 1997b; Säljö et al., 2009; Wyndhamn & Säljö, 1997) have done, resulted in much greater improvements in students' performance on the P-items, and, more specifically, in their inclination and their capability to include the real-world knowledge and the realistic considerations they were so reluctant to activate under the previous, more restricted, testing conditions. More specifically, these findings suggest that when the nature of the "premises for the interactive ritual" (Wyndhamn & Säljö, 1997, p. 379)—or, more generally, as Greer (1997, p. 305) has called it, the "experimental contract"—afford it, students are prepared and able to take realistic considerations into account when responding to mathematical problems.

Finally, the above-mentioned studies that analyzed student performance on a set of P-problems have been complemented with another type of investigations in which (groups of) students, after they had individually solved (some of) the above-mentioned P-items in a scholastic setting, were questioned in the context of individual or collective "debriefs" (e.g., Caldwell, 1995; Hidalgo, 1997; Inoue, 2001; Reusser & Stebler, 1997a; Selter, 2001). Many pupils in these studies acknowledged, in retrospect, that they had given the NR *automatically*, without any hesitation, as illustrated in the following comments: "I know all these things, but I would never think to include them in a math problem. Math isn't about things like that. It's about

getting sums right and you don't need to know outside things to get sums right" (Caldwell, 1995, p. 39). Others pupils reported that they had been thinking about the modeling difficulties and complexities, but finally decided to choose the NR by *deliberately* applying certain norms and tactics of "the word problem game" (Verschaffel et al., 2000), as in the following example: "I did think about the difficulty, but then I just calculated it the usual way. (Why?) Because I just had to find some sort of solution of the problem and that was the only way it worked. I've got to have a solution, haven't I?" (Reusser & Stebler, 1997a). The results from these debriefs seem to support the claim made by several authors that it is certainly not a strange kind of "cognitive deficit" that causes pupils' general and strong abstention from sense-making when doing arithmetic word problems in a typical school setting. They confirm that students are not prepared for the kinds of difficulties raised by these P-items, mostly because they are obviously trained to expect the S-type of items in the classroom situation and to routinely handle that type of problem. So, as Schoenfeld (1991, p. 340) suggested, students who react to P-items in a NR way are engaged in sense-making of the deepest kind: "In the context of schooling, such behavior represents the construction of a set of beliefs and behaviors that result in praise for good performance, minimal conflict, fitting in socially, etc. What could be more sensible than that?"

LOOKING FOR AN EXPLANATION IN (TRADITIONAL) MATHEMATICS EDUCATION

The previous results and their interpretation in terms of students' school histories compels the question: How do these views on, and tactics for, doing school arithmetic word problem develop? Although there are some documented cases where it is explicitly and directly taught, we would claim that, typically, this development is not the result of *explicit or direct* teaching. Rather, it normally occurs implicitly, gradually, and tacitly in students through being immersed in the culture and practice of the mathematics classrooms in which they engage (Lave, 1992). Putting it another way, students' reactions to word problems develop over time from their perceptions and interpretations of the "didactical contract" (Brousseau, 1997) or the "socio-mathematical norms and practices" (Yackel & Cobb, 1996) within "the culture of the mathematics classroom" (Seeger, Voigt, & Waschescio, 1998) that tell them—explicitly to some extent, but mainly implicitly—how to behave in a word problem solving lesson, how to approach a problem, how to respond to it, how to communicate with the teacher about it, and so on (Lave, 1992). More specifically, this enculturation process seems to be mainly caused by two aspects of instructional practice, namely (1) the nature of the problems given to the students and (2) the way in which these problems are conceived and treated by teachers in their daily interactions with their students (Prediger, 2009; Verschaffel et al., 2000).

Let's first have a look at the nature of the problems given. Studies in different countries that have looked at word problems in traditional textbooks have revealed that, especially in the early grades of elementary school, most word problems:

- are phrased as semantically impoverished, stereotyped verbal vignettes;
- contain key words and other kinds of hints that help to identify the operation(s) to perform in a routine-based way;
- are undoubtedly solvable by accepted criteria;
- include no irrelevant information;
- do not require and even do not allow to look outside the problem statement for additional information;
- ask for a single, precise numerical answer;
- require rarely more than a couple of minutes to be solved;
- sometimes even involve presuppositions that are at odds with children's real-world knowledge about the phenomena being evoked by the word problem statements.

If most textbook problems have these characteristics, it should not be a surprise that many students develop, gradually but inevitably, perceptions of, and tactics for, word problem solving that are characterized by a serious lack of sense-making (Reusser & Stebler, 1997a; Verschaffel et al., 2000).

A second plausible explanatory factor is the way in which these problems are conceived of, and actually treated by, teachers. A study that sheds some light on this second factor is an investigation by Verschaffel, De Corte, and Borghart (1997) with a large group of pre-service elementary school teachers from three teacher training institutes in Flanders. A paper-and-pencil test was constructed consisting of 14 word problems: seven S-items and seven parallel P-items, selected from the study of Verschaffel et al. (1994). This test was given twice to all pre-service teachers. The first time, they had to answer the 14 word problems themselves. Immediately after they had finished, they were a second test, in which they were asked to score four different answers from pupils to the same 14 word problems. These four response alternatives to the seven P-items belonged to different categories: a non-realistic answer (NA), a realistic answer (RA), a technical error (TE), and another answer (OA) derived by using the wrong operation or giving one of the numbers in the problem. At the bottom of each problem, there was a box for writing explanations and/or comments (see Figure 3 for an example item). As expected, like the upper elementary and lower secondary students from the previous studies, these student-teachers demonstrated a strong overall tendency to exclude real-world knowledge and realistic considerations when confronted with the problematic word problems. More interesting, however, was that student-teachers' lack of disposition towards realistic

modeling was also revealed by their relative evaluations of the realistic answer (RA) and the non-realistic answer (NA) for each of the 7 P-items. Overall, their evaluations of the non-realistic answers to the P-items was considerably more positive than for the realistic answers based on context-based considerations. This study convincingly demonstrates that many future teachers have knowledge and beliefs about teaching and learning arithmetic word problems that are problematic from our point of view.

In a recent replication of Verschaffel et al.'s (1997) study, Bonotto and Wilczewski (2007) found that Italian student-teachers' overall evaluations of the non-realistic answers were also considerably more positive than for the realistic ones, suggesting that these future teachers also seemed to believe that the activation of realistic context-based considerations should not be stimulated but, rather, discouraged in elementary-school mathematics.

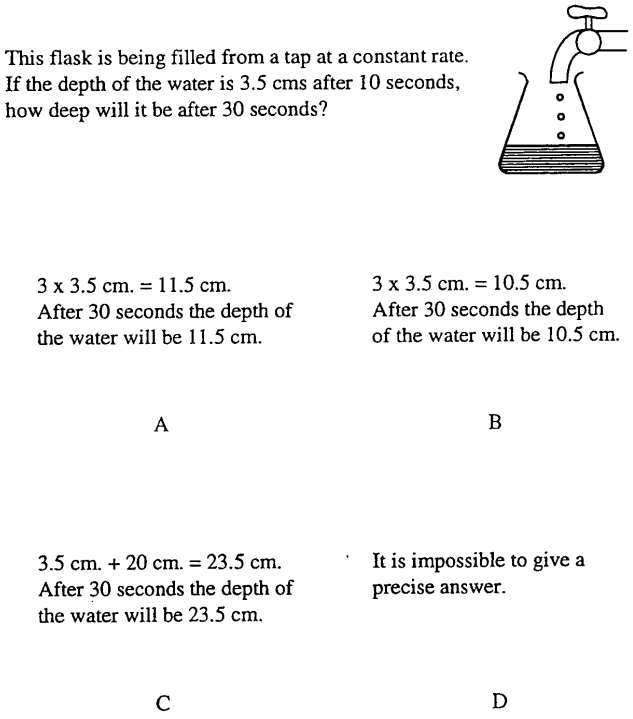


Figure 3. Sample P-problem with alternative answers for evaluation (Verschaffel et al., 1997)

BEYOND ASCERTAINING STUDIES: APPLYING THE MODELING PERSPECTIVE

Starting more or less explicitly from the above criticisms on the traditional practice surrounding word problems in schools and from the genuine mathematical modeling perspective described above, researchers have set up design studies wherein they

developed, implemented, and evaluated experimental programs aimed at the enhancement of students' mathematical modeling and problems solving along the lines mentioned above. To mention just a few (for more examples, see Blum, Galbraith, Henn, & Niss, 2007):

- Verschaffel and De Corte's (1997) small-scale teaching experiment wherein they make ample use of P-items to change upper elementary pupils' conceptions about the role of real-world knowledge in mathematical modeling and problems solving, followed by replications and/or elaborations by Renkl (1999), Mason and Scrivani (2004), and Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts, and Ratinckx (1999);
- Bonotto's series of teaching experiments in upper elementary school aimed at fostering a mindful approach toward realistic mathematical modeling (Bonotto, 2009);
- Lehrer and Schauble's (2000) experimental curriculum for mathematics and science teaching in young children built upon the modeling approach;
- The Jasper studies of the Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1997), wherein mathematical problem solving is anchored in realistic contexts using new information technologies;
- Several intervention studies aimed at the enhancement of "Mathematisches Modellieren" at the upper elementary or lower secondary school level by German researchers (see, e.g., Blum & Leiß, 2007; Maaß', 2004);
- The very sustained and theoretically highly developed instructional program for mathematical modeling by Lesh and colleagues (see e.g., Lesh & Doerr, 2003).

While these experimental programs differ considerably in terms of their concrete aims and scope, content, and structure, some recurrent characteristics include:

- The use of more realistic and challenging *tasks* than traditional textbook problems, which do involve some, if not most, of the complexities of real modeling tasks (such as the necessity to formulate the problem, to seek and apply aspects of the real context to proceed, to select tools to be used, to discuss alternative hypotheses and rival models, to decide upon the level of precision, to interpret and evaluate the outcome, etc.). It should be emphasized, however, that the above-mentioned experimental programs differ quite a lot in the "radicalism" of their reaction against standard word problems. Whereas some researchers do not remove these problems from their programs but try to improve them and reconceptualize them *as genuine exercises in mathematical modeling*, others take a more far-reaching approach and replace them by other kinds of mathematical modeling tasks that come close to involving the full complexity and authenticity of *real* real-world problems (e.g., Lesh & Caylor, 2009).

- A variety of *teaching methods* and learner activities, including expert modeling of the strategic aspects of the modeling process, small-group work, and whole-class discussions; typically, the focus is not on presenting and rehearsing established mathematical models, but rather on demonstrating, experiencing, articulating, and discussing what modeling is all about.
- The creation of a *classroom climate* and, more particularly, a set of social and sociomathematical norms and practices (Prediger, 2009; Yackel & Cobb, 1996) that are conducive to the development of a more appropriate view of mathematical modeling, and to a more appropriate set of accompanying attitudes and beliefs, than those held by traditionally schooled children.

In most of these design experiments positive outcomes have been obtained in terms of performance, underlying processes, and motivational and affective aspects of learning. So, taken as a whole, the available research evidence shows that, to quote Niss (2001, p. 8), "application and modeling capability can be learnt, and has to be learnt, but at a cost, in terms of effort, complexity of task, time consumption, and reduction of syllabus in the traditional sense". Hatano (1997) presented a cost-benefit analysis making similar points, and suggesting that the P-problems we have used "are too trivial for students to recognise the significance of 'high-cost' modelling activity" (p. 384). However, he made two suggestions, that we heartily endorse, for shifting the cost-benefit equation: "First, we can make a problem or its solution critically important for people's lives. Alternatively, we can establish a culture that enjoys and highly evaluates comprehension activity" (p. 386).

To some extent, these characteristics of the modeling approach are beginning to be implemented in mathematical frameworks, textbooks and tests—including at the elementary school level —in many countries, such as Germany, the UK, The Netherlands, and Belgium. However, according to Niss (2001), it is still the case, in general international terms, that genuine application and modeling perspectives and activities continue to be scarce in the everyday practice of mathematical education. He points to several important barriers: (1) the difficulty of getting this modeling perspective into (high-stake) tests (partly because mathematical modeling is not viewed by many people as being a part of mathematics, partly because it is very difficult to assess these complex modeling skills appropriately in those tests), and (2) the high demands this modeling approach puts on teachers mathematically, pedagogically, and personally.

IMPLEMENTING THE MODELING PERSPECTIVE IN REAL CLASSROOMS

Even though it is generally accepted that the high demands this modeling approach puts on teachers is one of the major reasons why the genuine modeling perspective does not get widely and successfully implemented in instructional practice (see Niss, 2001), only rarely has attention been paid to how regular teachers actually think about, and implement, connections between school mathematics and the real world, and how they determine whether, when, and how students are exposed to realistic modeling experiences, in particular, in their daily classroom practice. Recently several researchers have started to tackle the question how mathematics teachers conceive and approach traditional and/or realistic word problems in their actual daily teaching settings (see Chapman, 2006; Depaepe, De Corte, & Verschaffel, 2009, 2010; Ginsburg, 2009; Kaiser & Maaß, 2007). For instance, Depaepe et al. (2009) designed a study in which they investigated both the nature of the word problems actually selected and used by two teachers and the ways in which these two teachers approached these problems in two regular sixth-grade classrooms in Flanders that were not involved in any intervention study but that simply followed a curriculum and a textbook that claim to be inspired by the above-mentioned perspective on realistic mathematical modeling.

First, they were interested in whether the tasks that these teachers selected from the textbook—i.e., the most frequently used textbook in Flanders, which is representative of the standards and curricula for primary mathematics education in Flanders—reflected the features that are assumed to positively influence students' genuine modeling skills. They used a fine-grained conceptual framework developed by Palm (2002) for analyzing the realistic nature of word problems. The basic idea of his framework lies in the notion of *simulation*: A word problem is considered to be realistic if the important aspects of the word problem are taken into account under conditions representative for that out-of-school situation. Palm's framework includes elements such as the realistic nature of the event, the data and the question, the form in which the problem is presented, the response requirements, etc. Overall, Depaepe et al. (2009) found that both the problems that the teachers selected from the textbook, and the ones they created themselves, seemed to simulate relatively well some aspects that are assumed to be important in designing realistic tasks according to Palm's coding scheme, but failed to include others. Another important finding (that was not revealed by Palm's coding scheme, however) was that the number of problems affording the possibility of experiencing the complexities and subtleties of genuine mathematical modeling and how it differs from applying known mathematical concepts and procedures on dressed-up mathematical application problems, was disappointingly small (Depaepe et al., 2009).

Second, Depaepe et al. (2010) investigated how these two upper elementary school teachers handle word problems in their actual instructional practice. This aspect was investigated through in-depth analysis of videotaped lessons. This analysis relied on Chapman's (2006) distinction between a "paradigmatic-oriented" and a "narrative-oriented" instructional treatment of a school word problem. The paradigmatic mode

of knowing is based on categorization or conceptualization and focuses on context-free and universal explanations. The narrative mode of knowing, in contrast, deals with human or human-like intentions and action and, thus, focuses on context-sensitive and particular explications. Because it was supposed that both the initial phases (understanding, modeling) and the final phases (interpreting, evaluating) of the mathematical modeling cycle would lend themselves to such an analysis of the teacher's main instructional purpose with the problem context, they further distinguished in their analysis between orientations towards a narrative vs. a paradigmatic perspective during both the initial and the final stages of the problem-solving process. Overall, their findings highlighted, first, that the two teachers' word problem-solving lessons were more characterized by a paradigmatic than a narrative approach and, second, that instructional interventions were very rare in which the complex relation between the problem to be modeled and the actual mathematical model was actually experienced and problematized.

CONCLUSIONS

In our work generally, and specifically in this paper, we have concentrated on what originally caught our attention, namely the apparent surrender of sense-making by children in relation to school word problems, our predominant response, based on analysis and research, to recommend adopting a modeling stance, and the educational implications of implementing that stance. It should be acknowledged that we are reflecting a judgment about what mathematics education should be about, one that is not, to say the least, shared by all those involved in determining national programs, including many mathematicians.

There is a wealth of theory and research relating to this area of mathematics education, illustrated in a forthcoming edited collection (Verschaffel, Greer, Van Dooren, & Mukhopadhyay, 2009; see also Prediger [2009] for an interesting discussion of the different theoretical lenses that are currently used to the phenomenon of children's abstention for sense-making when doing school word problems). These analyses go more deeply into philosophical questions about relationships between our perceptions, interpretations, and constructions of reality, our repertoires of speech acts and playing of language games, and of representational acts and playing of the "Word Problem Game". A major development among mathematics educators, one that we consider extremely important, is much more intensive attention to the nature of the interactions among students and teachers that take place in classrooms (Lave, 1992), and in general "the culture of the mathematics classroom" (Seeger et al., 1998). Furthermore, once a modeling perspective is adopted, it implies cultural relativism, that is to say the "reality" of a situation such as distributing people into buses is societally variable. More generally still, the phenomena that we have documented lend themselves very naturally to analysis from the perspective of Activity Theory (Roth, 2009).

While—collectively—this and related research has "problematized" the genre of word problems, the task remains to make research-based proposals to answer the mathematics educators' question "What am I to do now that I have learned about the problematic nature of word problems?" While the intervention studies reviewed above provide very valuable building blocks to respond to this question more or less radically, recent studies, such as the one by Depaepe et al. (2009, 2010), that have analyzed the concerns, doubts, and tensions of regular teachers working in *real* mathematics classrooms reveal how complex, subtle, and demanding the task is for a teacher wanting to implement the genuine modeling perspective in his/her mathematics classroom.

When we began our research on the (un)realistic nature of word problems about 20 years ago (Greer, 1993, Verschaffel et al., 1994), we were "scandalized" by the examples of apparent suspension of sense-making that numerous researchers had brought to light. In order to protect what we might term "the children's right of sense-making," we proposed to promote word problems (of the kind described in this article) as a vehicle for teaching children important aspects of the mathematical modeling process. But, clearly, this aim could be seen as an example of a much wider aim, namely countering the tendency of mathematics education to become an education in simplistic—or, as Vinner (1997) would call it, "pseudo-analytic"—thinking. In this case, the simplistic thinking takes the form of coming to believe that it is acceptable to map aspects of the real word on to mathematical structures unthinkingly and uncritically.

This wider aim should be seen in relation to a world that is increasingly being mathematised, not just in relation to physical phenomena but also social (Jablonka & Gellert, 2007; Skovsmose, 2005). But beyond that universally recognized trend, there is a process complementary to mathematisation termed "*de*mathematisation" (Jablonka & Gellert, 2007) by which is meant the taking over by machines of functions previously carried out by humans so that the mathematics becomes hidden. Skovsmose (2005) and Frankenstein (2009) discuss revealing examples of how mathematical models lie beneath the surface of many aspects of modern life, such as the modeling used by airline companies to decide by how much to overbook flights or by managers to control the working conditions of workers. In an attempt to integrate insights about the nature of mathematical modeling and its (changing) role in contemporary life, Greer and Verschaffel (2007, p. 219) proposed a framework for thinking about, and working on, mathematical modeling consisting of three levels: (1) implicit modeling (in which the student is essentially modeling without being aware of it), (2) explicit modeling (in which attention is drawn to the modeling process), and (3) critical modeling (whereby the roles of modeling within mathematics and science, and within society, are critically examined).

Implicit modeling occurs throughout elementary schooling in relation to the basic arithmetic operations. As pointed out by Usiskin (2007), much of the standard elementary curriculum can be characterized as modeling, though it is not

acknowledged as such. As Usiskin argues, it should be possible, from an early age on, for children to become aware that, for instance, not all cases where it seems, at first sight, to be reasonable to add, subtract, multiply, or divide are reasonable at second sight, and that by thinking carefully, you should be able, at least in some cases, to discriminate situations where the operation provides a very precise model, situations where it provides an approximate model, and situations where it is not appropriate (see, for example, the first P-problem in Figure 1).

Explicit modeling is more typical of (the upper years of elementary school and of) secondary school. By this we mean going through the basic cycle of the modeling process—possibly with iterations (e.g. see Niss, Blum, & Galbraith, 2007). The standard depiction of modeling is often simplistic and needs to be extended at least to take account of knowledge of the phenomenon being modeled, the goals of the modeling exercise, the resources available in terms of tools (of all kinds), information, and other people, comparison of alternative models, communication of results relative to the context in which the modeling is taking place (see also Verschaffel et al., 2000).

Critical modeling means thinking about the nature of modeling per se and its human and societal implications. As argued above, in the contemporary world where mathematisation and dematheматisation are simultaneously pervasive, providing future citizens with even some rudimentary sense of how mathematical modeling works and affects our lives, and some agency to believe that they might be able to critique what is happening, is vital.

Evidently, once mathematics educators start applying this modeling perspective on a larger scale and allow students to bring in their personal experience when trying to make sense of all kinds of technical, social and cultural issues and phenomena, they will be confronted quickly and inevitably with the diversity of these experiences in terms of gender, social class, and ethnic diversity. As Mukhopadhyay and Greer (2001) have argued, engaging students in such modeling activities, with careful attention to the relevance of the problem contexts and all the diversity in views and approaches that they elicit, is an important way to prevent students from becoming alienated by mathematics and its authority, and to help them use mathematics as a powerful personal tool for the analysis of issues important in their personal lives, in their communities, and in society in general.

REFERENCES

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques*. Paris: Seuil.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems ? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.),

Mathematical modeling: Education, engeneering, and economics (pp. 222-231). Chisester: Horwood.

Blum, W., Galbraith, P. L. Henn, H.-W.,& Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education* (ICMI Study 14). New York: Springer

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends, and issues in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37-68.

Bonotto, C. (2009). Working towards teaching realistic mathematical modelling and problem posing in Italian classrooms. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 297-314). Rotterdam: Sense Publishers.

Bonotto C., & Wilczewski E. (2007). I problemi di matematica nella scuola primaria: Sull'attivazione o meno di conoscenze di tipo realistico. In C. Bonotto (Ed.), *Quotidianizzare la matematica* (pp. 101-134). Lecce, Italy: La Biblioteca Pensa Multimedia.

Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2008). Insights into teachers' unconscious behavior in modelling contexts. In R. Lesh, P. Galbraith, W. Blum, & A. Hurford (Eds.), *Proceedings of ICTMA—13*. Chichester, U.K.: Horwood.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Burkhardt, H. (1994). Mathematical applications in school curriculum. In T. Husén & T. N. Postlethwaite (Eds.), *The international encyclopedia of education* (2nd ed.) (pp. 3621-3624). Oxford: Pergamon Press.

Caldwell, L. (1995). *Contextual considerations in the solution of children's multiplication and division word problems*. Unpublished Master's thesis, Queen's University, Belfast, Northern Ireland.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 211-230.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt. (1997). *The Jasper project: Lessons in curriculum, instruction, assessment, and professional development*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

DeFranco, T. C., & Curcio, F. R. (1997). A division problem with a remainder embedded across two contexts: Children's solutions in restrictive versus real-world settings. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19*(2), 58-72.

Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2009). Analysis of the realistic nature of word problems in upper elementary mathematics education in Flanders. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and*

worlds: Modeling verbal descriptions of situations (pp. 245-264). Rotterdam: Sense Publishers.

Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education, 26,* 152-160.

Dewolf, T., Van Dooren, W., Ev Cemen, E., & Verschaffel, L. (2014). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *Journal of Experimental Education, 82*, 103-120.

Dewolf, T., Van Dooren, W., Hermens, F., & Verschaffel, L. (submitted a). Do students attend to representational illustrations of non-standard mathematical word problems, and, if so, how helpful are they?

Dewolf, T., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (submitted b). Can visual aids in representational illustrations help pupils to solve mathematical word problems more realistically?.

Frankenstein, M. (2009). Developing a critical mathematical numeracy through *real* real-world word problems. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 111-130). Rotterdam: Sense Publishers.

Gainsburg, J. (2009). How and why secondary mathematics teachers make (or don't make) real-world connections in teaching. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 265-282). Rotterdam: Sense Publishers.

Gerofsky, S. (1997). An exchange about word problems. *For the Learning of Mathematics, 17*(2), 22-23.

Gerofsky, S. (2009). Genre, simulacra, impossible exchange, and the real: How postmodern theory problematizes word problems. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations (pp. 21-38).* Rotterdam: Sense Publishers.

Greer, B. (1993). The modeling perspective on wor(l)d problems. *Journal of Mathematical Behavior, 12*, 239-250.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7,* 293-307.

Greer, B., & Verschaffel, L. (2007). Modeling competencies – overview. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (ICMI Study 14) (pp. 219-224). New York: Springer.

Hatano, G. (1997). Commentary: Cost and benefit of modelling activity. *Learning and Instruction, 7,* 383-387.

Hidalgo, M. C. (1997). *L'activation des connaissances à propos du monde réel dans la résolution de problèmes verbaux en arithmétique*. Unpublished doctoral dissertation, Université Laval, Québec, Canada.

Inoue, N. (2001). The role of personal interpretation in mathematical problem solving: Enhancing the relevance of mathematical learning to everyday experience. (Internal report). Teachers College, Columbia University.

Jablonka, E., & Gellert, U. (2007). Mathematisation – Demathematisation. In U. Gellert & E. Jablonka (Eds.), *Mathematisation and demathematisation: Social, philosophical and educational ramifications* (pp. 1-18). Rotterdam: Sense Publishers.

Kaiser, G., & Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary classrooms - Problems and chances. - In: W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 99-108). New York: Springer.

Lave, J. (1992). Word problems: A microcosm of theories of learning. P. Light & G. Butterworth (Eds.), *Context and cognition: Ways of learning and knowing* (pp. 74-92). New York: Harvester Wheatsheaf.

Lehrer, R., & L. Schauble. (2000). Modeling in mathematics and science. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 5). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Caylor, B. (2009). Differing conceptions of problem solving in mathematics education, science education, and professional schools. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 333-350). Rotterdam: Sense Publishers.

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht – Ergebnisse einer Empirischen Studie*. Hildesheim, Germany: Franzbecker.

Mason, L., & Scrivani, L. (2004). Enhancing students' mathematical beliefs: An intervention study. *Learning and Instruction, 14*, 153-176.

Mukhopadhyay, S., & Greer, B. (2001). Modelling with purpose: Mathematics as a critical tool. In B. Atweh, H. Forgasz, & B. Nebres (Eds.), *Socio-cultural aspects in mathematics education* (pp. 295-311). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 3-32). New York: Springer.

Niss, M. (2001). Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and modelling. In J.F. Matos, W. Blum, S.K. Houston, & S.P.

Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education. ICTMA 9: Applications in science and technology* (pp. 72-89). Chichester, U.K.: Horwood.

Palm, T. (2002). *The realism of mathematical school tasks. Features and consequences.* Unpublished doctoral dissertation, University of Umea, Sweden.

Prediger, S. (2009, in press). Zur Bedeutung vielfältiger Theorien und wissenschaftlicher Praktiken in der Mathematikdidaktik am Beispiel von Schwierigkeiten mit Textaufgaben. *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster, Germany: WTM Verlag.

Renkl, A. (1999, August*). The gap between school and everyday knowledge in mathematics*. Paper presented at the Eighth European Conference for Research on Learning and Instruction, Göteborg, Sweden.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997a). Every word problem has a solution: The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics. *Learning and Instruction, 7,* 309-328.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997b, August). *Realistic mathematical modeling through the solving of performance tasks.* Paper presented at the Seventh European Conference on Learning and Instruction, Athens, Greece.

Roth, W-M. (2009). On the problematic of word problems – language and the world we inhabit. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 55-69). Rotterdam: Sense Publishers.

Säljö, R., Riesbeck, E., & Wyndhamn, J. (2009). Learning to model: Coordinating natural language and mathematical operations when solving word problems. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 177-194). Rotterdam: Sense Publishers.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J.F. Voss, D.N. Perkins & J.W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Seeger, F., Voigt, J., & Waschescio, U. (Eds.).(1998). *The culture of the mathematics classroom*. Cambridge: Cambridge University Press.

Skovsmose, O. (2005). *Travelling through education: Uncertainty, mathematics, responsibility*. Rotterdam: Sense Publishers.

Swetz, F. J. (1987). *Capitalism and arithmetic: The new math of the 15th century*. La Salle, IL: Open Court.

Usiskin, Z. (2007). The arithmetic operations as mathematical models. In W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Eds.*), Applications and modelling in*

mathematics education The 14th ICMI Study 14 (pp. 257-264). New York: Springer.

Verschaffel, L., & E. De Corte (1997). Teaching realistic mathematical modeling and problem solving in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 577-601.

Verschaffel, L., B. Greer & E. De Corte (2000*). Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction, 4*, 339-359.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction, 4*, 273-294.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1999). Design and evaluation of a learning environment for mathematical modeling and problem solving in upper elementary school children. *Mathematical Thinking and Learning, 1*, 195-229.

Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W., & Mukhopadhyay, S. (Eds.). (2009). *Words and worlds. Modeling verbal descriptions of situations.* Rotterdam: Sense Publishers.

Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 97-129.

Wyndhamn, J., & R. Säljö (1997). Word problems and mathematical reasoning: A study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction, 7*, 361-382.

Xin, Z. (2009). Realistic problem solving in China. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 161-176). Rotterdam: Sense Publishers.

Xin, Z., & Zhang, L. (in press). Cognitive holding power, fluid intelligence, and mathematical achievement as predictors of children's realistic problem solving. *Learning and Individual Differences*.

Xin, Z., Lin, C., Zhang, L., & Yan, R. (2007). The performance of Chinese primary school students on realistic arithmetic word problems. *Educational Psychology in Practice, 23*, 145-159.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477.

Yoshida, H., Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning and Instruction, 7*, 329-338.

ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΣΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟ: ΚΑΝΟΝΤΑΣ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ «ΤΥΦΛΟΥΣ» Η «ΕΞΕΡΕΥΝΗΤΕΣ»

Αθανάσιος Γαγάτσης
Πανεπιστήμιο Κύπρου
gagatsis@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο κείμενο αυτό παρουσιάζεται η μελέτη της εννοιολογικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος σε μαθητές Δημοτικής και Μέσης Εκπαίδευσης της Κύπρου, μέσα από τη σύνθεση δύο ερευνητικών εργασιών. Η εξέταση του συγκεκριμένου θέματος πραγματοποιείται με βάση τη θεωρία του Duval (1995), ο οποίος εισηγείται ότι υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι για να δούμε και να προσεγγίσουμε ένα γεωμετρικό σχήμα. Οι ερευνητικές αυτές εργασίες πραγματεύονται το ίδιο γενικό θέμα μελέτης, όμως αφορούν σε διαφορετικές ηλικίες μαθητών και σε διαφορετικές εκπαιδευτικές βαθμίδες. Μέσα από τη σύνθεση, λοιπόν, προσεγγίζεται το θέμα της σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος από τις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού μέχρι το τέλος του Λυκείου. Τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών αναδεικνύουν σημαντικές διαστάσεις για τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος στις διάφορες εκπαιδευτικές βαθμίδες, τονίζουν όμως παράλληλα την αναγκαιότητα μιας πολυδιάστατης μελέτης της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών τονίζουν τη σπουδαιότητα της γεωμετρίας τόσο ως αυτόνομου θέματος, όσο και ως μέσου για την ανάπτυξη άλλων μαθηματικών εννοιών (NCTM, 2000). Η μελέτη από τους παιδαγωγούς και η κατανόηση από τους εκπαιδευτικούς του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές οικοδομούν τις γνώσεις τους για τα θέματα που διδάσκονται αποτελούν απαραίτητες προϋποθέσεις για την επίτευξη κατανόησης εκ μέρους των μαθητών στα θέματα αυτά (Battista, 1999). Είναι αποδεκτό ότι οι μαθητές αποκτούν, μέσω των εμπειριών που έχουν κατά τη διδασκαλία θεμάτων γεωμετρίας, ορισμένες γνώσεις οι οποίες αρχικά δεν είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους (Hejný, 2002). Εκείνο που δεν έχει διευκρινιστεί μέχρι τώρα είναι με ποιο τρόπο και σε ποιο βαθμό οι ασύνδετες αυτές γνώσεις συνδέονται μετά την πάροδο κάποιων χρόνων διδασκαλίας. Παρόλο που η οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης γενικά, και της γεωμετρικής γνώσης ειδικότερα, θεωρείται σήμερα ένα ιδιαίτερα σημαντικό θέμα, εντούτοις απουσιάζουν τα μοντέλα εκείνα που περιγράφουν τη δόμηση των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων των μαθητών, όπως αυτές αποκτώνται μέσα από τη διαδικασία της διδασκαλίας (Gray, Pinto, Pitta, & Tall, 1999).

Στόχος, λοιπόν, του κειμένου αυτού είναι να συντεθούν τα αποτελέσματα από δύο έρευνες που εξετάζουν τον τρόπο με τον οποίο τα γεωμετρικά σχήματα χρησιμοποιούνται στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, μέσω της μελέτης σε εύρος ηλικιών μαθητών, από το Δημοτικό μέχρι και το Λύκειο. Οι έρευνες αυτές βασίζονται στο θεωρητικό πλαίσιο του Γάλλου ερευνητή Raymond Duval, ο οποίος για την εννοιολογική σύλληψη των γεωμετρικών σχημάτων διακρίνει τέσσερις διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους βλέπουμε και χρησιμοποιούμε τα σχήματα κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Στην πρώτη έρευνα (Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou & Panaoura, 2010) εξετάστηκε η σύλληψη γεωμετρικού σχήματος σε μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου, με βάση τις τρεις από τις τέσσερις διαστάσεις που προτείνονται, ενώ στη δεύτερη έρευνα (Michael, 2013) μελετήθηκε και η τέταρτη διάσταση, με τη συμμετοχή μαθητών από το Γυμνάσιο και το Λύκειο. Στο κείμενο παρουσιάζεται ένα μέρος των αποτελεσμάτων που έχουν προκύψει από κάθε έρευνα και συζητείται η θεωρητική και πρακτική χρησιμότητα των αποτελεσμάτων αυτών για τη μάθηση της γεωμετρίας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Σύμφωνα με τον Fischbein (1993), όλα τα γεωμετρικά σχήματα αναπαριστούν νοερές κατασκευές, οι οποίες κατέχουν ταυτοχρόνως εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες. Ένα γεωμετρικό τρίγωνο αποτελεί ένα σχήμα, μια αναπαράσταση στο χώρο και μια έννοια. Συνεπώς, αποτελεί αυτό που ο Fischbein (1993) ονομάζει εννοιολογικό σχήμα. Σε ένα εννοιολογικό σχήμα το νόημα και οι επιτρεπόμενοι μετασχηματισμοί υπαγορεύονται ολοκληρωτικά από τυπικούς περιορισμούς (ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα). Όταν τα σχήματα και οι έννοιες εναρμονίζονται τέλεια σε εννοιολογικό σχήμα, τότε φτάνουμε στο ψηλότερο σημείο του γεωμετρικού συλλογισμού (Fischbein & Nachlielli,1998). Τα σχήματα ενισχύουν τη γεωμετρική διαίσθηση κάνοντας αντιληπτό το σύμπλεγμα σχέσεων του οπτικού αντικειμένου (Panaoura, Gagatsis, & Lemonides, 2007). Η πολλαπλή ενεργοποίηση σχέσεων δυσκολεύει όμως τη διάκριση δεδομένων και ζητούμενων. Η οπτική ενίσχυση της διαίσθησης μπορεί να είναι τόσο ισχυρή που να αποτελέσει τροχοπέδη στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού (Mesquita, 1998).

Η χρησιμότητα του γεωμετρικού σχήματος κατά την ανάλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος θεωρείται αναμφισβήτητη, αφού παρέχει μια διαισθητική παρουσίαση των συνιστωσών και σχέσεων σε μια γεωμετρική κατάσταση (Duval, 1995). Παρόλα αυτά, συχνά οι μαθητές παρουσιάζονται να μη βοηθιούνται από το σχήμα, ώστε να κατευθυνθούν προς τη λύση του προβλήματος. Μέσα από τη γνωστική και αντιληπτική προσέγγιση της γεωμετρίας που επιχειρείται από τον Duval (1995) παρουσιάζεται ένα λεπτομερές πλαίσιο ανάλυσης των γεωμετρικών εικόνων, με βάση το οποίο εντοπίζονται τέσσερις τύποι γνωστικής σύλληψης. Το κάθε είδος σύλληψης έχει συγκεκριμένους νόμους οργάνωσης και επεξεργασίας του οπτικού ερεθίσματος.

Συγκεκριμένα, η *αντιληπτική σύλληψη (perceptual apprehension)* σχετίζεται με την αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος και στη διάκριση των υποσχημάτων του, με τρόπο όμως που δεν επιτρέπει περαιτέρω επεξεργασία του. Η *ακολουθιακή σύλληψη (sequential apprehension)* απαιτείται κατά την κατασκευή ή την περιγραφή της κατασκευής ενός σχήματος. Η *λεκτική σύλληψη (discursive apprehension* συνδέεται με την αδυναμία προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων σε ένα σχήμα μόνο από την αντιληπτική σύλληψη, αφού απαιτείται και λεκτική περιγραφή του. Η *λειτουργική σύλληψη (operative apprehension)* μας εξασφαλίζει πρόσβαση στη λύση του προβλήματος, μέσα από διάφορους μετασχηματισμούς που μπορούν να εφαρμοστούν στο σχήμα. Οι διάφορες αυτές λειτουργίες μπορούν να εκτελεστούν είτε νοερά, είτε φυσικά. Συνθέτουν μια συγκεκριμένη επεξεργασία του σχήματος, η οποία του προσδίδει μια χειριστική λειτουργία.

Συγκεκριμένα αναφέρονται από τον Duval τρία είδη τροποποιήσεων ενός γεωμετρικού σχήματος. Οι μ*ερεολογικές (mereologic) τροποποιήσεις* αφορούν στη διάσπαση του ολόκληρου σχήματος σε διάφορα υποσχήματα, στον συνδυασμό των υποσχημάτων αυτών σε ένα άλλο ενιαίο σχήμα και στην εμφάνιση νέων υποσχημάτων (reconfiguration). Οι ο*πτικές (optic)* επιτρέπουν τη σμίκρυνση ή μεγέθυνση του σχήματος ή το να εμφανίζεται λοξό, σαν να γίνεται χρήση φακών. Με τον τρόπο αυτό, τα σχήματα αποκτούν τη δυνατότητα να εμφανίζονται διαφορετικά, χωρίς να έχουν υποστεί οποιαδήποτε αλλαγή. Οι τροποποιήσεις *αλλαγή θέσης (place way)* αλλάζουν τον προσανατολισμό του σχήματος στο επίπεδο της εικόνας.

ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ[1]

Με βάση τα πιο πάνω θεωρητικά στοιχεία, στο μέρος αυτό παρουσιάζεται ο πρακτικός τρόπος εφαρμογής τους μέσα από την επίλυση δύο γεωμετρικών προβλημάτων. Συγκεκριμένα επεξηγείται ο τρόπος με τον οποίο τα διάφορα είδη σύλληψης σχημάτων παρεμβαίνουν διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων και με ποια συγκεκριμένα βήματά της σχετίζονται.

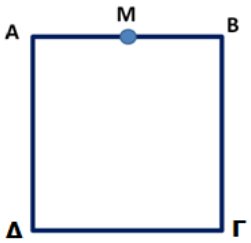
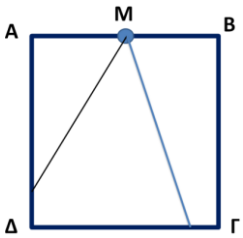
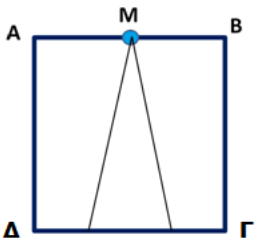
Πρόβλημα 1

Να χωρίσετε το τετράγωνο ΑΒΓΔ σε τρία ισοδύναμα μέρη με βάση το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ.

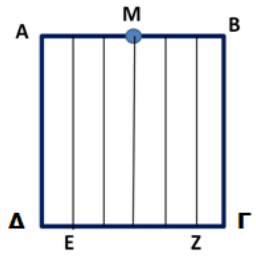
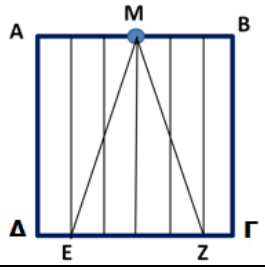
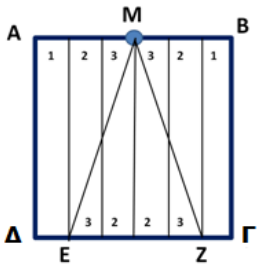
Για να χωριστεί το σχήμα 1 χρειάζεται αρχικά αντιληπτική ικανότητα, ώστε ο μαθητής να μπορεί να σκεφτεί διάφορα υποσχήματα που μπορούν να δημιουργηθούν σε αυτό το τετράγωνο. Συνεπώς ο μαθητής που είναι σε θέση να προσεγγίσει αντιληπτικά το σχήμα θα μπορούσε να δώσει την λύση που φαίνεται στο σχήμα 2. Στη λύση αυτή ο μαθητής χρησιμοποιεί το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ για να χωρίσει

[1] Το μέρος αυτό παρουσιάστηκε από τον Α. Γαγάτση στο Συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας (Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας) με τίτλο «5η Διεθνής Μαθηματική Εβδομάδα» (Θεσσαλονίκη, 6-10 Μαρτίου 2013).

το σχήμα, χωρίς όμως να λαμβάνει υπόψη του ότι το σημείο Μ πρέπει να χρησιμοποιηθεί ώστε να επιτευχθεί ο χωρισμός σε τρία ίσα μέρη και όχι τυχαία. Συνεπώς απαιτείται και κάποιο άλλο είδος σύλληψης του σχήματος, πέρα της αντιληπτικής, ώστε να επιτρέψει στο μαθητή να φέρει τις ορθές βοηθητικές γραμμές, ώστε το σχήμα να χωριστεί με τον κατάλληλο τρόπο. Ειδικότερα, η ικανότητα ενός ατόμου να σκεφτεί ή να σχεδιάσει κάποιες επιπρόσθετες μονάδες σε ένα δοσμένο σχήμα προκύπτει μέσα από την ενεργοποίηση της λειτουργικής σύλληψης. Οπότε ο μαθητής που δε θα περιοριστεί μόνο στην αντιληπτική αναγνώριση, αλλά θα εμπλέξει και τη λειτουργική σύλληψη, θα προσεγγίσει το σχήμα ως ένα ευρετικό εργαλείο και θα είναι σε θέση να κάνει διάφορες αναδιοργανώσεις στο δοσμένο σχήμα και να καταλήξει σε διαχωρισμούς όπως δείχνουν τα σχήματα 3 και 4.

		
Σχήμα 1	Σχήμα 2	Σχήμα 3

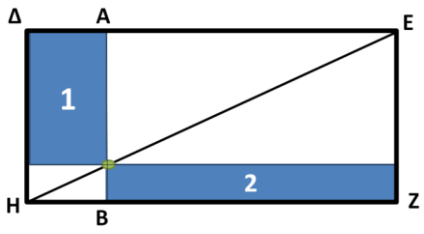
Στο σχήμα 3 ο μαθητής βρίσκει τον τρόπο που θα φέρει δύο ευθείες από το σημείο Μ, ώστε να χωρίσει το σχήμα σε τρία ίσα μέρη. Ακολούθως όμως πρέπει να αποδείξει ότι όντως ο χωρισμός αυτός είναι σωστός. Στην περίπτωση αυτή παρεμβαίνει η λειτουργική σύλληψη του σχήματος, η οποία θα επιτρέψει στο μαθητή να κάνει μια νέα μερεολογική τροποποίηση στο σχήμα, κατά συνέπεια και ένα νέο διαχωρισμό (Σχήμα 4). Με βάση το συνδυασμό των δύο μερεολογικών τροποποιήσεων που πραγματοποιήθηκαν στο σχήμα, ο μαθητής είναι πλέον σε θέση να φτάσει στο διαχωρισμό του, όπως φαίνεται στο σχήμα 5, και ακολούθως να ονομάσει τα ίσα υποσχήματα που δημιουργούνται (Σχήμα 6), ώστε να αποδείξει ότι ο διαχωρισμός του είναι ορθός. Για το σωστό διαχωρισμό εμπλέκεται, επίσης, και η ακολουθιακή σύλληψη του σχήματος, μέσω της οποίας επιτυγχάνεται η ορθή κατασκευή των βοηθητικών γραμμών με βάση τα σωστά σημεία πάνω στο σχήμα

		
Σχήμα 4	Σχήμα 5	Σχήμα 6

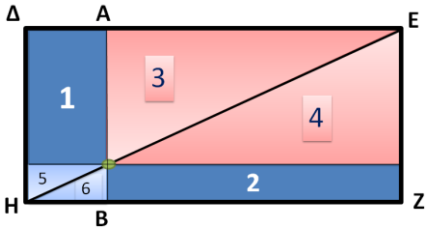
Πρόβλημα 2

Πρόβλημα του Ευκλείδη: Να δείξετε ότι το μέρος 1 είναι ισοδύναμο με το μέρος 2 και είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου της διαγωνίου ΕΗ.

Για την επίλυση του προβλήματος αυτού είναι αρχικά απαραίτητη η αναγνώριση των υποσχημάτων που περιλαμβάνονται στο δοσμένο σχήμα 7. Ο μαθητής θα πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνει ότι μέσα στο ορθογώνιο ΔΕΖΗ περιλαμβάνονται δύο μεγάλα ορθογώνια τρίγωνα, δύο μικρά ορθογώνια τρίγωνα και δύο ορθογώνια. Η διάκριση των διαφόρων υποσχημάτων επιτυγχάνεται μέσω της εμπλοκής της αντιληπτικής σύλληψης, μέσω της οποίας αναγνωρίζονται τα υποσχήματα αυτά με την πρώτη ματιά στο σχήμα, χωρίς να γίνει περαιτέρω επεξεργασία του. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 8, η επίλυση του προβλήματος απαιτεί την αφαίρεση ίσων σχημάτων από τα τρίγωνα ΔΕΗ και ΕΖΗ. Για να επιτευχθεί ο συλλογισμός αυτός απαιτείται ο εντοπισμός των σχέσεων μεταξύ των διαφόρων υποσχημάτων. Ο λύτης θα πρέπει, δηλαδή, να εντοπίσει την ισότητα μεταξύ των τριγώνων 3 και 4, καθώς και την ισότητα μεταξύ των τριγώνων 5 και 6. Για να γίνει, όμως, εφικτή η συσχέτιση των διαφόρων υποσχημάτων απαιτείται μια αναδιοργάνωση του σχήματος, ώστε να γίνει αντιληπτό στο λύτη πως τα τρίγωνα 3 – 4 και 5 – 6 προκύπτουν από δύο ορθογώνια, τα οποία διχοτομούνται από τη διαγώνιο ΕΗ. Με βάση και πάλι την διαγώνιο ΕΗ, ο λύτης θα πρέπει ακολούθως να κάνει μια νέα αναδιοργάνωση στο δοσμένο σχήμα και να το δει ως ένα ορθογώνιο ΔΕΖΗ το οποίο διχοτομείται από τη διαγώνιο ΕΗ. Συνδυάζοντας αυτούς τους δύο συλλογισμούς, με βάση τις δύο αναδιοργανώσεις στο σχήμα, ο λύτης μπορεί να διακρίνει τελικά ότι από τα δύο ίσα τρίγωνα ΔΕΗ και ΕΖΗ αφαιρούνται ίσα μέρη, οπότε το μέρος που απομένει από κάθε τρίγωνο είναι επίσης ίσο (δηλαδή τα σκιασμένα σχήματα 1 και 2).



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Το είδος σύλληψης, λοιπόν, που επιτρέπει τις πολλαπλές αναδιοργανώσεις στο σχήμα είναι η λειτουργική, η οποία μας παρέχει τη δυνατότητα να εκτελέσουμε διάφορες αναδιαμορφώσεις στο σχήμα, με βάση τα υποσχήματα που το αποτελούν. Επιπλέον, για την επιτυχή επίλυση του προβλήματος αυτού παρεμβαίνει και η λεκτική σύλληψη, μέσα από την οποία θα προκύψει ο εντοπισμός και η χρήση της ιδιότητας της διαγωνίου.

Καταληκτικές παρατηρήσεις

Με βάση τα δύο παραδείγματα προβλημάτων που αναλύθηκαν πιο πάνω καταφαίνεται ότι ο κάθε τύπος σύλληψης των γεωμετρικών σχημάτων καθίσταται σημαντικός για την επίλυση γεωμετρικών έργων. Ο κάθε τύπος σύλληψης συμβάλλει με ξεχωριστό τρόπο, ανάλογα με τα εκάστοτε χαρακτηριστικά του, όμως η αλληλεπίδραση μεταξύ τους είναι αυτή που αποδεικνύεται να είναι τελικά καθοριστική για την επιτυχή έκβαση μιας πορείας λύσης ενός γεωμετρικού προβλήματος.

ΟΙ ΕΡΕΥΝΕΣ

Πρώτη Έρευνα

Η πρώτη έρευνα αποτέλεσε μέρος μιας ευρύτερης ερευνητικής προσπάθειας, στα πλαίσια ερευνητικού προγράμματος μεσαίου μεγέθους του Πανεπιστημίου Κύπρου MED19 με τίτλο «The functioning of representations in mathematics education with respect to the shift from elementary to secondary education». Βασικός στόχος του προγράμματος ήταν η αποσαφήνιση ορισμένων δυσκολιών των μαθητών σε σχέση με τα μαθηματικά κατά τη μετάβαση τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Ειδικότερα, η μελέτη αυτή πραγματοποιήθηκε στα κλάσματα, στους δεκαδικούς αριθμούς και στη γεωμετρία. Το δείγμα της πρώτης έρευνας αποτέλεσαν 1086 μαθητές σχολείων της Κύπρου: 250 μαθητές Ε΄ Δημοτικού, 278 μαθητές Στ΄ Δημοτικού, 230 μαθητές Α΄ Γυμνασίου και 328 μαθητές Β΄ Γυμνασίου. Για τη συλλογή των δεδομένων κατασκευάστηκε δοκίμιο με έργα γεωμετρίας, χωρισμένα σε τρεις ομάδες, με βάση τα τρία από τα τέσσερα είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος (βλ. Παράρτημα 1). Η πρώτη ομάδα περιλάμβανε έργα αντιληπτικής σύλληψης που εξετάζουν την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν γεωμετρικά σχήματα (Pe). Η δεύτερη ομάδα περιλάμβανε έργα που αφορούν στη λειτουργική σύλληψη του σχήματος των μαθητών, με βάση τα τρία είδη τροποποιήσεων των σχημάτων (Op). Η τρίτη ομάδα περιείχε λεκτικά προβλήματα για την εξέταση της λεκτικής σύλληψης (Ve). Στο δοκίμιο δεν εντάχθηκαν έργα ακολουθιακής σύλληψης, λόγω της περιορισμένης έμφασης που δίνεται σε δεξιότητες κατασκευής στο κυπριακό αναλυτικό πρόγραμμα πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ο πίνακας 1 παρουσιάζει το ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στα έργα του δοκιμίου. Με βάση τα ποσοστά αυτά προκύπτει ότι η επίδοση των μαθητών Γυμνασίου είναι ψηλότερη από την επίδοση των μαθητών Δημοτικού, για την πλειοψηφία των έργων της έρευνας. Παρόλα αυτά παρατηρείται διαφοροποίηση των επιδόσεων αυτών σε δύο έργα λεκτικής σύλληψης. Συγκεκριμένα στο έργο Ve10 οι επιδόσεις των δύο ομάδων μαθητών βρίσκονται σχεδόν στο ίδιο επίπεδο. Ένα σύνηθες λάθος κατά την επίλυση του συγκεκριμένου έργου ήταν ότι $4 \div ½ = 2$. Συνεπώς, το γεγονός ότι η επίδοση των μαθητών Γυμνασίου στο έργο αυτό δεν είναι ψηλότερη από τους μαθητές Δημοτικού, όπως και στα υπόλοιπα έργα, ενδέχεται να οφείλεται στην τάση των μαθητών να χειρίζονται τους κλασματικούς αριθμούς με τον ίδιο τρόπο που χειρίζονται και τους φυσικούς αριθμούς, λόγω της επίδρασης του επιστημολογικού

εμποδίου σχετικά με την κατανόηση των ρητών αριθμών. Αυτό γίνεται εμφανές και στο έργο Ve11, στο οποίο οι μαθητές Δημοτικού έχουν καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές του Γυμνασίου. Στο έργο αυτό μια τυπική λανθασμένη απάντηση ήταν ότι 0,3 x 0,2 = 0,6 γεγονός που πιθανότατα προκύπτει από την επιρροή του ίδιου επιστημολογικού εμποδίου στην κατανόηση των μαθητών.

Πίνακας 1

Ποσοστά Επιτυχίας των Μαθητών στα Έργα του Δοκιμίου ανά Εκπαιδευτική Βαθμίδα

	Δημοτικό (%)	Γυμνάσιο (%)
Pe1a	42	65
Pe1b	42	65
Pe1c	41	63
Pe1d	40	63
Pe1e	56	77
Pe1f	57	78
Pe1g	34	49
Pe2a	83	88
Pe2b	85	86
Pe2c	43	59
Pe2d	12	29
Pe2e	75	82
Pe2f	73	86
Op3	50	62
Op4	29	47
Op5	17	38
Op6a	37	51
Op6b	38	54
Op6c	18	31
Ve7	30	53
Ve8	45	73
Ve9	5	15
Ve10	38	37

Ve11	30	23

Για τη διερεύνηση της δομής της σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων πραγματοποιήθηκε η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση, με τη χρήση του προγράμματος EQS (Bentler, 1995). Το Διάγραμμα 1 παρουσιάζει το μοντέλο δόμησης της σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων., το οποίο είχε την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα της έρευνας για το σύνολο των μαθητών [X^2 (220)=436.86, CFI=0.99, RMSEA=0.03 με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA: 0.026-0.034]. Το μοντέλο περιλαμβάνει έξι παράγοντες πρώτης τάξης, τρεις παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης. Οι τρεις παράγοντες δεύτερης τάξης, οι οποίοι αναφέρονται στην αντιληπτική (PEA), στη λειτουργική (OPA) και στη λεκτική σύλληψη του σχήματος (DIA), αποτελούν συνιστώσες του παράγοντα τρίτης τάξης, ο οποίος αναφέρεται στη σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος (GFU). Ο κάθε παράγοντας δεύτερης τάξης συνίσταται από δύο παράγοντες πρώτης τάξης. Συγκεκριμένα ο παράγοντας αντιληπτική σύλληψη (PEA) συνίσταται από αντιληπτικά έργα (F1) και έργα αναγνώρισης (F2). Ο παράγοντας λειτουργική σύλληψη (OPA) συνίσταται από έργα που απαιτούν αναδιοργάνωση του σχήματος (F3) και έργα που απαιτούν αλλαγή στη θέση και τον προσανατολισμό σχημάτων (F4). Επιπλέον, ο παράγοντας αυτός εμφανίζει την υψηλότερη φόρτιση στον παράγοντα τρίτης τάξης. Ο τρίτος παράγοντας δεύτερης τάξης (DIA) συνίσταται από λεκτικά προβλήματα που απαιτούν αυξημένη αντιληπτική ικανότητα των γεωμετρικών σχέσεων και βασικό γεωμετρικό συλλογισμό (F5), καθώς και λεκτικά προβλήματα περιμέτρου ή εμβαδού (F6). Η εξέταση πολλαπλών ομάδων έδειξε, ακόμη, ότι η συγκεκριμένη δομή παραμένει η ίδια για τους μαθητές του δημοτικού και του γυμνασίου [x^2(485) = 903.78, CFI= 0.97, RMSEA= 0.04, με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA = 0.036, 0.044].

Δεύτερη Ερεύνα

Η δεύτερη έρευνα προέρχεται επίσης από μια ευρύτερη ερευνητική προσπάθεια, η οποία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια ερευνητικού προγράμματος του Ιδρύματος Προώθησης Έρευνας με τίτλο «Ικανότητα χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων συναρτήσεων και γεωμετρίας: η μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο» και αποτέλεσε ταυτόχρονα το θέμα της διδακτορικής διατριβής της Δρ. Παρασκευής Μιχαήλ (Michael, 2013). Συνεπώς, σκοπός της έρευνας αυτής ήταν ο εντοπισμός ορισμένων δυσκολιών που προκαλούνται στους μαθητές κατά τη μετάβαση τους από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Η μελέτη των δυσκολιών και προβλημάτων αυτών προσανατολίζεται στη Γεωμετρία και στις Συναρτήσεις, με έμφαση στη χρήση των αναπαραστάσεων στις έννοιες αυτές.

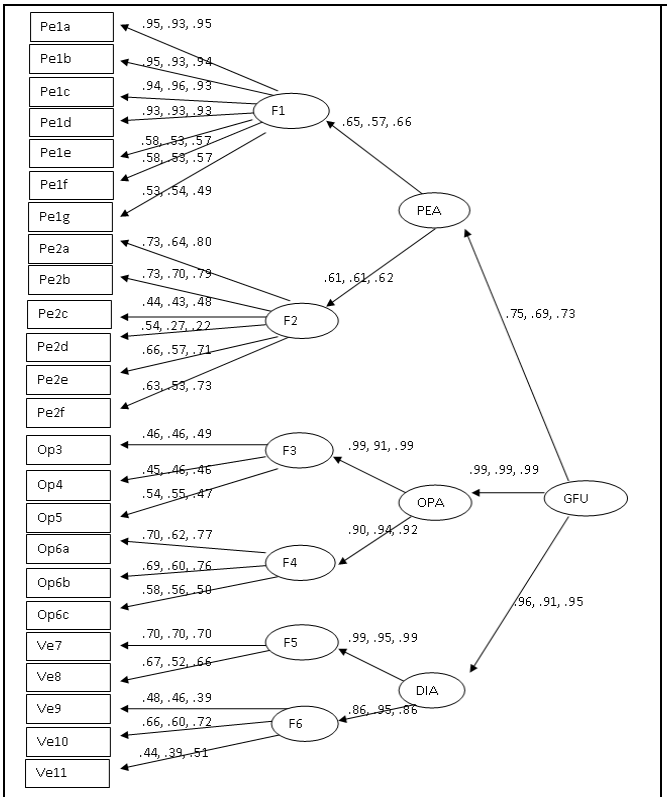
Η δεύτερη έρευνα αποτέλεσε ουσιαστικά μια συνέχεια της πρώτης έρευνας που αναφέρθηκε προηγουμένως. Στη έρευνα μελετήθηκε και η ακολουθιακή σύλληψη, λόγω του πραγματοποιήθηκε με τη συμμετοχή μεγαλύτερων μαθητών από το

Γυμνάσιο, αλλά και το Λύκειο, οι οποίοι έχουν επαφή με έργα γεωμετρικών κατασκευών κατά τη διδασκαλία τους. Το δείγμα αποτέλεσαν 881 μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου στην Κύπρο. Συγκεκριμένα συμμετείχαν 312 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου, 304 μαθητές Α΄ Λυκείου, 125 μαθητές Β΄ Λυκείου – κοινού κορμού και 140 μαθητές Β΄ Λυκείου – μαθηματικά κατεύθυνσης. Η κατασκευή του δοκιμίου στηρίχθηκε και στα τέσσερα διαφορετικά είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Για να ανταποκρίνεται το δοκίμιο στην ύλη την οποία διδάσκονται οι μαθητές που συμμετείχαν, προηγήθηκε η εξέταση της σχετικής διδακτέας ύλης. Επιπλέον, έγινε η ανάλυση των αντίστοιχων σχολικών εγχειριδίων (Michael, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou, & Philippou, 2009) στην οποία εντοπίστηκαν, στα παραδείγματα και στα έργα που περιλαμβάνονται σε αυτά, τα διάφορα είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Έτσι, αναπτύχθηκε ένα δοκίμιο το οποίο περιλαμβάνει τέσσερις ομάδες έργων (βλ. Παράρτημα 2), οι οποίες αντιστοιχούν στα τέσσερα είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

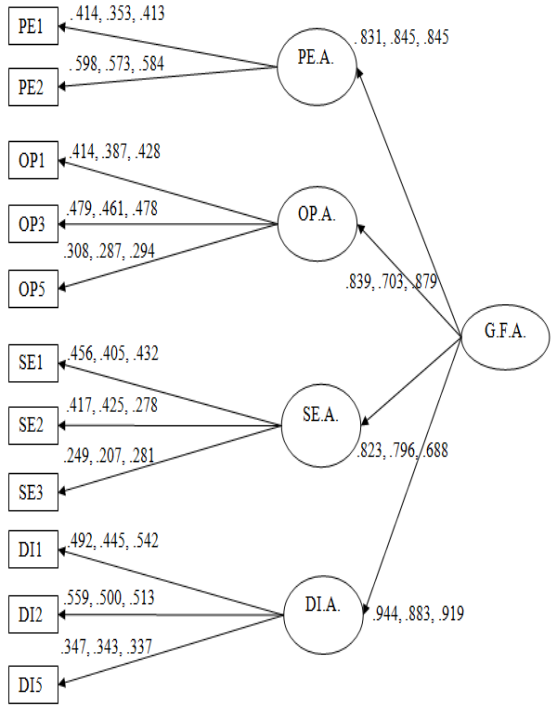
Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει έργα που εξετάζουν την αντιληπτική σύλληψη ενός γεωμετρικού σχήματος (PE1, PE2). Έργα δηλαδή που εξετάζουν την ικανότητα των μαθητών να εντοπίζουν, να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν σχήματα σε ένα σύνθετο σχήμα. Η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει έργα που εξετάζουν τη λειτουργική σύλληψη ενός γεωμετρικού σχήματος (OP1, OP2, OP3, OP4, OP5). Συγκεκριμένα τα έργα αυτά απαιτούν κυρίως την αναδιοργάνωση ενός σχήματος (μερεολογική τροποποίηση) για να λυθούν. Η τρίτη ομάδα συνίσταται από έργα που εξετάζουν την ακολουθιακή σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος (SE1, SE2, SE3). Τα έργα αυτά αφορούν στην κατασκευή σχημάτων και στην περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθήθηκε. Η τέταρτη ομάδα έργων περιλαμβάνει έργα γεωμετρικής απόδειξης που μελετούν τη λεκτική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος από τους μαθητές. Σε αυτή την ομάδα υπάρχουν έργα που εξετάζουν τόσο την ικανότητα των μαθητών για παραγωγή μιας απόδειξης (DI1, DI2, DI5 και DI6), αλλά και την ικανότητα τους στην αναγνώριση μιας τυπικής απόδειξης (DI3 και DI4).

Στο μέρος αυτό παρουσιάζονται μόνο τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης. Το Διάγραμμα 2 παρουσιάζει το μοντέλο δόμησης της σύλληψης των γεωμετρικών σχημάτων, το οποίο είχε την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα της έρευνας για το σύνολο των μαθητών [$X^2(83)= 119.505$, CFI=0.940, RMSEA=0.031με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA: 0.018 – 0.043]. Στο μοντέλο περιλαμβάνονται τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και ένας παράγοντας δεύτερης τάξης. Οι τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης, οι οποίοι αντιστοιχούν στην αντιληπτική (PE.A.), στη λειτουργική (OP.A.), στην ακολουθιακή (SE.A.) και στη λεκτική σύλληψη του σχήματος (DI.A.), αποτελούν συνιστώσες του παράγοντα δεύτερης τάξης, ο οποίος αναφέρεται στη σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος (G.F.A.). Όπως και στην πρώτη έρευνα, η δομή της σύλληψης γεωμετρικού σχήματος παραμένει αναλλοίωτη για τους μαθητές των δυο εκπαιδευτικών βαθμίδων [x^2 (83) = 119.505, CFI= 0.940, RMSEA= 0.31]. Οι φορτίσεις των παραγόντων δεύτερης τάξης στον παράγοντα πρώτης τάξης εμφανίζονται αρκετά υψηλές, τόσο

για το σύνολο των μαθητών, όσο και για τους μαθητές της κάθε βαθμίδας ξεχωριστά. Παρόλα αυτά, οι υψηλότερες φορτίσεις προκύπτουν για τους παράγοντες δεύτερης τάξης που αφορούν στη λεκτική και τη λειτουργική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος αντίστοιχα.



Διάγραμμα 1. Μοντέλο δόμησης της σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος της 1ης έρευνας[2]



Διάγραμμα 2. Μοντέλο δόμησης της σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος της 2ης έρευνας[3]

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η σύνθεση των αποτελεσμάτων των δύο ερευνητικών εργασιών έγινε με σκοπό την ανάδειξη των διαφόρων συνιστωσών που συνθέτουν τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος, όπως προτείνεται από τον Duval (1995, 1999). Μέσα από την εξέταση του θέματος σε μαθητές διαφορετικών ηλικιών και εκπαιδευτικών βαθμίδων, προέκυψαν αποτελέσματα που επιβεβαιώνουν εμπειρικά τη διάκριση των συνιστωσών αυτών.

Με βάση τα αποτελέσματα της πρώτης έρευνας (Deliyianni et al., 2009), επιβεβαιώθηκε ότι η αντιληπτική, η λειτουργική και η λεκτική σύλληψη συνθέτουν τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος των μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου. Στη δεύτερη έρευνα (Michael, 2013), στην οποία μελετήθηκε και η ακολουθιακή σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, το μοντέλο που επιβεβαιώθηκε δείχνει ότι οι

[2]Οι τρεις αριθμοί δηλώνουν τις φορτίσεις για το συνολικό δείγμα, το Δημοτικό και το Γυμνάσιο, αντίστοιχα.

[3]Οι τρεις αριθμοί δηλώνουν τις φορτίσεις για το συνολικό δείγμα, το Γυμνάσιο και το Λύκειο, αντίστοιχα.

τέσσερις τύποι σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος αποτελούν συνιστώσες της σύλληψης γεωμετρικού σχήματος των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου. Τα ευρήματα αυτά ενισχύουν το γεγονός ότι η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων απαιτεί πολύ συχνά αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων τύπων σύλληψης, αλλά και η διάκριση μεταξύ του κρίνεται επίσης αναγκαία (Duval, 1988).

Η δομή των μοντέλων που πρόεκυψαν, τόσο από την πρώτη, όσο και από τη δεύτερη έρευνα, φάνηκε να διατηρείται αναλλοίωτη σε κάθε διαφορετική βαθμίδα που εξετάστηκε. Το αποτέλεσμα αυτό καταδεικνύει ότι ένα χαρακτηριστικό της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο είναι η δημιουργία «αναλλοίωτων εννοιών». Ως «αναλλοίωτο» ορίζεται το σύνολο των έργων για τα οποία ισχύει ότι οι μεταξύ τους σχέσεις παραμένουν ίδιες στους μαθητές διαφορετικών ηλικιών (Panaoura & Gagatsis, 2008).

Τα αποτελέσματα φανερώνουν, επίσης, ότι η λειτουργική σύλληψη είναι εκείνη που συμβάλει περισσότερο στη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος για τους μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η οπτικοποίηση αποτελείται μόνο από τη λειτουργική σύλληψη (Duval, 1995), ο σημαντικός ρόλος αυτού του είδους σύλληψης επιβεβαιώνεται εμπειρικά πως δεν υπάρχει εννοιολογική σύλληψη στη Γεωμετρία χωρίς οπτικοποίηση (Duval, 1999). Επιπρόσθετα, πέρα από τη λειτουργική σύλληψη, από το μοντέλο για τους μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου προκύπτει ότι και η λεκτική σύλληψη είναι καθοριστική στο επίπεδο αυτό για τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών. Συνεπώς, τα ευρήματα από τις δύο έρευνες δείχνουν ότι η οπτικοποίηση διαδραματίζει πολύ σημαντικό ρόλο για την επίλυση γεωμετρικών έργων, ειδικότερα σε χαμηλότερες εκπαιδευτικές βαθμίδες, ενώ καθώς οι μαθητές μετακινούνται σε μια υψηλότερη εκπαιδευτική βαθμίδα, φαίνεται επίσης να βασίζονται πολύ στη χρήση μαθηματικών ιδιοτήτων και σε αποδεικτικές διαδικασίες. Η σημασία της λειτουργικής και λεκτικής σύλληψης τονίστηκε και από τον Duval (1995), αφού η λειτουργική σύλληψη προσδίδει την ευρετική λειτουργία των σχημάτων, ενώ η λεκτική σύλληψη αντιστοιχεί στη θεώρηση του σχήματος μέσα από τις δοσμένες ιδιότητες προκειμένου να συμπεράνουμε νέες ιδιότητες. Αυτό όμως είναι κάτι που προϋποθέτει πάντα μια αναδιοργάνωση του δοσμένου σχήματος.

Η περαιτέρω ανάλυση των αποτελεσμάτων της δεύτερης έρευνας έχει καταδείξει επιπλέον ότι το ίδιο δοσμένο σχήμα σε ένα γεωμετρικό έργο μπορεί να προσεγγιστεί με διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με τον τύπο σύλληψης που ενεργοποιείται. Στην ενεργοποίηση των διαφόρων τύπων σύλληψης παρεμβαίνουν όμως και άλλοι παράγοντες, όπως διάφορες διδακτικές μεταβλητές (Michael-Chrysanthou, in press). Μια μεταβλητή που παρουσιάστηκε, μέσα από την πρώτη έρευνα, είναι η επίδραση του επιστημολογικού εμπόδιο στην κατανόηση των ρητών αριθμών, η οποία φάνηκε να επηρεάζει τις επιδόσεις των μαθητών. Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύουν τα ευρήματα των Gagatsis, Deliyianni, Elia, Monoyiou και Panaoura (2009), κατά τα οποία οι επιδόσεις των μαθητών σε έργα κλασματικών και δεκαδικών αριθμών

κυρίως μειώνονται ή σταθεροποιούνται κατά τη μετάβαση των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.

Καταλήγοντας, από τη σύνθεση των δύο ερευνών φαίνεται ότι η σύλληψη των γεωμετρικών σχημάτων δεν αποτελεί μοναδιαία οντότητα. Οπότε πρέπει να δίνεται έμφαση σε όλες τις διαστάσεις της σύλληψης γεωμετρικού σχήματος κατά τη διδασκαλία και μάθηση της Γεωμετρίας. Τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών παρέχουν αρκετές πληροφορίες για το σχεδιασμό αναλυτικών προγραμμάτων, αλλά και για τους εκπαιδευτικούς, από το Δημοτικό μέχρι το Λύκειο. Τα μοντέλα που διαμορφώθηκαν προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς ένα πλαίσιο για τους συλλογισμούς των μαθητών, καθώς επιλύουν ένα ευρύ φάσμα από γεωμετρικά έργα, εντός και μεταξύ των διαφόρων εκπαιδευτικών επιπέδων. Ως εκ τούτου, το προτεινόμενο πλαίσιο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα εργαλείο για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας και για το σχεδιασμό γεωμετρικών έργων, από το Δημοτικό μέχρι το Λύκειο.

Πρέπει, συνεπώς, να λαμβάνεται υπόψη το γεγονός ότι ακόμη και αν απαιτείται συντονισμός μεταξύ κάθε τύπου σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, κάθε ένας είναι διακριτός από τους υπόλοιπους (Duval, 1999). Η ενεργοποίηση των κατάλληλων τύπων σύλληψης και ο συνδυασμός τους είναι αυτά που θα φέρουν τους μαθητές σε θέση να προσεγγίζουν και να βλέπουν τα γεωμετρικά σχήματα με ευελιξία, ώστε να γίνουν «εξερευνητές» σε γεωμετρικές προκλήσεις. Αντιθέτως, στην περίπτωση που οι μαθητές δεν επιτυγχάνουν αυτή την πολλαπλή ενεργοποίηση και την ευρετική προσέγγιση, παραμένουν «τυφλοί» και ανίκανοι να εντοπίσουν σχέσεις και τροποποιήσεις που θα τους ανοίξουν το δρόμο για την επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Battista, M. T. (1999). The importance of spatial structuring in geometric reasoning. *Teaching Children Mathematics, 6*(3), 170-177.

Bentler, M. P. (1995). *EQS Structural equations program manual*. Encino, CA: Multivariate Software Inc.

Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A., & Panaoura, A. (2010). A theoretical model of students' geometrical figure understanding. *Proceedings of the 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 5, Geometrical Thinking* (pp.696-705), Lyon, France: ERME.

Demetriou, A. (2004). Mind, intelligence, and development: A general cognitive, differential, and developmental theory of the mind. In A. Demetriou & A. Raftopoulos (Eds.), *Developmental change: Theories, models and measurement* (pp. 21-73). Cambridge: Cambridge University Press.

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for learning.* Retrieved from ERIC ED 466 379.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142- 157). Berlin: Springer-Verlag.

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 57 – 74.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., Monoyiou, A., & Panaoura, A. (2009). *Experimental Didactics of Mathematics: Concepts-Methods-Researches*. Nicosia: University of Cyprus, School of Social Sciences and Sciences of Education (in Greek).

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 111-133.

Hejný, M. (2002). Creating mathematical structure. In J. Novotná (Ed.), *Proceedings of CERME 2* (pp. 14-24). Prague, Czech Republic.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of mathematical behavior*, *17*(2), 183-195.

Michael, P. (2013). *Geometrical Figure Apprehension: Cognitive Processes and Structure*. Unpublished thesis.

Michael–Chrysanthou, P., Gagatsis, A. (in press). Ambiguity in the way of looking at a geometrical figure. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Relime*.

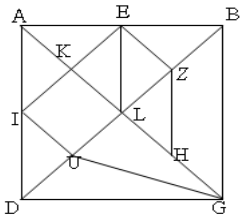
National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Panaoura, G., Gagatsis, A., & Lemonides, C. (2007). Spatial abilities in relation to performance in geometry tasks. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 7, Geometrical Thinking* (pp. 1062-1072). Larnaca, Cyprus: ERME, http://www.cyprusisland.com/cerme.

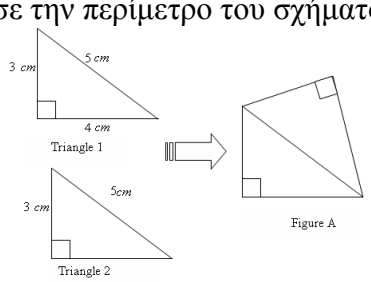
Panaoura, G., & Gagatsis, A. (2008). Spatial abilities in relation to performance in items involving net-representations of geometrical solids. In A. Gagatsis (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 101-114). Nicosia: University of Cyprus.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: Πρώτη έρευνα

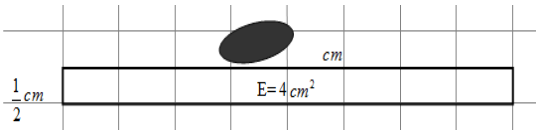
Αναγνωρίστε τα σχήματα: KEZL, IEZU, EZHL, IKGU, LGU, BIL **(Pe2)**



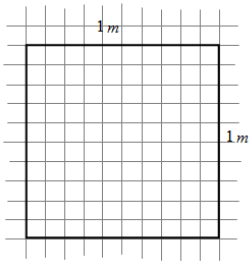
Ο Πέτρος ένωσε το τρίγωνο 1 και το τρίγωνο 2. Υπολόγισε την περίμετρο του σχήματος Α. **(OP6).**



Η Μαρία προσπαθούσε να εξηγήσει τον τρόπο που υπολόγισε το εμβαδόν του ορθογωνίου. Μόλις έγραψε τα μήκη των πλευρών, το στυλό της έσπασε και το μελάνι κάλυψε το μήκος της μιας πλευράς του σχήματος. Μπορείς να βρεις το μήκος της πλευράς που έχει καλυφθεί; *(Ve10)*

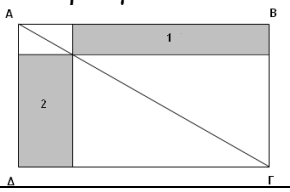


Η νίκη αγόρασε αυτό το τετράγωνο κομμάτι υφάσματος με πλευρά 1μ. Χρειάζεται μόνο ένα μέρος από αυτό με πλευρές 0,2μ and 0,3μ. Τι εμβαδό έχει το κομμάτι που χρειάζεται; *(Ve11)*



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: Δεύτερη έρευνα

Στην πιο κάτω εικόνα, το ΑΒΓΔ είναι <u>ορθογώνιο</u>. Παρατήρησε τα σκιασμένα ορθογώνια 1 και 2. Βάλε σε κύκλο τη σωστή πρόταση και <u>αιτιολόγησε</u> την απάντησή σου.



α. Το ορθογώνιο 1 έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ορθογώνιο 2.
β. Το ορθογώνιο 1 έχει ίσο εμβαδόν με το ορθογώνιο 2.
γ. Το ορθογώνιο 1 έχει μικρότερο εμβαδόν από το ορθογώνιο 2. **(OP5)**

Διάβασε τις ακόλουθες εξηγήσεις των τριών μαθητών, οι οποίοι εξηγούν γιατί το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι 180 μοίρες.

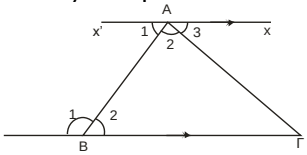
Μαθητής Α: *Μέτρησα και τις τρεις γωνιές και είναι 50°, 53° και 77°. 50°+53°+77°=180°. Άρα, το άθροισμα (των γωνιών ενός τριγώνου) είναι 180°.*

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Α ως απόδειξη; **Ναι/Όχι ……**

Μαθητής Β: *Σχημάτισα ένα τρίγωνο και έκοψα κάθε γωνία και τις έβαλα μαζί. Σχημάτιζαν μια ευθεία γραμμή. Άρα, το άθροισμα τους είναι 180°.*

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Β ως απόδειξη; **Ναι/Όχι ……..**

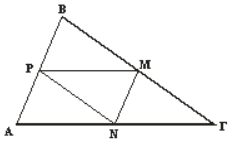
Μαθητής Γ: *Επεξήγηση με τη χρήση δύο παράλληλων ευθειών.*



$xx' \parallel B\Gamma \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_2$ και $\hat{A}_3 = \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180° \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{A}_2 + \hat{\Gamma} = 180°$

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Γ ως απόδειξη; **Ναι / Όχι** **(DI3)**

Τα σημεία Μ, Ν και Ρ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξεις ότι τα τετράπλευρα ΑΡΜΝ, ΒΜΝΡ, και ΓΝΡΜ είναι παραλληλόγραμμα.**(DI5)**



ΕΚΛΟΓΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ: ΜΙΑ ΕΥΚΑΙΡΙΑ ΝΑ ΔΙΔΑΞΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΚΑΙ ΟΧΙ ΜΟΝΟ)!

ΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΤΗΣ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑΣ

Θεόδωρος Χατζηπαντελής
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
chadji@polsci.auth.gr

Στην εργασία αυτή αναφερόμαστε ειδικά στον εκλογικό Νόμο και τη διδασκαλία του με την ευκαιρία των εκλογών για το Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο. Οι εκλογές για το Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο αποτελούν επίσης μια καλή ευκαιρία για να γνωρίσουν οι μαθητές (και οι φοιτητές) τις Χώρες που συγκροτούν την Ένωση, να μελετήσουν και να κατανοήσουν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των Χωρών, να αναζητήσουν πηγές και πληροφορίες, να επικοινωνήσουν ενδεχομένως με αντίστοιχους μαθητές άλλων Χωρών και να ανταλλάξουν πληροφορίες[1]. Η διδακτική προσέγγιση βασίζεται στη διαθεματικότητα[2], στην συλλογική δουλειά μέσω της μεθόδου της κατευθυνόμενης εργασίας[3] και στην εξατομικευμένη ανάθεση εργασιών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο Monthly essays on mathematical topics της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρείας αναφέρεται «…Τα Μαθηματικά παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στην Χημεία, τη Γεωλογία , τη Βιολογία αλλά τι συμβαίνει σε σχέση με τις Πολιτικές Επιστήμες; Το πιστεύω απόλυτα και άλλωστε είναι εμφανές ιδιαίτερα όταν αναφερόμαστε σε ψηφοφορίες και εκλογές. Η ενασχόληση των Μαθηματικών με το θέμα έχει ξεκινήσει πολύ νωρίτερα από ότι νομίζουμε. Κατά την Γαλλική Επανάσταση δύο φημισμένοι Μαθηματικοί, ο Marquis de Condorcet (1743-1794) και ο Jean de Charles Borda (1733-1799), απασχολήθηκαν με τα εκλογικά συστήματα. Άλλοι όπως οι Charles Dodgson (1832-1898), Duncan Black (1908-

[1] Η χώρα προεδρεύει αυτό το εξάμηνο στην ΕΕ, οι μαθητές όλων των βαθμίδων επισκέπτονται (ή μπορεί να επισκέπτονται τη Βουλή και την Ευρωβουλή, το Ευρωκοινοβούλιο των Νέων θα μπορούσε να αποτελέσει μια δράση του ERASMUS+!

[2] Η διαθεματικότητα στην προσέγγιση είναι από τα κεντρικά απαιτούμενα της εκπαίδευσης. Σημειώνεται ότι από τις ελλείψεις σύμφωνα με το PISA θεωρούνται η έλλειψη κριτικής ικανότητας και η χρήση καθημερινών υλικών στην εκπαίδευση. Ανάλογα με τη βαθμίδα μπορεί να αξιοποιηθούν πληροφορικοί, μαθηματικοί και πολιτικοί επιστήμονες σε μια προσέγγιση κατευθυνόμενης εργασίας

[3] Σχετικά δες στο: Διακριτά μαθηματικά, διατρέχοντας το αναλυτικό πρόγραμμα. Θ. Χατζηπαντελής. Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙΙ. Φ. Καλαβάσης και Μ. Μεϊμάρης (επιμ.). GUTENBERG, Αθήνα, 1997:299-305

1991), Kenneth Arrow, και ο John Kemeny (1926-1992) απασχολήθηκαν επίσης με το θέμα αυτό. Ο Dodgson ήταν ένας μαθηματικός στην Οξφόρδη και ο συγγραφέας της Αλίκης στη Χώρα των Θαυμάτων. Ο Duncan Black ήταν οικονομολόγος που επανέφερε το ενδιαφέρον για τη χρήση μαθηματικών εργαλείων στη μελέτη των εκλογικών συστημάτων με το βιβλίο του «The Theory of Committees and Elections». Ο Arrow κέρδισε το Nobel Memorial Prize in Economics in 1972 εν μέρει για την συνεισφορά του για την διαδικασία λήψης αποφάσεων που περιέγραφε στο διδακτορικό του το 1951.»[4]

Ο εκλογικός Νόμος είναι η σύμβαση που θεσμοθετεί μια κοινωνία για να επιλέξει μια από τις τρεις θεμελιώδεις εξουσίες της. Το νομοθετικό σώμα, δηλαδή αυτοί που αποφασίζουν για τους κανόνες που θα διέπουν την ζωή της και επιλέγουν αυτούς που θα εφαρμόζουν τους νόμους (δηλαδή την εκτελεστική εξουσία) επιλέγεται από το σύνολο της κοινωνίας με βάση τον εκλογικό Νόμο.

Στη διαδικασία επιλογής εμπλέκονται πρόσωπα που εκθέτοντας τις απόψεις τους διεκδικούν την επιλογή τους. Εμπλέκονται όμως και σύνολα προσώπων που ενώνονται μεταξύ τους σε συλλογικά υποκείμενα αποτελώντας κόμματα, παρατάξεις και εκλογικούς συνδυασμούς. Αυτά τα σύνολα είναι επίσης οργανωμένα στο εσωτερικό τους με δικούς τους κανόνες, ορίζοντας εσωτερικά υποσύνολα, ιεραρχικές δομές και σχέσεις.

Μεταξύ τους ανταγωνίζονται για να επιλεγούν από τους πολίτες με μια διαδικασία που καθορίζεται από γενικές αρχές. Ένας άνθρωπος, μία ψήφος, ελεύθερες εκλογές, ισοτιμία στον ανταγωνισμό. Μέσω μιας συνάρτησης (του εκλογικού συστήματος) οι ψήφοι αντιστοιχούνται σε έδρες σε ένα αντιπροσωπευτικό σώμα.

Ήδη οι θεμελιώδεις έννοιες των μαθηματικών (σύνολο, σχέσεις, συνάρτηση, αντιστοίχιση) αρχίζουν να τοποθετούνται σε ένα πλαίσιο αναφοράς. Μπορεί να διδάξει κάποιος μαθηματικά χρησιμοποιώντας τη Δημοκρατία και να χρησιμοποιήσει τα μαθηματικά για να διδάξει Δημοκρατία[5,6]; Η απάντηση είναι και στα δύο θετική και με την παρούσα εργασία θα προσπαθήσουμε να συστηματοποιήσουμε διαδικασίες που είναι δυνατόν να εφαρμοστούν από το δημοτικό μέχρι το πανεπιστήμιο. Άλλωστε, το πεδίο εφαρμογής είναι πολύ ευρύ. Σε κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης οι μαθητές της λειτουργώντας σαν κοινωνία επιλέγουν αντιπροσώπους και προσομοιώνουν τις διαδικασίες της δημοκρατικής λειτουργίας.

Παράλληλα, η αισθητοποίηση του περιβάλλοντος κοινωνικού τους περίγυρου (του Δήμου, της Περιφέρειας, της Χώρας, της Ευρωπαϊκής Ένωσης) μέσω της οποίας θα μετατραπούν σε κριτικά σκεπτόμενους συμμέτοχους των αποφάσεων και των

[4] http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-voting-introduction

[5] Σχετικά δες: Mathematics and Democracy: Teaching electoral systems and procedures. Chadjipadelis, T. HMS International Journal for Mathematics in Education, 2012, 4:475-480

[6] Democracy Rules - an electoral education resource: http://www.aec.gov.au/education/Democracy_Rules/index.htm

διαδικασιών για τη λήψη των αποφάσεων αποτελεί στόχο του Συντάγματος και κατά συνέπεια πρέπει να αποτυπωθεί στο αναλυτικό πρόγραμμα κάθε βαθμίδας εκπαίδευσης.

Βοηθός στα παραπάνω είναι τα Μαθηματικά προσφέροντας τα εργαλεία αναπαράστασης, την αξιωματική σκέψη και τις μεθόδους ανάλυσης και περιγραφής. Ταυτόχρονα, η καλλιέργεια δεξιοτήτων χρήσης ηλεκτρονικών υπολογιστών, η ανάπτυξη ικανοτήτων αλγοριθμικής σκέψης, η μετατροπή συγκεκριμένων ερωτημάτων σε αφηρημένα πρότυπα και η μετατροπή αφηρημένων λύσεων σε συγκεκριμένες απαντήσεις παρουσιάζει τα μαθηματικά σαν αυτό που είναι: ένα εργαλείο κατανόησης, περιγραφής και αισθητοποίησης του περιβάλλοντος κόσμου αναστρέφοντας αυτό που πολλοί νομίζουν ότι είναι: μια στριφνή γλώσσα που εφευρέθηκε για να βασανίζει ευαίσθητους κατά τα άλλα ανθρώπους.

ΤΟ ΕΚΛΟΓΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Το εκλογικό σύστημα είναι μια συνάρτηση μετατροπής ποσοστού ψήφων σε ποσοστό εδρών. Στις εκλογές συμμετέχουν πρόσωπα και κόμματα που επιλέγονται το καθένα από ένα αριθμό εκλογέων και κερδίζουν ένα αριθμό αντιπροσώπων. Για την μορφή αυτής της συνάρτησης τίθενται εκ των προτέρων κανόνες και προϋποθέσεις. Αν πρόκειται να επιλέξουμε ένα πρόσωπο (όπως πχ στις εκλογές για το Δήμαρχο) τότε αναμφίβολα πρέπει να επιλεγεί όποιος κερδίσει περισσότερες ψήφους. Αν πρόκειται να επιλέξουμε έναν αριθμό αντιπροσώπων (όπως πχ στις βουλευτικές εκλογές) τότε πρέπει στην αναλογία εδρών (αντιπροσώπων) να διατηρηθεί η αναλογία ψήφων. Οι δύο μεγάλες οικογένειες εκλογικών συστημάτων όπως είναι γνωστό είναι τα πλειοψηφικά και τα αναλογικά συστήματα[7]. Και στις δύο διατηρείται η διάταξη στο σύνολο ψήφων ενώ στη δεύτερη διατηρείται και η αναλογία. Στο σύνολο ψήφων που κερδίζουν οι συνδυασμοί ορίζεται μια σχέση διάταξης (φθίνουσα) που εισάγει την έννοια του διατακτικού αριθμού (δηλ. της σειράς που έχει κάθε συνδυασμός στο σύνολο)[8].

1	2	3		k	Σειρά
P1	P2	P3	…..	Pk	Κόμμα
V1	V2	V3		Vk	Ψήφοι
(3)	(1)	(k)		(2)	Διάταξη
0	R	0		0	Πλειοψηφικό
R1	R2	R3		Rk	Αναλογικό

Πίνακας 1. Διατακτικοί αριθμοί και κατανομή εδρών

[7] Στην ιστοσελίδα της IDEA: Institute for Democracy and Electoral Assistant (http://www.idea.int/) μπορεί κάποιος να βρει πλήθος πληροφορίες και αναλύσεις

[8] Τα κόμματα καταγράφονται κατά τη σειρά ανακήρυξης τους και μετά τις εκλογές παρουσιάζονται κατά την εκλογική τους δύναμη

Έτσι μπορεί να εισαχθεί η μαθηματική έννοια της διάταξης σε ένα σύνολο! Η έννοια της διάταξης σε ένα σύνολο που εφοδιάζει το σύνολο με μια μαθηματική σχέση είναι από τις πλέον σημαντικές. Σε ένα πλειοψηφικό σύστημα όποιο κόμμα κερδίσει την πρώτη θέση εκλέγει το σύνολο των αντιπροσώπων (R) ενώ σε ένα αναλογικό σύστημα διατηρείται η σειρά. Έτσι ισχύει $R2 \geq Rk \geq R1 \geq \ldots \geq R3$ αφού πρέπει $R(1) \geq R(2) \geq R(3) \geq \ldots \geq R(k)$. Υπάρχουν επίσης μεικτά συστήματα όπου ένα υποσύνολο των αντιπροσώπων εκλέγεται με πλειοψηφικό σύστημα και ένα υποσύνολο με αναλογικό σύστημα. Όπως πχ το σύστημα των βουλευτικών εκλογών στην Ελλάδα όπου 50 βουλευτές εκλέγονται με πλειοψηφικό και 250 με αναλογικό σύστημα.

Το εκλογικό σύστημα προκύπτει κάθε φορά από τις προϋποθέσεις που θέτει η κοινωνία για την οργάνωση της εσωτερικής της διακυβέρνησης. Μια σχεδιασμένη δραστηριότητα όπου οι μαθητές ενός σχολείου μπορούν να συζητήσουν τι περιμένουν (ποιες αρμοδιότητες θα ασκούν και ποιο ρόλο θα έχουν) οι αντιπρόσωποι τους θέτει τις προϋποθέσεις για την επιλογή του εκλογικού συστήματος. Επιπλέον, η αντιστοίχιση επιπέδου διοίκησης και αρμοδιοτήτων βοηθά τους μαθητές και τους σπουδαστές να αντιληφθούν έννοιες όπως «αρμοδιότητα», «λογοδοσία», «αντιπροσώπευση».

Το εκλογικό σύστημα περιγράφεται σε ένα νομικό κείμενο και υλοποιείται με μια αλγοριθμική διαδικασία. Η εφαρμογή του ανατίθεται σε μια άλλη αρχή (ανεξάρτητη αρχή από τα κόμματα ή την δικαστική εξουσία ή μια εκλεγμένη επιτροπή από τους εκλογείς). Στο πλαίσιο της παραπάνω δραστηριότητας μπορεί να αναταθεί σε ένα από τα τμήματα του σχολείου η αρμοδιότητα αυτή.

Ο ΕΚΛΟΓΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΥΡΩΕΚΛΟΓΕΣ

Το Συμβούλιο της Ευρωπαϊκής Ένωσης με την σχετική απόφαση του[9] το 2002 περιέγραψε τα χαρακτηριστικά του εκλογικού Νόμου για τις εκλογές αντιπροσώπων στο Ευρωπαϊκό κοινοβούλιο. Η πολιτική αναγκαιότητα για ένα ενιαίο εκλογικό σύστημα απασχολεί από πολύ καιρό ένα ευρύ κύκλο ερευνητών. Στην προβληματική αυτή εμπλέκονται όλες οι παράμετροι του ανταγωνισμού (πρόσωπα, κόμματα και θέματα)[10]. Ανάμεσα σε άλλους οι Kai-Friederike Oelbermann and Friedrich Pukelsheim στο «Future European Parliament Elections:Ten Steps Towards Uniform Procedures» [11] αναφέρονται στα βήματα που πρέπει να γίνουν σε αυτή την κατεύθυνση.

Το Συμβούλιο επέλεξε ένα εκλογικό σύστημα με τρεις βασικές παραμέτρους. Το εκλογικό σύστημα πρέπει να είναι αναλογικό, επιτρέπεται να εκφράζεται προτίμηση του εκλογέα προς υποψηφίους και είναι δυνατόν να οριστεί κατώτερο όριο για τη συμμετοχή στην κατανομή εδρών που δεν μπορεί να ξεπερνά το 5%. Επιπλέον

[9] http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2002:283:0001:0004:EL:PDF
[10] Στο Parties, candidates, issues: electoral competition revisited, Theodore Chadjipadelis, 1st European Conference on Comparative Electoral Research. Sofia, 2011: http://true-european-voter.eu/biblio
[11] http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/pukelsheim/2011a.pdf

επιτρέπει να γίνεται η κατανομή εδρών σε μία ή περισσότερες περιφέρειες. Οι δύο πρώτες συνθήκες ορίζουν εναλλακτικές λύσεις. Μπορεί να έχουμε ενιαία λίστα υποψηφίων ή ξεχωριστά ψηφοδέλτια συνδυασμών, να έχει προκαθοριστεί η σειρά εκλογής ή να καθοριστεί η σειρά κατάταξης των υποψηφίων από την προτίμηση των εκλογέων. Όσον αφορά την προτίμηση αυτή μπορεί να εκφραστεί είτε με nominal (δηλαδή με ενιαίο βάρος) είτε με ordinal (δηλαδή με διατακτικό βάρος). Έτσι προκύπτουν τρία εναλλακτικά συστήματα από τα οποία κάθε κράτος μέλος μπορεί να εφαρμόσει αυτό που ταιριάζει στις δικές του ιδιομορφίες τα οποία βασίζονται στην αρχή «ένας άνθρωπος, μία ψήφος» και στην αναλογική αντιπροσώπευση.

Το σύνολο των διαθέσιμων εκλογικών συστημάτων μπορεί να περιγραφεί σαν ΕΣ={ΑΛ, ΚΛ, ΤΨ}, όπου ΑΛ=Σύστημα ανοικτής λίστας, ΚΛ=Σύστημα κλειστής λίστας, ΤΨ=Απλή μεταφερόμενη ψήφος. Κάθε ένα από αυτά θέτει προτεραιότητες σε σχέση με τις παραμέτρους του εκλογικού ανταγωνισμού. Το σύστημα ανοικτής λίστας ορίζει την σειρά επιλογής {Κόμμα, Πρόσωπο} αφού ο εκλογέας επιλέγει πρώτα κόμμα και στη συνέχεια εκφράζει την προτίμηση του σε ένα ή περισσότερα πρόσωπα στην λίστα του κόμματος, το σύστημα κλειστής λίστας ορίζει επιλογή μόνο κατά κόμμα αφού ο εκλογέας επιλέγει κόμμα και δέχεται την προκαθορισμένη επιλογή προσώπων και το σύστημα ταξινομικής ψήφου ορίζει τη σειρά επιλογής {Πρόσωπο, Κόμμα} αφού ο εκλογέας επιλέγει κατά σειρά το πρόσωπο στο οποίο θέλει να μεταφέρει την ψήφο του[12].

Επίσης ανάλογα με την θεσμοθέτηση κατώτατου ορίου (κατώφλι) μπορεί να οριστεί ένα σύνολο με δύο στοιχεία Κ={ΝΑΙ, ΟΧΙ} καθώς επίσης με τον αριθμό εκλογικών περιφερειών μπορεί επίσης να οριστεί ένα σύνολο με δύο στοιχεία ΕΕ={1, 2}, όπου 2=(2 ή περισσότερες). Τα σύνολα Κ και ΕΕ μπορούν να οριστούν επίσης λεπτομερέστερα:

Κ={Χ/Χ = ποσοστό που ισχύει για κατώφλι σε κάποια χώρα}
ΕΕ={Υ/Υ = αριθμός εκλογικών περιφερειών σε κάποια χώρα}

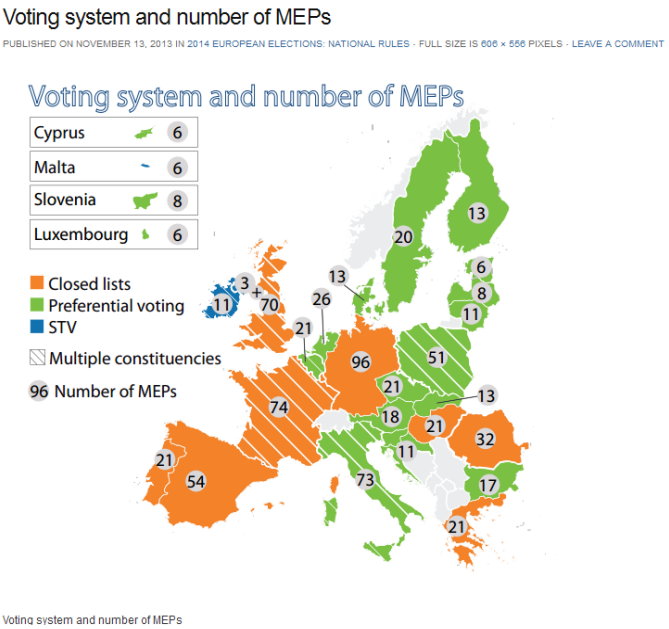
Αν ορίσουμε σαν Β το σύνολο των διαθέσιμων εκλογικών συστημάτων αυτό θα προκύπτει από το γινόμενο των τριών παραπάνω συνόλων ΕΣ, Κ και ΕΕ. Το Β θα έχει στοιχεία τριάδες

Β={(ΑΛ, Ν, 1), (ΚΛ, Ν, 1), *(ΤΨ, Ν, 1)*, (ΑΛ, Ν, 2), (ΚΛ, Ν, 2), *(ΤΨ, Ν, 2)*,
(ΑΛ, Ο, 1), (ΚΛ, Ο, 1), (ΤΨ, Ο, 1), (ΑΛ, Ο, 2), (ΚΛ, Ο, 2), (ΤΨ, Ο, 2)}

[12] Το παραπάνω δεν συνδέεται αναγκαστικά με τα κριτήρια επιλογής του ψηφοφόρου. Ο ψηφοφόρος μπορεί να ενδιαφέρεται για τα πρόσωπα και ανάλογα με τους υποψηφίους να επιλέγει το κόμμα η αντίστροφα. Πρόκειται για την αλληλεπίδραση των δύο παραγόντων. Όσον αφορά το εκλογικό σύστημα αναφερόμαστε στην κατασκευαστική αρχή του εκλογικού συστήματος.

Το σύνολο Β έχει 12 στοιχεία από τα οποία τα (ΤΨ,Ν,1) και (ΤΨ,Ν,2) δεν είναι εφικτά λόγω της κατασκευής του συστήματος. Δεν μπορεί εκ κατασκευής να υπάρχει κατώτατο όριο σε σύστημα ταξινομικής ψήφου. Έτσι, υπάρχουν 10 διαφορετικές τριάδες, δηλ. 10 διαφορετικά εκλογικά συστήματα.

Με πεδίο ορισμού το Α = {χώρες ΕΕ}[13] και πεδίο τιμών το Β = {τύποι εκλογικών συστημάτων} ορίζουμε μία συνάρτηση f(X)=Y, όπου Χ είναι στοιχείο του Α και Υ στοιχείο του Β, πχ f(Ελλάδας) = (κλειστή λίστα, ΝΑΙ, 1)[14]. Επειδή οι χώρες είναι 28 και οι τύποι 12 η συνάρτηση δεν είναι αμφιμονοσήμαντη. Η έννοια της συνάρτησης είναι επίσης μια σημαντική μαθηματική έννοια που γίνεται δύσκολα κατανοητή από τον μαθητή. Στον παρακάτω χάρτη (Χάρτης 1) αποτυπώνονται μαζί με τον αριθμό αντιπροσώπων ανά Χώρα, δύο από τα τρία χαρακτηριστικά (ΕΣ, ΕΕ)[15].



Χάρτης 1 Εκλογικό Σύστημα και αριθμός Ευρωβουλευτών ανά Χώρα

Σε σχέση με το ΕΣ, 18 χώρες έχουν επιλέξει σύστημα ανοικτής λίστας, 8 σύστημα κλειστής και 2 σύστημα ταξινομικής ψήφου. 5 χώρες έχουν περισσότερες από μία εκλογικές περιφέρειες και 23 μία, 14 χώρες έχουν κατώφλι εισόδου και 14 δεν έχουν. Με τα δεδομένα αυτά μπορούμε να παρουσιάσουμε την αρχή της συμπερίληψης-εξαίρεσης κατά την οποία απαριθμούμε τα στοιχεία ενός συνόλου που έχουν κάποιες ιδιότητες και να παρουσιάσουμε πράξεις σε σύνολα, ορίζοντας την τομή και την ένωση. Μπορούμε επίσης να εφοδιάσουμε τα στοιχεία του συνόλου (ή υποσυνόλου)

[13] Με την εξαίρεση του Ηνωμένου Βασιλείου όπου οι 3 αντιπρόσωποι της Β. Ιρλανδίας εκλέγονται με το σύστημα της ταξινομικής ψήφου και οι υπόλοιποι 70 με κλειστή λίστα
[14] Όπως ισχύει σήμερα. Υπάρχει στη δημόσια συζήτηση η πρόθεση αλλαγής του συστήματος σε σύστημα ανοικτής λίστας
[15] http://epthinktank.eu/2013/11/14/2014-european-elections-national-rules-2/

με την ιδιότητα {αριθμός βουλευτών} και να υπολογίσουμε πόσοι βουλευτές εκλέγονται με κάθε ένα από τα 10 διαφορετικά συστήματα στο σύνολο Β'.

Β'={(ΑΛ, Ν, 1), (ΚΛ, Ν, 1), (ΑΛ, Ν, 2), (ΚΛ, Ν, 2), (ΑΛ, Ο, 1), (ΚΛ, Ο, 1), (ΤΨ, Ο, 1), (ΑΛ, Ο, 2), (ΚΛ, Ο, 2), (ΤΨ, Ο, 2)}

Από τους 751 βουλευτές, με βάση ότι ισχύει σήμερα, 392 θα εκλεγούν με κλειστή λίστα, από τους οποίους 147 σε περισσότερες από μία περιφέρειες, 244 χωρίς κατώφλι εκλογής. Η χώρα μας είναι μία από τις 8 που εκλέγει με κλειστή λίστα τους βουλευτές της (ποσοστό 28,5% των χωρών, 52,2% των βουλευτών), μία από τις τέσσερεις (από αυτές τις 8) που έχει κατώφλι (εκλέγουν 148 βουλευτές, 19,7% των βουλευτών) και μία από τις τρείς (από αυτές τις 4) που έχουν μία περιφέρεια (εκλέγουν 74 βουλευτές, 9,9% των βουλευτών). Δηλαδή το σύστημα που εμείς εφαρμόζουμε (ΚΛ, Ν, 1) χρησιμοποιείται για το 9,9% των βουλευτών.

Κάθε μία από τις 10 περιπτώσεις μπορεί να δώσει το έναυσμα για την αναζήτηση ομοιοτήτων και διαφορών όσον αφορά την αντιπροσώπευση (γεωγραφική αναφορά ή/και πολιτική/κομματική αναφορά και τη σχέση μεταξύ τους), την αναλογικότητα του συστήματος (απόκλιση μεταξύ ποσοστού ψήφων και ποσοστού εδρών), τις συνήθειες του εκλογικού σώματος (ομοιότητες και διαφορές με το σύστημα εκλογής στις βουλευτικές εκλογές της κάθε χώρας), τις επιπτώσεις επιλογής βουλευτών με διαφορετικό σύστημα οι οποίοι εκ των υστέρων εντάσσονται σε ευρωπαϊκά «κόμματα» (σημ. ομάδες στο Ευρωκοινοβούλιο).

Ο ΕΚΛΟΓΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ, Η ΕΛΛΑΔΑ

Το εκλογικό σύστημα που ισχύει για τις Ευρωεκλογές στην Ελλάδα περιγράφεται στον Ν1180/81 όπως τροποποιήθηκε από τον Ν2196/94. Με τον Ν3216/03 επικυρώθηκε η οδηγία του Ευρωπαϊκού Συμβουλίου σχετικά με το εκλογικό σύστημα[16].

Από την μελέτη του νομοθετικού πλαισίου μαθαίνουμε ότι σύμφωνα με το 6&1 του Ν1180/81 κατανέμονται οι έδρες σε όλους τους συνδυασμούς. Όμως με τον Ν2196/94 προστίθεται ότι μετέχουν στην κατανομή όσοι παίρνουν τουλάχιστον (δηλαδή ίσο ή μεγαλύτερο) 3% στο σύνολο.

Τι μαθαίνουμε από το 6&2; Αθροίζουμε το σύνολο των εγκύρων, διαιρούμε δια του αριθμού εδρών, κρατάμε το ακέραιο μέρος του πηλίκου και αυτό είναι το εκλογικό μέτρο για την πρώτη φάση κατανομής των εδρών.

Στο 6&3 περιγράφεται η δεύτερη φάση της κατανομής εδρών. «Αθροίζεται το σύνολο των αχρησιμοποίητων υπολοίπων [σημ. ψήφοι] πάντων των συνδυασμών [σημ. ανεξάρτητα αν έχουν περάσει το κατώφλι 3%] το προκύπτον άθροισμα

[16] Τα κείμενα υπάρχουν στην σελίδα του Εθνικού τυπογραφείου (http://www.et.gr/)

διαιρείται με τον αριθμό των αδιάθετων εδρών συν ένα. Το πηλίκο, παραλειπομένου του κλάσματος αποτελεί το εκλογικό μέτρο της Β' φάσης.»

Στη συνέχεια του 6&3 αναφέρεται «διαιρείται το αχρησιμοποίητον υπόλοιπον ενός εκάστου και περιέρχονται τόσες έδραι όσας φοράς αυτό….» «εάν το άθροισμα των παραχωρουμένων εδρών είναι μεγαλύτερον του αριθμού των κατανεμητέων, η πλεονάζουσα αφαιρείται από τον έχοντα το μικρότερον υπόλοιπο...»

Τι μαθαίνουμε από το 6&3. Υπολογίζουμε την αδιάθετη δύναμη κάθε συνδυασμού. Κάνουμε κατανομή εδρών με βάση εκλογικό μέτρο που υπολογίζεται από «αδιάθετες+1».

Στο 6&4 (όπως τροποποιήθηκε από τον 2196/94) περιγράφεται: «οι έδρες που μένουν αδιάθετες παραχωρούνται ανά μία κατά σειρά στους συνδυασμούς που έχουν το μεγαλύτερο μετά την πρώτη φάση αχρησιμοποίητο υπόλοιπο και αρχή γίνεται από τους συνδυασμούς που δεν χρησιμοποίησαν για κατάληψη κατά την δεύτερη.» «Οι τυχόν αδιάθετες παραχωρούνται ανά μία κατά σειρά στους συνδυασμούς με το μεγαλύτερο μετά την πρώτη φάση αχρησιμοποίητο υπόλοιπο.»

Αν είχαν μείνει αδιάθετες περισσότερες από τα κόμματα; Τότε (6&4) «παραχωρούνται ανά μία κατά σειρά στους συνδυασμούς με το μεγαλύτερο υπόλοιπο μετά την πρώτη φάση.»[17]

Η μετατροπή του νομικού πλαισίου σε αλγόριθμο αποτελεί μια από τις βασικές εφαρμογές των μαθηματικών. Άλλωστε μια από τις βασικές δεξιότητες που αναπτύσσουν τα μαθηματικά είναι η περιγραφή μιας πραγματικής κατάστασης σε μαθηματική γλώσσα, η επίλυση του προβλήματος και η μεταφορά της λύσης στην γλώσσα του αρχικού προβλήματος[18]. Η περιγραφή του εκλογικού Νόμου αλγοριθμικά προσφέρεται επίσης για την χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών αφού ακόμη και με ένα απλό πρόγραμμα όπως το EXCEL είναι δυνατόν να προγραμματιστεί η σχετική διαδικασία. Για να γράψουμε έναν αλγόριθμο αρκεί να περιγράψουμε μια σειρά διαδικασιών και πράξεων ώστε με κάποιες αρχικές παραμέτρους να προκύψει ένα γενικεύσιμο σύνολο.

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

[17] Το παραπάνω προκάλεσε μια συζήτηση μήπως μπορεί να προκύψει δυσαναλογία [δηλαδή κάποιος με λιγότερους ψήφους να πάρει περισσότερες έδρες] που φαίνεται να μην επαληθεύεται παρά ίσως σε ακραία εκδοχή. Για να εξεταστεί μπορεί να γίνει μια προσομοίωση [ξεφεύγει από τις ανάγκες] ή να αναζητηθεί ένα παράδειγμα εφαρμογής του! Δες στο Θ. Χατζηπαντελής, «Ιστορίες αντιπροσωπευτικότητας» Εφ. ΕΘΝΟΣ 21.2.2014

[18] Δες στο: Η ψηφιακή δημοκρατία. Θ. Χατζηπαντελής. Η πληροφορική στην Εκπαίδευση. Τεχνικές, εφαρμογές κατάρτιση εκπαιδευτικών, Κ. Τσολακίδης (επιμ.). Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος 2002:71-76.

Σε κάθε εκλογή συμμετέχουν συνδυασμοί που μετά την καταμέτρηση των ψήφων συμμετέχουν ή όχι στην κατανομή των εδρών. Αρχικές παράμετροι είναι: ο αριθμός των κομμάτων που ξεπερνούν το 3%, ο αριθμός των ψήφων που πήρε κάθε κόμμα από τα παραπάνω, ο συνολικός αριθμός έγκυρων και ο αριθμός των εδρών που πρόκειται να κατανεμηθούν. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε σαν παράδειγμα τα αποτελέσματα των βουλευτικών εκλογών του Μαΐου 2012 που προσομοιάζουν με τα ευρήματα των ερευνών για τις επικείμενες Ευρωεκλογές.

Από τα κόμματα που συμμετείχαν στις εκλογές 7 πέρασαν το όριο 3%, ο αριθμός ψήφων που πήρε κάθε ένα από αυτά δίνεται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 2), ο αριθμός των εγκύρων ψηφοδελτίων συνολικά ήταν 6,324,136 και οι έδρες προς κατανομή είναι 21.

Αρχικές παράμετροι

ΑΑ	Κόμμα	Ψήφοι
1	ΝΔ	1192103
2	ΣΥΡΙΖΑ	1061928
3	ΠΑΣΟΚ	833452
4	ΑΝΕΛ	671324
5	ΚΚΕ	536105
6	ΛΣ-ΧΑ	440966
7	ΔΗΜΑΡ	386394
	Αρ. ΕΔΡΩΝ	21
	ΕΓΚΥΡΑ	6324136

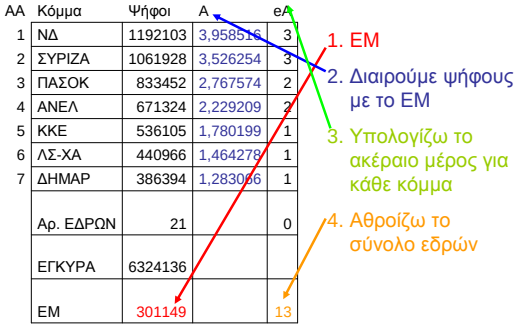
1. Υπάρχουν 7 κόμματα που ξεπερνούν το 3%
2. Για κάθε κόμμα (από αυτά που περνούν το 3%) δίνονται στην 2η στήλη.
3. Ο συνολικός αριθμός στην τελευταία γραμμή
4. Ο αριθμός εδρών στην προτελευταία γραμμή (21)

Πίνακας 2 Αρχικές παράμετροι

Γράφουμε τα παρακάτω βήματα του αλγορίθμου μας

Β1. Εκλογικό Μέτρο Α' φάση [διαιρούμε αριθμό εγκύρων με τον αριθμό εδρών και υπολογίζουμε το ακέραιο μέρος]
Β2-Β3 Έδρες για κάθε κόμμα Α' φάση [Β2. Διαιρούμε τις ψήφους κάθε κόμματος με το ΕΜ, Β3. Βρίσκουμε το ακέραιο μέρος (*δηλ. τον αριθμός εδρών που παίρνει κάθε κόμμα από Α φάση*)]
Β4. Υπολογίζουμε πόσες έδρες συνολικά κατανεμήθηκαν από την Α φάση (*σημ. αν είναι όσο το σύνολο σταματάμε*)

Εφαρμογή για 21 έδρες



ΑΑ	Κόμμα	Ψήφοι	Α	eA
1	ΝΔ	1192103	3,958516	3
2	ΣΥΡΙΖΑ	1061928	3,526254	3
3	ΠΑΣΟΚ	833452	2,767574	2
4	ΑΝΕΛ	671324	2,229209	2
5	ΚΚΕ	536105	1,780199	1
6	ΛΣ-ΧΑ	440966	1,464278	1
7	ΔΗΜΑΡ	386394	1,283066	1
	Αρ. ΕΔΡΩΝ	21		0
	ΕΓΚΥΡΑ	6324136		
	ΕΜ	301149		13

Πίνακας 3 Εφαρμογή για 21 έδρες (Β1-Β4)

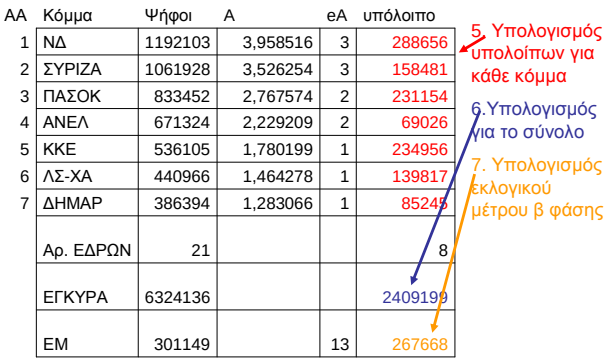
Στην συνέχεια

Β5. Υπολογίζουμε το υπόλοιπο ψήφων για κάθε κόμμα: δηλ. για κάθε κόμμα υπολογίζουμε την ποσότητα:
αριθμός ψήφων-[αριθμό εδρών που πήρε από α φάση] Χ εκλογικό μέτρο

Β6. Το ίδιο για το σύνολο των εγκύρων:
αριθμός ψήφων-[συνολικός αριθμός εδρών από α φάση] Χ εκλογικό μέτρο

Β7. Υπολογίζουμε το εκλογικό μέτρο για τη β' φάση
[*Διαιρούμε το αποτέλεσμα του Β6 με τον αριθμό :(αριθμός αδιάθετων εδρών+1)*]

Εφαρμογή



ΑΑ	Κόμμα	Ψήφοι	Α	eA	υπόλοιπο
1	ΝΔ	1192103	3,958516	3	288656
2	ΣΥΡΙΖΑ	1061928	3,526254	3	158481
3	ΠΑΣΟΚ	833452	2,767574	2	231154
4	ΑΝΕΛ	671324	2,229209	2	69026
5	ΚΚΕ	536105	1,780199	1	234956
6	ΛΣ-ΧΑ	440966	1,464278	1	139817
7	ΔΗΜΑΡ	386394	1,283066	1	85243
	Αρ. ΕΔΡΩΝ	21			8
	ΕΓΚΥΡΑ	6324136			2409199
	ΕΜ	301149		13	267668

Πίνακας 4 Βήματα Β5-Β7

Β8. Διαιρούμε το υπόλοιπο κάθε κόμματος με το εκλογικό μέτρο

Β9. Υπολογίζουμε το ακέραιο μέρος [*αριθμός εδρών που παίρνει από β φάση κάθε κόμμα*]
Β10. Υπολογίζουμε το άθροισμα εδρών Β' φάση
Σημείωση: αν το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από τις έδρες προς κατανομή αφαιρούμε μια έδρα από αυτό που έχει το μικρότερο υπόλοιπο [λόγω του +1 μπορεί να συμβεί για μία έδρα ανάλογα με τον αριθμό των κομμάτων]
Β11. Υπολογίζουμε τις έδρες προς κατανομή στην συνέχεια (αν είναι 0 σταματάμε)

Εφαρμογή

Β	εΒα
1,07833	1
0,592036	0
0,86352	0
0,25786	0
0,877723	0
0,522313	0
0,318449	0
	7
	1

8. Διαίρεση υπολοίπου με εκλογικό μέτρο
9. Ακέραιο μέρος
10. Άθροισμα εδρών που κατανέμονται
11. Έδρες προς κατανομή στη συνέχεια

Πίνακας 6. Β8-Β11

Β12. Τοποθετούμε στη σειρά τα κόμματα με τα εξής κριτήρια: πρώτα βάζουμε κατά φθίνουσα σειρά τα κόμματα που δεν έχουν πάρει έδρα στην προηγούμενη φάση [*δηλ. πρώτα το μεγαλύτερο κοκ*] και μετά κατά φθίνουσα σειρά αυτά που έχουν πάρει έδρα
Β13. Κατανέμουμε ανά μία έδρα κατά σειρά μέχρι να εξαντληθούν οι αδιάθετες έδρες (*Αν εξαντληθούν σταματάμε*)

Εφαρμογή

ΑΑ	υπόλοιπο	εΒα	σειρά	εΒβ
5	234956	0	1	1
3	231154	0	2	1
2	158481	0	3	1
6	139817	0	4	1
7	85245	0	5	1
4	69026	0	6	1
1	288656	1	7	1
Αρ. Εδ.	8	7		0

12. Τοποθετούμε κατά σειρά [σύμφωνα με τα κριτήρια που αναφέρονται παραπάνω]. Πρώτα αυτά που δεν έχουν πάρει έδρα στην β φάση και μετά αυτά που πήραν.
13. Κατανέμουμε ανά μία έδρα κατά σειρά (μέχρι να εξαντληθούν)

Πίνακας 7 Β12-Β13

Β14. Τοποθετούμε τα κόμματα κατά φθίνουσα σειρά ανάλογα με το υπόλοιπο τους από την α φάση κατανομής.
Β15. Κατανέμουμε τις τυχόν αδιάθετες έδρες κατά σειρά μέχρι να εξαντληθεί ο αριθμός τους.

Εφαρμογή

ΑΑ	υπόλοιπο	σειρά
1	288656	1
5	234956	2
3	231154	3
2	158481	4
6	139817	5
7	85245	6
4	69026	7
Αρ. Εδρών	0	

14. Τοποθετούμε κατά σειρά τα κόμματα όπως αναφέρεται παραπάνω

15. Κατανέμουμε τις τυχόν αδιάθετες έδρες κατά σειρά (*σημ. επειδή είναι 0 ο αρ. εδρών προς κατανομή έχει ολοκληρωθεί η διαδικασία*)

Πίνακας 8 Β14-Β15

Β16. Αθροίζουμε τις έδρες για κάθε κόμμα από τις φάσεις της κατανομής [Βήματα 3, 9, 13 και 15]

Εφαρμογή

Κόμμα	Β3	Β9	Β13	Β15	Σύνολο
ΝΔ	3	1	1	0	5
ΣΥΡΙΖΑ	3	0	1	0	4
ΠΑΣΟΚ	2	0	1	0	3
ΑΝΕΛ	2	0	1	0	3
ΚΚΕ	1	0	1	0	2
ΛΣ-ΧΑ	1	0	1	0	2
ΔΗΜΑΡ	1	0	1	0	2
Αρ. ΕΔΡΩΝ	13	1	7	0	21

Πίνακας 9 Σύνοψη κατανομής εδρών (Β16)

ΕΠΙΜΥΘΙΟ

Με βάση την παραπάνω ανάλυση μπορεί να ανατεθεί σε ομάδα μαθητών (φοιτητών) η επεξεργασία αλγορίθμου για κάποια από τις 28 Χώρες της ΕΕ. Η αναζήτηση του νομοθετικού πλαισίου και των αποτελεσμάτων των εκλογών δίνει τη δυνατότητα γνωριμίας με τις επίσημες πηγές. Η περιγραφή του πλαισίου αλγοριθμικά με τη χρήση μαθηματικών καλλιεργεί απαραίτητες μαθηματικές δεξιότητες. Αν

εφαρμόσουμε διαφορετικό αλγόριθμο (από τους διαθέσιμους) για την ίδια Χώρα μπορούμε να συζητήσουμε για τις προϋποθέσεις του εκλογικού συστήματος. Αν αποφασίσουμε να διαιρέσουμε την Ελλάδα σε περιφέρειες[19] μπορούμε να συζητήσουμε τα κριτήρια με τα οποία θα προχωρούσαμε σε μια διαίρεση[20] (πληθυσμιακά μεγέθη, γεωγραφικά, ιστορικά χαρακτηριστικά), τις επιπτώσεις στον πολιτικό ανταγωνισμό της διαίρεσης (αν θα ευνοηθούν τοπικά κόμματα ή όχι). Αν αποφασίσουμε να αφαιρέσουμε το κατώφλι (3%) μπορούμε να συζητήσουμε την «αναλογικότητα» του συστήματος σε σχέση με τα άλλα.

Η συγκριτική παρατήρηση των Χωρών μας βοηθά να κατανοήσουμε ομοιότητες και διαφορές. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων των εκλογών σε κάθε Χώρα μας βοηθά να κατανοήσουμε τις ιδιαιτερότητες τους (πχ τις ενότητες του Ηνωμένου Βασιλείου, τα τοπικά κόμματα στην Ισπανία). Μαζί με τα μαθηματικά που θα μάθουμε ή θα εξασκήσουμε θα μελετήσουμε τους κανόνες της Δημοκρατίας και της αντιπροσώπευσης.

[19] Δες στο: Κριτήρια καθορισμού των εκλογικών περιφερειών (σε σχέση με το εκλογικό σύστημα) · μαθηματική προσέγγιση. Θ. Χατζηπαντελής. Δίκαιο και Πολιτική, 1983, 4:253-256. Το ζήτημα επίσης διαπραγματεύεται το: Τα μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη. Εκλογικό σύστημα, χάραξη και επαναχάραξη διοικητικών και εκλογικών ενοτήτων. Θ. Χατζηπαντελής (Θα δημοσιευτεί σε ειδικό τόμο προς τιμή του Γ. Μεταξά από το Πανεπιστήμιο Κρήτης)

[20] Για μία εκτενή συζήτηση δες στο: Προϋποθέσεις και κριτήρια για την επαναχάραξη του δευτεροβάθμιου αυτοδιοικητικού χάρτη. Θ Χατζηπαντελής. Από τη Νομαρχιακή στην Περιφερειακή Αυτοδιοίκηση (επιμέλεια Γ. Σωτηρέλης-Θ. Ξηρός(επιμ.). "Παπαζήσης" 2010:99-141.

ΔΡΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΦΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΖΩΗΣ

Στρογγυλό τραπέζι

Συντονιστής:

Χαράλαμπος Λεμονίδης, *Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας*

xlemon@uowm.gr

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ Α & Γ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ, ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ, ΕΠΙΣΤΟΛΕΣ ΠΡΟΣ ΓΟΝΕΙΣ, ΔΙΚΤΥΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Συμμετέχουν:

Χαράλαμπος Λεμονίδης, *Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας*

xlemon@uowm.gr

Πνευματικός Δημήτρης, *Αναπ. Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας*

dpnevmat@uowm.gr

Κων/ντίνος Νικολαντωνάκης, *Επίκ. Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας*

knikolantonakis@uowm.gr

Σωτήρης Μαρκάδας, *Σχολικός Σύμβουλος Π.Ε., Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών*

markadas@sch.gr

Σπύρος Κυριαζίδης , *Α/θμια Εκπ/ση, Διευθυντής Προτ. Σχολείου Σερρών*

kiriazidiss@yahoo.gr

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

ΝΟΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ

Συμμετέχουν:

Χαράλαμπος Λεμονίδης, *Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας*

xlemon@uowm.gr

Ελένη Τσακιρίδου, *Αναπ. Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας*
etsakir@uowm.gr

Πνευματικός Δημήτρης, *Αναπ. Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας*
dpnevmat@uowm.gr

Δέσποινα Δεσλή, *Επίκ. Καθηγήτρια, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης*
ddesli@eled.auth.gr

Γιώργος Λυγούρας, *Α/θμια Εκπ/ση, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών*
geliguras@yahoo.gr

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ Α & Γ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ, ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ, ΕΠΙΣΤΟΛΕΣ ΠΡΟΣ ΓΟΝΕΙΣ, ΔΙΚΤΥΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Χαράλαμπος Λεμονίδης

Η ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΚΑΙ ΟΙ ΔΡΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΦΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΖΩΗΣ

Η επιστημονική σχολή για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης της Φλώρινας του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας φέρει την επωνυμία «**Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής».** Τις τελευταίες δύο δεκαετίες εργάζεται υπό την καθοδήγηση του καθηγητή Χαράλαμπου Λεμονίδη για τον εκσυγχρονισμό της διδασκαλίας των Μαθηματικών και αποτελείται από μια ομάδα επιστημόνων, μαθηματικών, δασκάλων και μεταπτυχιακών φοιτητών. Η αντίληψή της για τα μαθηματικά βασίζεται στη σύνδεση της διδασκαλίας τους με την καθημερινή ζωή και τη φύση.

Κάποια από τα σημαντικά έργα της σχολής αυτής τα οποία θα παρουσιαστούν από τους συναδέλφους παρακάτω εκτενέστερα είναι:

- Τα σχολικά βιβλία μαθηματικών της Α’ και Γ’ τάξης, που εκδόθηκαν από το υπουργείο Παιδείας και διδάσκονται σε εθνικό επίπεδο.

- Ο διαγωνισμός των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής για μαθητές Ε' και Στ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου που πραγματοποιείται κυρίως στην περιοχή της Δυτικής Μακεδονίας.
- Το δίκτυο εκπαιδευτικών των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής
- Το εναλλακτικό βιβλίο της Β' τάξης Δημοτικού και ο θεσμός των επιστολών προς γονείς και εκπαιδευτικούς

Οι βασικές θεωρητικές αντιλήψεις και αρχές της σχολής αυτής για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών είναι οι εξής:

Καθετοποίηση: κίνηση από τη θεωρία στην πράξη και αντίστροφα

Μπορώ να πω ότι ο χώρος αφετηρίας μας είναι η πράξη, δηλαδή η διδασκαλία στην τάξη, το εκπαιδευτικό υλικό, τα προγράμματα σπουδών και η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Κίνητρό μας για δράση ήταν και είναι ο εκσυγχρονισμός της Ελληνικής εκπαίδευσης στον τομέα της διδασκαλίας των μαθηματικών. Προσπαθούμε οι έρευνές μας να έχουν κάθετη μορφή να κινούνται από τη θεωρία στην πράξη, η διδασκαλία στην τάξη και το εκπαιδευτικό υλικό να αντανακλούν τη θεωρία και η θεωρία να είναι εφαρμόσιμη και να αναπτύσσει την πράξη και τα υλικά. Πιστεύω ότι η διδακτική των μαθηματικών είναι μια εμπειρική επιστήμη όπως η ιατρική και επιβεβαιώνεται και έχει λόγο ύπαρξης από τα αποτελέσματα που έχει στην πράξη, από την ίαση που προσφέρει στο άτομο και κατ' επέκταση στην κοινωνία.

Σύνδεση των μαθηματικών του σχολείου με την καθημερινή ζωή, τον πολιτισμό και την ιστορία

Προσπαθούμε να αμβλύνουμε το χάσμα μεταξύ των μαθηματικών του σχολείου και της καθημερινής ζωής. Η καθημερινή πράξη και ζωή αντανακλάται στις εμπειρίες, την προϋπάρχουσα γνώση και τις αντιλήψεις του εκπαιδευόμενου, αλλά και στην τέχνη, τον πολιτισμό και την ιστορία. Θέλουμε τα μαθηματικά να είναι ευχάριστα, ενδιαφέροντα και χρήσιμα για τους μαθητές. Στο εκπαιδευτικό υλικό που κατασκευάσαμε δίνεται λοιπόν μεγάλη σημασία στο περιεχόμενο των καταστάσεων και των προβλημάτων με τα οποία διδάσκονται τα μαθηματικά. Επιδιώκεται αυτό το περιεχόμενο να είναι οικείο και ευχάριστο στους μαθητές και να τους δημιουργεί τη διάθεση να ασχοληθούν με τα μαθηματικά.

Ο Ελληνικός πολλαπλασιασμός παράδειγμα εφαρμογής με την ιστορία

Είναι γνωστοί σήμερα κάποιοι ιστορικοί αλγόριθμοι του πολλαπλασιασμού οι οποίοι χρησιμοποιούνται και στη διδασκαλία, όπως ο Αιγυπτιακός αλγόριθμος (περίπου το 1650 π.Χ.) και η παραλλαγή του, ο πολλαπλασιασμός των Ρώσων χωρικών στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, ο πολλαπλασιασμός των Αράβων στις αρχές του 9^{ου} αιώνα. Ερευνήσαμε ιστορικά και διδακτικά (Λεμονίδης, Νικολαντονάκης, 2007) τον ιστορικό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού που χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Ευτόκιο γύρω στον 5^{ο} αιώνα μ.Χ. Ο αλγόριθμος αυτός του πολλαπλασιασμού που τον ονομάζουμε «Ελληνικό πολλαπλασιασμό» εκτός από την

ιστορική του σημασία, είναι πολύ σημαντικός και από εκπαιδευτική άποψη. Ο Ελληνικός πολλαπλασιασμός χρησιμοποιείται στα καινούργια σχολικά βιβλία των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης, στα πλαίσια της προετοιμασίας των μαθητών για την εισαγωγή τους στον κλασικό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού. Ταυτόχρονα, είναι μια μέθοδος χρήσιμη για τη διδασκαλία γιατί αποκαλύπτει και εξηγεί στους μαθητές ιδιότητες του κλασικού αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού που δεν είναι τόσο προφανείς για αυτούς.

Κάποια πεδία έρευνας και εκπαιδευτικής εφαρμογής

- *Μάθηση των πρώτων αριθμητικών εννοιών. Αρχική μάθηση αριθμών και πράξεων.*

Χ. Λεμονίδης (1994). *Περίπατος στη Μάθηση της Στοιχειώδους Αριθμητικής.* Εκδόσεις Αδελφών Κυριακίδη, Θεσ/νίκη, σελ. 240.

Χ. Λεμονίδης (2003). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου*. Εκδόσεις Πατάκη. Αθήνα, σελ. 235.

- *Νοεροί και κατ'εκτίμηση υπολογισμοί με ακέραιους και ρητούς αριθμούς.*

Χ. Λεμονίδης (2013). *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Νοεροί υπολογισμοί. Λογαρέζω με το τσιμίδι μ'*. Εκδόσεις Ζυγός. Θεσσαλονίκη, σελ. 440.

- *Εκπαίδευση εκπαιδευτικών: Έρευνες και εφαρμογές σε μελλοντικούς και ενεργεία εκπαιδευτικούς*

Χ. Λεμονίδης (2000). *Στοιχεία Αριθμητικής και θεωρίας Αριθμών για το δάσκαλο*. Εκδόσεις Πατάκη. Αθήνα, σελ. 195.

- *Εκπαίδευση ενηλίκων, Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας*

Χ. Λεμονίδης (2002). Αριθμητισμός ή Μαθηματικός Γραμματισμός. Κείμενο Προδιαγραφών για τα Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας. Έκδοση του Ινστιτούτου Διαρκούς Εκπαίδευσης Ενηλίκων (Ι.Δ.Ε.Κ.Ε.).

Χ. Λεμονίδης, Π. Μαραβελάκης (2013). Αναβάθμιση προδιαγραφών του γραμματισμού των Μαθηματικών για τα Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας. Έκδοση του Ιδρύματος Νεολαίας και Διαβίου Μάθησης (Ι.ΝΕ.ΔΙ.ΒΙ.Μ).

Πνευματικός Δημήτρης

ΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΗΣ Α' ΚΑΙ Γ' ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΊΟΥ

Τα «Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής» έχουν επιλεγεί ως διδακτικά εγχειρίδια για τις Α΄ και Γ΄ τάξεις του Δημοτικού σχολείου. Το όνομά τους υποδηλώνει την έμφαση που δίνεται στην σύνδεσή τους με προβλήματα της καθημερινής ζωής των παιδιών από τον χώρο της φύσης, του πολιτισμού, της ιστορίας των μαθηματικών κ.ά., προκειμένου οι μαθητές να αναγνωρίσουν την αξία των μαθηματικών στην καθημερινή τους ζωή και να κινητοποιηθούν προς την μάθησή τους. Πρόκειται για μια προσπάθεια η οποία εντάσσεται στις καινοτόμες προτάσεις για τη μαθηματική εκπαίδευση όπως τα Standards 2000 στην Αμερική, το πρόγραμμα Numeracy στην Αγγλία, τα ρεαλιστικά μαθηματικά της Ολλανδίας, τα καθημερινά μαθηματικά (Everyday Mathematics) στο πανεπιστήμιο του Chicago, κ.ά. Ωστόσο, οι ιδέες αυτές δεν μεταφέρθηκαν αβίαστα στην ελληνική πραγματικότητα. Προηγήθηκε μια σειρά ερευνών που οδήγησαν σε συμπαγή συμπεράσματα για την μάθηση των μαθηματικών στην ελληνική εκπαίδευση και πολύχρονη πειραματική εφαρμογή αυτών των ιδεών στα πειραματικά σχολεία της Φλώρινας για δέκα περίπου χρόνια.

Τα «Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής» αξιοποιούν τις πρόσφατες ψυχολογικές και παιδαγωγικές θεωρήσεις για την μάθηση των Μαθηματικών. Οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με προσεκτικά επιλεγμένες καταστάσεις οι οποίες πλαισιώνουν τη μαθηματική γνώση και μέσα από μια καθοδηγούμενη από τον εκπαιδευτικό διαδικασία να ανακαλύψουν εκ νέου την μαθηματική γνώση, να ανακαλύψουν εκ νέου τις σχέσεις των μαθηματικών. Η διαδικασία της ανακάλυψης της μαθηματικής γνώσης καθίσταται έτσι ένα κυρίαρχο χαρακτηριστικό της μάθησης και απαιτεί την πλαισίωσή της με συγκεκριμένες καταστάσεις ζωής. Οι λύσεις που δίνονται στις καταστάσεις αυτές στη συνέχεια αποπλαισιώνονται με στόχο την αφαιρετική τους μοντελοποίηση και εφαρμογή τους σε διαφορετικά πλαίσια.

Οι προϋπάρχουσες μαθηματικές γνώσεις των μαθηματικών αξιοποιούνται στο έπακρο και οι νέες οικοδομούνται προοδευτικά πάνω στις προηγούμενες. Οι δυσκολίες, που ενδεχομένως να αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε κάθε τους βήμα, λαμβάνονται σοβαρά υπόψη από τον τρόπο διάρθρωσης και παρουσίασης της ύλης. Ιδιαίτερη σημασία αποδίδεται στις μεταγνωστικές εμπειρίες και διαδικασίες που ακολουθούν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να αποκτήσουν την μαθηματική γνώση.

Ωστόσο, αρκετές είναι και οι αδυναμίες των διδακτικών αυτών εγχειριδίων. Πολλές από αυτές οφείλονται στη διάρθρωση του αναλυτικού προγράμματος, άλλες από αυτές στις τεχνικές προδιαγραφές. Πολλά ζητήματα επίσης σχετίζονται με την αδυναμία ορισμένων εκπαιδευτικών να ακολουθήσουν την προτεινόμενη διαδικασία. Αρκετά ζητήματα προέκυψαν επίσης και από την προσπάθειά μας να υπάρξει συνέχεια μεταξύ τω νέων και των παλαιών προγραμμάτων. Τέλος, θα πρέπει να

αναγνωρίσουμε και κάποιες αστοχίες από μέρους των συγγραφέων. Παρ' όλες τις αδυναμίες, ωστόσο, τα «Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής» αποτέλεσαν μια σημαντική καινοτομία στην μαθηματική εκπαίδευση, αγκαλιάστηκαν από τους εκπαιδευτικούς και αξιολογήθηκαν θετικά. Σίγουρα, η αναθεώρησής τους σε συνδυασμό με αναθεώρηση των αναλυτικών προγραμμάτων θα μπορούσε να βελτιώσει πολλές από τις υπάρχουσες καταγεγραμμένες αδυναμίες.

Κων/ντίνος Νικολαντωνάκης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΦΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΖΩΗΣ»

Ο Μαθηματικός Διαγωνισμός «Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής» απευθύνεται σε μαθητές Ε' και ΣΤ' Τάξεων των Δημοτικών σχολείων της Περιφέρειας της Δυτικής Μακεδονίας. Λαμβάνει χώρα από το 2005 κάθε χρόνο υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας σε συνεργασία με την Περιφερειακή Διεύθυνση Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης καθώς και με όλα τα στελέχη της Εκπαίδευσης στους 4 Νομούς της Περιφέρειας καθώς και τους τοπικούς συλλόγους εκπαιδευτικών Πρωτοβάθμιας.

Στόχος είναι να καλλιεργήσουμε στους μαθητές του Δημοτικού Σχολείου το ενδιαφέρον τους να ασχοληθούν περισσότερο με τα μαθηματικά και να αναπτύξουν μια θετική στάση απέναντι σε αυτά. Ο διαγωνισμός αυτός στοχεύει να αναπτύξει την ευγενή άμιλλα μεταξύ των παιδιών, να δώσει την ευκαιρία σε όλους να προβληματιστούν και να χρησιμοποιήσουν τη λογική των μαθηματικών με ιδιαίτερη εστίαση στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Υπό αυτό το πρίσμα τα θέματα του διαγωνισμού δεν είναι προσκολλημένα στη διδασκόμενη ύλη και δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να αναπτύξουν την κριτική τους σκέψη. Τα περιεχόμενα των προβλημάτων είναι προσαρμοσμένα στη λογική των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής, δηλαδή αναφέρονται σε εμπειρικές καταστάσεις, οικείες και ενδιαφέρουσες για τα παιδιά. Τα προβλήματα είναι αναρτημένα σε μόνιμη βάση στην ιστοσελίδα μας και περιλαμβάνουν θέματα από τις περιοχές της Αριθμητικής και της Γεωμετρίας αλλά και από τα ρεαλιστικά μαθηματικά, τους νοερούς υπολογισμούς, την ιστορία των αριθμητικών συστημάτων κ.ά. Κάθε έτος ο διαγωνισμός είναι αφιερωμένος σε έναν/μία σημαντικό/ή Μαθηματικό για τον/την οποίο/α δημιουργείται ένα φυλλάδιο (συνήθως 16 σελίδων) αφιερωμένο σε αυτόν/ήν το οποίο διανέμεται δωρεάν στους μαθητές και μαθήτριες που συμμετείχαν στον Διαγωνισμό. Η δράση δημιουργίας και παραγωγής του φυλλαδίου στηρίζεται οικονομικά από Τοπικούς φορείς της Αυτοδιοίκησης. Μέχρι σήμερα έχουμε αφιερώσει τον Διαγωνισμό στον Μεθόδιο Μετοχίτη, τον Πυθαγόρα, την Υπατία, τον Ευκλείδη. Ο Διαγωνισμός υποβοηθιέται από το 2005 από την παράλληλη ανάπτυξη στην ιστοσελίδα των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής της δράσης το Πρόβλημα της εβδομάδας. Ο κάθε εκπαιδευτικός μπορεί να κάνει χρήση των

προβλημάτων που αναρτώνται καθώς και εκείνων που έχουν αναρτηθεί στο παρελθόν. Μια εβδομάδα μετά αναρτάται η λύση του προβλήματος. Με αυτό τον τρόπο δημιουργήθηκε μια σημαντικής έκτασης και ποικιλίας βάση μαθηματικών προβλημάτων. Σε αυτό το πλαίσιο οι εκπαιδευτικοί μπορούν να ενθέσουν δημιουργικά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος στην καθημερινή ενασχόληση στο πλαίσιο των μαθημάτων τους.

Μέχρι σήμερα έχουν συμμετέχει στους 9 διαγωνισμούς περισσότεροι από 6.000 μαθητές και μαθήτριες κυρίως από την Περιφέρεια Δυτικής Μακεδονίας. Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι τα τελευταία 3 χρόνια συμμετέχουν και μαθητές/τριες από Δημοτικά σχολεία της Θεσσαλονίκης, τις Σέρρες, τη Δράμα κ.ά. μέσω τοπικών συνεργατών με μέλη της Ομάδας των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής. Σε τοπικό επίπεδο σε πόλεις της Περιφέρειά μας μικρό χρονικό διάστημα μετά τον Διαγωνισμό γίνεται βράβευση όλων των μαθητών και μαθητριών που συμμετείχαν σε αυτόν, εκδήλωση η οποία διοργανώνεται από τους συλλόγους εκπαιδευτικών και τοπικούς φορείς.

Σωτήρης Μαρκάδας

ΤΟ ΔΥΚΤΙΟ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΦΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΖΩΗΣ. ΕΞ'ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ ΣΤΟΥΣ ΝΟΕΡΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ.

Πριν από τέσσερα χρόνια, στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας και από την επιστημονική ομάδα των «Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής» του καθηγητή κ. Χαράλαμπου Λεμονίδη, δημιουργήθηκε ένα Δίκτυο εν ενεργεία εκπαιδευτικών με σκοπό την εφαρμογή αποτελεσμάτων των ερευνών για τη Διδακτική των Μαθηματικών στην εκπαιδευτική πράξη. Με αυτό τον τρόπο τα «Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής», που αποτελούν πλέον μια "σχολή" διδακτικής Μαθηματικών στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα, εγκαινίασαν έναν δίαυλο επικοινωνίας, συνεργασίας και ανατροφοδότησης για θέματα μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών. Η δράση αυτή απέβλεπε στην ενημέρωση και τροφοδότηση των εκπαιδευτικών με υλικό και πορίσματα ερευνών, στην επιμόρφωση σε σύγχρονα θέματα και στη δοκιμή νέων καινοτόμων προτάσεων διδασκαλίας. Το Δίκτυο βασίστηκε στην αξιοποίηση του Διαδικτύου και των ηλεκτρονικών μορφών επικοινωνίας. Οι εκπαιδευτικοί που επιθυμούσαν εγγράφονταν ως χρήστες στην ιστοσελίδα των «Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής» και μπορούσαν να συμμετέχουν στις συζητήσεις ενός φόρουμ και σε επιμορφωτικές δράσεις εξ' αποστάσεως.

Η επιμόρφωση στους νοερούς υπολογισμούς περιελάμβανε την αποστολή και μελέτη, από τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν, κειμένων που διασαφήνιζαν τους όρους "νοεροί υπολογισμοί" και "κατ' εκτίμηση υπολογισμοί", κειμένων για τη χρήση της αριθμογραμμής και της κενής αριθμητικής γραμμής, για τους γραπτούς

αλγόριθμους των πράξεων καθώς και για τις στρατηγικές πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.

Δόθηκε στους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς ένα αρχικό, εισαγωγικό τεστ μαθηματικών πράξεων για τους μαθητές-τριες της τάξης τους, έτσι ώστε να διαπιστωθεί το επίπεδο των μαθηματικών ικανοτήτων τους και της μαθηματικής σκέψης τους. Στο τεστ αυτό ζητήθηκε από τους μαθητές-τριες να υπολογίσουν με το μυαλό και να γράψουν, όχι μόνο τα αποτελέσματα των μαθηματικών πράξεων (π.χ. της πρόσθεσης 19 + 6, της αφαίρεσης 80-28, του πολλαπλασιασμού 8x25, της διαίρεσης 48 : 4), αλλά και τον τρόπο που σκέφτηκαν. Οι εκπαιδευτικοί σημείωναν σε πρωτόκολλο καταγραφής τον αριθμό των σωστών απαντήσεων, τον αριθμό των μαθητών που κατέγραψαν τη στρατηγική τους και ποια από τις στρατηγικές αξιοποίησαν.

Η διδακτική παρέμβαση που ακολούθησε είχε να κάνει με τη διδασκαλία στρατηγικών νοερών υπολογισμών και συγκεκριμένα την εξάσκηση των μαθητών-τριών στις στρατηγικές πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Συνήθως διδάσκονταν μια στρατηγική κάθε εβδομάδα. Οι μαθητές-τριες και οι δάσκαλοι ονόμαζαν τις διάφορες στρατηγικές με ονόματα, για να τους είναι οικείες, να μπορούν να τις διαχωρίζουν και να συζητούν για αυτές.

Στην Α΄ τάξη διδάχτηκε η χρήση της αριθμογραμμής και της κενής αριθμητικής γραμμής, πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης πάνω στην αριθμογραμμή και η στρατηγική υπέρβαση της δεκάδας. Στη Β΄ τάξη, εκτός των παραπάνω, διδάχτηκε η στρατηγική διαχωρισμού, η στρατηγική συσσώρευσης, ολιστικές στρατηγικές και στρατηγικές της προπαίδειας. Στην Γ΄ τάξη, οι δάσκαλοι-ες που συμμετείχαν δίδαξαν όσον αφορά την πρόσθεση και την αφαίρεση τις στρατηγικές του διαχωρισμού, της συσσώρευσης, ολιστικές στρατηγικές, στρατηγικές προπαίδειας και στρατηγικές με πολλαπλασιασμούς διψήφιων αριθμών. Στη Δ΄ τάξη διδάχτηκε ότι και στην προηγούμενη τάξη και έγινε εξάσκηση και σε στρατηγικές με δεκαδικούς αριθμούς. Στην Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη οι μαθητές-τριες διδάχτηκαν, εκτός όλων των παραπάνω, και στρατηγικές με κλάσματα, δεκαδικούς και ποσοστά.

Αφού ολοκληρώθηκε η διδακτική παρέμβαση επιδόθηκε ξανά το ίδιο τεστ που είχε δοθεί πριν ξεκινήσει, έτσι ώστε να διακριβωθεί αν υπήρξε αλλαγή στην συμπεριφορά των μαθητών. Αν συνήθισαν να γράφουν πως υπολογίζουν τις πράξεις. Αν ανέπτυξαν ευελιξία κατά τον υπολογισμό των πράξεων. Αν γνώριζαν τις διάφορες στρατηγικές και αν επέλεγαν την πιο κατάλληλη για τον υπολογισμό μιας πράξης σύμφωνα με τα αριθμητικά της δεδομένα.

Η αντιπαραβολή των στοιχείων, πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, ανέδειξε τη θετική επίδραση της διδασκαλίας των στρατηγικών κατά τους νοερούς υπολογισμούς. Οι μαθητές-τριες μπορούσαν πλέον να χρησιμοποιήσουν περισσότερες στρατηγικές κατά τη νοερή επίλυση πράξεων, βελτιώνοντας τις δεξιότητες τους και αυξάνοντας τη μαθηματική ικανότητα τους. Ταυτόχρονα η προσπάθεια αυτή ανέδειξε τις δυνατότητες συνεργασίας και επιμόρφωσης μέσω του

Διαδικτύου, αλλά και τα προβλήματα που πολλές φορές αναφύονται από λανθασμένες εφαρμογές οδηγιών που δεν δίνονται δια ζώσης.

Ο ορισμός της λέξης "δίκτυο" είναι μια οργανωμένη ομάδα προσώπων και μέσων που συνδέονται για την επίτευξη κοινών στόχων. Το Δίκτυο των «Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής», μια μικρή επιστημονική διαδικτυακή κοινότητα, συνέβαλε μέσω των τεχνολογιών της Πληροφορίας και Επικοινωνίας στην επίτευξη ενός διττού στόχου: στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και στην βελτίωση μαθηματικών ικανοτήτων μαθητών-τριών.

Σπύρος Κυριαζίδης

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ Β' ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ. Ο ΘΕΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΟΛΩΝ ΠΡΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ ΚΑΙ ΓΟΝΕΙΣ

Στο Πρότυπο Πειραματικό Δημοτικό Σχολείο Σερρών εφαρμόστηκε τα δύο τελευταία διδακτικά έτη η διδασκαλία του βιβλίου στα Μαθηματικά της Β' τάξης του Δημοτικού σχολείου «Μαθηματικά της φύσης και της ζωής» του Χ. Λεμονίδη αντί του επίσημου σχολικού εγχειριδίου σύμφωνα με το νόμο 3966 που διέπει τη λειτουργία των Προτύπων Πειραματικών Σχολείων και δίνει το δικαίωμα στο επιστημονικό εποπτικό συμβούλιο κάθε Προτύπου Πειραματικού Σχολείου να πραγματοποιεί τροποποιήσεις που αφορούν το αναλυτικό και ωρολόγιο πρόγραμμα του σχολείου.

Οι στόχοι του βιβλίου είναι να φέρει τον μαθητή αντιμέτωπο με ερωτήματα και προβλήματα μέσα από το φυσικό του περιβάλλον και την καθημερινή του ζωή δίνοντας έμφαση στον πολιτισμό και τις διάφορες μορφές του. Το βιβλίο βασίζεται στις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών και οικοδομεί τη νέα πάνω σ' αυτές. Θεωρεί ότι τα μαθηματικά πρέπει να συνδεθούν με την πραγματικότητα, να μείνουν κοντά στην εμπειρία των παιδιών και να είναι σε άμεση σχέση με την κοινωνία.

Κατά την άποψή μας ένα από τα μεγάλα πλεονεκτήματα του βιβλίου είναι ο περιορισμός της ποσότητας της ύλης. Για τη διδασκαλία μιας έννοιας σε κάθε μάθημα δίνονται λιγότερες ασκήσεις. Αυτό συνεπάγεται επάρκεια χρόνου, γεγονός που εξασφαλίζει στους μαθητές και στον δάσκαλο ένα περιβάλλον ηρεμίας διευκολύνοντας τη μάθηση. Από την εφαρμογή του βιβλίου στην τάξη προέκυψε ότι είναι ένα βιβλίο που απευθύνεται σε όλους τους μαθητές και όχι μόνο στους ικανότερους.

Το νέο βιβλίο δίνει έμφαση στους νοερούς και στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς κι αυτό γιατί χρησιμοποιούνται πολύ στην καθημερινή ζωή περισσότερο μάλιστα και από τους γραπτούς. Η σημασία που δίνει επίσης στη μεταγνωστική διαδικασία δηλαδή στον σχεδιασμό, έλεγχο και εκτίμηση της διαδικασίας της σκέψης έδωσε στους μαθητές ποικιλία μεταγνωστικών στρατηγικών και τους βοήθησε να διαμορφώσουν ενεργητική στάση στην επίλυση προβλημάτων.

Επίσης σε συνεργασία με το εργαστήριο των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας ξεκίνησε ο θεσμός της *Επιστολής προς τους εκπαιδευτικούς και γονείς* με στόχο την ενημέρωση των εκπαιδευτικών και γονέων σε σύγχρονα και χρήσιμα θέματα της εκπαίδευσης των μαθηματικών.

Σκοπός των επιστολών είναι η σύνδεση της πανεπιστημιακής έρευνα με την εκπαιδευτική πράξη και με απλό και κατανοητό τρόπο η ενημέρωση των εκπαιδευτικών και των γονέων με τελικό στόχο τον εκσυγχρονισμό και βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών και των μαθητών.

Οι επιστολές είναι απλά γραμμένες, εκλαϊκευμένες σύντομες και με λεζάντες και αναφέρονται σε κομβικά θέματα της διδασκαλίας των μαθηματικών. Περιέχουν οδηγίες προς τους γονείς και τους εκπαιδευτικούς σε γνωστικούς τομείς των Μαθηματικών όπως οι νοεροί υπολογισμοί και ο ελληνικός πολλαπλασιασμός.

Περιέχουν παραδείγματα, ορισμούς και εξηγείται με απλό και κατανοητό τρόπο η χρησιμότητά τους στην καθημερινή ζωή και ο λόγος για τον οποίο περιέχονται στα εγχειρίδια των μαθηματικών αλλά και τρόποι με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε το θέμα που διαπραγματεύονται στην τάξη. Επίσης οδηγίες για το τι πρέπει και τι δεν πρέπει να κάνουν οι γονείς στο σπίτι.

Η πρώτη επιστολή προς εκπαιδευτικούς και γονείς τυπώθηκε και διανεμήθηκε σε σχολεία του Ν. Σερρών, Φλώρινας και Θεσσαλονίκης. Επίσης δημοσιεύτηκε στην ιστοσελίδα του ΠΤΔΕ Δυτικής Μακεδονίας και του Προτύπου Πειραματικού Δημοτικού Σχολείου Σερρών.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

ΝΟΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ

Χαράλαμπος Λεμονίδης

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΡΕΥΝΩΝ ΣΤΟΥΣ ΝΟΕΡΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ Χ. ΛΕΜΟΝΙΔΗ (2013)

Το βιβλίο με τίτλο *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Νοεροί υπολογισμοί. Λογαρέζω με το τσιμίδι μ'*, του Χ. Λεμονίδη (2013) αναφέρεται στο θέμα των νοερών υπολογισμών και της εκτίμησης.

Οι νοεροί υπολογισμοί και οι εκτιμήσεις αποτέλεσαν ένα πεδίο έρευνας με το οποίο ασχοληθήκαμε τα τελευταία χρόνια μέσα στα πλαίσια της ομάδας των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής. Μερικά από τα ερωτήματα στα οποία επιχειρεί να απαντήσει είναι: Πώς ορίζονται οι νοεροί και κατ' εκτίμηση υπολογισμοί, γιατί είναι σημαντικοί και με ποιες άλλες μαθηματικές έννοιες και γνωστικές συμπεριφορές σχετίζονται; Ποιες είναι οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται στις νοερές προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις με φυσικούς και ρητούς αριθμούς; Πώς μαθαίνεται η προπαίδεια και ποια είναι τα γνωστικά χαρακτηριστικά

της; Ποιες είναι οι σύγχρονες τάσεις για τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και της εκτίμησης; Πώς εξελίχθηκε ιστορικά η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και της εκτίμησης στην ελληνική εκπαίδευση; Πώς μαθαίνουν τους νοερούς υπολογισμούς και ποιες αδυναμίες παρουσιάζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες και δυσκολίες στα μαθηματικά; Πώς λειτουργεί η μνήμη και σε ποια σημεία του εγκεφάλου γίνεται η λειτουργία των διεργασιών που σχετίζονται με τους νοερούς υπολογισμούς; Τα περιεχόμενα του βιβλίου εμπλουτίζονται με πολλές εμπειρικές έρευνες της σχολής των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής, οι οποίες αναδεικνύουν τις συμπεριφορές Ελλήνων μαθητών στα παραπάνω θέματα.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** του βιβλίου αυτού που είναι αφιερωμένο στις νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις στην *ενότητα 2.4*. συμπεριλαμβάνονται οι έρευνες της σχολής των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής για νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις μεταξύ διψήφιων και πολυψήφιων αριθμών από ένα πρόγραμμα εξ'αποστάσεως επιμόρφωσης δασκάλων και πειραματικής εφαρμογής σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής δείχνουν ότι πρώτον, σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού Σχολείου η κυρίαρχη στρατηγική, δηλαδή αυτή που χρησιμοποιείται σε μεγαλύτερα ποσοστά από τους μαθητές, είναι η στρατηγική του διαχωρισμού (1010). Σύμφωνα με αυτήν την στρατηγική διαχωρίζονται οι όροι της πράξης σε μονάδες και δεκάδες και προσθέτονται ή αφαιρούνται χωριστά. Η στρατηγική αυτή του διαχωρισμού μοιάζει αρκετά με τον γραπτό αλγόριθμο. Επιπλέον, κάθε φορά ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό μαθητών χρησιμοποιεί νοερά τον γραπτό αλγόριθμο. Αυτό δείχνει ότι στο Ελληνικό σχολείο κυριαρχεί στη συμπεριφορά των μαθητών ο γραπτός αλγόριθμος των πράξεων.

Δεύτερον, μια άλλη γενική παρατήρηση για όλες τις τάξεις του Δημοτικού Σχολείου είναι ότι οι μαθητές δεν ξέρουν να χρησιμοποιούν τις ολιστικές στρατηγικές, πολύ μικρά ποσοστά μαθητών χρησιμοποιούν τις στρατηγικές αυτές. Επιπλέον, η διδακτική παρέμβαση δεν αλλάζει αυτή τη συμπεριφορά και οι μαθητές συνεχίζουν να μην χρησιμοποιούν τις ολιστικές στρατηγικές.

Επομένως, για μια αλλαγή στην συμπεριφορά των Ελλήνων μαθητών ως προς το θέμα της ευελιξίας, θα πρέπει ίσως να γίνουν αλλαγές ως προς δύο βασικά σημεία. Πρώτον, η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών σύμφωνα με τη λογική της ευελιξίας να γίνει από πολύ νωρίς. Δεύτερον, είναι απαραίτητη η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σχετικά με τον τρόπο διδασκαλίας των νοερών υπολογισμών, με στόχο την ευελιξία των μαθητών στη χρήση των στρατηγικών.

Στο **τέταρτο κεφάλαιο** που αναφέρεται στο θέμα των νοερών πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων στην *ενότητα 4.3* παρουσιάζονται αποτελέσματα μαθητών του Δημοτικού και του Γυμνασίου σε νοερούς υπολογισμούς με πολυψήφιους πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις. Τα αποτελέσματα των ερευνών σε Έλληνες και Κύπριους μαθητές Γυμνασίου σε πολυψήφιους νοερούς πολλαπλασιασμούς δείχνουν ότι αυτοί για να υπολογίσουν καταφεύγουν κυρίως στο γραπτό αλγόριθμο και δεν γνωρίζουν τις ολιστικές στρατηγικές των νοερών υπολογισμών. Είναι μη ευέλικτοι

και δεν διαθέτουν ένα ευρύ ρεπερτόριο στρατηγικών, αλλά χρησιμοποιούν κυρίως την τεχνική του γραπτού αλγόριθμου στην οποία κάνουν πολλά λάθη.

Στο **πέμπτο κεφάλαιο** αναπτύσσεται το θέμα των νοερών υπολογισμών με ρητούς αριθμούς. Στην *ενότητα 5.4* παρουσιάζονται αποτελέσματα από μια έρευνα πραγματοποιήθηκε το 2011 σε ένα δείγμα 462 «επίλεκτων» μαθητών της Ε' και Στ' τάξης που έλαβαν μέρος στον 7ο Διαγωνισμό των «Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής». Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την έρευνα αυτή είναι τα εξής: Η μεγάλη πλειοψηφία των λύσεων που προτείνουν οι μαθητές για τους νοερούς υπολογισμούς αποτελούν εφαρμογή των τυπικών γραπτών αλγόριθμων που έχουν διδαχθεί στο σχολείο, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι στρατηγικές νοερών υπολογισμών δεν διδάσκονται στο σχολείο. Από την κατηγοριοποίηση των λαθών προκύπτει ότι αυτά έχουν ως αιτία το γεγονός ότι οι μαθητές δεν έχουν αναπτύξει μια διαισθητική γνώση και κατανόηση του ρητού αριθμού αλλά κάνουν λάθη στην προσπάθειά τους να εφαρμόσουν ένα γραπτό αλγόριθμο του οποίου δεν κατανοούν το νόημα και τη λειτουργία. Στην πλειονότητά τους οι μαθητές, παρά το γεγονός ότι οι εκφωνήσεις των ασκήσεων το ζητούσαν ρητά, δεν εξηγούσαν γραπτά τον τρόπο σκέψης τους, γεγονός που ίσως δηλώνει πως μια τέτοια πρακτική δεν αποτελεί μέρος της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Οι μαθητές, δηλαδή δεν ήταν εξοικειωμένοι με κάτι τέτοιο.

Το **έκτο κεφάλαιο** το οποίο αναφέρεται στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς στην *ενότητα 6.5* παρουσιάζονται τα αποτελέσματα δύο ερευνών στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς, η πρώτη έρευνα πραγματοποιήθηκε σε υποψήφιους δασκάλους και η δεύτερη σε μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του Δημοτικού. Τα συμπεράσματα της έρευνας σε μαθητές της Ε΄ και Στ΄ τάξης του Δημοτικού έδειξαν ότι οι περισσότεροι μαθητές υπολογίζουν τα προβλήματα κατ'εκτίμηση υπολογισμού με ακριβή υπολογισμό. Δεν γνωρίζουν κάποιες ειδικές στρατηγικές κατ'εκτίμηση υπολογισμού όπως είναι αυτές των ειδικών αριθμών, η στρατηγική στρογγυλοποίησης με αντιστάθμιση και η στρατηγική εμπρόσθιου άκρου. Τα λάθη των μαθητών επίσης δείχνουν την προσκόλλησή τους στους γραπτούς αλγορίθμους τους οποίους προσπαθώντας να εκτελέσουν νοερά τους εκτελούν λανθασμένα. Φαίνεται επίσης ότι αρκετοί μαθητές στην προσπάθειά τους να πραγματοποιήσουν μια εκτίμηση κάνουν λάθη που δείχνουν ότι δεν ξέρουν τι είναι ο κατ'εκτίμηση υπολογισμός.

Ίσως οι παραπάνω συμπεριφορές να είναι αναμενόμενες με δεδομένο ότι οι μαθητές αυτοί δεν διδάχτηκαν τους κατ'εκτίμηση υπολογισμούς. Παρόλο όμως που δεν διδάχτηκαν όπως είδαμε στα συμπεράσματα αρκετοί μαθητές πραγματοποιούν σωστά κατ'εκτίμηση υπολογισμούς και χρησιμοποιούν κάθε φορά τις κατάλληλες στρατηγικές εκτίμησης. Αυτό σημαίνει ότι οι γνώσεις αυτές έχουν χαρακτηριστικά άτυπης γνώσης που δεν προέρχονται από τη διδασκαλία στο σχολείο. Όσον αφορά τη γραπτή αποτύπωση του τρόπου σκέψης των μαθητών είδαμε ότι πολλοί μαθητές δεν καταγράφουν τον τρόπο που σκέφτονται όταν λύνουν τα προβλήματα.

Βιβλιογραφία

Λεμονίδη (2013). *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Νοεροί υπολογισμοί. Λογαρέζω με το τσιμίδι μ'*. Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη.

Ελένη Τσακιρίδου

ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΕΣ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΟΠΑΙΔΕΙΑ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΔΙΨΗΦΙΟΥΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥΣ

Η διαδικασία της μάθησης της προπαίδειας περιλαμβάνει μεταξύ άλλων τέσσερα σημαντικά και αυτά περιλαμβάνουν την ενασχόληση με τα μοντέλα καταστάσεων (models of situation/ semantic types), τα διαισθητικά μοντέλα (intuitive models), τις διαδικασίες επίλυσης (solution procedures /computational strategies) και τα μοντέλα ανάκλησης (models of retrieval).[1]

Όσον αφορά στα μοντέλα καταστάσεων, την έρευνα απασχολεί η ταξινόμηση των καταστάσεων που περιγράφονται στα λεκτικά προβλήματα σύμφωνα πάντα με το σχήμα που χρειάζεται για να επιλυθεί το πρόβλημα.[2] Αυτές οι κατηγορίες περιλαμβάνουν τις ισοπληθείς ομάδες, το λόγο, και το καρτεσιανό γινόμενο.

Οι Fischbein, et. al.[3] ασχολούνται με τα διαισθητικά μοντέλα και δηλώνουν ότι κάθε θεμελιώδης αριθμητική πράξη παραμένει συνδεμένη με ένα έμμεσο, ασυναίσθητο και πρωτόγονο διαισθητικό μοντέλο, από το οποίο επηρεάζεται η λύση του προβλήματος.[4]

---

[1] Sherin, B. & Fuson, K. (2005)., Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 347-395.

[2] Greer, B. (1992)., Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook *of research on mathematics teaching and learning (pp. 276–295). New York: Macmillan.*

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for research in Mathematics Education*, 20, 147-158.

Marshall, S. P. (1995). Schemas in problem solving., New York: Cambridge University Press.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 19–40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Reed, S. K. (1999). Word problems: Research and curriculum reform. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum 19–40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

[3] Fischbein, E., Deri M., Nello M-S., & Marino M-S. (1985). The role of implicit model in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 1985, 16(1), 3-17*.

[4] op. cit. Sherin, B., & Fuson, K. (2005).

Στις διαδικασίες επίλυσης εξετάζεται η περιγραφή της ακολουθίας διαδικασιών που εκτελεί ένας μαθητής προκειμένου να φτάσει από τους αριθμούς που του έχουν δοθεί στο γινόμενο τους.

Τέλος, στα μοντέλα ανάκλησης, ένας από τους στόχους της διδασκαλίας της προπαίδειας είναι η βοήθεια των μαθητών ώστε να αναπτύξουν – αποκτήσουν τη δυνατότητα να δηλώνουν γρήγορα το γινόμενο δύο αριθμών.

Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι μηχανισμοί που οδηγούν στην ανάπτυξη των στρατηγικών του μονοψήφιου πολλαπλασιασμού, είναι ανάλογοι με εκείνους της μονοψήφιας πρόσθεσης, ενώ ταυτόχρονα υπάρχει η άποψη[5] ότι οι μηχανισμοί που οδηγούν στην ανάπτυξη των στρατηγικών στο μονοψήφιο πολλαπλασιασμό σχετίζονται με εννοιολογικές αλλαγές. Παράλληλα, σύμφωνα με τους Fischebein, E, et al.,[6] η ανάπτυξη των στρατηγικών διακρίνεται σε τρία διαισθητικά μοντέλα, την άμεση καταμέτρηση (direct counting), την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (repeated addition) και την πολλαπλασιαστική πράξη (multiplicative operation) και συνέδεσαν το καθένα από αυτά με μια ή περισσότερες στρατηγικές υπολογισμού.

Τις παραπάνω θεωρίες επιβεβαιώνει έρευνα που διεξήχθη σε 50 φοιτητές του Π.Τ.Δ.Ε. Φλώρινας, με στόχο τη διερεύνηση, καταγραφή και μελέτη των στρατηγικών υπολογισμού στις πράξεις του πολλαπλασιασμού από τους φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος, σύμφωνα με την οποία, η βασική στρατηγική υπολογισμού που χρησιμοποιεί η πλειοψηφία των φοιτητών στην περίπτωση των μονοψήφιων πολλαπλασιασμών είναι η άμεση ανάκληση. Αναφορικά με τους διψήφιους πολλαπλασιασμούς, οι φοιτητές προτιμούν να υπολογίζουν τα γινόμενα εφαρμόζοντας τον γραπτό αλγόριθμο, ενώ όταν καλούνται να εφαρμόσουν ολιστική στρατηγική, δυσκολεύονται ιδιαίτερα. Στη στρατηγική της στρογγυλοποίησης, οι φοιτητές ανταποκρίνονται αρκετά καλά. Επιπλέον, η έρευνα έδειξε ότι η ευελιξία των φοιτητών στη χρήση στρατηγικών, συμβάλλει σημαντικά στην ικανότητα σωστού υπολογισμού των γινομένων.

Συνοπτικά, μέσω της έρευνας αναδεικνύεται η αναγκαιότητα γνώσης πολλών στρατηγικών υπολογισμού από τους φοιτητές για την επιλογή της πιο κατάλληλης και όταν η πράξη είναι πιο σύνθετη, είναι απαραίτητη η ευελιξία στους υπολογισμούς για να φτάσει κανείς στη σωστή απάντηση.

Πνευματικός Δημήτρης

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ: ΠΟΣΟ ΕΤΟΙΜΟΙ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΔΑΣΚΑΛΟΙ ΓΙΑ ΝΑ ΤΑ ΔΙΔΑΞΟΥΝ?

[5] Mulligan, J., Mitchelmore, M., (1997)., Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for research in Mathematics Education*, 28, 309-330.

[6] op. cit. Fischbein, E., Deri M., Nello, M-S., & Marino M-S., (1985).

Πολλές φορές στην καθημερινότητά μας απαιτείται η εύρεση μιας κατ' εκτίμηση υπολογισμού και απάντησης σε ένα αριθμητικό πρόβλημα προκειμένου να λάβουμε μια γρήγορη απόφαση. Για την επιτυχή εκτίμηση, πέρα από την γνώση των αριθμητικών πράξεων, απαιτούνται και άλλες γνωστικές ικανότητες δεξιότητες και στρατηγικές οι οποίες είναι δυνατόν, και πρέπει, να διδαχθούν. Πράγματι, το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ. 2002) αναγνωρίζει την αναγκαιότητα διδασκαλίας των κατ' εκτίμηση υπολογισμών, και τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του 2006 για πρώτη φορά στην Ελλάδα ενσωματώνουν τη διδασκαλία τους.

Η ικανότητα για κατ' εκτίμηση υπολογισμούς είναι πολύ σημαντική και υποβοηθητική για τον έλεγχο της λύσης του προβλήματος, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για προβλήματα με ρητούς αριθμούς και συμβάλει στην κατανόηση των μαθηματικών αρχών, των σχέσεων μεταξύ των αριθμών και ποσοτήτων, και της αίσθησης του αριθμού. Επιπρόσθετα, οι δεξιότητες και οι στρατηγικές που αναπτύσσονται προκειμένου το άτομο να εκτελέσει κατ' εκτίμηση υπολογισμούς συνεισφέρουν στην ανάπτυξη ποσοτικής σκέψης, στην ευελιξία της μαθηματικής σκέψης, στην βελτίωση της κριτικής ικανότητας και της μνήμης, στην ανάπτυξη θετικής στάσης και αυτοπεποίθησης απέναντι στα μαθηματικά. Ειδικότερα, οι γνωστικές διαδικασίες που εντοπίζονται κατά την εκτίμηση είναι τρεις: (α) η *αναδιατύπωση* / *αναδόμηση* (αφορά στη μετατροπή των αριθμητικών δεδομένων σε πιο διαχειρίσιμη μορφή), (β) η *μετάφραση* (αφορά στην αλλαγή της μαθηματικής δομής του προβλήματος σε νοερή διαχειρίσιμη δομή) και (γ) η *αντιστάθμιση* (αφορά στη ρύθμιση της εκτίμησης ανάλογα με την αναδιατύπωση ή τη μετάφραση). Για κάθε γνωστική διαδικασία απαιτούνται μια σειρά από στρατηγικές. Για παράδειγμα, για την επιτυχή *αναδιατύπωση* ενεργοποιούνται στρατηγικές όπως της στρογγυλοποίησης, της περικοπής, της αλλαγής της μορφής ενός αριθμού σε συμβατές ισοδύναμες δομές και τη στρατηγική της ανασύνθεσης. Για την επιτυχή μετάφραση απαιτούνται στρατηγικές όπως της στρατηγικής υπολογισμού του μέσου όρου και των σημείων αναφοράς, ενώ για την επιτυχή *αντιστάθμιση* απαιτείται η στρατηγική του διαχωρισμού σε επιμέρους βήματα (ενδιάμεση και τελική αντιστάθμιση).

Δεν είναι αυτονόητο ότι οι εκπαιδευτικοί είναι εξοικειωμένοι με όλο το εύρος των δεξιοτήτων και στρατηγικών που ενεργοποιούνται και απαιτούνται για επιτυχείς κατ' εκτίμηση υπολογισμούς. Η προετοιμασία τους σε προπτυχιακό επίπεδο αλλά και η επιμόρφωση όσων ήδη υπηρετούν απαιτεί γνώση των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι ίδιοι και ποιες από τις στρατηγικές, αν και αναγκαίες για τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς, αγνοούνται ή σπάνια χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς όταν οι ίδιοι καλούνται να κάνουν κατ' εκτίμηση υπολογισμούς.

Πρόσφατη έρευνα που διεξήχθη στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας ανέδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί πράγματι χρησιμοποιούν συστηματικά μια σειρά από στρατηγικές προκειμένου να εκτιμήσουν αθροίσματα και πηλίκα. Ωστόσο, πολύ σπάνια χρησιμοποιούν την αντιστάθμιση στον πολλαπλασιασμό με διψήφιους αριθμούς, ενώ

λίγοι είναι αυτοί που χρησιμοποιούν συστηματικά στρατηγικές για την εκτίμηση του μέσου όρου, ποσοστών και άθροισμα κλασμάτων. Για παράδειγμα, λίγοι χρησιμοποίησαν τη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου και των συμβατών αριθμών, γύρω στους μισούς χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης με αντιστάθμιση και τη στρατηγική του μέσου όρου και γύρω στο 70% χρησιμοποίησαν τη στρατηγική των ειδικών αριθμών. Συνεπώς, κρίνεται αναγκαία η συστηματική διδασκαλία και επιμόρφωση των εκπαιδευτικών προκειμένου να είναι σε θέση να διδάξουν κατ' εκτίμηση υπολογισμούς στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Δέσποινα Δεσλή

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ: ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ

Οι υπολογισμοί κατ' εκτίμηση ή υπολογιστικές εκτιμήσεις πραγματοποιούνται νοερά και χρησιμοποιούνται συχνά στην καθημερινή ζωή για να βρούμε γρήγορα και κατά προσέγγιση το αποτέλεσμα ενός πολύπλοκου υπολογισμού που είναι απαραίτητος για την επίλυση πρακτικών ζητημάτων, όπως το κόστος μίας πιθανής αγοράς. Τα οφέλη από την πραγματοποίηση μιας υπολογιστικής εκτίμησης εστιάζονται κυρίως στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (Greeno, 1991) και την πρακτική χρησιμότητά της (Segovia & Castro, 2009), καθώς με τη χρήση της αφενός ενισχύεται μια γενική αίσθηση σχετικά με την αναμενόμενη αριθμητική απάντηση και αφετέρου είναι δυνατός ο έλεγχος για το αν ο ακριβής υπολογισμός που πραγματοποιείται αργότερα είναι λογικός ή/και σωστός. Στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης οι εκτιμήσεις παρουσιάζονται ως βασική μαθησιακή επιδίωξη –ανάμεσα σε άλλες– και ενθαρρύνεται η συστηματική διδασκαλία των υπολογιστικών εκτιμήσεων μέσα από προτάσεις που αφορούν συγκεκριμένες στρατηγικές εκτίμησης.

Αν και υπάρχουν αρκετά ερευνητικά δεδομένα για την ικανότητα των μεγάλων παιδιών και των ενηλίκων για υπολογιστικές εκτιμήσεις (Dowker, 1997. Booth & Siegler, 2006. Opfer & DeVries, 2008) και τις στρατηγικές που οι ίδιοι χρησιμοποιούν (Lemaire & Lecacheur, 2002), γνωρίζουμε ελάχιστα για τις πρώτες δυνατότητες των μικρών παιδιών πριν από την έκθεσή τους στην τυπική διδασκαλία των εκτιμήσεων. Στη συγκεκριμένη ανακοίνωση θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα έρευνας που μελέτησε την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των παιδιών προσχολικής ηλικίας σε αριθμητικά προβλήματα πρόσθεσης. Σε ένα από τα έργα της έρευνας παρουσιάστηκαν στα παιδιά εκτιμήσεις άλλων και τους ζητήθηκε να τις κρίνουν, ενώ σε άλλο έργο τους ζητήθηκε να προβούν οι ίδιοι σε δικές τους εκτιμήσεις. Σε καμία από τις δοκιμασίες των έργων δεν απαιτούνταν ακριβής υπολογισμός.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όλα τα παιδιά προέβησαν σε πολύ καλές εκτιμήσεις. Φαίνεται πως είναι σε θέση να κρίνουν πότε μία υπολογιστική εκτίμηση είναι λιγότερο ή περισσότερο ικανοποιητική και να παράγουν επιτυχείς υπολογιστικές

εκτιμήσεις που αφορούν πρόσθεση πολύ νωρίς, προτού ακόμη εκπαιδευθούν σε ακριβείς υπολογισμούς ή σε συγκεκριμένες στρατηγικές εκτίμησης. Αυτή η ικανότητα των πολύ μικρών παιδιών για υπολογιστικές εκτιμήσεις αντιτίθεται σε ευρήματα που δείχνουν την αποτυχία των μεγαλύτερων παιδιών (π.χ., Booth & Siegler, 2006). Ενδεχομένως, οι δυνατότητες των μεγαλύτερων παιδιών να προβούν σε υπολογιστικές εκτιμήσεις ανακόπτονται από τη γνώση και τη χρήση φορμαλιστικών μαθηματικών διαδικασιών (Opfer & DeVries, 2008), όπως είναι οι γραπτοί αλγόριθμοι των αριθμητικών πράξεων, και την εμμονή τους σε αυτούς.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, ωστόσο, παρουσιάζει το γεγονός ότι τα παιδιά παρουσίασαν μεγαλύτερη επιτυχία στις περιπτώσεις όπου τα ίδια παρήγαγαν εκτιμήσεις σε σύγκριση με τις περιπτώσεις που έκριναν εκτιμήσεις άλλων. Πιθανότατα όταν καλούνται να δώσουν τη δική τους απάντηση νοηματοδοτούν καλύτερα την κατάσταση και σκέφτονται λογικά. Αντιλαμβάνονται έτσι με τον καλύτερο τρόπο την αξία της εκτίμησης ως προσεγγιστικού υπολογισμού στην καθημερινή ζωή και αναπτύσσουν εναλλακτικές στρατηγικές εκτίμησης που μπορεί να μην συνάδουν απαραίτητα με αυτές της τυπικής εκπαίδευσης. Υπό αυτό το πρίσμα, η παραγωγή και αξιοποίηση αυθεντικών υπολογιστικών εκτιμήσεων από μικρή ηλικία μπορεί να αποτελέσει ευκαιρία τόσο μετάβασης σε πρακτικές που επενδύουν αποτελεσματικά στη συμμετοχή και την ενεργή εμπλοκή των μαθητών στη διαδικασία μάθησης όσο και ενίσχυσης της αίσθησης του αριθμού θεωρώντας την ικανότητα εκτίμησης αναπόσπαστο μέρος της.

Βιβλιογραφία

Booth, J.L., & Siegler, R.S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology, 41*(6), 189-201.

Dowker, A. (1997). Young children's addition estimates. *Mathematical Cognition, 3*(2), 141-154.

Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218.

Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2002). Children's strategies in computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology, 82,* 281-304.

Opfer, J.E., & DeVries, J.M. (2008). Representational change and magnitude estimation: Why young children can make more accurate salary comparisons than adults. *Cognition, 108,* 843-849.

Segovia, I., & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17, Vol 7*(1),499-539.

Γιώργος Λυγούρας

ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΟΥΣ ΝΟΕΡΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

Τις τελευταίες δεκαετίες διάφοροι ερευνητές μελέτησαν εκτενώς τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά όταν υπολογίζουν νοερά και προσπάθησαν να καταγράψουν τις αλλαγές που πραγματοποιούνται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας των νοερών υπολογισμών. Αυτό που προβληματίζει συνεχώς τους ερευνητές και της μαθηματικής εκπαίδευσης και της ψυχολογίας είναι να ερμηνεύσουν τον τρόπο με τον οποίο επιλέγει και χρησιμοποιεί ένα παιδί τη στρατηγική που του χρειάζεται για να επιλύσει μία άσκηση.

Τα ερωτήματα που προκύπτουν μέσα από την επισκόπηση της διεθνής βιβλιογραφίας που σχετίζονται με τους νοερούς υπολογισμούς στα μαθηματικά είναι «Τι είναι η ευελιξία;» και «Πώς αυτή προσδιορίζεται;» Οι ερευνητές ξεκινώντας από την απλή διαπίστωση πως κάποιοι μαθητές εναλλάσσουν στρατηγικές, όταν υπολογίζουν νοερά, ερμήνευσαν την ευελιξία με βάση την ποικιλία των στρατηγικών που χρησιμοποιούν (Heirdsfield, & Cooper, 2002; Bloete et al., 2000; Klein et al.,1998; Bloete, Van der Burg, & Klein, 2001; Carroll, 2000; Hiebert, & Wearne, 1996;Resnick, & Ford, 1981). Στη συνέχεια προσθέσανε στον ορισμό κριτήρια, όπως ο αριθμητισμός (Hiebert, & Wearne, 1996; Baroody, & Tiilikainen, 2003; Star, &Seifert, 2006), η αίσθηση των αριθμών (MacIntosh, 1996, 1998, 2005; MacIntosh,Reys & Reys, 1992; Sowder, 1990, 1992; Kamii & Dominick, 1998; Maclellan, 2001;Klein & Beishuizen, 1994; Reys, Reys, Nohda & Emori, 1995), η ταχύτητα και η αποτελεσματικότητα (Shrager & Siegler, 1998; Siegler, 1996, 2000; Siegler &Lemaire, 1997; Alibali & Goldin-Meadow, 1993; Geary, 1990; Geary & Brown,1991; Geary & Burlingham-Durbee, 1989; LeFevre et al., 1996) και τελευταία το κοινωνικό υπόβαθρο των μαθητών (Ellis, 1997; Comiti & Ball, 1996; LemonidisLigouras, 2009).

Στην έρευνα που πραγματοποιήσαμε εμείς και είχε ως στόχο τη διερεύνηση της ευελιξίας των μαθητών Στ΄ Δημοτικού βασιστήκαμε στον ορισμό της από τους Verschaffel, et al. (2007) σύμφωνα με τον οποίο η ευελιξία νοείται ως η ενσυνείδητη ή ασυνείδητη επιλογή και χρήση της πιο κατάλληλης στρατηγικής επίλυσης σε ένα μαθηματικό αντικείμενο (πράξη/πρόβλημα) που προτείνεται σε ένα συγκεκριμένο υποκείμενο που ανήκει σε ένα συγκεκριμένο κοινωνικό-πολιτιστικό περιβάλλον.

Πήραμε διπλές συνεντεύξεις από 223 μαθητές Δημοτικών Σχολείων της Φλώρινας και καταγράψαμε το πλήθος και το είδος των στρατηγικών που χρησιμοποιούν και το κοινωνικό τους υπόβαθρο. Από τις απαντήσεις τους κωδικοποιήσαμε το επίπεδο της ευελιξίας τους με δύο τρόπους. Πρώτα μετρήσαμε την ικανότητα των μαθητών να λαμβάνουν υπόψη τους τα χαρακτηριστικά των ασκήσεων (ευελιξία1) και μετά μετρήσαμε την ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν γρήγορα και σωστά την πιο κατάλληλη για αυτούς στρατηγική (ευελιξία2). Στη συνέχεια αναζητήσαμε συσχετίσεις των δύο τύπων της ευελιξίας με τα κοινωνικά τους χαρακτηριστικά.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν τα εξής:

Α. Η ευελιξία των μαθητών του δείγματος κινείται σε χαμηλά επίπεδα και στις τρεις ομάδες πράξεων που εξετάστηκαν και στους δύο τύπους ευελιξίας: Ευελιξία1: Συνολικός Μ.Ο.=11.04, ΤΑ=19.57. Ευελιξία2: Συνολικός ΜΟ=14.42, ΤΑ=14.01.

Β. Η ευελιξία1 φαίνεται ότι δε συσχετίζεται με καμία μεταβλητή του παράγοντα μορφωτικό-οικονομικό επίπεδο των γονέων, ούτε με το βιοτικό επίπεδο της οικογένειας, ούτε με την εμπλοκή των γονέων, όσο αφορά το ενδιαφέρον των γονέων για τη μάθηση, τη βοήθεια που προσφέρουν στα παιδιά στο σπίτι και το επίπεδο επικοινωνίας μεταξύ γονέων-μαθητών.

Αντίθετα, η ευελιξία2 σχετίζεται σημαντικά με το μορφωτικό επίπεδο του πατέρα και το βιοτικό επίπεδο της οικογένειας. Επίσης, σχετίζεται σημαντικά και με το επίπεδο επικοινωνίας γονέων-μαθητών.

Τελικά, διαπιστώνεται ότι ίσως η ευελιξία, όσο αφορά τους κοινωνικούς παράγοντες, δεν επηρεάζεται από δραστηριότητες άμεσης καθοδήγησης και εκμάθησης. Σχετίζεται μάλλον με γενικότερες δραστηριότητες που αναπτύσσουν τη σκέψη και την ενεργητικότητα των μαθητών, όπως η συχνή και στενή επικοινωνία μεταξύ των παιδιών και των γονέων.

Η ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΜΕ ΔΙΑΓΝΩΣΗ ΣΥΝΔΡΟΜΟΥ ASPERGER ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΛΕΚΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Νούλης Ιωάννης[1], Καφούση Σόνια[2]

[1]Πανεπιστήμιο Αιγαίου, [2]Πανεπιστήμιο Αιγαίου

inoulis@rhodes.aegean.gr, kafoussi@rhodes.aegean.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα έρευνα, που διενεργήθηκε στο πλαίσιο διδακτορικής διατριβής, διερευνήθηκαν οι τρόποι λύσης των παιδιών με σύνδρομο Asperger, για τον υπολογισμό γινομένων σε ασύμμετρες πολλαπλασιαστικές καταστάσεις ίσων ομάδων. Η συλλογή των δεδομένων έγινε με ημιδομημένες συνεντεύξεις σε πολλαπλές μελέτες περίπτωσης. Στη συγκεκριμένη εργασία παρουσιάζονται οι τρόποι λύσης που ανέπτυξαν τα παιδιά αυτά σε λεκτικά προβλήματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι σε αυτή την κατηγορία πολλαπλασιαστικών έργων αναπτύσσουν πολλαπλασιαστική σκέψη, αλλά παρουσιάζουν κάποιες δυσκολίες. Διευκολύνονται όμως όταν τα προβλήματα αναπαριστούν οπτικές πληροφορίες που εντάσσονται στα ενδιαφέροντά τους.

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το Σύνδρομο Asperger (ΣΑ) συμπεριλήφθηκε για πρώτη φορά το 1994, ως ξεχωριστό σύνδρομο, στο διαγνωστικό εγχειρίδιο DSM-IV (APA, 1994). Ανήκει στις Διάχυτες Αναπτυξιακές Διαταραχές (ΔΑΔ) ή καλύτερα στις *Διαταραχές του Αυτιστικού Φάσματος*. Στο νέο διαγνωστικό εγχειρίδιο DSM-5, που κυκλοφόρησε το 2013, το ΣΑ έπαψε να υφίσταται ως ξεχωριστό σύνδρομο και εντάχτηκε στο Αυτιστικό Φάσμα. Οι χαρακτηριστικές δυσκολίες του ΣΑ, καθώς και γενικότερα του αυτισμού, οφείλονται στην «τριάδα διαταραχών» και αναλυτικότερα στην κοινωνική αλληλεπίδραση, την κοινωνική επικοινωνία και την κοινωνική φαντασία (φανταστικό παιχνίδι) καθώς και στη συναισθηματική ευαισθησία και την κινητική αδεξιότητα (Wing, 1981· Frith, 1991· Attwood, 2009). Τρεις θεωρίες δικαιολογούν τις δυσκολίες του συνδρόμου. Η Θεωρία του Νου, όπου η έλλειψή της φαίνεται να δημιουργεί δυσκολία στην ενσυναίσθηση, η αδύναμη Κεντρική Συνοχή που έχει ως αποτέλεσμα δυσκολία στην επεξεργασία πληροφοριών, στην οργάνωση της σκέψης καθώς και στην αντίληψη και κατανόηση της συνολικής εικόνας και η διαταραχή της Επιτελικής Λειτουργικότητας (δηλαδή της ικανότητας να εφαρμόζει κάποιος μια κατάλληλη στρατηγική επίλυσης προβλημάτων, για να πετύχει έναν σκοπό) που δημιουργεί δυσκολίες στην επίλυση προβλήματος καθώς και στη διαχείριση νέων

καταστάσεων (Baron-Cohen, Leslie & Frith, 1985· Cumine, Leach & Stevenson, 2000· Attwood, 2009).

Σύμφωνα με σχετικές έρευνες τα άτομα με ΣΑ φαίνεται να έχουν Γενικό Δείκτη Νοημοσύνης μέσα στα φυσιολογικά πλαίσια ή και μεγαλύτερο, δυσκολίες στην επιτελική λειτουργικότητα, στην επεξεργασία πληροφοριών, το σημασιολογικό και πραγματολογικό τομέα της γλώσσας, την κατανόηση αφηρημένων εννοιών (Ehlers, Nyden, Gillberg, Sandberg, Hjelmquist, & Oden, 1997· Griswold, Barnhill, Myles, Hagiwara & Simpson, 2002· Attwood, 2009), καθώς και σε μεγάλο ποσοστό ελλειμματική προσοχή και υπερβολικό άγχος (Attwood, 2009). Οι βασικότερες διαφορές που παρουσιάζουν τα άτομα με ΣΑ από τα υπόλοιπα άτομα του αυτιστικού φάσματος είναι το υψηλότερο νοητικό τους επίπεδο, η καλύτερη γλωσσική τους ανάπτυξη και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον για κοινωνική επαφή (Κάκουρος & Μανιαδάκη, 2006). Ως προς το σχολικό και γνωστικό τους προφίλ ικανοτήτων, τα άτομα με ΣΑ φαίνεται να παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες στην επίλυση προβλήματος και στη γλωσσική κριτική σκέψη (Griswold et al., 2002). Ενώ παρουσιάζουν ικανότητες στη βασική ανάγνωση και την προφορική έκφραση, εντούτοις φαίνεται να δυσκολεύονται στην κατανόηση κειμένου και την επεξεργασία ακουστικών ερεθισμάτων (Griswold et al., 2002· Attwood, 2005, 2009). Εστιάζουν στη λεπτομέρεια και αδυνατούν να «δουν το σύνολο» (Ehlers et al., 1997). Βασίζονται στις οπτικές πληροφορίες και απεικονίσεις για την ενσωμάτωση της προϋπάρχουσας γνώσης και την κατανόηση εννοιών (Griswold et al., 2002· Attwood, 2005, 2009).

Η μαθηματική ικανότητα των ατόμων με ΣΑ παρουσιάζεται μέσα από λιγοστές έρευνες, που στηρίζονται σε ψυχομετρικά τεστ σχολικών και γνωστικών ικανοτήτων (WISC, WIAT, TOPS-E, WRAT). Οι μελέτες αυτές έδειξαν ότι τα άτομα με ΣΑ έχουν μέσου όρου μαθηματική επίδοση και παρουσιάζουν δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων (Griswold et al., 2002· Chiang & Lin, 2007). Σχεδόν τα μισά παιδιά παρουσιάζουν ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά (Reizel & Szatmari, 2003) και ιδιαίτερα στις αριθμητικές πράξεις (Griswold et al., 2002). Αντιμετωπίζουν ακόμα δυσκολία με την εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης σε καθημερινές καταστάσεις και με διαδικασίες όπως η εκτίμηση (Jordan, 2003). Σύμφωνα με τον Attwood (2009) τα παιδιά με ΣΑ έχουν το «δικό τους τρόπο» σκέψης στην επίλυση προβλημάτων, που μπορεί να είναι ευκολότερος από τους συμβατικούς για τα άτομα αυτά. Η μεγαλύτερη αδυναμία των ατόμων αυτών στην επίλυση προβλήματος φαίνεται να είναι οι αναγνωστικές τους δυσκολίες (Attwood, 2005, 2009). Οι αδυναμίες τους στον υπολογισμό αριθμητικών πράξεων, αλλά και της ορθής επιλογής των πράξεων που δίνουν λύση στο πρόβλημα, μπορεί να οφείλονται στις ελλείψεις τους στον πραγματολογικό και σημασιολογικό τομέα της γλώσσας καθώς και στις δυσκολίες τους στην επεξεργασία πληροφοριών (Cumine et al., 2000· Griswold et al., 2002). Κάποιοι μαθητές με ΣΑ αδυνατούν να εκφράσουν προφορικά τον τρόπο σκέψης που τους οδήγησε στη λύση (Asperger, 1944· Attwood, 2009).

Ένα επίσης σημαντικό πρόβλημα των ατόμων με ΣΑ στα μαθηματικά είναι η αδυναμία γενίκευσης των διαδικασιών σε άλλα πλαίσια. Αδυνατούν να εφαρμόσουν τη μαθηματική γνώση σε καθημερινές καταστάσεις (Jordan, 2003) λόγω ελλείψεων στη Θεωρία του Νου και στην επιτελική λειτουργικότητα (Attwood, 2005).

Η παρούσα εργασία εντάσσεται στο πλαίσιο μιας ευρύτερης έρευνας που αποσκοπεί στη διερεύνηση των τρόπων λύσεων που αναπτύσσουν τα παιδιά με ΣΑ όταν διαχειρίζονται πολλαπλασιαστικά έργα, καθώς υπάρχει έλλειψη συστηματικών ερευνητικών εργασιών για την πολλαπλασιαστική αντίληψη των παιδιών με ΣΑ. Ειδικότερα επιχειρούμε να μελετήσουμε ποιους τρόπους λύσεων αναπτύσσουν τα παιδιά με ΣΑ, ηλικίας 9-10 ετών, όταν διαχειρίζονται πολλαπλασιαστικά έργα με διαφορετικές αναπαραστάσεις του πολλαπλασιασμού. Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η διερεύνηση της πολλαπλασιαστικής σκέψης των παιδιών με ΣΑ μέσα από λεκτικά προβλήματα.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

2.1. Η προβληματική και τα ερωτήματα της παρούσας έρευνας

Η αυτοτελής αξία και σημασία του πολλαπλασιασμού είναι ουσιαστική στην ανάπτυξη της μαθηματικής αντίληψης. Σύμφωνα με πρόσφατες έρευνες η επίδοση των παιδιών στον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό είναι σημαντική πρόβλεψη της μαθηματικής τους επίδοσης (Bryant & Nunes, 2009). Ο πολλαπλασιαστικός συλλογισμός διαφέρει από τον προσθετικό γιατί δεν εμπλέκει μόνο τις πράξεις της ένωσης και του διαχωρισμού, αλλά ποικίλα είδη συλλογισμών (Ζαχάρος, 2007). Ένα σημαντικό στοιχείο στην ανάπτυξη πολλαπλασιαστικής συλλογιστικής είναι ο μαθητής να δημιουργεί «σύνθετες» μονάδες, τις οποίες να μπορεί να τις αξιοποιεί ως «υλικό» σε άλλες νοητικές ενέργειες (Steffe, 1988), όπως π.χ. την κατασκευή σχέσης μερών-όλου μεταξύ δύο διαφορετικών επαναλαμβανόμενων μονάδων (π.χ. αν γνωρίζει το 7 x 6, να μπορεί να βρει το 7 x 7 ως εφτά φορές το 6 και εφτά φορές το 1) (Μπούφη, 1996: 267).

Με βάση τις παραπάνω επισημάνσεις, τα ερωτήματά μας, για την ευρύτερη έρευνα του διδακτορικού, στην οποία εντάσσεται και η παρούσα, διαμορφώθηκαν ως εξής:

Ποιους τρόπους λύσης αναπτύσσουν τα παιδιά με ΣΑ για τον υπολογισμό γινομένων σε ασύμμετρες πολλαπλασιαστικές καταστάσεις ίσων ομάδων όταν αυτές αναπαριστώνται με: α) χειραπτικό υλικό; β) εικονικές αναπαραστάσεις; γ) λεκτικές αναφορές;

- Ποιους τρόπους λύσης αναπτύσσουν τα παιδιά με ΣΑ για τον υπολογισμό γινομένων που παρουσιάζονται αριθμητικά;

➢ Ποιες από τις παραπάνω αναπαραστάσεις ασύμμετρων πολλαπλασιαστικών καταστάσεων είναι πιο πρόσφορες για παιδιά με ΣΑ προκειμένου: α) να αναπτύσσουν αυθόρμητα στρατηγικές γινομένων; β) να κατανοούν τη σχέση μερών-όλου μεταξύ δύο διαφορετικών επαναλαμβανόμενων μονάδων;

2.2. Ο σχεδιασμός και η πραγματοποίηση της έρευνας

Για το σχεδιασμό και την πραγματοποίηση της έρευνας στηριχτήκαμε σε ποιοτικές μεθόδους και τεχνικές. Λόγω της μεγάλης ετερογένειας των ατόμων με ΣΑ, η έρευνά μας εστίασε στη μελέτη πολλαπλών περιπτώσεων (multiple-case studies) και χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της ημιδομημένης συνέντευξης. Οι μαθητές που πήραν μέρος στην έρευνα διαχειρίστηκαν τα πολλαπλασιαστικά έργα ατομικά και οι τρόποι λύσεων και οι στρατηγικές γινομένων που ανέπτυξαν κατά τον υπολογισμό γινομένων αναλύθηκαν με το μοντέλο της εννοιολογικής και διαδικαστικής ανάλυσης. Η έρευνα διενεργήθηκε το πρώτο τετράμηνο του 2012 σε τέσσερα παιδιά με ΣΑ, διαγνωσμένα από ιατροπαιδαγωγικά κέντρα.

Χρησιμοποιήσαμε τις παρακάτω κατηγορίες και υποκατηγορίες πολλαπλασιαστικών έργων και σχεδιάσαμε αντίστοιχα έργα σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών (NCTM, 2000· Steffe, 1988· Angileri, 1989· Mulligan, 1992· Bryant & Nunes, 2009· Kafoussi, Skoumpourdi & Kalabassis, 2003· Μπούφη, 1996· Τάτσης & Σκουμπουρδή, 2009): *Χειραπτικό Υλικό* (ΧΥ), *Εικονικές Αναπαραστάσεις* (ΕΑ), *Λεκτικά Προβλήματα* (ΛΠ), *Αριθμητικούς Υπολογισμούς* (ΑΥ). Τα έργα ΛΠ αντιστοιχούσαν στα έργα ΕΑ.

Κάθε έργο δόθηκε σε τρεις φάσεις, για να ερευνηθεί αν τα υποκείμενα κατέχουν τις επαναλαμβανόμενες μονάδες και αν τις αξιοποιούν για την κατανόηση της σχέσης μερών-όλου μεταξύ δύο διαφορετικών επαναλαμβανόμενων μονάδων.

- Στην πρώτη φάση (π.χ. έργο 1) δόθηκε ως γινόμενο της μορφής α x β, όπου α και β πολλαπλασιαστής και πολλαπλασιαστέος αντίστοιχα.
- Στη δεύτερη φάση (π.χ. έργο 1α) δόθηκε ως γινόμενο της μορφής (α+1) x β, ώστε το αποτέλεσμα να μπορεί να προκύπτει βάση της γνώσης του α x β (*στρατηγική του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστή*).
- Στην τρίτη φάση (π.χ. έργο 1β) δόθηκε ως γινόμενο της μορφής (α+1) x (β+1), ώστε το αποτέλεσμα να μπορεί να προκύπτει βάση της γνώσης του (α+1) x β, και να διερευνήσουμε τη δυνατότητα της αξιοποίησής του για την κατανόηση της σχέσης μερών-όλου (*στρατηγική του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστέο*).

Όλες οι συναντήσεις (εφτά στο σύνολο, η καθεμιά είχε διάρκεια περίπου 30 λεπτά) με τα υποκείμενα της έρευνας πραγματοποιήθηκαν στον ιδιαίτερο χώρο του σπιτιού τους και βιντεοσκοπήθηκαν, έπειτα από τη σύμφωνη γνώμη των γονέων τους. Προηγήθηκε μία συνάντηση με τα υποκείμενα ΣΑ κατά την οποία πήραμε

ημιδομημένες συνεντεύξεις από τους γονείς τους, για να μελετήσουμε καλύτερα τα υποκείμενα.

Καθώς η παρούσα εργασία παρουσιάζει μόνο την κατηγορία των Λεκτικών Προβλημάτων παραθέτουμε τα προβλήματα που χορηγήθηκαν σε μία συνάντηση στην έρευνα και μόνο στην πρώτη φάση τους:

1) Η τετάρτη τάξη ενός σχολείου παρακολούθησε μια παιδική παράσταση σε ένα θέατρο. Στην αίθουσα του θεάτρου υπήρχαν 7 σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά είχε 17 καθίσματα. Μπορείς να βρεις πόσα καθίσματα υπήρχαν στο θέατρο;

2) Στην αίθουσα φαγητού ενός ολοήμερου σχολείου υπάρχουν 5 τραπέζια των δεκαπέντε ατόμων το καθένα. Πόσα άτομα γεμίζουν τα τραπέζια αυτά;

3) Ένα τρένο έχει 14 βαγόνια. Αν υπάρχουν έξι ίδια τρένα πόσα βαγόνια έχουν όλα;

Το τελευταίο πρόβλημα σχεδιάστηκε σε σχέση με τα ιδιαίτερα ενδιαφέροντα των υποκειμένων ΣΑ. Επειδή κάθε έργο δόθηκε στις τρεις φάσεις, συνολικά δόθηκαν εννιά έργα.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Συγκριτική ανάλυση Α1 – Α2 – Α3 – Α4

Οι πίνακες 1 και 2 παρουσιάζουν αντίστοιχα την εννοιολογική και διαδικαστική σύγκριση των υποκειμένων με ΣΑ στα ΛΠ. Στους πίνακες αυτούς οι λόγοι δείχνουν το πλήθος των έργων στα οποία γίνονται οι συγκεκριμένες ενέργειες προς το σύνολο των έργων.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ	**ΣΥΝΟΛΟ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ ΤΩΝ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΩΝ**			
Επιλογή πράξης	**Α1**	**Α2**	**Α3**	**Α4**
Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση	0/9	0/9	0/9	0/9
Πολλαπλασιασμός	1/9	3/9	9/9	9/9
Πρόσθεση	3/9	6/9	0/9	1/9
Σύγχυση πολλαπλασιασμού - πρόσθεσης	3/9	1/9	0/9	4/9*

*που γίνεται περισσότερο ως προς το σύμβολο ή ως προς τον αλγόριθμο

Πίνακας 1. Εννοιολογική σύγκριση (Α1 - Α2 - Α3 - Α4)

Τα περισσότερα υποκείμενα ΣΑ (Α2, Α3, Α4) επέλεξαν την πράξη του πολλαπλασιασμού και στα τρία έργα ΛΠ κάτι που δείχνει ότι η αυτή η κατηγορία έργων τους διευκόλυνε να αναπτύξουν πολλαπλασιαστικό συλλογισμό και όπως

φάνηκε όλα τα υποκείμενα βοηθήθηκαν από τα αντίστοιχα έργα ΕΑ για την επιλογή αυτή.

Παρόλα αυτά τα υποκείμενα αυτά φάνηκε να δυσκολεύονται στην κατανόηση των ΛΠ (με εξαίρεση τον Α2). Το υποκείμενο που φάνηκε ότι είχε μεγαλύτερο πρόβλημα κατανόησης και μεγαλύτερη δυσκολία με τα ΛΠ είναι ο Α1 ο οποίος δεν πρότεινε την πράξη του πολλαπλασιασμού σε κανένα πρόβλημα ή άλλο τρόπο (π.χ. αρίθμηση ανά ένα για να βρει τη λύση) εκτός από το 3^{ο} έργο που εντάσσεται στα ενδιαφέροντά του, στο οποίο έκανε αρίθμηση ανά ένα.

39 Ερευνητής: Τι θα κάνεις να το βρεις;

40 Α1: Αυτά είναι 14 (πρώτη ομάδα αντικειμένων)…15, 16, 17…84 είναι όλα.

Δήλωσε μάλιστα στο έργο 1 (και στις τρεις φάσεις) λανθασμένα την πράξη της πρόσθεσης (με τους δύο παράγοντες), κάτι που έκανε στο ίδιο έργο και ο Α4 (στην πρώτη φάση), δείχνοντας να έχουν εννοιολογική σύγχυση πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης.

9 Ερευνητής: Μπερδεύτηκες, γιατί; Γιατί δεν είναι πολλαπλασιασμός και είναι πρόσθεση;

10 Α1: Είναι…θέλουμε να προσθέσουμε τις 7 σειρές και τα 17 καθίσματα.

Ίσως μπερδεύτηκαν από τη λεκτική αναφορά «και» που υπήρχε στο πρόβλημα και έδωσαν απλά μια πράξη με τους δοθέντες αριθμούς χωρίς να έχουν κατανοήσει το πρόβλημα και κυρίως την πρόταση που δείχνει τη σχέση των μεταβλητών (ο Α4 μάλιστα δήλωσε ότι τον μπερδεύει και δε θέλει ούτε να τη διαβάσει).

18 Α4: 7 συν 17

19 Ερευνητής: Πώς το κατάλαβες αυτό;

20 Α4: Απλώς είδα τα νούμερα.

Κάποια υποκείμενα χρησιμοποίησαν στρατηγικές για την επιλογή πράξης (όπως λέξεις «κλειδιά»), που τους βοήθησαν.

14 Α3: 7 επί 17. Το κατάλαβα γιατί έχει κάποιες λέξεις κλειδιά…που λέει ότι είχε 7 σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά είχε 17 καθίσματα.

15 Ερευνητής: Ποιες ήταν οι λέξεις κλειδιά για σένα;

16 Α3: Ε! οι «σειρές» και το «υπήρχαν».

Πρόσθεση δήλωσε και στα τρία έργα ο Α2, για να εφαρμόσει τις στρατηγικές του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέο (στη δεύτερη και τρίτη φάση). Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση δε δήλωσε κανένα υποκείμενο και φαίνεται ότι έπαιξε ρόλο η μη οπτική αναπαράσταση του πολλαπλασιασμού (σε έργα ΕΑ είχαν χρησιμοποιήσει).

ΕΝΕΡΓΕΙΑ	ΣΥΝΟΛΟ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ ΤΩΝ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΩΝ			
Άμεση μοντελοποίηση (χρήση δαχτύλων, μετρητών)	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**
Αρίθμηση ανά ένα (counting all)	3/9	0/9	3/9*	0/9
Αρίθμηση ανά ένα από 2η ή 3η ομάδα αντικειμένων	1/9	0/9	0/9	0/9
Σχεδίαση εικόνων - σχεδίων	7/9	1/9	3/9	0/9
Γινόμενα του 10	0/9	0/9	0/9	0/9
Πολλαπλασιαστικός υπολογισμός (αλγόριθμος)	0/9	4/9	9/9	9/9
Προσθετικός υπολογισμός	3/9	6/9	0/9	0/9
Στρατηγική του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστή (α x β) + β	1/3	3/3	0/3	0/3
Στρατηγική του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστέο (α + 1) x β + (α + 1)	1/3	3/3	0/3	0/3
Επιμονή σε λάθος	6/9	0/9	0/9	0/9

*που γίνεται για να βρει πολλαπλασιαστικό δεδομένο

Το πλήθος των έργων είναι σε όλες τις ενέργειες εννιά (9) εκτός από τις στρατηγικές του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέο, που παρουσιάζονται μόνο σε μια φάση (2η και 3η αντίστοιχα) και έτσι για τις ενέργειες αυτές το πλήθος των έργων είναι τρία (3).

Πίνακας 2.Διαδικαστική σύγκριση (A1 - A2 – A3 – A4)

Δύο υποκείμενα ΣΑ (A1, A3) σχεδίασαν εικόνες, για να μπορέσουν να χρησιμοποιήσουν αρίθμηση ανά ένα. Ο A1 σχεδίασε σχεδόν σε όλα τα έργα, κάνοντας σωστή σχεδίαση των δεδομένων όμως μόνο στο 3ο έργο των ενδιαφερόντων του. Η A3 σχεδίασε σε 3 από τα 9 έργα για την εύρεση λύσης.

Κανένα υποκείμενο δε χρησιμοποίησε στρατηγική γινομένων του 10, αλλά τα περισσότερα (εκτός του A1) χρησιμοποίησαν άλλες στρατηγικές γινομένων για την εκτέλεση των πράξεων (κυρίως γνωστά γινόμενα και στρατηγική του ένα περισσότερο), οι οποίες δε φάνηκε να είναι αυτοματοποιημένες ούτε να γίνεται χρήση γνώσης που είχε αποκτηθεί πρόσφατα και περισσότερο γινόταν τυχαία με δεδομένα που είχαν εύκολα απομνημονεύσει ή με δεδομένα που έβρισκαν λέγοντας εσωτερικά την προπαίδεια ως εκεί που γνώριζαν όπως π.χ. η A3 στο έργο 1 α που ενώ μόλις στο προηγούμενο έργο είχε βρει πόσο κάνει 7 επί 7 δεν το χρησιμοποίησε:

5 Ερευνητής. Το 7 φορές το 8 το θυμήθηκες ή το βρήκες με κάποιο τρόπο από μέσα σου;

6 Α3. Από μέσα μου… γιατί είχα κάνει και λίγο πιο κάτω την προπαίδεια….είπα πέντε οχτώ 40…έξι επί οχτώ ίσον 48 και μετά είπα…πρόσθεσα και τα άλλα 8 και βρήκα 56.

Επίσης, τρία υποκείμενα (Α2, Α3, Α4) χρησιμοποίησαν πολλαπλασιαστικό υπολογισμό με αλγόριθμο. Τα δύο από αυτά (Α3, Α4) φάνηκε όμως να έχουν μια μηχανιστική αντίληψη του αλγόριθμου αφού κάποιες φορές τον συνέχεαν με της πρόσθεσης ή δεν εκτελούσαν όλα τα βήματα και δυσκολεύονταν με πολλαπλασιαστικά δεδομένα (δεν τα είχαν αυτοματοποιήσει).

15 Ερευνητής: Πώς το βρήκες το 14 επί 7; Τι έκανες;

16 Α4: Εφτά η τέσσερις 28…εφτά συν ένα επί 7…ίσον 7…εβδομήντα οχτώ ήταν (είχε βρει πριν 88).

17 Ερευνητής: Εβδομήντα οχτώ είναι;

18 Α4: Ναι, είχα κάνει πρόσθεση εδώ…(δείχνει τον πολλαπλασιαστή 7 και το 1 από τις δεκάδες του πολλαπλασιαστέου).

Ο Α1 βασίστηκε σε αρίθμηση ανά ένα για την εξεύρεση λύσεων μόνο στο πρόβλημα των ενδιαφερόντων του και στις τρεις φάσεις (αριθμητικές μονάδες).

7 Ερευνητής. Πόσα βαγόνια τώρα είναι όλα;

8 Α1. (χωρίς να απαντήσει μετρά ψιθυριστά τα νέα βαγόνια ανά ένα από το 84 που σταμάτησε πριν) 85, 86, 87…..98. Όλα μαζί είναι ενενήντα οχτώ.

Μόνο ο Α2 χρησιμοποίησε τις στρατηγικές του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέο σε όλα τα έργα και ο Α1 μόνο στο έργο ενδιαφερόντων του στο οποίο είχε κάνει και κατάλληλη σχεδίαση. Κανένα υποκείμενο δεν επέμεινε σε λάθος, εκτός από τον Α1, που επέμεινε στα δύο πρώτα προβλήματα και όχι σε αυτό των ενδιαφερόντων του.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων των έργων της υποκατηγορίας αυτής της αναπαράστασης του πολλαπλασιασμού, με Λεκτικά Προβλήματα, έδειξε ότι τα περισσότερα υποκείμενα ΣΑ (3 στα 4) ανέπτυξαν τρόπους λύσης που αναδεικνύουν πολλαπλασιαστική σκέψη με κάποιες ωστόσο δυσκολίες. Υπήρχε επίσης διαφοροποίηση ως προς τις διαδικασίες επίλυσης μεταξύ των υποκειμένων.

Δύο υποκείμενα είχαν ανάγκη να οπτικοποιήσουν τα δεδομένα μέσω δικών τους σχεδίων, για να μπορέσουν να επιλύσουν το πρόβλημα. Φάνηκε επίσης ότι η κατηγορία αυτή δε διευκολύνει τα παιδιά να εκφράσουν αυθόρμητα τις στρατηγικές του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέο που ίσως φανερώνει ότι η κατηγορία των ΛΠ δεν τα βοηθά να αναπτύσσουν στρατηγικές γινομένου και να κατανοούν τη σχέση μερών όλου. Διευκολύνονται όμως αν το έργο εντάσσεται στα ενδιαφέροντά τους.

Παρατηρήσαμε επίσης ότι οι εξηγήσεις τους δεν περιλάμβαναν μαθηματικούς όρους και ήταν δυσνόητες για τους συνομιλητές τους λόγω ίσως έλλειψης στη Θεωρία του Νου. Σε περιπτώσεις όμως που ο ερευνητής επέμενε να του δώσουν καλύτερη εξήγηση συνήθως το έκαναν. Κάποια υποκείμενα (Α1, Α4) όταν διάβαζαν μόνα τους, λόγω των αναγνωστικών δυσκολιών δυσκολευόταν να κατανοήσουν, ενώ όταν τους διάβαζε ο ερευνητής κατανοούσαν πολύ καλύτερα και δεν αγχωνόταν. Παρατηρήσαμε ακόμα ότι τα περισσότερα υποκείμενα (Α1, Α2, Α3) έκαναν αναγωγή στα αντίστοιχα έργα ΕΑ, για να μπορέσουν να κατανοήσουν.

Στην κατηγορία αυτή τα παιδιά με ΣΑ χρειάστηκαν αρκετό χρόνο για να εφαρμόσουν τους δικούς τους μη συμβατικούς τρόπους λύσης, για να σκεφτούν και να κατανοήσουν.

Από τα παραπάνω φαίνεται να είναι ίσως πρόσφορη η παροχή λεκτικών προβλημάτων, από τον εκπαιδευτικό της τάξης, σε παιδιά με ΣΑ, που θα αντιστοιχούν στα ενδιαφέροντά τους. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να δίνει την ευκαιρία στους μαθητές με ΣΑ να αναπτύσσουν τους δικούς τους τρόπους λύσης (σχεδίαση εικόνων, χρήση μετρητών). Όταν εντοπίζει παιδιά με ΣΑ, που έχουν δυσκολίες αναγνωστικής κατανόησης, να διερευνά αν τα άτομα αυτά έχουν κατανοήσει τα ιδιαίτερα μηνύματα που μεταφέρουν οι εκφωνήσεις των προβλημάτων, όπως π.χ. η σχέση μεταξύ των μεταβλητών στις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, και να φροντίζει να τα καταστήσει κατανοητά. Χρειάζεται ακόμα να τους επιτρέπει περισσότερο χρόνο σκέψης, από ότι στα τυπικά παιδιά, λόγω δυσκολίας τους στην επεξεργασία πληροφοριών.

Οι εκπαιδευτικοί φορείς της χώρας μπορούν ίσως να εντάξουν τέτοιου είδους έργα είτε μέσα σε ξεχωριστά εγχειρίδια με ειδικές μεθόδους διδασκαλίας σχεδιασμένα για μαθητές με ΣΑ, και ευρύτερα όσων ανήκουν στο αυτιστικό φάσμα, είτε μέσα σε νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών βοηθώντας τους μαθητές αυτούς να ενταχτούν αρμονικά στην τυπική εκπαίδευση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

American Psychiatric Association. (1994). *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders* (4th ed.). Washington, D.C.: American Psychiatric Association.

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children`s understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 367-385.

Asperger, H. (1944). Autistic Psychopathy in childhood. In U. Frith. (1999), *Autism and Asperger Syndrome.* UK: Cambridge University Press.

Attwood, T. (2005). *Παιδιά με ιδιαιτερότητες στη γλωσσική ανάπτυξη και την κοινωνική αλληλεπίδραση, Σύνδρομο Asperger: Οδηγός ανίχνευσης και αντιμετώπισης*. Αθήνα: Σαββάλας.

Attwood, T, (2009). *Ένας Πλήρης Οδηγός*. Β. Παπαγεωργίου (Επιμ.). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Baron-Cohen, S., Leslie, A. M., & Frith, U. (1985). Does the autistic child have "theory of mind"?, *Cognition*, *21*, *37-46.*

Bryant, P., & Nunes, T. (2009). Multiplicative reasoning and mathematics achievement. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 2 (pp. 217-224). Thessaloniki, Greece: PME.

Chiang, H., & Lin, Y. (2007). Mathematical ability of students with Asperger syndrome and high-function autism: A review of literature. *Autism*, *11*(6), 547-556.

Cumine, V., Leach, J., & Stevenson, G. (2000). *Σύνδρομο Asperger, Ένας πρακτικός οδηγός για δασκάλους*. Αθήνα: Ελληνική Εταιρεία Προστασίας Αυτιστικών Ατόμων.

Ehlers, S., Nyden, A., Gillberg, C., Sandberg, A.D., Hjelmquist, E., & Oden, A. (1997). Asperger Syndrome, Autism and Attention Disorders: A Comparative Study of the Cognitive Profiles of 120 Children. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *38*(2), 207-217.

Frith, U. (1991). Asperger and his syndrome. In U. Frith (ed), *Autism and Asperger Syndrome* (pp. 1-35). Cambridge: Cambridge University Press.

Griswold, D. E., Barnhill, G. P., Myles, B. S., Hagiwara, T., & Simpson, R. L. (2002). Asperger Syndrome and Academic Achievement. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, *17*(2), 94-102.

Jordan, R. (2003). School-Based Intervention for Children with Specific Learning Difficulties. In M. Prior (Ed.), *Learning and Behavior Problems in Asperger Syndrome* (pp. 212-243). NY: The Guilford Press.

Kafoussi, S., Skoumpourdi, C., & Kalabassis, F. (2003). An analysis of Greek school textbooks' pictorial representations about multiplication. *Proceedings of CIEAEM 55, The use of didactic materials for developing pupils mathematical activities*. Poland.

Mulligan, J. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal*, *4*(1), 24-41.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reaston, VA: Author.

Reitzel, J., & Szatmari, P. (2003). Cognitive and Academic Problems. In M. Prior (Ed.), *Learning and Behavior Problems in Asperger Syndrome* (pp. 35 – 54). NY: The Guilford Press.

Steffe, L. (1988). Children` s Construction of Number Sequences and Multiplying Schemes. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Vol. 2 (pp. 119 – 140). USA: LEA, NCTM.

Wing, L. (1981). Asperger's syndrome: A clinical account. *Psychological Medicine*, 11(1), 115-129.

Ζαχάρος, Κ. (2007). Οι μαθηματικές έννοιες στην Προσχολική εκπαίδευση και η διδασκαλία τους. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Κάκουρος, Ε., & Μανιαδάκη, Κ. (2006). *Ψυχοπαθολογία παιδιών και εφήβων: Αναπτυξιακή προσέγγιση*. Αθήνα: Τυπωθήτω.

Μπούφη, Α. (1996). Η πολλαπλασιαστική σκέψη του παιδιού ως βάση της διδασκαλίας. *Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. Αθήνα, 261-276.

Τάτσης, Κ., & Σκουμπουρδή, Χ. (2009). Μελέτη του Πλαισίου των Δραστηριοτήτων του Σχολικού Εγχειριδίου των Μαθηματικών της Α΄ Δημοτικού. *Πρακτικά 3ου συνεδρίου Εν.Ε.Δι.Μ.*, Ρόδος, 383-392.

Η ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΜΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΡΑΣΗΣ

Παπαδάκη Χρύσα

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

chrissapap88@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε κάποια από τα αποτελέσματα μιας έρευνας που έγινε, στα πλαίσια της διπλωματικής μου εργασίας, που στόχο είχε να εξετάσει τις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων με αντικείμενο το πέρασμα από τη γεωμετρία του επιπέδου σε αυτή του χώρου, καθώς και τη σχέση αυτών με τις έννοιες οπτικοποίηση, απτική αντίληψη, χειρονομίες και γλώσσα. Πραγματοποιήθηκε πειραματική διδασκαλία σε ένα σχολείο για μαθητές με προβλήματα όρασης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές αναπτύσσουν τρόπους συλλογισμού, οι οποίοι διαμορφώνονται επηρεαζόμενοι από τις παραπάνω έννοιες.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Γεωμετρία αποτελεί για τους περισσότερους μαθητές στο σχολείο τον «πονοκέφαλο» των μαθημάτων. Οι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών εδώ και αρκετά χρόνια ασχολούνται με τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των μαθητών (Van Hieles, 1986; Gutierrez, Jaime & Fortuny, 1991) και τις διαδικασίες που ακολουθούν οι μαθητές στη Γεωμετρία. Αν όμως η γεωμετρία αποτελεί ένα από τα πιο απαιτητικά μαθήματα για τους «mainstream» μαθητές, πώς ανταπεξέρχεται στις απαιτήσεις της, η οποία πέραν των μαθηματικών απαιτεί και ικανότητες οπτικοποίησης και χωρικής αντίληψης, ένας μαθητής που δεν έχει την πολυτέλεια της όρασης; Τέτοιου είδους ερωτήματα και προβληματισμοί μας οδήγησαν στο να ασχοληθούμε με τα ζητήματα αυτά και να κάνουμε μία έρευνα με στόχο να δούμε πώς οι μαθητές με προβλήματα όρασης αλληλεπιδρούν με το αντικείμενο της γεωμετρίας και τι στρατηγικές αναπτύσσουν κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων που συνδέουν τη γεωμετρία του επιπέδου με αυτή του χώρου.

Βασικές έννοιες γύρω από τις οποίες θα εξετάσουμε τις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές είναι: η οπτικοποίηση, οι χειρονομίες και η γλώσσα που χρησιμοποιούν για να περιγράψουν ένα γεωμετρικό αντικείμενο καθώς και η απτική αντίληψη. Υπό το πρίσμα αυτών των εννοιών θα παρατηρήσουμε τους τρόπους συλλογισμού που αναπτύσσουν οι μαθητές κατά το πέρασμα τους από τη γεωμετρία του επιπέδου στη γεωμετρία του χώρου, μέσα από δύο δραστηριότητες.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Οι βασικότερες θεωρίες στην εξέλιξη του γεωμετρικού συλλογισμού

Οι ερευνητές που ασχολήθηκαν με το γεωμετρικό συλλογισμό είναι πολλοί και στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε τις βασικότερες θεωρίες για την εξέλιξη του γεωμετρικού συλλογισμού, αλλά και άλλες έννοιες που συνδέονται με αυτόν, όπως αυτή της χρήσης μεταφορών και παρομοιώσεων. Στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών και ιδίως όσον αφορά τη Γεωμετρία, έχει γίνει πολύ έρευνα αναφορικά με τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Ο Ολλανδός μαθηματικός van Hiele είχε προτείνει μία αρκετά ακριβή περιγραφή της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών (van Hiele, 1986) μέσα από πέντε επίπεδα, τα οποία παρουσιάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές σκέφτονται για τα σχήματα και άλλες γεωμετρικές ιδέες. Οι Gutierrez, Jaime και Fortuny (1991), επέκτειναν τα επίπεδα van Hieles για την περίπτωση των τρισδιάστατων σχημάτων, ενώ στη συνέχεια, ο Gutierrez (1992) επέκτεινε κι άλλο τα επίπεδα αυτά, εξετάζοντας τα και από τη σκοπιά της οπτικοποίησης. Μία ακόμη σημαντική συνεισφορά στην έρευνα αναφορικά με τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών είναι η ερευνητική δουλειά του Duval. Ο Duval (2011) τονίζει ότι όταν εποπτεύουμε ένα σχήμα από μαθηματική σκοπιά θα πρέπει να προσδιορίζουμε τις σχηματικές μονάδες (figural units) του σχήματος, ανάλογα με τις διαστάσεις του: 0D/2D, 1D/2D, 2D/2D, 3D/2D, 1D/3D, 2D/3D κ.λπ. Αυτό μπορεί να μας βοηθήσει να βλέπουμε το ίδιο σχήμα ως μία σύνθεση διαφορετικών κάθε φορά σχηματικών μονάδων. Με τον τρόπο αυτό θα μπορούμε να διαλέγουμε κάθε φορά τη σύνθεση εκείνη που μας είναι χρήσιμη για την επίλυση του εκάστοτε προβλήματος.

2.2 Παρομοιώσεις, Απτική αντίληψη, Χειρονομίες και Γεωμετρία

Πολλές φορές οι τυφλοί μαθητές χρησιμοποιούν κατά τη διάρκεια μιας εκπαιδευτικής διαδικασίας φράσεις όπως: «Το βλέπω» ή «Δεν το βλέπω ακόμη», που στην ουσία είναι λεκτικές αποδόσεις της απτικής τους εμπειρίας. Επιπλέον, η καθημερινότητα έχει μεγάλη επιρροή στο λεξιλόγιο των μαθητών με προβλήματα όρασης, και σε αυτή οφείλεται πολλές φορές η δυσκολία τους να περιγράψουν αυτά που κατανοούν με τους τυπικούς όρους της γεωμετρίας.

Όσον αφορά την απτική εξερεύνηση, αυτή μας παρέχει πρόσβαση σε χωρικές λεπτομέρειες που δε θα ήταν εύκολο να παρατηρήσουμε με κάποιον άλλο τρόπο, αφού συνεπάγεται στην ουσία τη μετάφραση ενός απτικού ερεθίσματος σε μία νοητική αναπαράσταση, χωρίς καν την ύπαρξη οπτικού ερεθίσματος. Όταν εξερευνούμε ένα αντικείμενο με την αφή απαιτείται να γίνει μία σειρά βημάτων ώστε να αναγνωρίσουμε το σχήμα του. Αρχικά αναγνωρίζονται τα βασικά χαρακτηριστικά του ενώ στη συνέχεια αρχίζει η λεπτομερής εξερεύνηση του, με βάση κάποιες

στρατηγικές που φανερώνουν σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες του. Για τους μαθητές με προβλήματα όρασης η απτική διερεύνηση των σχημάτων αποτελεί την όραση τους, τον τρόπο με τον οποίο εκείνοι μπορούν να «δουν» τα σχήματα. Σύμφωνα με τους Williams (1983) και Millar (1981), οι τυφλοί μαθητές εξερευνούν ένα αντικείμενο με τέτοιο τρόπο που τους παρέχει μία συνολική οπτική για αυτό, με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε πιο ακριβή νοητική αναπαράσταση του σχήματος του. Κατά τον Triantafillidis (1995), υπάρχει μία σχέση μεταξύ των στρατηγικών που επιλέγει ένας μαθητής να χρησιμοποιήσει και του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης του (επίπεδα van Hieles). Συνεπώς, η όραση δεν είναι η μόνη πηγή νοητικών εικόνων στα μαθηματικά. Το να «νιώσουμε» με τα χέρια μας κάποια φυσικά αντικείμενα, χωρίς να τα βλέπουμε, είναι επίσης μία πηγή πλούσιας παραγωγής νοητικών εικόνων. Τα χέρια μας όμως, δεν είναι ένα εργαλείο χρήσιμο μόνο για την ικανότητα αντίληψης των απτικών ερεθισμάτων. Μπορούν να χρησιμεύσουν και σαν διαμεσολαβητές της σκέψης μας μέσω των χειρονομιών που εκτελούν καθώς επιχειρηματολογούμε ή σκεπτόμαστε. Ο McNeil (1992) κατηγοριοποίησε τις χειρονομίες σε εικονικές, μεταφορικές, δεικτικές και παλμικές, ανάλογα με τη σημασία τους στο λόγο του ομιλητή. Οι χειρονομίες όμως που κάνει κάποιος καθώς επιχειρηματολογεί, δε μας δείχνουν απλώς τι σκέφτεται αλλά στην ουσία βοηθούν να γεννηθούν ιδέες, υποκινούν δηλαδή τη σκέψη (Radford, 2009).

2.3 Οπτικοποίηση και Γεωμετρία

Ο Gutierrez (1996) περιγράφει την οπτικοποίηση στα μαθηματικά, ως το είδος της συλλογιστικής δραστηριότητας που βασίζεται στη χρήση οπτικών ή χωρικών στοιχείων, νοητική ή με τη βοήθεια υλικών, με σκοπό την επίλυση ενός προβλήματος ή την απόδειξη ιδιοτήτων. Τι γίνεται όμως στην περίπτωση των μαθητών με προβλήματα όρασης; **Αν δε μπορείς να δεις, πώς μπορείς να οπτικοποιείς;** Το ότι κάποιος είναι τυφλός, δε σημαίνει ότι δε μπορεί και να «δει». Ο Miller (1987), αναφέρει ότι η μαθηματική οπτικοποίηση εμπλέκει και τη «διαίσθηση μέσω εικόνων που δημιουργούνται με τα μάτια του μυαλού». Όπως περιγράφηκε από τον Jackson (2002), η οπτικοποίηση μπορεί να προχωρήσει παραπέρα από την αίσθηση της όρασης, γιατί συνεπάγεται το είδος αυτό της κατανόησης που προέρχεται από τη διαίσθηση που περιέγραψε ο Miller. Για να επιτύχουμε όμως αυτό το είδος της κατανόησης, δε θα πρέπει να απομονώνουμε την οπτικοποίηση από τα υπόλοιπα μαθηματικά, αλλά να την συνδέουμε και με τους άλλους τρόπους συλλογισμού. Ο Lohman (1988) συσχετίζει άμεσα την έννοια της οπτικοποίησης με αυτή της χωρικής ικανότητας, ορίζοντας την έννοια της χωρικής οπτικοποίησης, η οποία αναφέρεται στην ικανότητα να αντιλαμβανόμαστε τις νοητικές κινήσεις αντικειμένων σε ένα τρισδιάστατο χώρο ή στο χειρισμό αντικειμένων με τη βοήθεια της φαντασίας. Σύμφωνα με τους Kospentaris et al. (2011), η διαδικασία οπτικοποίησης των μαθητών μπορεί επηρεάσει τις στρατηγικές που θα επιλέξουν σε ένα πρόβλημα στη γεωμετρία, αλλά και τον τρόπο με τον οποίο θα υλοποιήσουν αυτές τις στρατηγικές.

Είναι λοιπόν προφανές πως υπάρχει έντονη συσχέτιση μεταξύ οπτικοποίησης και διαμόρφωσης του γεωμετρικού συλλογισμού.

3. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας ήταν τα εξής:

1) Τι είδους στρατηγικές και διαδικασίες ακολουθούν οι μαθητές κατά το πέρασμα από τη γεωμετρία του επιπέδου (2D) στη γεωμετρία του χώρου (3D);

2) Ποια είναι η συμβολή των χειρονομιών, της γλώσσας (χρήση παρομοιώσεων) και της οπτικοποίησης στην επιλογή και υλοποίηση των παραπάνω διαδικασιών;

Συμμετέχοντες : Η έρευνα που παρουσιάζεται μια μονάδα υποστήριξης μαθητών με προβλήματα όρασης. Στην έρευνα συμμετείχαν πέντε μαθητές και μαθήτριες.

ΜΑΘΗΤΕΣ	Μ	Α	Β	Δ	Τ
ΦΥΛΛΟ	Αγόρι	Κορίτσι	Αγόρι	Κορίτσι	Κορίτσι
ΗΛΙΚΙΑ	18	16	19	14	17
ΤΑΞΗ - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ	Γ' Λυκείου Θετική	Γ' Γυμνασίου	Γ' Λυκείου Θετική	Α' Γυμνασίου	Β' Λυκείου Θεωρητική
ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΟΡΑΣΗΣ	Μειωμένη όραση	Τυφλή εκ γενετής	Μειωμένη όραση	Τυφλή εκ γενετής	Τυφλή εκ γενετής

Πίνακας 1 – Προφίλ μαθητών/τριών

Δραστηριότητες: Στο πλαίσιο της έρευνας δόθηκαν στους μαθητές 4 δραστηριότητες, εκ των οποίων εδώ θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε τα αποτελέσματα δύο εξ αυτών.

Διαδικασία – Στόχος της Δραστηριότητας 1 (Περιστροφή Επίπεδων Σχημάτων): Ζητούμε από τους μαθητές να σκεφτούν τι είδους στερεά θα δημιουργηθούν από την περιστροφή επίπεδων σχημάτων (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο τρίγωνο και κυκλικός δίσκος), γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα τους, που θα επιλέξουν οι ίδιοι.

Διαδικασία – Στόχος της Δραστηριότητας 2 (Αναπτύγματα Στερεών Σωμάτων): Ζητάμε από τους μαθητές να αναγνωρίσουν ένα ανάπτυγμα που τους δίνουμε. Αρχικά ασχολούμαστε με το ανάπτυγμα του κύβου, ενώ στη συνέχεια τους ζητάμε να κατασκευάσουν όσο περισσότερα διαφορετικά αναπτύγματα μπορούν, τα οποία

να δημιουργούν κύβο. Στη συνέχεια κάνουμε το ίδιο και για τα εξής στερεά: Πυραμίδα με τρίγωνη βάση, πυραμίδα με τετράγωνη βάση. Στόχος μας είναι, μέσα από τα αναπτύγματα των στερεών να δούμε πώς χειρίζονται οι μαθητές τις ιδιότητες των στερεών αυτών, αλλά και αν μπορούν να αναγνωρίζουν ένα στερεό από το ανάπτυγμα του και τις ιδιότητες του στερεού που αυτό «προδίδει» (0D/3D, 1D/3D, 2D/3D).

Από συζήτηση που έγινε με τους μαθητές πριν την έναρξη των συνεντεύξεων μάθαμε ότι οι ίδιοι έχουν γνώσεις για τα βασικά επίπεδα και στερεά σώματα καθώς και τις ιδιότητες τους, από το μάθημα της Γεωμετρίας που κάνουν στο σχολείο. Η δική μας επιδίωξη ήταν να «προκαλέσουμε» τους μαθητές να αναγνωρίσουν στερεά σώματα κατά τη δημιουργία τους, είτε μέσω της περιστροφής επίπεδων σχημάτων, είτε από τα αναπτύγματα τους.

Δεδομένα και ανάλυση: Η υλοποίηση της δραστηριότητας από τους μαθητές έγινε με μορφή συνέντευξης των 30-40 λεπτών. Ο μαθητής Μ δούλεψε μαζί με τη μαθήτρια Α (Ομάδα 1), ο μαθητής Β μόνος του και οι μαθήτριες Δ και Τ μαζί (Ομάδα 2). Τα δεδομένα μας αποτέλεσαν οι μαγνητοφωνήσεις των συζητήσεων με τους μαθητές και οι βιντεοσκοπήσεις των συνεντεύξεων.

Μετά το πέρας της διεξαγωγής της έρευνας ξεκίνησε η διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων που συλλέχθηκαν. Απομαγνητοφωνήθηκαν οι συζητήσεις με τους μαθητές, ανά ομάδα και εντοπίστηκαν τα κρίσιμα συμβάντα κάθε ομάδας τα οποία και αναλύθηκαν με βάση τις έννοιες που αναπτύχθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Τα κρίσιμα συμβάντα χαρακτηρίσθηκαν ως τέτοια με βάση τα εξής κριτήρια-αντικείμενα της έρευνας: (α) Απτική εξερεύνηση των σχημάτων και απτική αντίληψη των μαθητών για τα σχήματα, (β) Γεωμετρική αντίληψη και χωρική σκέψη των μαθητών αναφορικά με τις δραστηριότητες που έκαναν, τα σχήματα που αυτές περιελάμβαναν και τις ιδιότητες τους, (γ) ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές φαίνεται να οπτικοποιούν τα σχήματα και τις ιδιότητες τους μέσα από την απτική εξερεύνηση και το γεωμετρικό στοχασμό, (δ) οι χειρονομίες που κάνουν οι μαθητές στην προσπάθεια να εξηγήσουν αυτό που σκέφτονται ή κάνουν ή να επιχειρηματολογήσουν για μια απάντηση τους, (ε) οι διαδικασίες συλλογισμού των μαθητών προκειμένου να πραγματοποιήσουν το πέρασμα από τις δύο στις τρεις διαστάσεις.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Δραστηριότητα 1 – Περιστροφή Επίπεδων Σχημάτων

Κατά τη διαδικασία της περιστροφής των επίπεδων σχημάτων, κάποιοι μαθητές επέλεξαν να περιστρέψουν για λίγο το σχήμα και να σταματήσουν, κάνοντας την περιστροφή του εικόνα στο μυαλό τους. Ένας άλλος μαθητής επέλεξε να περιστρέφει συνεχώς το σχήμα μέχρι να βρει το στερεό που δημιουργούνταν. Το κοινό στοιχείο σε όλες τις περιπτώσεις ήταν η απτική διερεύνηση του νοητού στερεού που

δημιουργούνταν. Όλοι οι μαθητές έπιαναν το επίπεδο σχήμα κατά την περιστροφή του, καθώς και το ίχνος που εκείνο άφηνε νοητά πάνω στο γραφείο σχηματίζοντας τη βάση του στερεού. Η κοινή συνιστώσα όλων των μαθητών/τριών ήταν ότι αναγνώριζαν τα στερεά που δημιουργούνταν προχωρώντας από το μέρος στο όλο, ξεκινώντας από τη βάση του και στη συνέχεια προχωρώντας στα υπόλοιπα τμήματα του. Ο διαφορετικός τρόπος περιστροφής του επίπεδου σχήματος όμως, και συνεπώς οπτικοποίησης και χωρικής αντίληψης της κίνησης του, σε συνδυασμό με την απτική διερεύνηση του σχηματιζόμενου στερεού, οδήγησε τους μαθητές σε διαφορετικές στρατηγικές χωρικής οπτικοποίησης του (Πίνακας 2).

ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΧΗΜΑ	**ΣΤΕΡΕΟ**	**ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ**
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο	Κύλινδρος	• Αναγνώριση της βάσης του στερεού. Στη συνέχεια, αναγνώριση ολόκληρου του στερεού από τη μορφή του αναπτύγματος του. • Άπειρα πανομοιότυπα ορθογώνια παραλληλόγραμμα σε κυκλική σειρά με κοινή πλευρά, τον άξονα περιστροφής. • Δύο οριζόντιοι κύκλοι, που ενώνονται με άπειρες κατακόρυφες γραμμές ή αλλιώς δύο οριζόντιοι κύκλοι με διαφορά ύψους.
Ορθογώνιο τρίγωνο	Κώνος	• Άπειρα πανομοιότυπα ορθογώνια τρίγωνα σε κυκλική σειρά με κοινή πλευρά τον άξονα περιστροφής. • Κύλινδρος που στενεύει προς τα πάνω και αντί για βάση έχει «μύτη».
Κυκλικός δίσκος	Σφαίρα	• Άπειρα πανομοιότυπα κατακόρυφα ημικύκλια σε κυκλική σειρά με κοινό τμήμα, την κατακόρυφη διάμετρο – άξονα περιστροφής. • Άπειροι οριζόντιοι κύκλοι διαφορετικής διαμέτρου, ο ένας πάνω από τον άλλο. Ο κύκλος με τη μεγαλύτερη διάμετρο βρίσκεται στη «μέση», ενώ κάτω και πάνω από αυτόν οι κύκλοι συνεχίζουν με ελαττούμενη διάμετρο.

Πίνακας 2 – Στρατηγικές οπτικοποίησης στερεών σωμάτων

Μέσα από τις στρατηγικές αυτές, δηλαδή τους διαφορετικούς χειρισμούς των αντικειμένων από τους μαθητές, μπορούμε να διακρίνουμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους οι μαθητές αντιλαμβάνονται και χειρίζονται εννοιολογικά τα εν λόγω επίπεδα σχήματα και στερεά. Για παράδειγμα, η στρατηγική κατά την οποία ο μαθητής οπτικοποιεί το στερεό ως μία σύνθεση/σειρά από άπειρα πανομοιότυπα επίπεδα σχήματα, ίσως οφείλεται στην επιλογή του μαθητή να μη σταματήσει ποτέ την περιστροφή του επίπεδου σχήματος, έως ότου καταφέρει να αναγνωρίσει το στερεό που δημιουργείται. Οι μαθητές επιχειρηματολογούσαν για τον τρόπο περιστροφής αλλά και για τα σχήματα που ένιωθαν ότι δημιουργούνταν κατά την περιστροφή, με βάση τις ιδιότητες τόσο των επίπεδων σχημάτων που περιέστρεφαν όσο και των στερεών που δημιουργούνταν. Για παράδειγμα, η απόφαση του μαθητή Β για τον άξονα περιστροφής του κυκλικού δίσκου ήταν αποτέλεσμα της γνώσης του για την απειρία των διαμέτρων ενός κυκλικού δίσκου. Στην περίπτωση του κώνου, οι μαθητές αιτιολόγησαν τη δημιουργία του από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου (άξονας περιστροφής η μία κάθετη πλευρά), λόγω της ύπαρξης της υποτείνουσας, η οποία ανάγκαζε το στερεό που σχηματιζόταν να έχει κορυφή αντί για έδρα.

Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων οι μαθητές χρησιμοποίησαν πολύ συχνά ενώ σκεφτόντουσαν ή επιχειρηματολογούσαν, χειρονομίες, μεταφορές και παρομοιώσεις. Οι παρομοιώσεις είχαν να κάνουν με αντικείμενα από την καθημερινότητα των μαθητών, τα οποία είχαν το ίδιο σχήμα με τα γεωμετρικά στερεά που διερευνούσαν. Ο κώνος περιγράφηκε ως χωνί, πορτοκαλί κώνος που χρησιμοποιείται στις προπονήσεις του ποδοσφαίρου ή καπελάκι γενεθλίων. Ο κύλινδρος παρομοιάστηκε ως κουτί με γάλα και η σφαίρα ως μπάλα, γη ή στρογγυλό αυγό. Ο μαθητής Β και οι μαθήτριες της ομάδας 2, δε χρησιμοποίησαν πολύ τις παρομοιώσεις, αλλά προτίμησαν να περιγράφουν το στερεό με δικά τους λόγια. Η χρήση των χειρονομιών όμως ήταν ιδιαίτερα έντονη από όλους τους μαθητές, κατά την περιγραφή του τρόπου περιστροφής του επίπεδου σχήματος και της δημιουργίας του στερεού. Οι μαθητές άλλοτε περιγράφουν αυτά που λένε (*εικονικές χειρονομίες,* McNeil, 1992) και άλλοτε επισημαίνουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά τους (*δεικτικές χειρονομίες,* McNeill, 1992), π.χ. μία κορυφή ή μία ακμή.

Δραστηριότητα 2 – Αναπτύγματα Στερεών Σωμάτων

Στη δραστηριότητα αυτή, η διαδικασία της οπτικοποίησης βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στην απτική αντίληψη των μαθητών. Αγγίζουν τα κομμάτια του αναπτύγματος, τα εξερευνούν, αναγνωρίζουν το σχήμα τους και μέσω της αφής τους δημιουργούν οπτικές εικόνες στο μυαλό τους, οι οποίες τους επιτρέπουν να φανταστούν το στερεό που δημιουργείται από το δίπλωμα του αναπτύγματος. Και στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές χρησιμοποίησαν έντονα τις χειρονομίες. Κατά τη διάρκεια που σκέφτονταν και οπτικοποιούσαν την αναδίπλωση των αναπτυγμάτων, τη σκέψη τους συνόδευαν εικονικές και παλμικές χειρονομίες

(McNeill, 1992) που περιέγραφαν τον τρόπο με τον οποίο θα αναδιπλωθεί το ανάπτυγμα. Οι χειρονομίες αυτές τους βοηθούσαν να κατανοούν καλύτερα το τελικό σχήμα του στερεού που δημιουργούνταν. Οι μαθητές/τριες ξεκίνησαν αναγνωρίζοντας απτικά τις σχηματικές μονάδες των αναπτυγμάτων (έδρες, αναγνώριση 2D/3D). Μέσα από την ενασχόληση των μαθητών με τα αναπτύγματα των στερεών σωμάτων, φάνηκαν οι βασικές στρατηγικές που ακολούθησαν για την αναγνώριση του στερεού στο οποίο αντιστοιχούσε ένα δοθέν ανάπτυγμα :

1) Αναγνώριση του στερεού στο οποίο αντιστοιχεί το ανάπτυγμα βάσει των ιδιοτήτων των επιμέρους σχηματικών του μονάδων: Οι μαθητές/τριες αρχικά αναγνώριζαν το στερεό μέσω των επιμέρους σχηματικών του μονάδων, χωρίς να αναδιπλώνουν νοητά ή πραγματικά το ανάπτυγμα. Έτσι, τα έξι τετράγωνα σήμαιναν ότι μάλλον έχουμε να κάνουμε με το ανάπτυγμα ενός κύβου, ενώ η παρουσία τριγώνων στο ανάπτυγμα σηματοδοτούσε τη δημιουργία πυραμίδας.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση των αναπτυγμάτων των πυραμίδων η Δ λέει κάτι πολύ σημαντικό για τον τρόπο που δουλεύει : «Οι πυραμίδες είναι τα μόνα στερεά που έχουν στο ανάπτυγμα τους τριγωνάκια». Το γεγονός αυτό τονίζει τη βαρύτητα που έχει η γνώση των ιδιοτήτων ενός γεωμετρικού σχήματος, οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν ένα μαθητή να δημιουργήσει συνδέσεις μεταξύ γεωμετριών διαφορετικών διαστάσεων, εξελίσσοντας τη γεωμετρική του σκέψη όχι μόνο στο επίπεδο της γεωμετρίας μόνο του επιπέδου ή μόνο του χώρου, αλλά και μεταξύ αυτών.

2) Αναγνώριση του στερεού στο οποίο αντιστοιχεί το ανάπτυγμα μέσω νοητής αναδίπλωσης του: Στην περίπτωση αυτή, οι μαθητές/τριες αρχικά αναγνώριζαν τις επιμέρους σχηματικές μονάδες του αναπτύγματος, αλλά αυτό δεν αποτελούσε «οδηγό» για την εύρεση του στερεού στο οποίο αντιστοιχούσε το ανάπτυγμα. Προκειμένου να καταλήξουν στο στερεό αναδίπλωναν νοητά το ανάπτυγμα.

Εδώ φαίνεται εντονότερα η συμβολή της διαδικασίας της χωρικής οπτικοποίησης στη γεωμετρία και ο καθοριστικός χαρακτήρας της ικανότητας ενός μαθητή να οπτικοποιεί με δυναμικό τρόπο γεωμετρικά σχήματα. Οι μαθητές καταφέρνουν να δημιουργήσουν στο μυαλό τους δυναμικές εικόνες του αναπτύγματος, το οποίο μπορούν πλέον να χειριστούν και να αναδιπλώσουν νοητά, καταλήγοντας έτσι στην αναγνώριση του στερεού που σχηματίζεται. Αυτή είναι μία πολύπλοκη διαδικασία που απαιτεί από το μαθητή να γνωρίζει καλά τις ιδιότητες των σχημάτων καθώς και να είναι εξοικειωμένος με το χειρισμό τους ακόμα και όταν δεν έχει οπτική επαφή με το αντικείμενο. Στη δική μας περίπτωση, μόνο ένας μαθητής κατάφερε να χειριστεί νοητά και με δυναμικό τρόπο το αντικείμενο που του δόθηκε. Μετά την αναγνώριση του αναπτύγματος που είχε δοθεί στην ομάδα του μαθητή Μ και της μαθήτριας Α (κύβος), τους ρωτούμε αν μία αλλαγή στο ανάπτυγμα θα μας δώσει και πάλι κύβο. Ο μαθητής Μ εξηγεί ότι δεν φτιάχνουν κύβο όλα τα αναπτύγματα που έχουν έξι τετράγωνα, αλλά μόνο αυτά που δεν αφήνουν «κενά» κάπου στο στερεό.

Οι δύο παραπάνω στρατηγικές διαφέρουν αρκετά. Ωστόσο, και οι δύο είναι εξαιρετικά σημαντικές αφού η κάθε μία αναδεικνύει μία διαφορετική πτυχή του περάσματος από τη γεωμετρία του επιπέδου στη γεωμετρία του χώρου. Το γεγονός αυτό ίσως δείχνει ότι δεν έχουν όλοι οι μαθητές τον ίδιο τρόπο να αντιλαμβάνονται τα σχήματα.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Μέσα από τις στρατηγικές που ακολούθησαν, οι μαθητές κατάφεραν να πραγματοποιούν με επιτυχία περάσματα από τη γεωμετρία των δύο διαστάσεων σε αυτή των τριών. Οι μαθητές αναγνώριζαν τα γεωμετρικά στερεά περνώντας πάντα «από το μέρος στο όλον», διαδικασία που συμφωνεί με την άποψη του Duval, ενώ έρχεται σε αντίθεση με τη συνήθη διαδικασία αναγνώρισης των στερεών από βλέποντες μαθητές, η οποία είναι περισσότερο ολιστική. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές «έχτιζαν» σταδιακά την εικόνα του αντικειμένου, η οποία τελικά ήταν αποτέλεσμα της σύνθεσης εικόνων των επιμέρους κομματιών του, γεγονός που δεν περιοριζόταν στη μεμονωμένη σύνθεση της εικόνας ενός επίπεδου σχήματος ή ενός στερεού, αλλά και στη σύνθεση του ενός μέσα από το χειρισμού του άλλου.

Στις περισσότερες περιπτώσεις οι μαθητές χρησιμοποιούσαν χειρονομίες, όπως αυτές που αναφέρει ο McNeil (1992), προκειμένου να περιγράψουν με αυτές κάτι το οποίο δε μπορούσαν να εκφράσουν εύκολα με το λόγο και τις τυπικές μαθηματικές ορολογίες. Αντίστοιχος ήταν και ο ρόλος των παρομοιώσεων που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές. Φάνηκε ότι πολλές φορές οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να εκφράσουν λεκτικά το συλλογισμό τους με την τυπική μαθηματική ορολογία. Έτσι, κατέφευγαν σε παρομοιώσεις από την καθημερινή τους ζωή προκειμένου να περιγράψουν το σχήμα ή τη μορφή ενός γεωμετρικού αντικειμένου ή κάποιες ιδιότητες του. Κατά τη διάρκεια όλων των δραστηριοτήτων παρατηρήθηκε έντονα η διαδικασία της οπτικοποίησης των γεωμετρικών αντικειμένων και των χειρισμών τους από τους μαθητές. Οι μαθητές φάνηκε να δημιουργούν εικόνες όπως αυτές που είχε περιγράψει η Presmeg (2006), αποκαλώντας τες «νοητικές εικόνες». Εικόνες που ήταν άλλοτε στατικές και άλλοτε οι μαθητές τους προσέδιδαν έναν δυναμικό χαρακτήρα, όντας σε θέση να τις κινήσουν νοητά, δημιουργώντας νέες εικόνες. Με τον τρόπο αυτό, η συμβολή της οπτικοποίησης ήταν ιδιαιτέρως σημαντική, τόσο στο χειρισμό και την αναγνώριση των γεωμετρικών αντικειμένων, όσο και για το πέρασμα του γεωμετρικού συλλογισμού μεταξύ γεωμετριών διαφορετικών διαστάσεων. Φαίνεται λοιπόν ότι η αμφίδρομη σχέση μεταξύ οπτικοποίησης και μαθηματικού συλλογισμού είναι εκείνη που μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να δουν σε βάθος τη γεωμετρία και να αναπτύξουν τη γεωμετρική τους σκέψη.

Όσον αφορά τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των μαθητών με προβλήματα όρασης, δεν έχει ακόμη γίνει κάποια σχετική έρευνα στο χώρο της Διδακτικής. Για το λόγο

αυτό, και κυρίως λόγω παραμέτρων που δεν υπάρχουν στην περίπτωση των βλεπόντων μαθητών (π.χ. έλλειψη οπτικών εικόνων για τα στερεά), δεν είμαστε σίγουροι αν μπορούμε να κατατάξουμε τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, που πήραν μέρος στην έρευνα μας, στα επίπεδα του Gutierrez (1992). Αυτό που μπορούμε να πούμε ότι φάνηκε από τα αποτελέσματα μας, είναι ότι οι στρατηγικές που ακολούθησαν οι μαθητές, αλλά και ο τρόπος που τις υλοποίησαν και κατέληξαν στις απαντήσεις τους, δείχνουν ότι οι μαθητές βάσισαν το γεωμετρικό τους συλλογισμό στις ιδιότητες τόσο των επίπεδων όσο και των στερεών σχημάτων με τα οποία ασχολούνταν αλλά και στις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων αυτών, χαρακτηριστικά των επιπέδων 3 και 4 του Gutierrez. Ωστόσο, αναγνωρίζοντας τους παραπάνω περιορισμούς, αλλά και τους περιορισμούς της δική μας έρευνας (περιορισμένος χρόνος και αριθμός μαθητών), δεν μπορούμε παρά να τονίσουμε τη σημασία ύπαρξης περαιτέρω έρευνας στο συγκεκριμένο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών, προκειμένου να μπορούμε να βγάλουμε σαφή συμπεράσματα.

Συμφωνώντας με την άποψη της Healy (2012) ότι αν καταφέρουμε να κατανοήσουμε τις ομοιότητες και τις διαφορές στις πρακτικές που ακολουθούν οι τυφλοί μαθητές σε σχέση με τους βλέποντες θα μπορέσουμε να κατανοήσουμε ακόμη καλύτερα τις σχέσεις μεταξύ της εμπειρίας και της νόησης, θεωρούμε πως θα ήταν εξαιρετικά βοηθητικό, όχι μόνο για τους μαθητές με προβλήματα όρασης αλλά και για όλους τους μαθητές γενικότερα, το παράδειγμα αντιμετώπισης των γεωμετρικών αντικειμένων που μας έδωσαν οι μαθητές μέσα από την έρευνα αυτή να βρει το ρόλο του μέσα στο χώρο της διδακτικής της γεωμετρίας και να μη μείνει ανεκμετάλλευτο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Duval, R. (2011). What kind of activity is required for understanding and solving problem in geometry? A M.R.I. of geometrical activity. Paper presented in the Seminar 12-17 march 2011, Department of education, University of Cyprus

Gutierrez, A. (1992). Exploring the links between van Hiele levels and 3-dimensional geometry. *Structural Topology, 18,* 31-48.

Gutierrez, A. R. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry In search of a framework. In L. Puig & A.Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME international conference* (Vol. 1, pp. 3-20). Valencia,Spain: PME.

Healy, L. (2012). Hands that see, Hands that speak : Investigating relationships between sensory activity, forms of communicating and mathematical cognition. 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

Kospentaris, G., Spyrou, P., Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies of Mathematic, 77,* pp.105-127.

Lohman, D. (1988). Spatial abilities as traits, processes and knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence, vol. 40* (pp. 181-248). Hillsdale: LEA.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. Chicago: University of Chicago Press.

Millar, S. (1981). 'Crossmodal and intersensory perception and the blind'. In R.D. Walk & H.L. Pick, Jr. (Eds.), *Intersensory Perception and Sensory Integration*, Plenum Press. New York, pp. 281-314.

Miller, A.I. (1987). *Imagery in scientific thought*. MIT Press

Pittalis, M., Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies of Mathematics*, *75*, pp.191-212

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiereez & P.Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 111-126.

Triantafillidis, T.A. (1995). Circumventing Visual Limitations in Teaching the Geometry of Shapes. *Educational Studies of Mathematics* , *29* : 225-235

van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight : a theory of mathematics education*. London: Academic Press.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΗΣ ΠΡΩΙΜΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΜΕ ΣΥΝΔΡΟΜΟ DOWN

Γαρυφαλιά Χαριτάκη, Γεώργιος Μπαραλής& Σταυρούλα Πολυχρονοπούλου

Π.Τ.Δ.Ε. – Πανεπιστήμιο Αθηνών

lcharitaki@hotmail.com,gmparalis@primedu.uoa.gr&spolychr@primedu.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα έρευνα έχει ως αρχικό στόχο να διερευνήσει το επίπεδο των επιδόσεων των μαθητών με σύνδρομο Down στα πρώιμα μαθηματικά. Επίσης ζητούμενο είναι να εξετάσει την ύπαρξη διαφοροποίησης στις μαθηματικές επιδόσεις των μαθητών με σύνδρομο Down σε σχέση με το φύλο καθώς και την ηλικία. Στην έρευνα συμμετείχαν 40 παιδιά με σύνδρομο Down νοητικής ηλικίας από 4 έως 7 ετών, που φοιτούν σε Ειδικά Δημοτικά Σχολεία της Αττικής, με ατομικές συνεντεύξεις στις οποίες χρησιμοποιήθηκε το σταθμισμένο Ψυχομετρικό Κριτήριο Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης E.N.T. (UtrechtEarlyNumeracyTest). Μέσω της έρευνας αυτής αναδεικνύεται ως σημαντική η υπόθεση ότι τα κορίτσια έχουν καλύτερο επίπεδο στις βασικές δεξιότητες, αλλά και η επίδραση της ηλικίας είναι βαρύνουσας σημασίας. Τέλος, υπάρχουν σημαντικές ενδείξεις ότι μαθητές τυπικής ανάπτυξης και μαθητές με σύνδρομο Down που έχουν την ίδια νοητική ηλικία, δεν έχουν διαφορά ως προς τις στοιχειώδεις μαθηματικές τους δεξιότητες.

Λέξεις ΚΛειδια: σύνδρομο Down, Πρώιμη Μαθηματική Επάρκεια, νοητική ηλικία, Utrecht Early Numeracy Test

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ένας από τους πρωταρχικούς στόχους για τους μαθητές με σύνδρομο Down είναι η ανεξάρτητη διαβίωση και καθορίζεται σε σημαντικό βαθμό μέσω των στοιχειωδών μαθηματικών δεξιοτήτων. Έτσι, είναι εύλογο στο επίκεντρο του προβληματισμού, να τίθεται η έννοια της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας που αναφέρεται στο σύνολο των γνώσεων και των δεξιοτήτων οι οποίες αποτελούν προϋπόθεση για να εισαχθεί αποτελεσματικά ένα παιδί προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας στα μαθηματικά της τυπικής εκπαίδευσης (VandeRijt, VanLuit&Pennings, 1994). Αυτές οι γνώσεις και δεξιότητες αφορούν κυρίως στη δημιουργία της έννοιας του αριθμού (number sense), καθώς βασικός τομέας των σχολικών μαθηματικών στα πρώτα χρόνια της τυπικής εκπαίδευσης είναι η επεξεργασία αριθμητικών εννοιών και σχέσεων. Για τον προσδιορισμό της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας στα πλαίσια τις παραπάνω έρευνας χρησιμοποιήθηκε το Ψυχομετρικό Κριτήριο Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης (Γ. Μπάρμπας & Φ. Βερμέουλεν, 2008).

Προσπάθειες διερεύνησης της Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας με τη χρήση μετάφρασης του συγκεκριμένου κριτηρίου έχουν γίνει και από άλλους ερευνητές σε πολλές χώρες. Οι P. Aunioetal (2009) χρησιμοποίησαν στην έρευνά τους το Φιλανδικό Early Numeracy Test (ENT-Fin) σε ένα δείγμα 511 μαθητών χαμηλής επίδοσης μέσης ηλικίας 6:04 (έτη:μήνες) και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες υστερούν σε σχέση με τους συνομήλικούς τους ως προς τη μαθηματική τους γνώση ήδη από την πρώιμη παιδική τους ηλικία. Επιπλέον υπογράμμισαν τη σημασία της παρέμβασης, μιας και υπήρχε μεγάλη συσχέτιση της ηλικίας με τις επιδόσεις στο κριτήριο.

Οι Godfreyetal (2001),σε μια διεθνή έρευνα που συμπεριελάμβανε 7 κράτη και δείγμα 319 μαθητών τυπικής ανάπτυξης αλλά και με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες, επιχείρησαν να συσχετίσουν μέσω του κριτηρίου τις μαθηματικές επιδόσεις των μαθητών με την ηλικία, το φύλο τους, αλλά και με τη χώρα καταγωγής τους. Επιπλέον, προσπάθησαν να διερευνήσουν αν υπάρχει διαφοροποίηση στις επιδόσεις των μαθητών στα διάφορα έργα (έργα Piaget – έργα Gelman).

Οι Aubrey et al (2003) διεξήγαγαν μιας μικρής κλίμακας διαχρονική έρευνα για να εξετάσουν την εξέλιξη της μαθηματικής επάρκειας σε 319 μαθητές, οι οποίοι συμμετείχαν στην έρευνα σε ηλικία 5 ετών, στο μέσο της 1ης τάξης και σε ηλικία 6 ετών. Ως αποτέλεσμα της συγκεκριμένης έρευνας, αναδεικνύεται το γεγονός ότι τα σκορ των μαθητών ήδη από το μέσο της 1ης τάξης είναι ενδεικτικά για τη μετέπειτα επιτυχία του μαθητή. Εξαιρέσεις σε αυτό ήταν εκείνες οι χαμηλότερες επιδόσεις των μαθητών, οι οποίοι χαρακτηρίστηκαν περισσότερο από την αποτυχία τους να προχωρήσουν και όχι από μια αξιόλογη αρχική χαμηλή απόδοση.

Οι Navarro et al (2012) χρησιμοποιώντας ένα δείγμα 127 μαθητών ηλικίας 5-7 συμπέραναν ότι το επίπεδο της μαθηματικής ικανότητας μεταξύ των μαθητών ηλικίας 5-7 ετών, παραμένει σχετικά σταθερό ανεξάρτητα από το αρχικό επίπεδο επίτευξης. Ωστόσο, η έγκαιρη εξέταση για μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά θα μπορούσε να είναι χρήσιμη στην προσπάθεια βοήθειας μαθητών χαμηλών επιδόσεων να υπερβούν μαθησιακά εμπόδια.

Οι Aubrey et al (2006) σε μιας μικρής κλίμακας διαχρονική έρευνα με 319 μαθητές, ηλικίας 5, 6 και 11 ετών, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι χωρίς ενεργή παρέμβαση μέσω επίλυσης προβλήματος οι μαθητές που ξεκινούν το σχολείο με περιορισμένη μαθηματική γνώση, συνεχίζουν να παραμένουν μαθητές "χαμηλής επίδοσης" και κατά τα επόμενα χρόνια.

Οι VandeRijtetal (2003) που διεξήγαγαν μιας μικρής κλίμακας διαχρονική έρευνα με 928 μαθητές από 6 χώρες συμπεριλαμβανομένης και της Ελλάδας, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το ENT είναι ένα χρήσιμο εργαλείο και για διακρατική σύγκριση και ανέδειξαν το ρόλο των γονέων ως κεντρικό, αφού και η μετέπειτα ακαδημαϊκή επιτυχία του μαθητή σχετίζεται στενά με τις πρώιμες μαθησιακές εμπειρίες του.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΈΡΕΥΝΑΣ

2.1. Μέθοδος

Η μελέτη είναι διερευνητική - περιγραφική, ωστόσο γίνεται μια προσπάθεια ποιοτικής ανάλυσης των δεδομένων που συλλέγονται. Η συλλογή των στοιχείων πραγματοποιήθηκε μέσω ατομικών συνεντεύξεων.

2.2. Ερευνητικά Ερωτήματα

Μέσω της παρούσας έρευνας γίνεται μια προσπάθεια διερεύνησης του επιπέδου των επιδόσεων των μαθητών με σύνδρομο Down. Συγκεκριμένα, διερευνάται η δημιουργία της έννοιας του αριθμού (number sense) με τη χρήση των οκτώ ενοτήτων του κριτηρίου οι οποίες σχετίζονται με τη σύγκριση, την ταξινόμηση, την αντιστοίχιση, τη σειριοθέτηση, τη χρήση λέξεων αρίθμησης, τη δομημένη καταμέτρηση, την αποτελεσματική καταμέτρηση και τη γενική γνώση των αριθμών.

2.3. Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 40 μαθητές με σύνδρομο Down ηλικίας, μεταξύ 7:02 και 14:07 (έτη:μήνες) ετών, που φοιτούν σε Ειδικά Δημοτικά Σχολεία της Αττικής. Το μέγεθος του δείγματος είναι συνέπεια αφενός του γεγονότος ότι ο πληθυσμός των μαθητών με σύνδρομο Down είναι ένας κατά γενική ομολογία φθίνων πληθυσμός (εξαιτίας των προγεννητικών ελέγχων)Verweijetal (2013) και αφετέρου του περιορισμού σε εκείνους των οποίων η νοητική ηλικία ήταν μεταξύ 4.00 και 7.05. από το σύνολο των μαθητών με σύνδρομο Down που φοιτούν σε ειδικά δημοτικά σχολεία. Για τον προσδιορισμό της νοητικής ηλικίας, όπου αυτό ήταν δυνατό, χρησιμοποιήθηκε το Wisc, ενώ όπου δεν ήταν εφικτό, χρησιμοποιήθηκαν μη σταθμισμένες μέθοδοι.

2.4. Ερευνητικά Εργαλεία

Ως ερευνητικό εργαλείο για τη διερεύνηση της Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας των παιδιών με σύνδρομο Down, χρησιμοποιήθηκε το σταθμισμένο ψυχομετρικό Κριτήριο Πρώιμης Μαθηματικής Επάρκειας της Ουτρέχτης (UtrechtEarlyMathematicalCompe-tenceTest), για παιδιά ηλικίας 4.00 – 7.05. Με βάση το παραπάνω ερευνητικό εργαλείο, το οποίο είναι αξιόπιστο και έγκυρο τόσο ως προς το περιεχόμενο όσο και ως προς την εννοιολογική του κατασκευή, μελετήσαμε τα ακόλουθα:

Στην 1η ενότητα (Σύγκριση: Έργα 1-5) εκτιμάται σε ποιο βαθμό τα παιδιά έχουν κατακτήσει έννοιες που χρησιμοποιούνται συχνά στις συγκρίσεις, ειδικά στη μαθηματική εκπαίδευση. Αναφορά γίνεται σε έννοιες, όπως τα περισσότερα, τα λιγότερα, πιο ψηλά, πιο χαμηλά, κ.α.

Στη 2η ενότητα (Ταξινόμηση: Έργα 6-10) με τη δοκιμασία της ταξινόμησης εκτιμάται σε ποιο βαθμό τα παιδιά μπορούν, με βάση ομοιότητες και διαφορές, να διακρίνουν αντικείμενα και να τα ταξινομούν.

Στην 3η ενότητα *(Αντιστοίχιση: Έργα 11-15)* με τη δοκιμασία της «ένα – προς – ένα» αντιστοίχισης εκτιμάται σε ποιο βαθμό τα παιδιά είναι σε θέση να συσχετίζουν στοιχεία δύο συνόλων. Για παράδειγμα:"υπάρχουν τόσες κότες όσα αυγά;", "Αναγνωρίζουν ότι έξι κυβάκια, ως ποσότητα, είναι όσο έξι κουκίδες σε ένα ζάρι;"

Στην 4η ενότητα *(Σειριοθέτηση: Έργα 16-20)* εκτιμάται σε ποιο βαθμό τα παιδιά μπορούν να αναγνωρίσουν αν τα αντικείμενα είναι στη σωστή σειρά, όπως για παράδειγμα από ψηλά προς χαμηλά, από τα πολλά στα λίγα, από το λεπτό στο χοντρό ή από το στενό στο φαρδύ. Επίσης εκτιμάται σε ποιο βαθμό τα παιδιά είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τη σειριακή αντιστοίχιση ανάμεσα σε δύο σύνολα, όπως για παράδειγμα να φτιάξουν μόνα τους μια σειρά ενώνοντας με γραμμές σκύλους και ξύλα διαφορετικών μεγεθών.

Στην 5η ενότητα *(Χρήση λέξεων αρίθμησης: Έργα 21-25)* με τη δοκιμασία της χρήσης λέξεων αρίθμησης (κανονική καταμέτρηση, αντίστροφη καταμέτρηση, καταμέτρηση από ένα σημείο και μετά, χρήση απόλυτων και τακτικών αριθμών) εκτιμάται σε ποιο βαθμό τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν τους απόλυτους και τους τακτικούς αριθμούς μέχρι το είκοσι.

Στην 6η ενότητα *(Δομημένη καταμέτρηση: Έργα 26-30)* με τη δοκιμασία της δομημένης καταμέτρησης εκτιμάται σε ποιο βαθμό τα παιδιά μπορούν να μετρούν μη συνεχείς ποσότητες με συγχρονισμένο και δομημένο τρόπο. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια κάποιου υλικού, όπως κυβάκια. Επιτρέπεται στα παιδιά να δείχνουν ή να πιάνουν το υλικό καθώς μετράνε. Παράλληλα εκτιμάται σε ποιο βαθμό τα παιδιά έχουν δημιουργήσει νοερές αναπαραστάσεις κάποιων αριθμητικών δομών, όπως π.χ. του αριθμού στο ζάρι.

Στην 7η ενότητα *(Αποτελεσματική καταμέτρηση: Έργα 31-35)* με τη δοκιμασία της καταμέτρησης δομημένων και μη δομημένων διακριτών αντικειμένων εκτιμάται σε ποιο βαθμό τα παιδιά έχουν δημιουργήσει νοερές αριθμητικές δομές και στρατηγικές που τους επιτρέπουν να καταμετρήσουν με συνεχείς ποσότητες, οι οποίες δίνονται με τη μορφή δομημένων ή μη-δομημένων συλλογών. Γι'αυτό δεν επιτρέπεται στα παιδιά να δείχνουν με τα δάχτυλα ή να πιάνουν τα αντικείμενα καθώς μετράνε.

Στην 8η ενότητα *(Γενική γνώση αριθμών: Έργα 36-40)* εκτιμάται σε ποιο βαθμό τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν τους αριθμούς μέχρι το είκοσι σε καθημερινές καταστάσεις προβλημάτων.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ένταξη ενός παιδιού σε ένα από τα πέντε επίπεδα αποτελεί μια ικανοποιητική εκτίμηση του βαθμού της πρώιμης μαθηματικής επάρκειας.

Επίπεδο Ε: Πολύ αδύναμο έως αδύναμο. Στη συνολική κατάταξη των βαθμών επάρκειας των παιδιών μιας ηλικιακής ομάδας, το επίπεδο αυτό αντιστοιχεί στο κατώτερο 10% των βαθμών επάρκειας.

Επίπεδο Δ: Αδύναμο έως μέτριο. Στη συνολική κατάταξη των βαθμών επάρκειας των παιδιών μιας ηλικιακής ομάδας, το επίπεδο αυτό αντιστοιχεί με τους βαθμούς επάρκειας που κυμαίνονται πάνω από το κατώτερο 10% και κάτω από το ανώτερο 75% των βαθμών επάρκειας.

Επίπεδο Γ: Μέτριο έως αρκετά καλό. Στη συνολική κατάταξη των βαθμών επάρκειας των παιδιών μιας ηλικιακής ομάδας, το επίπεδο αυτό αντιστοιχεί με το 25% των βαθμών που βρίσκονται αμέσως κάτω από τη διάμεσο.

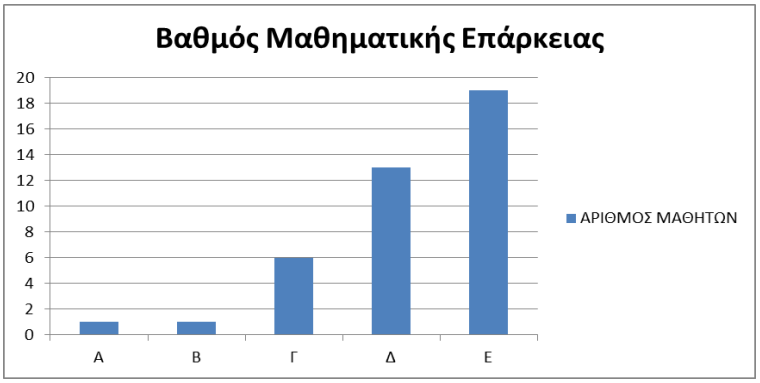
Επίπεδο Β: Αρκετά καλό έως καλό. Στη συνολική κατάταξη των βαθμών επάρκειας των παιδιών μιας ηλικιακής ομάδας, το επίπεδο αυτό αντιστοιχεί με το 25% των βαθμών που βρίσκονται αμέσως πάνω από τη διάμεσο.

Επίπεδο Α: Καλό έως πολύ καλό. Στη συνολική κατάταξη των βαθμών επάρκειας των παιδιών μιας ηλικιακής ομάδας, το επίπεδο αυτό αντιστοιχεί με το ανώτερο 25% των βαθμών επάρκειας.

Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, το 47,5% των μαθητών θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως πολύ αδύναμα έως αδύναμα. Το 32,5% των μαθητών θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως αδύναμα έως μέτρια. Ενώ είναι πολύ σημαντικό να αναφέρουμε ότι το 20% είναι από μέτριο έως πολύ καλό.

ΒΑΘΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΟΡΙΤΣΙΩΝ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΓΟΡΙΩΝ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΜΑΘΗΤΩΝ
Α	1	1	0	2,50%
Β	1	1	0	2,50%
Γ	6	5	1	15,00%
Δ	13	6	7	32,50%
Ε	19	7	12	47,50%
Σύνολο	**40**	**18**	**22**	**100,00%**

Πίνακας 1 | Πίνακας κατανομής συχνοτήτων για τον βαθμό μαθηματικής επάρκειας (UtrechtEarlyNumeracyTest)



Πίνακας 2│Ραβδόγραμμα κατανομής συχνοτήτων για τον βαθμό μαθηματικής επάρκειας (UtrechtEarlyNumeracyTest)

Στην 1η ενότητα *(Σύγκριση: Έργα 1-5)* το ποσοστό επιτυχίας στο σύνολο όλων των έργων είναι 51,67%. Σε όλες τις δραστηριότητες οι μαθητές μπορούσαν να συγκρίνουν με μεγάλη ευχέρεια και σχεδόν όλοι απαντούσαν άμεσα. Μια πιθανή αιτιολόγηση του παραπάνω γεγονότος έχει δοθεί από την Dehaene (2001) η οποία ισχυρίστηκε ότι η ικανότητα χειρισμού αριθμητικών μεγεθών είναι έμφυτη και είναι ήδη παρούσα στα βρέφη. Ο χειρισμός αριθμητικών μεγεθών βασίζεται σε ένα γνωστικό σύστημα αφιερωμένο στην επεξεργασία ποσοτικών πληροφοριών, το οποίο αναπτύσσεται με το πέρασμα των ετών.

Στην 2η ενότητα *(Ταξινόμηση: Έργα 6-10)* το ποσοστό επιτυχίας στο σύνολο όλων των έργων είναι 26,67%. Ιδιαιτέρως στο έργο 6 που ζητείται να βρουν ποιο από τα εικονιζόμενα αντικείμενα δεν πετάει, μόνο ένας στους τέσσερις μπόρεσε να απαντήσει σωστά στην ερώτηση. Μια πιθανή αιτιολόγηση είναι ότι ενδεχομένως να μην αντιλαμβάνονται την άρνηση μιας πρότασης, δεδομένου ότι ονομάτιζαν όλα τα εικονιζόμενα αντικείμενα. Επίσης θα πρέπει να αναφέρουμε, ότι στα έργα 9 και 10 βρίσκουν το πρώτο αντικείμενο με τις ιδιότητες που τους ζητείται αλλά όχι όλα τα αντικείμενα.

Στην 3η ενότητα *(Αντιστοίχιση: Έργα 11-15)* το ποσοστό επιτυχίας στο σύνολο όλων των έργων είναι 45,00%. Τα περισσότερα παιδιά απαντούν στο έργο 11 αλλά και στο 12 με μεγάλη ευκολία, πράγμα το οποίο ενδεχομένως να σημαίνει ότι η πλειονότητα των παιδιών έχει αναπτύξει την 1-1 έννοια. Βέβαια στα έργα 13 και 14 έχουμε ενδείξεις ότι τα περισσότερα παιδιά δεν έχουν κατακτήσει την 1-1 έννοια υπό συνθήκες. Και τέλος από το έργο 15 συμπεραίνουμε ότι τα περισσότερα παιδιά δεν έχουν κατακτήσει τη δομή του 5 στο ζάρι.

Στην 4η ενότητα *(Σειριοθέτηση: Έργα 16-20)* το ποσοστό επιτυχίας στο σύνολο όλων των έργων είναι 17,50%. Κανένας δεν απάντησε σωστά στο έργο 19 όπου ζητούταν να αντιστοιχιστούν σκύλοι (5 διαφορετικά μεγέθη) με ξύλα (5 διαφορετικά μεγέθη).

Στην 5η ενότητα *(Χρήση λέξεων αρίθμησης: Έργα 21-25)* το ποσοστό επιτυχίας στο σύνολο όλων των έργων είναι *15,00%*. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι κανένας δεν μπόρεσε να μετρήσει μέχρι το 14 ανεβαίνοντας δύο-δύο, έτσι ώστε να δώσει σωστή απάντηση στο έργο 25. Τέλος, δεν ήταν εφικτό να βρουν το 18ο λουλούδι στη σειρά, μετρώντας είτε από δεξιά είτε από αριστερά.

Στην 6η ενότητα *(Δομημένη καταμέτρηση: Έργα 26-30)* το ποσοστό επιτυχίας στο σύνολο όλων των έργων είναι *14,17%*. Μόνο ένα παιδί μπόρεσε να δώσει απάντηση στο έργο 29 όπου τους ζητήθηκε, αφού κοιτάξουν προσεκτικά την εικόνα, να πουν πόσες κουκίδες είχαν τα ζάρια και στο έργο 30 να μετρήσουν ανάποδα από το 17 έως το 1. Όλοι άρχιζαν να μετρούν τα κυβάκια από το 1 έως το 17.

Στην 7η ενότητα *(Αποτελεσματική καταμέτρηση: Έργα 31-35)* το ποσοστό επιτυχίας στο σύνολο όλων των έργων είναι *7,50%*. Πολύ λίγα παιδιά ήταν σε θέση να καταμετρήσουν χωρίς να δείχνουν ή να πιάνουν.

Στην 8η ενότητα *(Γενική γνώση αριθμών: Έργα 36-40)* το ποσοστό επιτυχίας στο σύνολο όλων των έργων είναι *30,00%*. Το αξιοσημείωτο εδώ είναι ότι αρκετά παιδιά έδωσαν σωστή απάντηση σε προβλήματα που σχετίζονται με την καθημερινότητα. Μια πιθανή εξήγηση ενδεχομένως να βρίσκεται στο ότι τα παιδιά με νοητική υστέρηση βρίσκουν νόημα στις αλγεβρικές πράξεις μόνο όταν αυτές σχετίζονται με αντικείμενα της καθημερινότητας και της άμεσης αντίληψής τους.

ΕΡΓΟ	ΠΟΣΟΣΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ	ΕΡΓΟ	ΠΟΣΟΣΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ	ΕΡΓΟ	ΠΟΣΟΣΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ	ΕΡΓΟ	ΠΟΣΟΣΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ
1	66,67%	11	75,00%	21	29,17%	31	12,50%
2	54,17%	12	58,33%	22	29,17%	32	8,33%
3	50,00%	13	20,83%	23	16,67%	33	8,33%
4	45,83%	14	37,50%	24	0,00%	34	4,17%
5	41,67%	15	33,33%	25	0,00%	35	4,17%
6	25,00%	16	33,33%	26	16,67%	36	37,50%
7	45,83%	17	25,00%	27	29,17%	37	45,83%
8	37,50%	18	12,50%	28	16,67%	38	41,67%
9	8,33%	19	0,00%	29	4,17%	39	25,00%
10	16,67%	20	16,67%	30	4,17%	40	0,00%

Πίνακας 3 | Πίνακας κατανομής σχετικών συχνοτήτων ανά έργο του κριτηρίου (UtrechtEarlyNumeracyTest)

3.1. Συσχετισμός μαθηματικών επιδόσεων και φύλου

Μέσω της έρευνας αναδεικνύεται σημαντική υπεροχή των κοριτσιών ως προς τις μαθηματικές τους επιδόσεις. Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός ότι μόνο κορίτσια κατάφεραν να έχουν Α και Β Βαθμό Μαθηματικής Επάρκειας. Ενώ, κορίτσια αποτελούν επίσης την πλειονότητα των μαθητών που έχουν βαθμό Γ.

3.2. Συσχετισμός μαθηματικών επιδόσεων και νοητικής ηλικίας

Επίσης υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις για τη θετική συσχέτιση *r=0.645*της νοητικής ηλικίας και των μαθηματικών επιδόσεων. Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν και από τη συσχέτιση της χρονολογικής ηλικίας *r=0.378*και των μαθηματικών επιδόσεων, όπως προκύπτουν από το *AcademicAtainmentsChecklist (Sloperetal. 1990) (Charitakietal. 2013).*

4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι Aunioetal. (2009) ερευνώντας μαθητές χαμηλής επίδοσης κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι συγκεκριμένοι μαθητές χρειάζονται διέγερση για να αναπτύξουν τη

μαθηματική τους σκέψη μέσω της διαδικασίας επίλυσης ενδιαφερόντων προβλημάτων. Ένας εναλλακτικός τρόπος θα ήταν να διδάσκονται τα μαθηματικά όπως και η γλώσσα, δεδομένου ότι το ζητούμενο είναι να παρέχουμε στα παιδιά όσο το δυνατόν πλουσιότερο μαθηματικό λεξιλόγιο.

Επίσης θα πρέπει να διερευνηθεί εκτενώς ο τρόπος παρέμβασης στην κατανόηση της άρνησης μιας πρότασης καθώς και ο τρόπος διαχείρισης προτάσεων που περιλαμβάνουν πολλαπλές παραμέτρους, μιας και υπάρχουν ενδείξεις ότι δεν μπορούν να τις διαχειριστούν όλες ταυτόχρονα.

Θα πρέπει ωστόσο να αναφέρουμε ότι η σημαντική επίδραση του φύλου μάς δείχνει ότι, σε αυτό το επίπεδο, τα κορίτσια έχουν καλύτερο επίπεδο βασικών μαθηματικών γνώσεων. Σε παρόμοια αποτελέσματα έχουν καταλήξει και άλλοι ερευνητές στη διεθνή βιβλιογραφία τόσο για πληθυσμούς μαθητών με σύνδρομο Down (Carr 1988; Caseyetal. 1988), όσο και για πληθυσμούς μαθητών τυπικής ανάπτυξης (Kellmer-Pringleetal. 1966). Είναι ωστόσο σημαντικό να αναφερθεί ότι οι τρέχουσες πολιτικές αποφάσεις επικεντρώνονται στο χαμηλότερο επίπεδο εκπαιδευτικής επιτυχίας των αγοριών. Φαίνεται ότι οι αντιλήψεις για τον μη ισότιμο παραδοσιακό ρόλο του φύλου συνδέονται με χαμηλότερη μορφωτική επιτυχία (Hadjaretal 2012). Τα αγόρια με τις παραδοσιακές αντιλήψεις για το ρόλο των δύο φύλων, αναφέρουν ότι στο σχολικό περιβάλλον είναι αποξενωμένοι από τα κορίτσια. Επίσης, αυτά τα αγόρια τείνουν να έχουν χαμηλότερους βαθμούς στο σχολείο. Όπως μπορεί να αποδειχθεί τόσο σε ποσοτικά και ποιοτικά μέρη, τα αγόρια δείχνουν πιο έντονα ότι επιθυμούν να αποφεύγουν σχολικές δραστηριότητες (σύμφωνα με κίνητρα μάθησης) από ό, τι τα κορίτσια. Δεδομένου του γεγονότος ότι τα αγόρια ξοδεύουν μεγαλύτερο χρονικό διάστημα για δραστηριότητες αναψυχής από ότι τα κορίτσια (GysinandLupatsch 2011).

Αξίζει τέλος να αναφέρουμε ότι μια μαθήτρια με σύνδρομο Down νοητικής ηλικίας 7,01 είχε βαθμό επάρκειας Α. Το συγκεκριμένο γεγονός μάς επιτρέπει να διατυπώσουμε την υπόθεση, η οποία θα ήταν σημαντικό να διερευνηθεί και είναι η εξής:“μαθητές τυπικής ανάπτυξης και μαθητές με σύνδρομο Down που έχουν την ίδια νοητική ηλικία δεν έχουν διαφορά στις στοιχειώδεις μαθηματικές τους δεξιότητες”.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aubrey, C., Godfrey, R., & Dahl, S. (2006). Early mathematics development and later achievement: Further evidence. *Mathematics Education Research Journal, 18(1),* 27-46.

Aubrey, C., & Godfrey, R. (2003).The development of children's early numeracy through Key Stage 1.*British Educational Research Journal, 29(6),* 821-840.

Aunio, P., Hautamäki, J., Sajaniemi, N., & Van Luit, J. E. (2009).Early numeracy in low-performing young children.*British Educational Research Journal, 35(1),* 25-46.

G. Charitaki, G. Baralis, S. Polychronopoulou, D. Lappas& S.-G.Soulis (2013). Numerical Ability of Children with Down's syndrome and correlation with external factors. Εγκεκριμένο για συμμετοχή στα πρακτικά του διεθνούςσυνεδρίου *Twenty-First International Conference on Learning, 15-17* July 2014 *(http://thelearner.com/the-conference/program-and-events/list-of-accepted-proposals).*

Carr J. Six weeks to 21 Years: A Longitudinal study of children with Down's syndrome and their families. *Journal of Child Psychology and Psychiatry 29 (1988),* 407-431.

Casey, W., Jones, D., Kugler, B., & Watkins, B. (1988). Integration of Down's syndrome children in the primary school: a longitudinal study of cognitive development and academic attainments. *British Journal of Educational Psychology, 58(3),* 279-286.

Godfrey, R., & Aubrey, C. (2001).Assessing early mathematical development.*Research in Mathematics Education, 3(1),* 55-68.

GysinS.,&Lupatsch J. *Which factors drive the lower school success of boys at secondary school level? An explanation of educational success focusing on teachers' influence, school alienation and gender role patterns.* Paper presented at the International Conference Gender Variations in Educational Success: Searching for Causes, Luxembourg, October 3-5, 2011.

Hadjar A., Grünewald-Huber E., Gysin S., Lupatsch J., and Braun D. Traditional Gender Role Patterns and the Lower Educational Success of Boys. Quantitative and Qualitative Findings of a School Survey in the Canton Bern.*Swiss Journal of Sociology 38(2012):* 375-400.

Kellmer- Pringle, M. L., Butler, N. R., and Davie, R. (1966).*11,000 Seven Year-olds.* London: Longman.

Navarro, J. I., Aguilar, M., Marchena, E., Ruiz, G., Menacho, I., & Van Luit, J. E. (2012).Longitudinal study of low and high achievers in early mathematics.*British Journal of Educational Psychology, 82(1),* 28-41.

Van de Rijt, B., Godfrey, R., Aubrey, C., van Luit, J. E., GhesquiËre, P., Torbeyns, J., &Tzouriadou, M. (2003). The development of early numeracy in Europe.*Journal of Early Childhood Research, 1(2),* 155-180.

Verweij, E. J., Oepkes, D., & Boer, M. A. (2013).Changing attitudes towards termination of pregnancy for trisomy 21 with non-invasive prenatal trisomy testing: a population-based study in Dutch pregnant women. *Prenatal diagnosis*

Μπάρμπας, Γ., Βερμέουλεν, Φ., Κιοσέογλου Γ. & Μενεξές Γ. (2008).*Ψυχομετρικό κριτήριο πρώιμης μαθηματικής επάρκειας της Ουτρέχτης (προσαρμογή – στάθμιση),* Στο πλαίσιο του έργου ΕΠΕΑΕΚ «Ψυχομετρική - διαφορική αξιολόγηση παιδιών και εφήβων με μαθησιακές δυσκολίες», Θεσσαλονίκη, 2008.

Η ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΝΟΗΤΙΚΗ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ: ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Βασιλική Χρυσικού, Χαρούλα Σταθοπούλου

Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας ΠΤΕΑ

vchrysikou@gmail.com, hastath@uth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία στοχεύει στην ανασκόπηση των ερευνών που αφορούν στη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με νοητική καθυστέρηση και στον εντοπισμό ερωτημάτων που αναδείχθηκαν και δεν έχουν απαντηθεί. Από την αναζήτηση που πραγματοποιήθηκε συγκεντρώθηκαν 25 έρευνες με δείγματα μαθητές με νοητική καθυστέρηση που φοιτούν, κυρίως, στην πρωτοβάθμια ή τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι περισσότερες έρευνες διερεύνησαν κατά πόσο μπορούν οι μαθητές του δείγματος, μέσα από την παροχή της κατάλληλης εκπαίδευσης, να αποκτήσουν υπολογιστικές δεξιότητες, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη στοιχεία από το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο των μαθητών και οι αλληλεπιδράσεις που αυτό συνεπάγεται.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Πολλές διαταραχές, μεταξύ των οποίων και η νοητική καθυστέρηση, μπορούν να ταξινομηθούν ως αναπτυξιακές διαταραχές (developmental disabilities). Πρόκειται για διαταραχές που συμβαίνουν στην παιδική ηλικία και δημιουργούν σημαντικούς περιορισμούς στην ανεξαρτησία του ατόμου.

Για πολλά χρόνια η κατηγοριοποίηση των ατόμων με νοητική καθυστέρηση βασίζεται στον έλεγχο της νοημοσύνης (ελαφριά, μέτρια, σοβαρή, βαριά). Ωστόσο, τα άτομα με νοητική καθυστέρηση αποτελούν μια ανομοιογενή ομάδα, που διαφέρουν μεταξύ τους εκτός από το βαθμό της νοητικής καθυστέρησης, και ως προς τις αιτίες του προβλήματος, τη συμπεριφορά, την πρόγνωση για το τελικό επίπεδο νοητικής ανάπτυξης και κοινωνικής προσαρμογής, κ.ά.. Άλλωστε, είναι γνωστό ότι τα άτομα με νοητική καθυστέρηση έχουν περιορισμούς στην προσαρμοστική τους συμπεριφορά, οι οποίοι όμως πρέπει να μελετώνται ή να λαμβάνονται υπόψη σε σχέση με το περιβάλλον της κοινότητας των ατόμων τυπικής ανάπτυξης, ίδιας ηλικίας και ίδιου πολιτισμικού πλαισίου.

Οι μαθητές με νοητική καθυστέρηση στην Ελλάδα πιθανόν να φοιτούν σε ένα γενικό σχολείο πρωτοβάθμιας ή δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και να υποστηρίζονται από εκπαιδευτικούς ειδικής αγωγής στο πλαίσιο του τμήματος ένταξης. Σε άλλη περίπτωση μπορεί να φοιτούν σε ειδικό σχολείο πρωτοβάθμιας ή δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και να διδάσκονται εξ' ολοκλήρου από παιδαγωγούς ειδικής αγωγής.

Ανεξάρτητα από τη βαθμίδα ή το πλαίσιο στο οποίο βρίσκονται οι μαθητές η διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί μια σημαντική διαδικασία για απόκτηση δεξιοτήτων, οι οποίες, μεταξύ των άλλων, συμβάλλουν στην ανάπτυξη της ανεξαρτησίας των ατόμων και στην καλύτερη λειτουργία τους μέσα στο κοινωνικό σύνολο. Γι' αυτό θεωρούμε ότι είναι σημαντική περαιτέρω διερεύνηση για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με νοητική καθυστέρηση στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών. Στην Ελλάδα δεν έχει γίνει, προς το παρόν, προσπάθεια καταγραφής των ερευνών που αφορούν στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων σε μαθητές με νοητική καθυστέρηση. Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο την ανασκόπηση των ερευνών που αφορούν διδακτικές παρεμβάσεις μαθηματικών σε μαθητές με νοητική καθυστέρηση και τον εντοπισμό ζητημάτων στα οποία αυτές οι έρευνες δεν απαντούν.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η ανασκόπηση αποτελείται από τις έρευνες που πραγματοποιήθηκαν τα έτη 1990 – 2012 και αφορούν στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων σε μαθητές με νοητική καθυστέρηση. Οι έρευνες που συμπεριλαμβάνονται στην ανασκόπηση έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: α) έχουν πραγματοποιηθεί από το 1990 έως το 2012, β) εστιάζουν στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων, γ) η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε σε μαθητές με νοητική καθυστέρηση (ελαφριά με IQ 70 έως 55/50, μέτρια με IQ 55/50 έως 40/35, σοβαρή με IQ 40/35 έως 25/20, βαριά με IQ κάτω από 25/20), δ) τα δεδομένα της παρέμβασης για τους μαθητές με νοητική καθυστέρηση παρουσιάζονται ξεχωριστά από τα δεδομένα μαθητών με άλλες αναπηρίες που τυχόν συμμετέχουν στο δείγμα, δ) είναι δημοσιευμένες στην ελληνική ή την αγγλική γλώσσα. Οι έρευνες που περιέχουν παρεμβάσεις με στόχο την αυτόνομη πραγματοποίηση χρηματικών συναλλαγών από τους μαθητές δεν συμπεριλαμβάνονται στην ανασκόπηση. Επίσης, δε συμμετέχουν στην ανασκόπηση έρευνες που συγκρίνουν τα χαρακτηριστικά των μαθητών με νοητική καθυστέρηση με εκείνα μαθητών με άλλες αναπηρίες, χωρίς να γίνεται διδακτική παρέμβαση. Με βάση τα κριτήρια επιλογής, κάποιες έρευνες αποκλείστηκαν είτε γιατί η μέτρηση του δείκτη νοημοσύνης έγινε με άλλα κριτήρια (π.χ. Kroesbergen & Van Luit, 2005), είτε γιατί τα αποτελέσματα για τους μαθητές με νοητική καθυστέρηση δεν αναφέρονται ξεχωριστά από τα δεδομένα μαθητών με άλλες αναπηρίες που συμμετέχουν στο δείγμα (π.χ. Browder, Trela, Courtade, Jimenez, Knight & Flowers, 2012).

Με βάση τις προαναφερθείσες προδιαγραφές πραγματοποιήθηκε μια λεπτομερής αναζήτηση ερευνών σε αρκετές βάσεις δεδομένων (ERIC, Wilson Omnifile Full Text, PsychInfo, κ.ά.) και στον google-μελετητή, με λέξεις/φράσεις-κλειδιά όπως οι ακόλουθες: νοητική καθυστέρηση, mental retardation, intellectual disability, developmental disability, cognitive impairment, math disabilities, mathematics, algebra, geometry, instructional approaches, κ.ά..

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από την αναζήτηση που πραγματοποιήθηκε συγκεντρώθηκαν συνολικά 25 έρευνες οι οποίες ικανοποιούν τα κριτήρια επιλογής που περιγράφηκαν παραπάνω. Οι έρευνες αυτές παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 1. Στην πλειοψηφία τους οι

Πίνακας 1. Ανασκόπηση ερευνών

Έρευνα	Μαθητές με ΝΚ Βαθμίδα Πλαίσιο	Ερευνητικός σχεδιασμός	Διδακτικός στόχος	Διδακτική μέθοδος	Αποτελέσματα
Bouck, Bassette, Taber-Doughty, Flanagan & Szwed (2009)	N=3; Ελαφριά ΝΚ Δευτ/μια Αμιγής τάξη	Ατομικός σχεδιασμός	Πολ/σμοί	Στυλό FLY™ (pentop computer)	Βελτίωση της επίδοσης και διατήρηση για τουλάχιστον μία εβδομάδα μετά.
Cassel & Reid (1996)	N=2; Ελαφριά ΝΚ Πρωτ/μια Δημοτικό	Ατομικός σχεδιασμός	Επίλυση προβλήματος	Στρατηγική αυτορρύθμισης	Βελτίωση της επίδοσης και διατήρηση για 6 και 8 εβδομάδες μετά.
Chung & Tam (2005)	N=30; Ελαφριά ΝΚ Πρωτ/μια Αμιγείς τάξεις	Σύγκριση ομάδων	Επίλυση προβλήματος	1η ομάδα: παραδοσιακή, 2η ομάδα: αναλυτικά παραδ. (worked examples), 3η ομάδα: γνωστικές στρατηγικές	Τα αναλυτικά παραδείγματα και οι γνωστικές στρατηγικές είχαν καλύτερα αποτελέσματα. Διατήρηση και γενίκευση με νέα προβλήματα.
Dihoff, Brosvic, Epstein & Cook (2005)	N=55; Ελαφριά ΝΚ Πρωτ/μια 4 Δημοτικά	Σύγκριση ομάδων	Προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολ/σμοί, διαιρέσεις	Κάρτες (flashcards) και άμεση ανατροφοδότηση	Βελτίωση της επίδοσης και διατήρηση για μία με δύο εβδομάδες μετά την παρέμβαση.
Fasko (1994α)	N=2; Ελαφριά ΝΚ Πρωτ/μια Δημοτικό	Ατομικός σχεδιασμός	Πολ/σμοί	Καθοδήγηση από συνομηλίκους (tutors)	Οι μαθητές βελτίωσαν την επίδοσή τους στους πολ/σμούς.
Harper, Mallette, Maheady, Bentley & Moore (1995)	N=3; Ελαφριά ΝΚ Πρωτ/μια Αμιγής τάξη	Ατομικός σχεδιασμός	Αφαιρέσεις	Καθοδήγηση από συνομηλίκους (tutors)	Βελτίωση της επίδοσης στο τελικό ερωτηματολόγιο. Μικτά αποτελέσματα 17 μέρες μετά την παρέμβαση.
Hayter, Scott, McLaughlin & Weber (2007)	N=2; Ελαφριά ΝΚ Δευτ/μια Αμιγής τάξη	Ατομικός σχεδιασμός	Προπαίδεια του 4	Κάρτες (flashcards)	Οι μαθητές αύξησαν τις σωστές απαντήσεις τους σε ότι αφορά την προπαίδεια του 4.
Hendler & Weisberg (1992)	N=32; Ελαφριά ΝΚ Πρωτ/μια	Σύγκριση ομάδων	Διατήρηση της ποσότητας	1η ομάδα: συλλογές μάθησης (learning set), 2η ομάδα:	Καλύτερα αποτελέσματα είχε η ομάδα της ισοδυναμίας, μετά οι συλλογές

	Δημοτικό			λεκτικός κανόνας/ συλλογές μάθησης (verbal rule/ learning set), 3η ομάδα: ισοδυναμία (equality), 4η ομάδα-ελέγχου	μάθησης σε συνδυασμό με έναν λεκτικό κανόνα, και τέλος η ομάδα των συλλογών μάθησης.
Horton, Lovitt & White (1992α)	N=7; Ελαφριά ΝΚ Δευτ/μια ΔΑβ	Ατομικός σχεδιασμός	Αφαιρέσεις	Χρήση αριθμομηχανών τσέπης	Καλύτερη επίδοση στις αφαιρέσεις με τη χρήση των αριθμομηχανών τσέπης σε σύγκριση με το χαρτί και το μολύβι.
Jaspers & Van Lieshout (1994)	N=84; Ελαφριά ΝΚ Πρωτ/μια και Δευτ/μια 7 σχολεία	Σύγκριση ομάδων	Επίλυση προβλήματος	1η ομάδα: Η/Υ και ανάλυση κειμένου (text-analysis), 2η ομάδα: Η/Υ και εξωτερική μοντελοποίηση (external-modeling), 3η ομάδα: Η/Υ και ανάλυση κειμένου/ εξωτερική μοντελοπ., 4η ομάδα-ελέγχου	Οι μαθητές που διδάχθηκαν με την ανάλυση κειμένου είχαν καλύτερη επίδοση στη γραπτή αξιολόγηση. Όταν επιτράπηκε η χρήση χειραπτικών υλικών οι μαθητές που διδάχθηκαν με εξωτερική μοντελοποίηση είχαν καλύτερα αποτελέσματα.
Jimenez, Browder & Courtade (2008)	N=3; Μέτρια ΝΚ Δευτ/μια Αμιγής τάξη	Ατομικός σχεδιασμός	Απλή γραμμική εξίσωση	Διδασκαλία στο συγκεκριμένο στάδιο της προσέγγισης CRAγ μαζί με ανάλυση έργου	Επιτυχής η επίλυση μιας γραμμικής εξίσωσης στο συγκεκριμένο στάδιο (με χειραπτικά υλικά).
Lin, Podell & Tournaki-Rein (1994α)	N=58; Ελαφριά ΝΚ Πρωτ/μια Δημοτικό	Σύγκριση ομάδων	Προσθέσεις, αφαιρέσεις	Χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή	Δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ της χρήσης Η/Υ και χαρτιού-μολυβιού. Ωστόσο, η πρώτη ομάδα είχε καλύτερο χρόνο απόκρισης.
Mastropieri, Scruggs & Shiah (1997)	N=4; Ελαφριά ΝΚ Πρωτ/μια Δημοτικό	Ατομικός σχεδιασμός	Επίλυση προβλήματος	Χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή	Βελτίωση της επίδοσης με τη χρήση του υπολογιστή.
Mattingly & Bott (1990α)	N=2; ΔΑ Πρωτ/μια ΔΑ	Ατομικός σχεδιασμός	Πολ/σμοί	Σταθερή καθυστέρηση χρόνου (constant time delay)	Βελτίωση της επίδοσης στους πολ/σμούς.
Miller, Hall & Heward (1995)	N=11; Ελαφριά ΝΚ Πρωτ/μια Αμιγής τάξη	Ατομικός σχεδιασμός	Προσθέσεις, αφιαρέσεις	Δοκιμές σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (time trials)	Αύξηση του πλήθους των πράξεων ανά λεπτό χωρίς να υπάρχουν περισσότερα λάθη.

Morin & Miller (1998)	N=3; Ελαφριά ΝΚ Δευτ/μια Αμιγής τάξη	Ατομικός σχεδιασμός	Πολ/σμοί	Προσέγγιση CRA[γ]	Η χρήση της CRA σε συνδυασμό με άλλες τεχνικές άμεσης διδασκαλίας συνέβαλλε στη βελτίωση της επίδοσης.
Neef, Nelles, Iwata & Page (2003)	N=2; Ελαφριά και μέτρια ΝΚ Μεταλυκειακό πρόγραμμα Αμιγής τάξη	Ατομικός σχεδιασμός	Προσθέσεις, αφαιρέσεις	Διδασκαλία προϋπαρχουσών δεξιοτήτων (precurrent skills) στην επίλυση προβλήματος	Βελτίωση των δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος πρόσθεσης ή αφαίρεσης.
Podell, Tournaki-Rein & Lin (1992[α])	N=50; Ελαφριά ΝΚ Πρωτ/μια Δημοτικό	Σύγκριση ομάδων	Επίλυση προβλήματος	Χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή	Δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές με χρήση Η/Υ και χαρτιού-μολυβιού. Ωστόσο, η πρώτη ομάδα είχε καλύτερο χρόνο απόκρισης.
Rao & Kane (2009)	N=2; Ελαφριά ΝΚ Δευτ/μια Αμιγής τάξη	Ατομικός σχεδιασμός	Αφαιρέσεις	Άμεση προτροπή (simultaneous prompting)	Κατάφεραν να αφαιρούν δύο συγκεκριμένους δεκαδικούς αριθμούς, και διατήρησαν και γενίκευσαν τη δεξιότητα με άλλους δεκαδικούς.
Rao & Mallow (2009)	N=2; Ελαφριά και μέτρια ΝΚ Δευτ/μια Αμιγής τάξη	Ατομικός σχεδιασμός	Πολ/σμοί	Άμεση προτροπή (simultaneous prompting)	Βελτίωση της επίδοσης και γενίκευση απαντώντας σωστά σε όλους τους πολ/σμούς ενός τεστ.
Sante, Laughlin & Weber (2001[δ])	N=2; Ελαφριά ΝΚ Δευτ/μια Αμιγής τάξη	Ατομικός σχεδιασμός	Μονοψήφιοι πολ/σμοί	Κάρτες (flashcards)	Βελτίωση της ακρίβειας στους πολ/σμούς.
Scott (1993[α])	N=2; Ελαφριά ΝΚ Πρωτ/μια ΔΑ	Ατομικός σχεδιασμός	Προσθέσεις, αφαιρέσεις	Πολυαισθητηριακή προσέγγιση με χρήση του προγράμματος TOUCH MATH	Βελτίωση της επίδοσης και διατήρηση ακόμη και χωρίς τη χρήση του TOUCH MATH
Vacc & Cannon (1991[α])	N=4; Μέτρια ΝΚ Πρωτ/μια ΔΑ	Ατομικός σχεδιασμός	Βασικές αριθμητικές δεξιότητες	Καθοδήγηση από συνομηλίκους (tutors) χωρίς αναπηρίες	Ωφέλιμη η καθοδήγηση συνομηλίκων. Η διατήρηση των αποτελεσμάτων 2 χρόνια μετά την παρέμβαση δεν ήταν σταθερή.

Whalen, Schuster & Hemmeter (1996[α])	N=2; Ελαφριά ΝΚ Πρωτ/μια ΔΑ	Ατομικός σχεδιασμός	Προσθέσεις	Σταθερή καθυστέρηση χρόνου (constant time delay)	Απάντησαν σωστά στους εννιά μαθηματικούς υπολογισμούς που διδάχθηκαν και διατήρησαν τις γνώσεις τους 22 εβδομάδες μετά την παρέμβαση.
Young, Baker & Martin (1990[α])	N=5; Μέτρια ΝΚ Πρωτ/μια ΔΑ	Ατομικός σχεδιασμός	Βασικές αριθμητικές δεξιότητες	Διακρίνουσα θεωρία μάθησης (discriminant learning theory)	Βελτίωση της επίδοσης με τη θεωρία της διάκρισης σε σύγκριση με την επίδοσή στη γραμμή βάσης (άμεση διδασκαλία).

α Αναφορά σε Butler, Miller, Lee & Pierce, 2001 β Δεν αναφέρεται
γ Concrete-Representational-Abstract: Συγκεκριμένο στάδιο - Στάδιο Αναπαράστασης - Αφηρημένο στάδιο δ Αναφορά σε Hord & Bouck, 2012

ερευνητές χρησιμοποίησαν ατομικό ερευνητικό σχεδιασμό (single-subject design) (76%), όπου το διδακτικό πείραμα και η περιγραφή των αποτελεσμάτων αφορούσε μόνο την πειραματική ομάδα των μαθητών με νοητική καθυστέρηση. Λιγότεροι ήταν οι ερευνητές που χρησιμοποίησαν ομάδες ελέγχου για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων με τις πειραματικές ομάδες (group comparison) (24%).

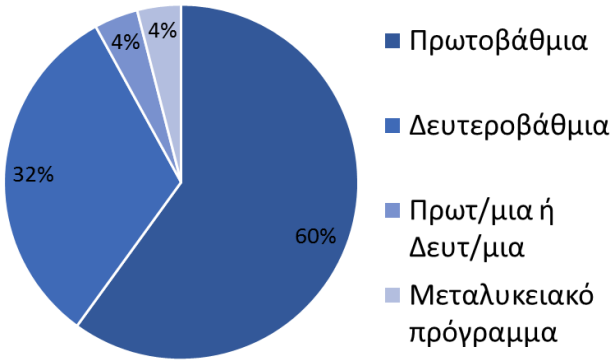
ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ

Στο σύνολο των 25 ερευνών συμμετέχουν 372 μαθητές με νοητική καθυστέρηση. Όσον αφορά στο βαθμό αναπηρίας των συμμετεχόντων, οι περισσότεροι μαθητές έχουν ελαφριά νοητική καθυστέρηση (95,7%), ενώ αρκετά λιγότεροι μαθητές έχουν μέτρια νοητική καθυστέρηση (3,8%) και για κάποιους μαθητές δεν είχαμε πρόσβαση στο συγκεκριμένο στοιχείο (0,5%) (βλ. Γράφημα 1). Η πλειοψηφία των ερευνητών έδωσε έμφαση στην πρωτοβάθμια (60%) ή τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (32%), ενώ μία έρευνα πραγματοποιήθηκε σε επτά διαφορετικά σχολεία από την πρωτοβάθμια έως και τη δευτεροβάθμια (4%) και μία άλλη έρευνα πραγματοποιήθηκε σε μαθητές που παρακολουθούσαν ένα μεταλυκειακό πρόγραμμα (4%) (βλ. Γράφημα 2).

Γράφημα 1: Βαθμός αναπηρίας



Γράφημα 2: Βαθμίδα εκπαίδευσης

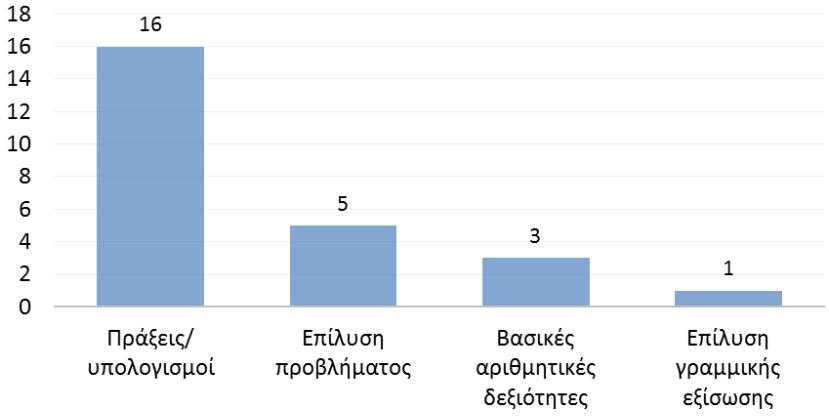


Σε ότι αφορά στο πλαίσιο φοίτησης των συμμετεχόντων η πλειοψηφία αυτών φοιτούσαν σε αμιγή τάξη μαθητών με αναπηρίες (44%). Ωστόσο, αρκετοί ήταν αυτοί που φοιτούσαν σε γενικό σχολείο (32%), ενώ δεν είναι γνωστό το πλαίσιο φοίτησης των συμμετεχόντων για τις υπόλοιπες έρευνες (24%).

ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

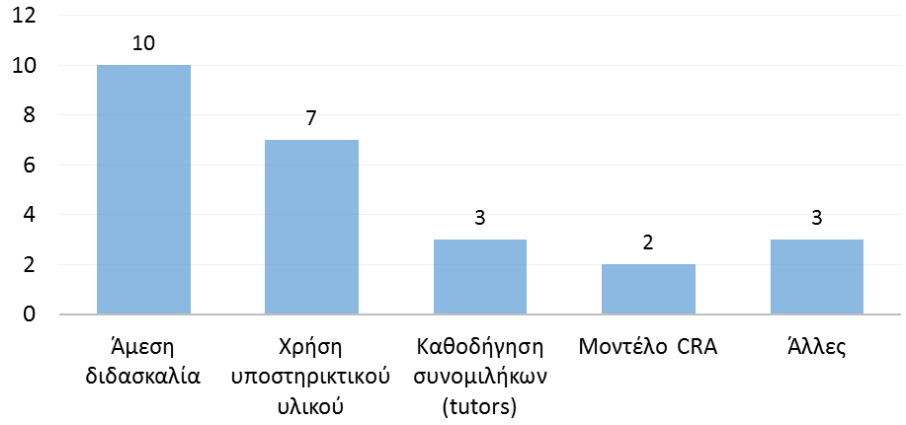
Οι περισσότεροι ερευνητές έδωσαν έμφαση στη διδασκαλία υπολογιστικών δεξιοτήτων (64%), όπως παρουσιάζεται και στο Γράφημα 3. Πιο συγκεκριμένα, το ενδιαφέρον των ερευνητών επικεντρώθηκε στις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις (32%) και τους πολλαπλασιασμούς (28%), ενώ σε μία έρευνα οι μαθητές διδάχθηκαν και τις τέσσερις βασικές πράξεις (4%). Εκτός από τις τέσσερις βασικές πράξεις, όμως, αρκετοί ήταν οι ερευνητές που πραγματοποίησαν διδακτική παρέμβαση με στόχο την επίλυση προβλήματος (20%). Κάποιοι άλλοι μαθητές διδάχθηκαν βασικές αριθμητικές δεξιότητες, όπως η αρίθμηση, η αναγνώριση αριθμών και συμβόλων, η σύγκριση αριθμών, κ.ά. (8%) και η διατήρηση της ποσότητας (4%). Τέλος, ο διδακτικός στόχος μιας έρευνας ήταν η επίλυση μιας αλγεβρικής γραμμικής εξίσωσης (4%).

Γράφημα 3: Διδακτικός στόχος



Σχετικά με τη διδακτική μέθοδο που χρησιμοποίησαν οι ερευνητές, φάνηκε ότι στις περισσότερες παρεμβάσεις προτιμήθηκε η άμεση διδασκαλία με διάφορες τεχνικές, όπως η ανάλυση έργου (task analysis), η σταθερή καθυστέρηση χρόνου (constant time delay), η άμεση προτροπή (simultaneous prompting), η χρήση καρτών (flashcards), οι δοκιμές σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (time trials), κ.ά. (40%) (βλ. Γράφημα 4). Σε αρκετές έρευνες οι μαθητές διδάχθηκαν με τη χρήση υποστηρικτικού υλικού (28%), όπως ο ηλεκτρονικός υπολογιστής (20%), το πρόγραμμα TOUCH MATH (4%) και οι αριθμομηχανές τσέπης (4%). Σε τρεις έρευνες οι μαθητές του δείγματος διδάχθηκαν μέσω της καθοδήγησης συνομηλίκων (tutors) (12%), ενώ σε δύο άλλες έρευνες χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο CRA (Concrete – Representational – Abstract), το οποίο αποτελείται από τρία στάδια: το συγκεκριμένο στάδιο (οι μαθητές εργάζονται με απτικά υλικά), το στάδιο της αναπαράστασης (οι μαθητές εργάζονται με εικόνες) και το αφηρημένο στάδιο (απουσιάζουν τα διάφορα υλικά των δύο προηγούμενων σταδίων) (8%). Οι υπόλοιπες τρεις έρευνες χρησιμοποίησαν διάφορες άλλες διδακτικές μεθόδους, όπως οι γνωστικές στρατηγικές, η αυτορρύθμιση ή η διακρίνουσα θεωρία μάθησης (discriminant learning theory) (12%).

Γράφημα 4: Διδακτική μέθοδος



ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την ανασκόπηση ερευνών των Mastropieri, Bakken και Scruggs (1991, αναφορά στο Butler et al., 2001) για τη διδασκαλία μαθηματικών σε μαθητές με νοητική καθυστέρηση που έγιναν τα έτη 1973 – 1988, φαίνεται πως οι ερευνητές έδωσαν έμφαση στη διδασκαλία βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων, όπως η μέτρηση με ακρίβεια, η αναγνώριση των αριθμών, η εκμάθηση της ώρας και η κατανόηση της ποσότητας. Με την πάροδο του χρόνου, όμως, το ενδιαφέρον των ερευνητών στράφηκε στη διδασκαλία υπολογιστικών δεξιοτήτων και δεξιοτήτων επίλυσης λεκτικών προβλημάτων. Η ακρίβεια και η ευχέρεια στους υπολογισμούς (π.χ. πολλαπλασιασμοί), σύμφωνα με τους ερευνητές, ενισχύει την αυτοπεποίθηση των μαθητών και διευκολύνει την ένταξή τους στη γενική εκπαίδευση. Επίσης, επιτρέπει στους μαθητές να προχωρήσουν στο επόμενο βήμα και την επίλυση προβλήματος (Butler et al., 2001). Από την άλλη πλευρά, σπάνια είναι τα ερευνητικά δεδομένα για τη διδασκαλία αλγεβρικών ή γεωμετρικών εννοιών και δεξιοτήτων (Browder et al., 2012; Jimenez et al., 2008; Parmar, Cawley & Miller, 1994), καθώς μόνο μία έρευνα εστίασε σε αλγεβρικές έννοιες (Jimenez et al., 2008). Όσον αφορά στην εκπαιδευτική βαθμίδα φοίτησης των μαθητών, τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια μετατόπιση του ερευνητικού ενδιαφέροντος στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ανάγκη που είχε εντοπιστεί από τον Butler και τους συνεργάτες του (Butler et al., 2001).

Γενικότερα, οι έρευνες που μελετήθηκαν στην ανασκόπηση έδωσαν έμφαση στη διαδικαστική γνώση και την εκτέλεση αλγορίθμων από τους μαθητές. Τέτοια παραδείγματα είναι η εκμάθηση της προπαίδειας του 4, η εκμάθηση των βημάτων επίλυσης μιας γραμμικής εξίσωσης ή ενός λεκτικού προβλήματος. Οι ερευνητές θέτουν στους μαθητές πολύ περιορισμένα έργα, όπως για παράδειγμα εννέα συγκεκριμένες προσθέσεις, που μόλις φέρουν σε πέρας οι μαθητές ολοκληρώνεται η ερευνητική διαδικασία. Η σύγχρονη έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών δε φαίνεται να αποτυπώνεται σε αυτές τις έρευνες, καθώς παράμετροι όπως, για

παράδειγμα, η επίδραση κοινωνικοπολιτισμικού πλαισίου και τα ενδιαφέροντα των παιδιών δε φαίνεται να λαμβάνονται υπόψη στις προαναφερθείσες έρευνες.

Από την ανασκόπηση δε γίνεται ξεκάθαρο εάν οι μαθητές με νοητική καθυστέρηση δυσκολεύονται να μάθουν έννοιες από άλλες μαθηματικές περιοχές ή αν εκτιμήθηκε από τους ερευνητές ότι οι αλγεβρικές ή οι γεωμετρικές έννοιες δεν είναι σημαντικές για τα παιδιά με νοητική αναπηρία. Το μόνο βέβαιο είναι ότι χρειαζόμαστε έρευνες που να μελετούν εάν η διδασκαλία αλγεβρικών ή γεωμετρικών εννοιών που έχει νόημα για τους μαθητές με νοητική καθυστέρηση είναι ταυτόχρονα και αποτελεσματική. Πρέπει να διερευνηθεί κατά πόσο μπορούν οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με νοητική καθυστέρηση να κατακτήσουν μαθηματικές έννοιες, πέρα από τις απλές βασικές πράξεις, βελτιώνοντας αφενός τις ακαδημαϊκές τους επιδόσεις και αφετέρου τη λειτουργικότητά τους στον κοινωνικό χώρο.

Τα αποτελέσματα της παρούσας ανασκόπησης αναδεικνύουν την ανάγκη για σχεδιασμό και υλοποίηση διδακτικής παρέμβασης σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με νοητική καθυστέρηση η οποία θα βλέπει το μαθητή όχι μόνο ως άτομο που μαθαίνει αλλά και ως κοινωνικό ον με πολλαπλές ταυτότητες: μέλος της οικογένειας, μαθητής, κ.ά.. Έρευνα στο πεδίο η οποία πέρα από τη σχολική τάξη θα επεκτείνεται και στην οικογένεια μπορεί να δώσει χρήσιμες πληροφορίες, για το πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές του δείγματος αποκτούν άτυπη μαθηματική γνώση, για τα ενδιαφέροντά τους, κ.ά. εξασφαλίζοντας ότι οι δραστηριότητες στις οποίες θα κληθούν να εμπλακούν θα έχουν νόημα για τον ίδιους. Επιπλέον σ' αυτή την παρέμβαση, μέσα από μεθόδους και διαδικασίες συμβατές με τις μαθησιακές ανάγκες των μαθητών αξίζει οι ίδιοι να δοκιμαστούν στην κατανόηση και χρήση εννοιών πέρα από τις βασικές υπολογιστικές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bouck, E. C., Bassette, L., Taber-Doughty, T., Flanagan, S. M., & Szwed, K. (2009). Pentop computers as tools for teaching multiplication to students with mild intellectual disabilities. *Education and Training in Developmental Disabilities, 44*(3), 367–380.

Browder, D. M., Trela, K., Courtade, G R., Jimenez, B. A., Knight, V., & Flowers, C. (2012). Teaching mathematics and science standards to students with moderate and severe developmental disabilities. *The Journal of Special Education, 46*(1), 26-35.

Butler, F. M., Miller, S. P., Lee, K., & Pierce, T. (2001). Teaching mathematics to students with mild-to-moderate mental retardation: A review of the literature. *Mental Retardation, 39*(1), 20-31.

Cassel, J., & Reid, R. (1996). Use of a self-regulated strategy intervention to improve word problem-solving skills of students with mild disabilities. *Journal of Behavioral Education, 6*(2), 153–172.

Chung, K. K. H., & Tam, Y. H. (2005). Effects of cognitive-based instruction on mathematical problem solving by learners with mild intellectual disabilities. *Journal of Intellectual and Developmental Disability, 30*(4), 207–216.

Dihoff, R. E., Brosvic, G. M., Epstein, M. L., & Cook, M. J. (2005). Udjunctive role for immediate feedback in the acquisition and retention of mathematical fact series by elementary school students classified with mild mental retardation. *The Psychological Record, 55*(1), 39–66.

Harper, G. E., Mallette, B., Maheady, L., Bentley, A. E., & Moore, J. (1995). Retention and treatment failure in classwide peer tutoring: Implications for further research. *Journal of Behavioral Education, 5*(4), 399–414.

Hayter, S., Scott, E., McLaughlin, T. F., & Weber, K. P. (2007). The use of a modified direct instruction flashcard system with two high school students with developmental disabilities. *Journal of Developmental and Physical Disabilities, 19*(4), 409–415.

Hendler, M., & Weisberg, P. (1992). Conservation acquisition, maintenance, and generalization by mentally retarded children using equality-rule training. *Journal of Experimental Child Psychology, 53*(3), 258–276.

Hord, C., & Bouck, E. C. (2012). Review of academic mathematics instruction for students with mild intellectual disability. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities, 47*(3), 389-400.

Jaspers, M. W. M., & Van Lieshout, E. C. D. M. (1994b). The evaluation of two computerized instruction programs for arithmetic word-problem solving by educable mentally retarded children. *Learning and Instruction, 4*(3), 193–215.

Jimenez, B. A., Browder, D. M., & Courtade, G. R. (2008). Teaching an algebraic equation to high students with moderate developmental disabilities. *Education and Training in Developmental Disabilities, 43*(2), 266-274.

Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2005). Constructivist mathematics education for students with mild mental retardation. *European Journal of Special Needs Education, 20*(1), 107–116.

Mastropieri, M. A., Scruggs, T. E., & Shiah, R.-L. (1997). Can computers teach problem-solving strategies to students with mild mental retardation?: A case study. *Remedial and Special Education, 18*(3), 157–164.

Miller, A. D., Hall, S. W., & Heward, W. L. (1995). Effects of sequential 1-minute time trials with and without inter-trial feedback and self-correction on general and special education students' fluency with mathfacts. *Journal of Behavioral Education, 5*(3), 319–345.

Morin, V. A., & Miller, S. P. (1998). Teaching multiplication to middle school students with mental retardation. *Education and Treatment of Children, 21*(1), 22–36.

Neef, N. A., Nelles, D. E., Iwata, B. a, & Page, T. J. (2003). Analysis of precurrent skills in solving mathematics story problems. *Journal of Applied Behavior Analysis, 36*(1), 21–33.

Parmar, R. S., Cawley, J. F., & Miller, J. H. (1994). Differences in mathematics performance between students with learning disabilities and students with mild retardation. *Exceptional Children, 60*(6), 549-566.

Rao, S., & Kane, M. T. (2009). Teaching students with cognitive impairment chained mathematical task of decimal subtraction using simultaneous prompting. *Education and Training in Developmental Disabilities, 44*(2), 244–256.

Rao, S., & Mallow, L. (2009). Using simultaneous prompting procedure to promote recall of multiplication facts by middle school students with cognitive impairment. *Education and Training in Developmental Disabilities, 44*(1), 80–90.

Η ΠΡΟΚΑΤΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΤΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Κωνσταντίνος Π. Χρήστου
Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
(kpchristou@gmail.com)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Δόθηκε σε 111 μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξης ένα τέστ με πράξεις ανάμεσα σε δοσμένους αριθμούς και αριθμούς που λείπουν (π.χ., γίνεται 9:_=4;). Υπόθεσή μας ήταν ότι η τάση των μαθητών να εφαρμόζουν ιδιότητες των φυσικών αριθμών σε μη-φυσικούς αριθμούς (προκατάληψη του φυσικού αριθμού) επιδρά στο να θεωρούν ότι οι αριθμοί που λείπουν είναι φυσικοί αριθμοί και ότι οι πράξεις δίνουν πάντα συγκεκριμένα αποτελέσματα (π.χ., ο πολ/σμός μεγαλώνει, η διαίρεση μικραίνει). Τα αποτελέσματα υποστήριξαν την υπόθεση: οι μαθητές απάντησαν σημαντικά καλύτερα στα έργα όπου οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί από εκείνα που ήταν μη-φυσικοί, ενώ η χαμηλότερη επίδοση εμφανίστηκε στα έργα που παραβίαζαν τις πεποιθήσεις τους για τ' αποτελέσματα των πράξεων.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα μελέτη εστίασε στη διερεύνηση του φαινομένου της προκατάληψης του φυσικού αριθμού και του τρόπου με τον οποίο αυτή επηρεάζει τις πράξεις ανάμεσα σε αριθμούς, όταν αυτοί αναπαρίστανται με αραβικά ψηφία ή με άλλα σύμβολα όπως γράμματα ή σύμβολα για αριθμούς που λείπουν (π.χ., 3+_=7). Πιο συγκεκριμένα, διερευνήθηκε αν η τάση των μαθητών να θεωρούν ότι η πρόσθεση κι ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνουν τους αριθμούς, ενώ η αφαίρεση κι η διαίρεση τους μικραίνει είναι απόρροια της προκατάληψης για τον φυσικό αριθμό.

Ο όρος προκατάληψη του φυσικού αριθμού χρησιμοποιείται στη διεθνή βιβλιογραφία για να χαρακτηρίσει την τάση των μαθητών να εφαρμόζουν ιδιότητες των φυσικών αριθμών σε μη-φυσικούς αριθμούς (Ni&Zhou, 2005), μια τάση που συχνά οδηγεί σε λάθη και παρανοήσεις λόγω των διαφορών ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς και τους μη-φυσικούς (Smith, Solomon, &Carey, 2005). Συμφωνούμε με κάποιους ερευνητές που υποστηρίζουν ότι αυτή η τάση έχει τις ρίζες της σε μια αρχική κατανόηση του αριθμού, που κατασκευάζεται από πολύ πρώιμη ηλικία, μέσα από την εμπειρία των παιδιών με τη διαδικασία της απαρίθμησης και για το λόγο αυτό μοιάζει με τη μαθηματική έννοια του φυσικού αριθμού (Gelman, 2000; Vosniadou, Vamvakoussi, &Skopeliti, 2008). Για το λόγο αυτό υιοθετούμε τον όρο «προκατάληψη του φυσικού αριθμού» για να περιγράψουμε το φαινόμενο που αρχικά οι Ni και Zhou χαρακτήρισαν ως wholenumberbias (2005). Βασιζόμενοι σε μια τέτοια κατανόηση του αριθμού οι μαθητές έχουν την τάση να θεωρούν ότι οι αριθμοί γενικώς είναι διακριτοί, δηλαδή υπάρχει ο επόμενος και ο προηγούμενος

κάθε δοσμένου αριθμού και δεν υπάρχει κανένας αριθμός ανάμεσα σε δύο ψευτοδιαδοχικούς αριθμούς, για παράδειγμα ανάμεσα στο 0.5 και το 0.6 (Vamvakoussi&Vosniadou, 2010)· ότι οι αριθμοί με τα περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτεροι (π.χ., 2,346>2,8) (Smithetal., 2005)· ότι η πρόσθεση των κλασμάτων γίνεται προσθέτοντας αριθμητές με αριθμητές και παρονομαστές με παρονομαστές (π.χ., 1/2 + 1/3 = 2/5) (Mack, 1995).

Ένα άλλο πεδίο της μαθηματικής δραστηριότητας που θα μπορούσε να επηρεαστεί από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού και το οποίο σχετικά πρόσφατα προσέλκυσε το ενδιαφέρον των ερευνητών είναι οι πράξεις ανάμεσα σε αριθμούς ή/και σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς, δηλαδή η τάση να θεωρείται ότι η πρόσθεση και ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς ενώ η αφαίρεση κι η διαίρεση τους μικραίνει. Πολλοί ερευνητές στο παρελθόν είχαν επισημάνει αυτή την τάση στον τρόπο με τον οποίο λύνουν οι μαθητές λεκτικά προβλήματα (βλ. για παράδειγμα Bell, Swan, &Taylor, 1981) ενώ ο Fischbein (1987), που ήταν πιθανότατα ο πρώτος που παρατήρησε το συγκεκριμένο φαινόμενο, υποστήριξε ότι οι μαθητές συνδέουν κατά απόλυτο τρόπο τις αριθμητικές πράξεις με ορισμένα αποτελέσματα λόγω της ύπαρξης άδηλων, πρωτόγονων μοντέλων για κάθε πράξη. Πιο συγκεκριμένα, υποστήριξε ότι η πρόσθεση είναι συνδεδεμένη με το μοντέλο της συνένωσης συνόλων, η αφαίρεση με το μοντέλο της απομάκρυνσης, ο πολλαπλασιασμός με το μοντέλο της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης και η διαίρεση με το μοντέλο της ίσης μοιρασιάς (Fischbein, 1987; Fischbein, Deri, Nello, &Marino, 1985). Από τη δική μας σκοπιά υποστηρίζουμε ότι τα άδηλα αυτά μοντέλα είναι συμβατά και υποστηρίζονται από την αρχική γνώση των μαθητών για τους φυσικούς αριθμούς και την εμπειρία με πράξεις αποκλειστικά με τέτοιους αριθμούς (Christou&Vosniadou, 2012; Vamvakoussi, VanDooren, &Verschaffel, 2013).

Πιο συγκεκριμένα, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ανάμεσα σε φυσικούς αριθμούς δίνει πάντα ως αποτέλεσμα αριθμούς μεγαλύτερους από τους αρχικούς αριθμούς (εκτός βέβαια αν εμπλέκονται το 0 ή το 1 αντίστοιχα), ενώ η αφαίρεση κι η διαίρεση ανάμεσα σε φυσικούς αριθμούς έχει ως αποτέλεσμα αριθμούς μικρότερους των αρχικών. Αυτό όμως δεν συμβαίνει όταν στις πράξεις εμπλέκονται μη-φυσικοί αριθμοί όπως, για παράδειγμα, συγκεκριμένοι ρητοί αριθμοί. Έτσι, ο πολλαπλασιασμός με αριθμούς μικρότερους της μονάδας έχει ως αποτέλεσμα αριθμούς μικρότερους του πολλαπλασιαστή (π.χ., 8*1/2=4) ενώ η διαίρεση με αριθμό μικρότερο της μονάδας μεγαλώνει τους διαιρετέους (π.χ., 3:1/3=9). Όταν μάλιστα οι μαθητές μάθουν τους αρνητικούς αριθμός, τότε παύει να ισχύει ότι η πρόσθεση πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς κι η αφαίρεση πάντα τους μικραίνει [π.χ., 3+(-2)=5].

Με βάση αυτές τις επισημάνσεις υποστηρίζουμε ότι οι μαθητές, επηρεασμένοι από την πρότερη γνώση και εμπειρία με τους φυσικούς αριθμούς έχουν σχηματίσει κάποιες ισχυρές πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων (π.χ., ο πολ/σμός μεγαλώνει) και στη βάση αυτών των πεποιθήσεων έχουν την τάση να θεωρούν ότι οι πράξεις ανάμεσα σε δοσμένους αριθμούς και αριθμούς που λείπουν θα δίνουν πάντα

αποτελέσματα συμβατά με αυτές τις πεποιθήσεις. Σε μία πρόσφατη μελέτη που διερευνούσε ακριβώς αυτό το ζήτημα η Vamvakoussi και οι συνεργάτες της (Vamvakoussi, VanDooren, &Verschaffel, 2012; Vamvakoussietal., 2013) έδειξαν ότι ακόμα και ενήλικες διαθέτουν τέτοιες διαισθητικές πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων. Παρόλα αυτά, οι ερευνητές αυτοί μόνο εν μέρει ερμήνευσαν τα συγκεκριμένα αποτελέσματα να οφείλονται στην προκατάληψη του φυσικού αριθμού. Πιο συγκεκριμένα, υποστήριξαν ότι η τάση των συμμετεχόντων να θεωρούν, για παράδειγμα, ότι το 5+2x είναι πάντα μεγαλύτερο από 5 οφείλεται στις διαισθητικές τους πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων και συγκεκριμένα ότι η πρόσθεση μεγαλώνει τον αριθμό. Από τη δική μας σκοπιά θεωρούμε ότι αυτές οι απαντήσεις οφείλονται επίσης στη τάση των μαθητών να θεωρούν τα γράμματα ως σύμβολα που αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς, μια τάση που επίσης πηγάζει από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού.

Μια τέτοια άποψη υποστηρίζεται από προηγούμενες μελέτες στις οποίες φάνηκε ότι οι μαθητές ακόμα και μέχρι την Α΄ Λυκείου έχουν την τάση να θεωρούν ότι τα γράμματα, που στην άλγεβρα χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές για να αναπαραστήσουν τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό και με αυτόν τον τρόπο διδάσκονται στους μαθητές, αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς (Christou&Vosniadou, 2012). Στην πλειοψηφία τους οι μαθητές έτειναν να αποδίδουν μόνο φυσικούς αριθμούς στα γράμματα δοσμένων αλγεβρικών παραστάσεων με αποτέλεσμα να θεωρούν ότι το 4γ αναπαριστά φυσικούς αριθμούς πολλαπλάσια του 4, ενώ η παράσταση κ+3 αναπαριστά μόνο φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερους του 3. Όταν μάλιστα οι μαθητές ρωτήθηκαν σε συνέντευξη «ποιο είναι μεγαλύτερο το 5δ ή το 4/δ;», στην πλειοψηφία τους απάντησαν ότι το 5δ είναι «πάντα μεγαλύτερο γιατί είναι πολλαπλασιασμός ενώ το 4/δ είναι διαίρεση» και δικαιολόγησαν την απάντησή τους δοκιμάζοντας με μια σειρά φυσικών αριθμών (όπως 1, 2, 3), και με τον τρόπο αυτόν επιβεβαίωναν την αρχική τους άποψη (Christou&Vosniadou, 2012).

Βασιζόμενοι σε αυτά τα ευρήματα περιμέναμε ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού θα προκαλούσε συγκεκριμένα λάθη στις πράξεις ανάμεσα σε αριθμούς και σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς, η οποία θα έχει διπλή επίδραση: α) θα δημιουργεί στους μαθητές συγκεκριμένες προσμονές όσον αφορά τα αποτελέσματα κάθε πράξης (δηλ. ότι η πρόσθεση κι ο πολ/σμός μεγαλώνουν ενώ η αφαίρεση κι η διαίρεση μικραίνουν), όπως έχουν σημειώσει κι άλλοι ερευνητές, και β) θα ωθεί τους μαθητές να θεωρούν ότι τα σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς μπορούν να αντικατασταθούν μόνο με φυσικούς αριθμούς κι έτσι θα επιβεβαιώνουν τις αρχικές τους προβλέψεις για τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων.

Για να εξετάσουμε την ερευνητική μας υπόθεση που αφορά τη διπλή επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στις πράξεις ανάμεσα σε δοσμένους αριθμούς και αριθμούς που λείπουν, σχεδιάσαμε ειδικά έργα για όλες τις αριθμητικές πράξεις. Κάποια έργα ήταν συμβατά με τις αρχικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των πράξεων ενώ άλλα τις παραβίαζαν· σε κάποια έργα οι αριθμοί

που έλειπαν ήταν φυσικοί αριθμοί, ενώ σε άλλα ρητοί. Αν, όπως υποστηρίζουμε, η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επηρεάζει τους μαθητές όχι μόνο στον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύουν τις πράξεις αλλά και στον τρόπο με τον οποίο κατανοούν τα σύμβολα των αριθμών που λείπουν, τότε θα κάνουν διαφορετικά λάθη στα διαφορετικά έργα.

2. ΜΕΘΟΔΟΣ

2.1 Συμμετέχοντες

111 μαθητές/τριες Ε' και ΣΤ' Δημοτικού συμμετείχαν στην παρούσα μελέτη· 50 ήταν αγόρια και 61 κορίτσια· 33 από την Ε' και 78 από την ΣΤ' τάξη Δημοτικού σχολείου της Ελλάδας. Επιλέχθηκε δείγμα μαθητών των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού σχολείου, ώστε να εξεταστεί ο τρόπος με τον οποίο κατανοούν τις πράξεις οι μαθητές εκείνοι που έχουν σχετικά πρόσφατα διδαχθεί πράξεις με μη-φυσικούς αριθμούς, όπου παραβιάζονται οι αρχικές τους πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων. Ήδη από την Δ' Δημοτικού οι μαθητές μαθαίνουν πράξεις με ρητούς αριθμούς στις οποίες δεν ισχύουν όσα ίσχυαν στους φυσικούς αριθμούς.

2.2 Υλικά

Στους συμμετέχοντες δόθηκε να συμπληρώσουν ένα έντυπο τεστ με 34 ερωτήσεις κλειστού τύπου. Το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου συμπεριλάμβανε 28 έργα/ερωτήσεις με πράξεις ανάμεσα σε δοσμένους αριθμούς και κενά που συμβόλιζαν αριθμούς που λείπουν κι επίσης το αποτέλεσμα της κάθε πράξης (π.χ., 2:_=5). Ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλέξουν αν «γίνεται» ή «δεν γίνεται» να ισχύει μια τέτοια ισότητα, δηλαδή αν γίνεται να βρεθεί τέτοιος αριθμός που θα έδινε στη συγκεκριμένη αναγραφόμενη πράξη το δοσμένο αποτέλεσμα, χωρίς απαραίτητα να βρουν ποιος είναι αυτός ο αριθμός. Οι μαθητές σε αυτή την ηλικία δεν έχουν ακόμα μάθει τη χρήση γραμμάτων ως σύμβολα αριθμών, αλλά χρησιμοποιούν από πολύ νωρίς τα σύμβολα των αριθμών που λείπουν (π.χ., το '_' στη σχέση 4+_=8) με τον ίδιο τρόπο που στο Γυμνάσιο θα χρησιμοποιήσουν γράμματα στη θέση άγνωστων αριθμών.

Επίσης, οι μαθητές αυτής της ηλικίας δεν έχουν ακόμα μάθει τους αρνητικούς αριθμούς κι έτσι δεν έχει ακόμα παραβιαστεί η αρχική πεποίθησή τους ότι η πρόσθεση και η αφαίρεση μεγαλώνει και μικραίνει τους αριθμούς αντίστοιχα. Έτσι, η παρούσα μελέτη εστιάζει στις πράξεις του πολ/σμού και της διαίρεσης. Υπήρχαν τρεις κατηγορίες έργων με αυτές τις πράξεις: 4 έργα στα οποία η αναγραφόμενη πράξη και το αποτέλεσμα ήταν συμβατά με τις αρχικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των πράξεων (δηλαδή ο πολ/σμός μεγάλωνε, ενώ η διαίρεση μίκραινε) και όπου οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί αριθμοί (π.χ., 7×_=21)·

άλλα 4 έργα με αποτελέσματα συμβατά με τις αρχικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των πράξεων αλλά οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί αριθμοί (π.χ., 6×_=11)· και 8 έργα στα οποία παραβιάζονταν οι αρχικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων (π.χ., 2:_=5). Στα αντίστοιχα έργα πρόσθεσης και αφαίρεσης (π.χ., 8+_=3) η σωστή απάντηση για τους μαθητές αυτής της ηλικίας είναι «δεν γίνεται» κι έτσι αυτές οι ερωτήσεις λειτουργούν ως εξουδετερωτές της αυτόματης απάντησης «γίνεται» που είναι και η μόνη σωστή στα έργα πολ/σμού και διαίρεσης.

Στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου δόθηκαν 6 ερωτήσεις κλειστού τύπου με την μορφή ανισωτικής σχέσης ανάμεσα στην πράξη δύο δοσμένων αριθμών και σε ένα δοσμένο αριθμητικό αποτέλεσμα όπου το σύμβολο της πράξης έλειπε· οι μαθητές καλούνταν να επιλέξουν ανάμεσα σε «πολλαπλασιασμό» ή «διαίρεση» την πράξη η οποία θα ικανοποιούσε τη σχέση. Δύο από αυτά τα έργα ήταν συμβατά με την αρχική πεποίθηση των μαθητών ότι ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνει ενώ η διαίρεση μικραίνει, κι αν οι μαθητές τα απαντούσαν βασιζόμενοι σε αυτή τους την πεποίθηση θα απαντούσαν σωστά (π.χ., 3_10>3). Στα υπόλοιπα τέσσερα έργα, αν οι μαθητές απαντούσαν βασιζόμενοι στις αρχικές πεποιθήσεις τους τότε θα απαντούσαν λανθασμένα (π.χ., 6_0.2<6).

Αναλυτικές οδηγίες και παραδείγματα συμπλήρωσης δίνονταν στην αρχή του ερωτηματολογίου κι επίσης δόθηκαν εξηγήσεις για σύμβολα όπως < και > ώστε να αποφευχθεί το ενδεχόμενο λανθασμένων απαντήσεων λόγω μη επαρκούς γνώσης των συμβόλων. Οι μαθητές συμπλήρωσαν τα ερωτηματολόγια στην τάξη τους παρουσία του δασκάλου τους και του ερευνητή, κατά τη διάρκεια της ώρας των μαθηματικών (40΄ που ήταν επαρκής χρόνος για την συμπλήρωση του ερωτηματολογίου).

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών βαθμολογήθηκαν με 0 ενώ οι σωστές με 1. Οι 12 ερωτήσεις που αφορούσαν πρόσθεση κι αφαίρεση αποκλείστηκαν από την ανάλυση που ακολουθεί και αναλύθηκαν μόνες τους στο τέλος. Η αξιοπιστία του ερωτηματολογίου μόνο με τα έργα πολ/σμού και διαίρεσης ήταν αρκετά υψηλή (Cronbach'sAlpha= .706). Επειδή η κατανομή της μεταβλητής που υπολόγισε τη συνολική επίδοση των μαθητών στα έργα αυτά απέκλινε από την κανονική κατανομή (Kolmogorov-Smirnov Z=1.88, p=.002), χρησιμοποιήθηκαν μη-παραμετρικές στατιστικές μέθοδοι για την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Έλεγχος Mann-Whitney έδειξε ότι δεν υπήρχαν στατιστικώς σημαντικές διαφορές στη συνολική επίδοση των μαθητών ανάμεσα στις δύο τάξεις (U=518.5, p=.076) ούτε ανάμεσα στα γένη (U=789.5, p=.405). Για να εξεταστεί η επίδραση τουφαινομένου της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στον πολ/μό και τη διαίρεση δημιουργήθηκαν τρεις επιμέρους μεταβλητές. Η πρώτη υπολόγισε τον μέσο

όρο των απαντήσεων των μαθητών στα έργα που ήταν συμβατά με τις αρχικές τους πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων και στα οποία οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί αριθμοί (Συμβατά με ΦΑ). Η δεύτερη μεταβλητή υπολόγισε το μέσο όρο στα έργα που ήταν μεν συμβατά με τις αρχικές πεποιθήσεις αλλά όπου οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί (Συμβατά με μη-ΦΑ), και η τρίτη υπολόγισε το μέσο όρο στα έργα που παραβίαζαν τις αρχικές πεποιθήσεις των μαθητών όσον αφορά τα αποτελέσματα των πράξεων πολ/σμού και διαίρεσης (Μη-Συμβατά). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Μεταβλητή	N	Min	Max	Διάμεσος	Ενδοτεταρτημοριακό εύρος
Συμβατά με ΦΑ	98	0.25	1.0	1.00	0.25
Συμβατά με μη-ΦΑ	98	0.00	1.0	0.25	0.31
Μη-Συμβατά	98	0.00	1.0	0.00	0.25

Πίνακας 1: Μέσες επιδόσεις των μαθητών στις τρεις κατηγορίες έργων πολ/σμού και διαίρεσης

Όπως ήταν αναμενόμενο, οι μαθητές έδειξαν την υψηλότερη επίδοση στα έργα που ήταν συμβατά με τις αρχικές τους πεποιθήσεις και οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί. Τα ελάχιστα λάθη που εμφανίζονται σε αυτή την κατηγορία δείχνουν ότι τα έργα έγιναν κατανοητά από τους μαθητές και ήταν μέσα στο εύρος των δυνατοτήτων τους. Τα αποτελέσματα ελέγχου WilcoxonSignedRanks υποστήριξαν τη βασική μας υπόθεση για την διπλή επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, καθώς έδειξαν ότι η επίδοση των μαθητών στα έργα που ήταν συμβατά με τις αρχικές τους πεποιθήσεις και ενέπλεκαν φυσικούς αριθμούς ήταν σημαντικά υψηλότερη από τις επιδόσεις στα έργα που ήταν μεν συμβατά με τις πεποιθήσεις τους για τα αποτελέσματα των πράξεων αλλά οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί ($Z= 8.35$, $p<.001$). Επίσης, οι μαθητές σημείωσαν σημαντικά χαμηλότερες επιδόσεις στα έργα που ήταν συμβατά με τις αρχικές τους πεποιθήσεις για τις πράξεις και στις οποίες οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί σε σχέση με τα έργα τα οποία παραβίαζαν τις αρχικές πεποιθήσεις τους για τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων ($Z= 5.05$, $p<.001$).

Στη συνέχεια, εξετάστηκε αν και κατά πόσο η προκατάληψη του φυσικού αριθμού έχει διαφορετική επίδραση στις διαφορετικές πράξεις, δηλαδή αν υπάρχει διαφορά ανάμεσα στα έργα με πολ/σμό και σε αυτά με διαίρεση. Στον Πίνακα 2, όπου παρουσιάζονται οι μέσες επιδόσεις των μαθητών στα έργα των δύο αυτών κατηγοριών, γίνονται εμφανείς κάποιες διαφορές στις επιδόσεις στα έργα τόσο ανάμεσα στις διαφορετικές πράξεις όσο και ανάμεσα στις τάξεις. Έλεγχος WilcoxonSignedRanks έδειξε ότι οι μαθητές επηρεάζονται λιγότερο από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού στον πολ/σμό απ' ότι στη διαίρεση ($Z=2.794$, $p=.005$), ενώ έλεγχος Mann-Whitney έδειξε ότι η επίδραση αυτή στα έργα με

πολ/σμό είναι σημαντικά μικρότερη στην ΣΤ΄ τάξη απ' ότι στην Ε΄ τάξη (U=727.0, p=.006)· αντίστοιχες διαφορές ανά τάξη δεν σημειώνονται για τα έργα με διαίρεση.

Πράξη	N		Min		Max		Διάμεσος		Ενδοτεταρτημοριακό εύρος	
Τάξη	Ε'	Στ'	Ε'	Στ'	Ε'	Στ'	Ε'	Στ'	Ε'	Στ'
Πολ/σμός	29	75	1	1	5	8	2.0	3.0	1.0	2.0
Διαίρεση	29	72	0	0	5	8	2.0	2.0	1.0	1.0

Πίνακας 2: Επιδόσεις των μαθητών στα έργα με διαφορετικές πράξεις

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων του δεύτερου μέρους του ερωτηματολογίου που επίσης εξέταζε την προκατάληψη του φυσικού αριθμού στις πράξεις με πολ/σμό και διαίρεση αλλά με διαφορετικά έργα από τα προηγούμενα, δημιουργήθηκαν δύο μεταβλητές που υπολόγιζαν τις μέσες επιδόσεις στα δύο έργα που ήταν συμβατά με τις αρχικές τους πεποιθήσεις όσον αφορά τα αποτελέσματα των πράξεων και στα υπόλοιπα τέσσερα έργα που παραβίαζαν τις αρχικές τους πεποιθήσεις. Έλεγχος WilcoxonSignedRanks έδειξε σημαντικά καλύτερες επιδόσεις των μαθητών στα έργα της πρώτης κατηγορίας (Mdn=1) σε σχέση με τα έργα της δεύτερης (Mdn=0.5), Z=4.951, p<.001.

Στη συνέχεια αναλύθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών στο πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου στα έργα με πρόσθεση και αφαίρεση. Όπως και στα έργα πολ/σμού και διαίρεσης, οι μαθητές τα πήγαν σημαντικά καλύτερα στα έργα που ήταν συμβατά με τις αρχικές τους πεποιθήσεις όσον αφορά τα αποτελέσματα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Mdn=1) και οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί σε σχέση με τα έργα που ήταν επίσης συμβατά με τις αρχικές τους πεποιθήσεις αλλά οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί (Mdn=.75), Z=8.322, p<.001.

4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι ακόμη και στο τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης κι ενώ οι μαθητές έχουν διδαχθεί πράξεις με μη-φυσικούς αριθμούς ήδη από την Δ΄ Δημοτικού, παρόλα αυτά δείχνουν μια ισχυρή τάση να θεωρούν ότι οι πράξεις έχουν συγκεκριμένα αποτελέσματα, δηλαδή ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς ενώ η διαίρεση τους μικραίνει. Οι πεποιθήσεις αυτές εμφανίστηκαν να είναι αρκετά έντονες καθώς και στα δύο μέρη του ερωτηματολογίου οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα που ήταν συμβατά με τις πεποιθήσεις αυτές ήταν σημαντικά υψηλότερες από τις επιδόσεις τους στα έργα τα οποία τις παραβίαζαν. Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύουν αντίστοιχα αποτελέσματα προηγούμενων μελετών (Fischbeinetal., 1985; Vamvakoussietal., 2012, 2013).

Αυτό που προσθέτει η παρούσα μελέτη στην έρευνα αυτού του φαινομένου είναι ότι οι πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των πράξεων υποστηρίζονται και

από την τάση τους να θεωρούν ότι τα σύμβολα για αριθμούς που λείπουν αναπαριστούν κατά προτεραιότητα φυσικούς αριθμούς. Οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα όπου οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί ήταν στατιστικώς σημαντικά καλύτερες απ' ότι στα έργα που οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί, όταν και στις δύο κατηγορίες οι αρχικές πεποιθήσεις των μαθητών για τα αποτελέσματα των πράξεων δεν παραβιάζονταν. Η τάση των μαθητών να απαντούν, για παράδειγμα, ότι γίνεται 7×_=21 αλλά δεν γίνεται 6×_=11, ενώ και στις δύο περιπτώσεις ο πολ/σμός μεγαλώνει, ερμηνεύεται ως αποτέλεσμα της τάσης τους να σκέφτονται μόνο φυσικούς αριθμούς στη θέση των αριθμών που λείπουν. Αυτό είναι συνεπές με προηγούμενα ευρήματα ότι οι μαθητές εμφανίζουν έντονη τάση να θεωρούν ότι τα γράμματα που χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές στην άλγεβρα αναπαριστούν κατά προτεραιότητα φυσικούς αριθμούς (Christou&Vosniadou, 2012).

Από τη δική μας σκοπιά ερμηνεύουμε και τα δύο παραπάνω ευρήματα να είναι απόρροια μιας γενικότερης προκατάληψης του φυσικού αριθμού που ωθεί τους μαθητές να κατανοούν αδιακρίτως τους αριθμούς και τις πράξεις ανάμεσά τους χρησιμοποιώντας την πρότερη γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς. Στην περίπτωση των αριθμητικών πράξεων ανάμεσα σε δοσμένους αριθμούς και αριθμούς που λείπουν η προκατάληψη αυτή επηρεάζει τους μαθητές με δύο τρόπους: επιδρά στη δημιουργία σθεναρών πεποιθήσεων που αφορούν τα αποτελέσματα των πράξεων, δηλαδή την πεποίθηση ότι η πρόσθεση και ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς ενώ η αφαίρεση κι η διαίρεση τους μικραίνει. Επίσης, η ίδια προκατάληψη ωθεί τους μαθητές να σκέφτονται κατά προτεραιότητα με φυσικούς αριθμούς για τα σύμβολα που αναπαριστούν αριθμούς που λείπουν. Έτσι, ακόμα κι αν κάποιοι μαθητές απέδιδαν (νοητικά) συγκεκριμένους αριθμούς στα κενά ώστε να δοκιμάσουν τα αποτελέσματα των πράξεων, τότε θα είχαν την τάση να δοκιμάζουν μόνο με φυσικούς αριθμούς επιβεβαιώνοντας τις αρχικές τους πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων.

Για να καταφέρουν οι μαθητές να απαλλαγούν από τις αρχικές τους πεποιθήσεις για τα αποτελέσματα των πράξεων και να δεχθούν ότι είναι δυνατόν ο πολ/σμός, για παράδειγμα, να μικρύνει τον αριθμό, θα πρέπει να ξεπεράσουν την προκατάληψη του φυσικού αριθμού. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να καταφέρουν να αναπτύξουν την έννοια του αριθμού πέρα από τα όρια του φυσικού αριθμού και να υιοθετήσουν μια πιο μαθηματικώς εκλεπτυσμένη κατανόηση για τον αριθμό που να είναι πιο κοντά στην μαθηματική έννοια του πραγματικού αριθμού. Αυτού του τύπου η μάθηση αναμένεται να είναι πιο χρονοβόρα και δύσκολη για τους μαθητές, επειδή απαιτεί αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνώσης τους για τους αριθμούς, η οποία υποστηρίζεται όχι μόνο από την καθημερινή εμπειρία με τους φυσικούς αριθμούς αλλά κι από τα πρώτα χρόνια της συστηματικής διδασκαλίας των αριθμών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου (Vosniadouetal., 2008). Στα αποτελέσματά μας άλλωστε δεν εμφανίστηκαν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις επιδόσεις των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης, κάτι που δείχνει ότι οι μαθητές δεν αλλάζουν εύκολα τις πεποιθήσεις τους.

Ένα καλό βήμα για να δεχθούν οι μαθητές την ανατροπή των αρχικών τους πεποιθήσεων για τα αποτελέσματα των πράξεων, θεωρούμε ότι είναι να γίνουν ενήμεροι για τις πεποιθήσεις τους αυτές, καθώς συνήθως αυτές δεν βρίσκονται υπό τον συνειδητό τους έλεγχο (Vosniadouetal., 2008). Ειδικά σχεδιασμένες διδακτικές παρεμβάσεις με χρήση στρατηγικών όπως η πρόκληση γνωστικής σύγκρουσης θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στην κατεύθυνση αυτή. Η χρήση αντιπαραδειγμάτων στα οποία, για παράδειγμα, ο πολ/σμός μικραίνει και η διαίρεση μεγαλώνει, θα μπορούσαν να βοηθήσουν σε μία αρχική διάψευση από τη μεριά των μαθητών των αρχικών τους πεποιθήσεων αλλά και την υιοθέτηση της στρατηγικής να δοκιμάζουν με τουλάχιστον έναν μη-φυσικό αριθμό κάθε φορά που δίνουν τιμές στις μεταβλητές.

Σημαντικό επίσης είναι να γίνουν ενήμεροι οι δάσκαλοι και οι καθηγητές των μαθηματικών για το παραπάνω φαινόμενο και τις συνέπειές του καθώς τέτοιες αρχικές πεποιθήσεις δεν διαθέτουν μόνο οι μαθητές, αλλά όπως έχει δείξει η βιβλιογραφία, οι πεποιθήσεις αυτές είναι τόσο ισχυρές που εμφανίζονται έντονες ακόμα και σε ενήλικες και ανάμεσα στους ίδιους τους δασκάλους (Post, Cramer, Behr, Lesh, &Harel, 1993).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981).Choice of operation in verbal problems with decimal numbers.*Educational Studies in Mathematics, 12*, 399-420.

Christou, K. P., &Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra.*Mathematical Thinking and Learning, 14*(1), 1-27. doi: 10.1080/10986065.2012.625074

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985).The role of implicit models in solving problems in multiplication and division.*Journal of Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking.*Journal of Applied Developmental Psychology, 21*, 27-37.

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

Post, T. R., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., &Harel, G. (1993).Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. P. Carpenter, E. Fennema& T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 327-362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., &Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults.*The Journal of Mathematical Behavior, 31*, 344– 355.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., &Verschaffel, L. (2013).Brief Report. Educated adults are still affected by intuitions about the effect of arithmetical operations: evidence from a reaction-time study. *Educational Studies in Mathematics 82*(2), 323-330. doi: 10.1007/s10649-012-9432-8

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., &Skopeliti, E. (2008).The framework theory approach to conceptual change.In S. Vosniadou (Ed.), *Handbook of research on conceptual change* (pp. 3-34).Mahwah, NJ: LawrenceErlbaumAssociates.

«ΠΩΣ ΕΡΜΗΝΕΥΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ & ΠΩΣ ΑΥΤΑ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ;»

Στέλλα Α. Δημητρακοπούλου, Κωνσταντίνος Π. Χρήστου

3ο ΓΕΛ Βόλου, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

stelladim@math.uoa.gr, kpchristou@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αποτελείται από δυο μελέτες. Στην Μελέτη Ι εξετάζουμε με ποιους τρόπους κατανοούν οι μαθητές Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου την χρήση γραμμάτων σε αλγεβρικές παραστάσεις και τι τιμές θεωρούν ότι μπορεί να πάρουν. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές αναγνωρίζουν τα γράμματα ως σύμβολα που αναπαριστούν παραπάνω από έναν αριθμούς, αλλά παρόλα αυτά ότι οι αριθμοί αυτοί είναι κατά προτεραιότητα φυσικοί. Στη Μελέτη ΙΙ διερευνήθηκε με ποιες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και κατά πόσο οι αριθμητικές τιμές που τους αποδίδονται είναι φυσικοί αριθμοί. Στην πλειοψηφία τους τα γράμματα εμφανίζονται ως σύμβολα πολλών αριθμών και οι τιμές που τους αποδίδονται είναι μη φυσικοί και φυσικοί αριθμοί σε ίδιο περίπου ποσοστό.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα ερευνητική εργασία εστιάζει στη μελέτη της χρήσης των γραμμάτων ως μαθηματικών συμβόλων και πιο συγκεκριμένα στη χρήση τους ως μεταβλητές στην άλγεβρα. Η μεταβλητή αποτελεί μια από τις θεμελιώδεις έννοιες της άλγεβρας και οι δυσκολίες με την κατανόησή της από τους μαθητές βρίσκεται εδώ και αρκετά χρόνια στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η σχολική άλγεβρα βασίζεται κατά κύριο λόγο στην χρήση των μεταβλητών η κατανόηση των οποίων καθίσταται εξαιρετικά δύσκολη ιδιαίτερα κατά την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα (Küchemann, 1981). Η βιβλιογραφία επισημαίνει έντονες δυσκολίες των μαθητών με τα γράμματα, ενώ πολλά από τα λάθη και οι χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά του Γυμνασίου και του Λυκείου συχνά συνδέονται με τις δυσκολίες αυτές (Rosnick, 1981; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005).

Για την διερεύνηση αυτού του ζητήματος σχεδιάσαμε δυο Μελέτες. Στην Μελέτη Ι στόχος ήταν να εξετάσουμε με ποιους τρόπους κατανοούν οι μαθητές την χρήση των γραμμάτων που εμφανίζονται ως μεταβλητές σε αλγεβρικές παραστάσεις. Η Μελέτη ΙΙ εξέτασε τον τρόπο χρήσης των μεταβλητών στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών των τριών τάξεων Α΄, Β΄ & Γ΄ Γυμνασίου. Τα σχολικά βιβλία αποτελούν την κύρια πηγή άντλησης του διδακτικού υλικού για κάθε εκπαιδευτικό και μαθητή, για την ελληνική πραγματικότητα, καθόσον τα αναλυτικά προγράμματα και η διδακτέα ύλη

σε όλες τις σχολικές βαθμίδες καθορίζεται σχεδόν αποκλειστικά από αυτά (Ματσαγγούρας, 2006). Ο τρόπος εμφάνισης των μεταβλητών στα σχολικά βιβλία θα μπορούσε να ρίξει λίγο ακόμα φως στις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές και στα λάθη που κάνουν με τη χρήση των γραμμάτων ως σύμβολα αριθμών στην άλγεβρα.

2. ΜΕΛΕΤΗ Ι

Οι τρόποι κατανόησης της έννοιας της μεταβλητής και τα λάθη από τους μαθητές έχουν απασχολήσει εδώ και πολλά χρόνια τους ερευνητές. Ένα από τα λάθη αυτά είναι η τάση των μαθητών να ερμηνεύουν τις μεταβλητές «θεσιακά», για παράδειγμα στην αλγεβρική παράσταση 3n θέτουν στη θέση του n έναν συγκεκριμένο φυσικό αριθμό π.χ. n=5 μετατρέποντας την αρχική παράσταση στον αριθμό 35 (Küchemann, 1981). Κάποιοι μαθητές θεωρούν ότι τα γράμματα αναπαριστούν αντικείμενα (π.χ., μ: τα μολύβια) ή συντομογραφίες (β: το βάρος) και όχι αριθμούς (MacGregor & Stacey, 1997). Επίσης, ορισμένες φορές αδυνατούν να ερμηνεύσουν τη σημασία των γραμμάτων-μεταβλητών και να εκτελέσουν τις πράξεις μη γνωρίζοντας την αξία τους (Warren, 1998) όπως επίσης και να χειριστούν τις μεταβλητές σε σχέσεις που περιέχουν παραπάνω από ένα γράμματα, όπως π.χ. στη σχέση y=x+7 (Chazan & Yerushalmy, 2003).

Στην παρούσα μελέτη βασιζόμενοι στην ταξινόμηση του Küchemann (1981) και στην κατηγοριοποίηση των Dogbey και Kersaint (2012) κατατάξαμε τις απαντήσεις των μαθητών στις παρακάτω κατηγορίες: α) «Ετικέτα-Επιγραφή», αν η απάντηση του μαθητή αφορούσε ένα γεωμετρικό ή διανυσματικό μέγεθος, για παράδειγμα αν έλεγε ότι η μεταβλητή συμβόλιζε το βάρος ή μια δύναμη ή μια πλευρά ενός γεωμετρικού σχήματος, β) «Σταθερά», αν η απάντηση του μαθητή περιέγραφε μια σταθερή ποσότητα συγκεκριμένης αριθμητικής τιμής, για παράδειγμα π, g, γ) «Συγκεκριμένος αριθμός», αν η απάντηση του μαθητή περιέγραφε τις μοναδικές τιμές (μια ή το πολύ δυο γνωστές ή άγνωστες τιμές) που θα μπορούσε να λάβει η μεταβλητή, όπως για παράδειγμα τους αριθμούς 2 ή 3, δ) «Γενικευμένος αριθμός», αν η απάντηση του μαθητή εξέφραζε την άποψη ότι η μεταβλητή μπορούσε να αντικατασταθεί από τουλάχιστον έναν οποιοδήποτε αριθμό ή οποιοδήποτε άλλο γράμμα και ε) «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες», αν η απάντηση του μαθητή ήταν ότι οι μεταβλητές εξέφραζαν μια σχέση συν-μεταβολής ή μια συναρτησιακή σχέση δυο μεγεθών, όπως για παράδειγμα στη συνάρτηση y=3x+2.

Διάφορες μελέτες έχουν δείξει ότι έστω κι αν οι μαθητές σχετικά εύκολα κατανοούν ότι τα γράμματα στην άλγεβρα δεν αναπαριστούν αντικείμενα αλλά αριθμούς, έχουν παρόλα αυτά την τάση να θεωρούν ότι αυτά αναπαριστούν έναν συγκεκριμένο αριθμό και μόνο αργότερα κατανοούν τη χρήση τους ως γενικευμένων αριθμών, δηλαδή ως σύμβολα που μπορούν να αναπαραστήσουν ένα σύνολο τιμών (Küchemann 1981). Μέχρι πρόσφατα όμως δεν υπήρχαν στη βιβλιογραφία μελέτες που να εξετάζουν το ζήτημα του τι τιμές αποδίδουν οι μαθητές στα γράμματα, από τη στιγμή που τα έχουν κατανοήσει ως γενικευμένους αριθμούς. Σχετικά πρόσφατα σε

μία σειρά μελετών του Χρήστου και των συνεργατών του, διερευνήθηκε ακριβώς αυτό το ερώτημα με συνεντεύξεις και ερωτηματολόγια ανοικτού και κλειστού τύπου (Christou & Vosniadou, 2012). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές ακόμα και μέχρι την Α΄ Λυκείου εμφανίζουν έντονη την τάση να θεωρούν ότι τα γράμματα στις αλγεβρικές παραστάσεις αναπαριστούν κατά προτεραιότητα φυσικούς αριθμούς. Λόγω αυτής της τάσης οι μαθητές θεωρούσαν ότι το 4γ αναπαριστά φυσικούς αριθμούς πολλαπλάσιους του 4, ότι το κ+3 φυσικούς μεγαλύτερους του 2 και ότι το –β αρνητικούς ακέραιους αριθμούς. Οι ερευνητές ερμήνευσαν την τάση αυτή των μαθητών ως αποτέλεσμα μια γενικότερης «προκατάληψης του φυσικού αριθμού» φαινόμενο σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς στην κατανόηση των μη-φυσικών αριθμών όπως οι ρητοί και οι αρνητικοί αριθμοί.

Σε προηγούμενη μελέτη τους οι Asquith, Stephens, Knuth και Alibali (2007) είχαν ρωτήσει 373 μαθητές ηλικίας 12-14 ετών τι θεωρούν ότι αναπαριστά το n στην αλγεβρική παράσταση 2n+3 και είχαν επίσης ζητήσει από 122 μαθητές των ίδιων βαθμίδων να συγκρίνουν δυο αλγεβρικές παραστάσεις, τις 3n, n+6. Η μελέτη τους έδειξε ότι οι μαθητές στην πλειοψηφία τους απαντούσαν ότι το γράμμα θα μπορούσε να αναπαραστήσει οποιονδήποτε αριθμό και ότι το ποια παράσταση ήταν μεγαλύτερη εξαρτιόταν από την τιμή της μεταβλητής. Σε παραπλήσια μελέτη τους οι Christou και Vosniadou (2012) ζήτησαν με μορφή συνεντεύξεων από μαθητές της Α΄ Λυκείου να συγκρίνουν αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν γράμματα όπως για παράδειγμα «ποιο είναι μεγαλύτερο το 5δ ή το 4/δ» Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι στην πλειοψηφία τους οι μαθητές έλεγαν ότι το 5δ είναι πάντα μεγαλύτερο γιατί είναι πολλαπλασιασμός και ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει έναν αριθμό και υποστήριξαν την απάντησή τους αυτή αποδίδοντας στο γράμμα μια σειρά από φυσικούς αριθμούς. Στην ερώτηση του ερευνητή «θα μπορούσες να δοκιμάσεις και με κάποιον άλλο αριθμό» στην πλειοψηφία τους οι μαθητές συνέχιζαν να αποδίδουν μόνο φυσικούς αριθμούς.

Στην παρούσα Μελέτη θελήσαμε να επεκτείνουμε τις έρευνες αυτές, που εν συντομία περιγράψαμε παραπάνω, και να ελέγξουμε αν οι μαθητές μπορούσαν να μεταβάλουν την γνώμη τους και να δώσουν πιο εκλεπτυσμένες απαντήσεις όταν τους δίνονται περισσότερες υποδείξεις.

2.1 Μέθοδος

2.1.1. Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στη Μελέτη Ι ήταν 86 συνολικά μαθητές, 22 της Α΄, 20 της Β΄, 23 της Γ΄ Γυμνασίου και 21 της Α΄ Λυκείου (44 αγόρια & 42 κορίτσια).

2.2.2. Υλικά-Διαδικασία

Δώσαμε μέσα από την διαδικασία των προσωπικών συνεντεύξεων στους μαθητές τα δύο ερωτήματα που χρησιμοποίησαν στην έρευνά τους οι Asquith και συνεργάτες (2007). Στην 1η Φάση τους δώσαμε την αλγεβρική παράσταση [2β+3] και τους ρωτήσαμε τι παρίστανε το σύμβολο β. Στην 2η Φάση της Μελέτης Ι τους δώσαμε να συγκρίνουν τις αλγεβρικές παραστάσεις [3ν, ν+6] και στη συνέχεια τους ζητήσαμε να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Στην 3η Φάση τους ζητήσαμε να απαντήσουν στο ερώτημα με ποιους αριθμούς θα μπορούσαν να αντικαταστήσουν το ν στις αλγεβρικές παραστάσεις [3ν, ν+6]. Και στις τρεις Φάσεις χρησιμοποιήθηκαν όλο και πιο έντονες υποδείξεις που ήταν: i) για την 1η Φάση: τι άλλο θα μπορούσε να βάλεις στη θέση του β; υπάρχει κάτι άλλο που θα μπορούσε να αντικαταστήσει το β; ii) Για το 2ο ερώτημα: υπάρχει περίπτωση να μην ισχύει η αρχική σου απάντηση; Ισχύει πάντα αυτό, αν βάλεις κάποιον άλλον αριθμό; iii) Για το 3ο ερώτημα: άλλους αριθμούς, άλλα είδη αριθμών γνωρίζεις που μπορεί να πάρει το ν; - με ποια άλλα είδη αριθμών θα μπορούσες να αντικαταστήσεις το ν; - οι αριθμοί που αναφέρεις είναι όλοι θετικοί ακέραιοι, άλλους αριθμούς γνωρίζεις; Και στις τρεις φάσεις καταγράφηκαν τόσο οι αρχικές απαντήσεις των μαθητών όσο και οι μετά τις υποδείξεις τελικές απαντήσεις τους.

2.2.3. Αποτελέσματα

Στον παρακάτω Πίνακα Ι παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην 1η Φάση ανά κατηγορία, όπως οι κατηγορίες αυτές περιγράφηκαν στην εισαγωγή. Αν και υπήρξαν κάποιες διαφορές ανά τάξη, εδώ παρουσιάζονται τα ποσοστά των αποτελεσμάτων αυτών συνολικά και για τις 4 τάξεις. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1 το μεγαλύτερο ποσοστό στις αρχικές και στις μετά τις υποδείξεις τελικές απαντήσεις των μαθητών ανήκε στην κατηγορία «Γενικευμένος αριθμός» δηλαδή ήταν απαντήσεις του τύπου: «το γράμμα συμβολίζει τουλάχιστον έναν αριθμό» ή «οποιοδήποτε άλλο γράμμα». Λιγότερες ήταν οι απαντήσεις που ανήκαν στην κατηγορία «Ετικέτα-επιγραφή», δηλαδή απαντήσεις του τύπου: «το γράμμα συμβολίζει το βάρος» ή «μια πλευρά» ή «την κλίση μιας ευθείας» κι ακόμα λιγότερες οι απαντήσεις που ανήκαν στην κατηγορία «Συγκεκριμένος αριθμός» δηλαδή απαντήσεις του τύπου «το γράμμα συμβολίζει έναν αριθμό το 2 ή το 3» ή συμβολίζει «μια εξίσωση». Δεν υπήρξαν απαντήσεις που ανήκαν στης κατηγορίες «Σταθερά» και «Συμμεταβαλλόμενες Ποσότητες».

Κατηγορίες Μεταβλητών	Αρχικές Απαντήσεις	Τελικές Απαντήσεις
Ετικέτα- Επιγραφή	13 (15%)	10 (12%)
Συγκεκριμένος Αριθμός	9 (11%)	6 (7%)
Γενικευμένος Αριθμός	64 (74%)	70 (81%)
Σύνολο	86 (100%)	86 (100%)

Πίνακας 1: Συχνότητες και ποσοστά κατηγοριών αρχικών/τελικών απαντήσεων

Τα αποτελέσματα της 2ης Φάσης, που αφορούσε την σύγκριση των αλγεβρικών παραστάσεων, έδειξαν ένα χαμηλό ποσοστό (17%) των μαθητών να έχουν δώσει τη σωστή απάντηση δηλαδή ότι «το ποιο είναι μεγαλύτερο εξαρτάται από το ν». Το 83% των απαντήσεων ήταν λανθασμένες απαντήσεις, για παράδειγμα απαντήσεις του τύπου: «το 3ν είναι μεγαλύτερο γιατί εκφράζει πολλαπλασιασμό» ή «το ν+6 είναι μεγαλύτερο από το 3ν γιατί όσο και να είναι το ν το 6 είναι μεγαλύτερο του 3». Μετά από τις υποδείξεις που τους δόθηκαν ένα ποσοστό (33%) από τις απαντήσεις των μαθητών άλλαξε και δόθηκε τελικά η σωστή απάντηση.

Τα αποτελέσματα της 3ης φάσης που αφορούσε το είδος των αριθμών με τα οποία οι μαθητές αντικαθιστούσαν τις μεταβλητές έδειξαν ότι σε ένα υψηλό ποσοστό (83%) οι μαθητές απαντούσαν αντικαθιστώντας τις μεταβλητές αποκλειστικά με φυσικούς αριθμούς και μόνον μετά τις υποδείξεις ορισμένες απαντήσεις (το 56% από τις απαντήσεις που αρχικά εντάχθηκαν στους φυσικούς αριθμούς) άλλαξαν μετά από τις υποδείξεις από τη μεριά του ερευνητή (βλ Πίνακας 2).

Είδη αριθμών	Αρχική απάντηση	Τελική απάντηση
Φυσικοί αριθμοί	71 (83%)	31 (36%)
Μη-φυσικοί αριθμοί	15 (17%)	55 (64%)

Πίνακας 2: Συχνότητες και ποσοστά φυσικών-μη φυσικών αριθμών

Τα αποτελέσματα της παραπάνω μελέτης υποστήριξαν τα αποτελέσματα προηγούμενων μελετών ότι οι μαθητές έχουν την τάση να θεωρούν τα γράμματα ως σύμβολα που αναπαριστούν παραπάνω από έναν αριθμούς (Asquith και συνεργάτες, 2007). Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι οι αριθμοί αυτοί είναι πραγματικοί αριθμοί, όπως έχουν διδαχθεί στο σχολείο. Αντίθετα, η τρίτη φάση της μελέτης υποστήριξε τα ευρήματα προηγουμένων μελετών (Christou & Vosniadou, 2012) ότι οι μαθητές κατά προτεραιότητα θεωρούν τα γράμματα ως σύμβολα φυσικών αριθμών και μόνο μετά από έντονες υποδείξεις ορισμένοι από αυτούς τους αποδίδουν τιμές και μη-φυσικών αριθμών.

3. ΜΕΛΕΤΗ ΙΙ

Στην Μελέτη ΙΙ θελήσαμε να ελέγξουμε με ποιες και πόσες διαφορετικές μορφές εμφανίζονται τα γράμματα ως μεταβλητές στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών των τριών τάξεων Α΄, Β΄ & Γ΄ Γυμνασίου και κατά πόσο οι αριθμητικές τιμές που αποδίδονται σε αυτές είναι φυσικοί αριθμοί. Εστιάζουμε στα βιβλία καθώς μέσα από τα βιβλία μπορούμε να αποκτήσουμε μια καλή ιδέα στο τι προβλέπεται για τα σχολικά μαθηματικά, ποια σημασία δίνεται σε ποιες έννοιες και με ποιον τρόπο (McKnight και συνεργάτες, 1987; Reys, R., Reys, B., Lapan, Holliday, & Wasman, 2003). Επίσης, καθόσον οι παιδαγωγικές πρακτικές των δασκάλων-καθηγητών επηρεάζονται άμεσα από τις διδακτικές προσεγγίσεις του παρεχόμενου διδακτικού υλικού, θα μπορούσαμε να εικάσουμε και τον τρόπο με τον οποίο παρέχεται αυτή η γνώση στους μαθητές (Schmidt και συνεργάτες, 2001). Στο βαθμό που μπορούμε να γνωρίζουμε ελάχιστες μελέτες υπάρχουν που να εξετάζουν τον τρόπο παρουσίασης της έννοιας της μεταβλητής στα σχολικά εγχειρίδια.

Η παρούσα μελέτη βασίζεται σε μια πρόσφατη έρευνα των Dogbey και Kersaint (2012) που ασχολήθηκε ακριβώς με αυτό το ζήτημα και εξέτασε την εμφάνιση των μεταβλητών σε δώδεκα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών των Η.Π.Α. Τα αποτελέσματά της μελέτης τους αυτής έδειξαν ως επικρατέστερες τις κατηγορίες «Επιγραφή» και «Συγκεκριμένος αριθμός» ενώ η κατηγορία «Γενικευμένος αριθμός» είχε σχετικά χαμηλή συχνότητα εμφάνισης.

Με βάση τα ευρήματα αυτά αναμέναμε ότι στην Μελέτη ΙΙ κυρίαρχη κατηγορία εμφάνισης των μεταβλητών θα ήταν η «Ετικέτα –Επιγραφή» και η «Συγκεκριμένος αριθμός» και πιο σπάνια οι μεταβλητές θα εμφανίζονταν με τις πιο εκλεπτυσμένες μορφές του «Γενικευμένου αριθμού» και των «Συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων». Επίσης πήγαμε ένα βήμα παρά πέρα και εξετάσαμε το είδος των αριθμών που αποδίδονται στις μεταβλητές στα σχολικά βιβλία, δηλαδή τη συχνότητα εμφάνισης των φυσικών και των μη-φυσικών αριθμών, όπως των κλασμάτων, των δεκαδικών ή των αρνητικών αριθμών, ως τιμών που αποδίδονται στα γράμματα μέσα στα σχολικά εγχειρίδια. Καθώς, στο βαθμό που μπορούμε να γνωρίζουμε, δεν υπάρχει προηγούμενη μελέτη που να εξετάζει αυτό το ζήτημα, δεν μπορούμε να εκφράσουμε κάποια υπόθεση και ούτε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας.

3.1. Μέθοδος -Υλικά/Διαδικασία

Για τη μελέτη του τρόπου εμφάνισης των μεταβλητών επιλέχθηκε ως μέθοδος η ανάλυση περιεχομένου στα νέα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου του Οργανισμού Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. Στην 1η φάση εξετάσθηκε με ποιες και πόσες διαφορετικές μορφές εμφανίζονταν τα γράμματα ως μεταβλητές και στη 2η φάση ελέγχθηκε κατά πόσο οι αριθμητικές τιμές που αποδίδονται στις μεταβλητές είναι φυσικοί αριθμοί. Κατά την συλλογή των δεδομένων στην 1η φάση επισημάνθηκαν όλες οι μεταβλητές που εμφανίζονταν σε κάθε σελίδα του σχολικού βιβλίου κάθε τάξης και στη συνέχεια κατηγοριοποιήθηκαν σε μια από τις πέντε

κατηγορίες εμφάνισης μορφών των μεταβλητών, όπως περιγράφηκαν παραπάνω στην Μελέτη Ι, δηλαδή στις: α) «Ετικέτα-Επιγραφή», αν η μεταβλητή απεικόνιζε μια έννοια αλγεβρική ή γεωμετρική η οποία μπορούσε να έχει αριθμητική αναφορά, για παράδειγμα ρ-ακτίνα κύκλου, α-πλευρά τριγώνου, β) «Σταθερά», αν η μεταβλητή περιέγραφε μια σταθερή ποσότητα συγκεκριμένης αριθμητικής τιμής, για παράδειγμα π, g ή e, π.χ. στη σχέση Ε=πρ2, γ) «Συγκεκριμένος αριθμός», αν περιέγραφε τις μοναδικές τιμές (μια ή το πολύ δυο γνωστές ή άγνωστες τιμές) που μπορούσε να λάβει η μεταβλητή, για παράδειγμα στην επίλυση της εξίσωσης χ-4=1, δ) «Γενικευμένος αριθμός», όταν η μεταβλητή μπορούσε να λάβει είτε παραπάνω από δυο τιμές (γνωστές ή άγνωστες) είτε εξέφραζε μοτίβα ή αλληλουχίες συνόλου αριθμών που παρείχαν μια διαπίστωση, όπως για παράδειγμα στην επίλυση της ανίσωσης 5x+2>3 ή στην σχέση α+β=β+α και ε) «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες» όταν οι μεταβλητές εξέφραζαν μια σχέση συν-μεταβολής ή μια συναρτησιακή σχέση δυο μεγεθών, όπως για παράδειγμα στις συναρτήσεις y=ax+b. Στη 2η φάση της Μελέτης ΙΙ εξετάσαμε αν οι μεταβλητές που εμφανίζονταν στα βιβλία με την μορφή ενός μόνο γράμματος αντικαθιστούνταν από φυσικούς ή μη-φυσικούς αριθμούς. Στην κατηγορία «μη-φυσικοί» τοποθετήθηκαν οι αρνητικοί ακέραιοι, οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί.

3.2. Αποτελέσματα

Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της 1ης φάσης συνολικά και ανά τάξη. Σε αντίθεση με τα αποτελέσματα των Dogbey και Kersaint (2012) τα αποτελέσματα της δικής μας μελέτης έδειξαν ως επικρατέστερη κατηγορία την κατηγορία «Γενικευμένος αριθμός» με ποσοστό 34% ενώ έπονταν η κατηγορία «Ετικέτα- Επιγραφή» με 23%. Τρίτες στη σειρά εμφανίστηκαν οι κατηγορίες «Συγκεκριμένος αριθμός» & «Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες» με ποσοστό 20% και τελευταία η κατηγορία «Σταθερά» με ποσοστό 3%.

Τάξη	Ετικέτα	Σταθερά	Συγ/ος Αρ	Γεν/ος Αρ	Συμ/ες Ποσ	Σύνολο
Α΄Γυμν	71 (24%)		79 (27%)	116 (39%)	31 (10%)	297(18%)
Β΄Γυμν	180(33%)	49 (8%)	83 (15%)	75 (14%)	163 (30%)	550(32%)
Γ΄Γυμν.	145 (17%)	18 (2%)	179 (21%)	379 (44%)	138 (16%)	859(50%)
Σύνολο	396 (23%)	67 (3%)	341 (20%)	570 (34%)	332 (20%)	1706(100%)

Πίνακας 3: Συχνότητες και ποσοστά κατηγοριών των μεταβλητών ανά τάξη

Τα αποτελέσματα του 2ου Σταδίου της Μελέτης ΙΙ που αφορούσαν το είδος των αριθμών που ελάμβαναν οι μεταβλητές στα σχολικά βιβλία έδειξαν ότι τα ποσοστά εμφάνισης των μεταβλητών ως φυσικών αριθμών (48%) έναντι των μη-φυσικών

αριθμών (52%) ήταν περίπου τα ίδια (βλ. Πίνακα 4).Στην 1η φάση καταγράψαμε τι μορφή έχει και ποια είναι η χρήση κάθε γράμματος σε κάθε διδακτική σελίδα κι έτσι ανιχνεύσαμε συνολικά 1706 μεταβλητές και στα τρία βιβλία τις οποίες στη συνέχεια κατατάξαμε σε μια από τις πέντε κατηγορίες, λαμβάνοντας υπόψη ορισμένες δεσμεύσεις για την συχνότητα εμφάνισής τους. Στην 2η φάση καταγράψαμε μόνο τις μεταβλητές οι οποίες αντικαθιστούνταν από έναν συγκεκριμένο αριθμό φυσικό ή μη φυσικό και τις καταχωρήσαμε αντίστοιχα στις δυο αυτές κατηγορίες ανιχνεύοντας έτσι συνολικά 842 μεταβλητές. Για τον λόγο αυτό το σύνολο των μεταβλητών στον Πίνακα 3 και Πίνακα 4 δεν είναι το ίδιο.

Τάξη	Φυσικοί Αριθμοί	Μη-Φυσικοί Αριθμοί	Σύνολο
Α΄ Γυμν/ου	116 (68%)	55 (32%)	171 (100%)
Β΄ Γυμν/ου	164 (44%)	211 (56%)	375 (100%)
Γ΄ Γυμν/ου	123 (42%)	173 (58%)	296 (100%)
Σύνολο	403 (48%)	439 (52%)	842 (100%)

Πίνακας 4: Συχνότητες και ποσοστά φυσικών-μη φυσικών αριθμών ανά τάξη

4. ΓΕΝΙΚΗ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η 1η φάση της Μελέτης Ι έδειξε ότι όταν οι μαθητές ερωτηθούν τι αναπαριστά ένα γράμμα σε μια αλγεβρική παράσταση απαντούν ότι αναπαριστά οποιονδήποτε αριθμό δείχνοντας ότι στην πλειοψηφία τους κατανοούν την χρήση των γραμμάτων ως «Γενικευμένο αριθμό». Το αποτέλεσμα αυτό είναι συμβατό με προηγούμενες μελέτες (Asquith και συνεργάτες, 2007) και σε μια πρώτη ανάγνωση υποδήλωνε την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής με έναν εκλεπτυσμένο μαθηματικά τρόπο.

Στη δεύτερη όμως φάση, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να συγκρίνουν στοιχειώδεις αλγεβρικές παραστάσεις και τους δόθηκαν ενισχύσεις όπως: «υπάρχει περίπτωση να μην ισχύει η αρχική σου απάντηση; Ισχύει πάντα αυτό; αν βάλεις κάποιον άλλον αριθμό;» τότε φάνηκε πως οι μαθητές δεν κατανοούσαν την μεταβλητή ως γενικευμένο αριθμό με τη μαθηματική έννοια που δίνουμε στον όρο. Πολλοί από τους μαθητές φάνηκε ότι κατανοούν τα γράμματα ως σύμβολα παραπάνω του ενός αριθμού, θεωρώντας όμως ότι αυτές οι τιμές είναι κατά προτεραιότητα φυσικοί αριθμοί και όχι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Ένα ποσοστό (56%) από αυτούς οι οποίοι αρχικά απάντησαν με φυσικούς αριθμούς, απέδωσαν έστω και μία μη-φυσική τιμή στις μεταβλητές μετά από τις υποδείξεις από τη μεριά των ερευνητών. Παρέμεινε όμως ένα ποσοστό αρχικών απαντήσεων των μαθητών (36%) που δεν άλλαξε παρά τις υποδείξεις που τους τέθηκαν. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τις έρευνες των Christou και Vosniadou (2012)

που έδειξαν ότι η τάση αυτή των μαθητών να αντικαθιστούν τις μεταβλητές κυρίως με φυσικούς αριθμούς είναι ισχυρή και αλλάζει δύσκολα.

Τα αποτελέσματα της Μελέτης ΙΙ που αφορούσε τα είδη των μεταβλητών που εμφανίζονταν στα σχολικά βιβλία έδειξαν ως επικρατούσα κατηγορία μορφών εμφάνισης των μεταβλητών την κατηγορία του «Γενικευμένου αριθμού» με ποσοστό 34% Τα ευρήματα αυτά είχαν διαφορές από τα ευρήματα της έρευνας των Dogbey και Kersaint (2012) που στην έρευνά τους για τα σχολικά βιβλία των Η.Π.Α.για τις αντίστοιχες σχολικές βαθμίδες διαπίστωσαν ως επικρατέστερες κατηγορίες τις κατηγορίες «Ετικέτα-επιγραφή» & «Συγκεκριμένο αριθμό». Έτσι, σε σύγκριση με αυτά τα βιβλία, τα βιβλία του Ελληνικού σχολείου εμφανίζονται να χρησιμοποιούν τις μεταβλητές με πιο εκλεπτυσμένο τρόπο. Στην 2η φάση της Μελέτης ΙΙ φάνηκε ότι οι αριθμητικές τιμές που αποδίδονται στις μεταβλητές στα σχολικά βιβλία είναι με το ίδιο ποσοστό φυσικοί και μη-φυσικοί αριθμοί. Αν αναλογιστεί κανείς ότι στην κατηγορία «μη-φυσικοί» ανήκουν διαφόρων ειδών αριθμοί, όπως τα κλάσματα και οι δεκαδικοί που οι μαθητές τα έχουν διδαχθεί ήδη από την Γ΄ Δημοτικού και οι αρνητικοί αριθμοί (από την Α΄ γυμνασίου), τότε το ποσοστό αυτό των μη-φυσικών αριθμών ίσως να είναι σχετικά χαμηλό. Παρόλα αυτά δεν υπάρχουν άλλες ανάλογες μελέτες ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων τους με τα αποτελέσματα της παρούσης μελέτης.

Εξετάζοντας τα αποτελέσματα των δυο αυτών μελετών παρατηρήσαμε ότι τόσο στα σχολικά βιβλία όσο και στις απαντήσεις των μαθητών η κυρίαρχη κατηγορία χρήσης και κατανόησης της μεταβλητής αντίστοιχα ήταν ως «Γενικευμένος αριθμός». Για το λόγο ότι η διδακτέα ύλη καθορίζεται σχεδόν αποκλειστικά από τα σχολικά βιβλία, όσον αφορά τις σχολικές βαθμίδες που εξετάσαμε θεωρούμε ότι τα δυο αυτά αποτελέσματα πιθανά να συσχετίζονται μεταξύ τους.

Επίσης και οι δυο Μελέτες κατέγραψαν ποσοστά ιδιαίτερα υψηλά όσον αφορά την εμφάνιση των μεταβλητών ως φυσικών αριθμών στα σχολικά βιβλία και από τη μεριά τους οι μαθητές κατά προτεραιότητα εμφανίστηκαν να θεωρούν τους φυσικούς αριθμούς ως τις τιμές που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές και μάλιστα με δυσκολία απέδιδαν σ’ αυτές τιμές μη-φυσικών αριθμών.

Από τη σκοπιά μας θεωρούμε πως έστω κι αν στα βιβλία εμφανίζεται ενισχυμένη η χρήση των μεταβλητών με την πιο εκλεπτυσμένη μορφή τους, αυτή του «Γενικευμένου αριθμού», παρόλα αυτά ίσως να υπάρχει ένα ακόμα περιθώριο να ενισχυθούν οι τρόποι εμφάνισης των μεταβλητών με την μορφή των πιο εκλεπτυσμένων κατηγοριών όχι μόνο του «Γενικευμένου αριθμού» αλλά και των «Συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων», ώστε να ενισχυθεί η αντίστοιχη χρήση τους από τους μαθητές και η εξοικείωσή τους με τις μορφές αυτές.

Θεωρούμε επίσης πως θα ήταν χρήσιμη η ενίσχυση της εμφάνισης των μεταβλητών με τη μορφή των μη-φυσικών αριθμών. Οι μαθητές γνωρίζουν τα κλάσματα και τους δεκαδικούς ήδη από το Δημοτικό σχολείο και τους αρνητικούς ακέραιους-άρρητους

αριθμούς από τις Α΄ και Β΄ Γυμνασίου και συνεπώς δεν θα αντιμετώπιζαν δυσκολίες στον χειρισμό τους, αν εμφανίζονταν αυξημένη η χρήση των μη φυσικών αριθμών ως τιμές των γραμμάτων.

Πιστεύουμε επίσης ότι ένας τρόπος βελτίωσης των υπαρχόντων σχολικών βιβλίων πιθανά να ήταν η εμφανής και ρητή διατύπωση της ύπαρξης και εμφάνισης των διαφορετικών μορφών των μεταβλητών έτσι ώστε οι μαθητές να εισάγονται στην πολυπλοκότητα της φύσης τους και να τις αναγνωρίζουν με τις πολλές και διαφορετικές μορφές τους δηλαδή ως Επιγραφή, Σταθερά, Συμμεταβαλλόμενες ποσότητες και όχι μόνον με τη μορφή του Συγκεκριμένου αριθμού & του Γενικευμένου αριθμού (Kieran, 2007).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 249–272.

Chazan, D. & Yerushalmy, M. (2003*)*. On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In J. In J. Kilpatrick, D. Schifter, & G. Martin. *A Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics*. pp. 123-135 NCTM, Reston, Virginia.

Christou, K. P. & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning, 14(1),* 1-27.

Dogbey J., Kersaint Gl.,(2012) Treatment of Variables in Popular Middle-Grades Mathematics Textbooks in the USA: Trends from 1957 through 2009, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 2(1),* 1-30.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics (27),* 59-78.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester Jr.(Eds), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.707-762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle-school Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equality and Variable. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik—International Reviews on Mathematical Education*, *37*, 1–9.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics*: 11-16 (pp.102-119). London: John Murray.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation:11-15. *Educational studies in mathematics, 33(1)*, 1-19.

McKnight, C. C., Crosswhite, F. J., Dossey, J. A., Kifer, E., Swafford, J. O., Travers, K. J., & Cooney, T. J. (1987). *The underachieving curriculum: Assessing U.S. school mathematics from an international perspective*. Champaign, IL: Stipes.

Reys, R., Reys, B., Lapan, R., Holliday, G., & Wasman, D. (2003). Assessing the impact of standards-based middle grades mathematics curriculum materials on student achievement, *Journal for Research in Mathematics Education,34(1)*,74-9

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. Are you careful about defining your variables? *Mathematics Teacher, 74(6)*, 418-420,450.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., et al. (2001*). Why schools matter: a cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco: Jossey-Bass.

Warren El.,(1998). Students' understanding of the concept of variable. In C. Kanes, M. Goos & E. Warren, (Eds). *Proceedings of the 21st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* 2, (661-668). Griffith University Print, Brisbane, Australia: MERGA.

Ματσαγγούρας, Η.(2006). Διδακτικά εγχειρίδια: Κριτική αξιολόγηση της Γνωσιακής, Διδακτικής και Μαθησιακής Λειτουργίας τους. *Συγκριτική και Διεθνής Εκπαιδευτική Επιθεώρηση*, *7*, 60-92.

ΑΠΟΠΕΙΡΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΕΝΝΟΙΩΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΥΚΛΟΥ-ΚΑΜΠΥΛΗΣ.

Αθανασία Ρούσση

Μαθηματικός, ΜΔΕ Διδακτικής Μαθηματικών,
Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης.

aroussi@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μελέτη περίπτωσης διερευνά τις αντιλήψεις που δημιουργούνται, όταν μαθητές Γυμνασίου πειραματισθούν πάνω σε έννοιες του Απειροστικού Λογισμού. Ειδικότερα, διερευνάται η αντίληψη που δημιουργούν μαθητές Α' Γυμνασίου σχετικά με την έννοια της εφαπτομένης κύκλου και καμπύλης, όταν η εισαγωγή στην έννοια γίνει μέσω της τέμνουσας και της τοπικής ευθύτητας. Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν ενδείξεις ότι οι μαθητές είναι ικανοί να παρατηρήσουν λεπτές έννοιες των ανώτερων μαθηματικών όπως το πολύ κοντά, την τοπικότητα της εφαπτομένης, την τοπική ευθύτητα όταν μεγεθύνουμε γύρω από το σημείο τομής, παρά το νεαρό της ηλικίας τους.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Προηγούμενες μελέτες έχουν αναδείξει προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην Γ΄ λυκείου με τις λεπτές έννοιες του απειροστικού λογισμού (Tall, 1986, Biza, Christou, Zachariades 2008, κ.α.). Στην παρούσα έρευνα εστιάζουμε στις δυσκολίες σε σχέση με τον ορισμό της εφαπτομένης καμπύλης και την γραφική αναπαράστασή της. Η αιτία του προβλήματος βρίσκεται στον τρόπο που εισάγεται η έννοια της εφαπτομένης κύκλου στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση και συγκεκριμένα η εστίαση στο ότι έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, δεν τον «κόβει» και τον αφήνει ολόκληρο στο ίδιο ημιεπίπεδο (Vinner, 1991, κ.α.). Ο στόχος μας είναι να ελέγξουμε αν με μια διαφορετική προσέγγιση στον τρόπο που εισάγεται η έννοια στο γυμνάσιο, οι μαθητές μπορούν να ανταποκριθούν σε δυναμικές σχέσεις όπως αυτή της τέμνουσας με την εφαπτομένη και να αναγνωρίσουν την τοπική ευθύτητα. Παρακάμπτοντας την παραδοσιακή εισαγωγή στην έννοια, μέσω της εφαπτομένης του κύκλου, προσδοκούμε τη λείανση των παρανοήσεων που επιφέρει.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο Vinner (1991) διεξήγαγε έρευνα πάνω στον σχεδιασμό εφαπτομένης σε διάφορες καμπύλες. Στα αποτελέσματα φαίνεται ότι οι σπουδαστές σε μεγάλο ποσοστό

σχεδιάζουν εφαπτομένη που να ταυτίζεται με την εφαπτομένη κύκλου. Ο Fischbein (1987) μελετώντας την εφαπτομένη καμπύλης, αναφέρει ότι η εφαπτομένη του κύκλου λειτουργεί ως παραδειγματικό μοντέλο, δηλαδή καθορίζει ιδιότητες της γενικής εφαπτομένης. Ο Tall (1986) μελετά τις δυσκολίες που ενσωματώνονται στην έννοια της εφαπτομένης. Στα συμπεράσματά του βλέπουμε ότι σημαντικό ποσοστό των μαθητών διατηρούν την έννοια της εφαπτομένης που τέμνει την καμπύλη σε ένα μόνο σημείο. Η Biza (2008) και οι Biza, Christou & Zachariades (2008) και Biza & Zachariades (2010) μελετούν τη συμπεριφορά των μαθητών πριν και μετά το λύκειο. Στα συμπεράσματά τους επισημαίνουν την ισχυρή επιρροή της ευκλείδειας γεωμετρίας στην ανάλυση.

Κατά τον Vinner (1991) οι έννοιες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις αυθόρμητες ή καθημερινές και τις επιστημονικές ή θεωρητικές. Οι ορισμοί δεν αποτελούν απαραίτητη προϋπόθεση για τις έννοιες της καθημερινότητας (Fodor κ.ά, 1980), καθώς αυτό που δημιουργείται είναι μία νοητική δομή, η εικόνα της έννοιας (concept image) (Tall, Vinner, 1981). Δεν ισχύει όμως το ίδιο για τις επιστημονικές ή θεωρητικές έννοιες, οι οποίες εισάγονται κατά την διάρκεια της εκπαίδευσης και λειτουργούν μέσα σε ένα ιεραρχικό σύστημα διασυνδέσεων με άλλες επιστημονικές έννοιες και σχέσεις. Ιδιαίτερα στα μαθηματικά, ο ορισμός κατέχει εξαιρετικά σημαντικό ρόλο. Ωστόσο ο Vinner (1991) ισχυρίζεται ότι είναι δύσκολο να εκπαιδεύσουμε ένα γνωστικό σύστημα να λειτουργεί ενάντια στη φύση του και να του επιβάλουμε να συμβουλεύεται ορισμούς, είτε όταν σχηματίζει μια εικόνα της έννοιας, είτε όταν λειτουργεί σε μία εντεταλμένη γνωστική διαδικασία. Ο στόχος μετατοπίζεται (ιδιαίτερα στις νεαρές ηλικίες), στη δημιουργία μιας ολοκληρωμένης εικόνας για την έννοια που βρίσκεται υπό διαπραγμάτευση, μέσα από την επιλογή κατάλληλων παραδειγμάτων και διδασκαλιών.

Η διδασκαλία από το ειδικό στο γενικό, η οποία υπερισχύει στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δημιουργεί διδακτικά εμπόδια. Η ειδική περίπτωση λειτουργεί ως πρότυπο. Οι ιδιότητες που παρατηρούνται αρχικά στην ειδική περίπτωση επιβάλλονται στην έννοια (Harel & Tall, 1991). Παραδείγματα της αφηρημένης έννοιας σε συγκεκριμένο πλαίσιο, μπορεί να λειτουργήσουν ως παραδειγματικά μοντέλα (Fischbein, 1987). Ο Tall (1986), ισχυρίζεται ότι παρουσιάζοντας μία έννοια σε κάποιον που μαθαίνει τα μαθηματικά σε ένα απλοποιημένο πλαίσιο, παρουσιάζουμε χωρίς να το καταλαβαίνουμε απλοποιημένες κανονικότητες που γίνονται μέρος της εικόνας έννοιας του ατόμου. Αντί να χτίσει κανείς από το απλό στο σύνθετο, είναι δυνατό να κατασκευάσει κατάλληλα υπολογιστικά περιβάλλοντα για αυτούς που μαθαίνουν, ώστε να είναι σε θέση να διερευνήσουν πιο σύνθετες ιδέες από το ξεκίνημα.

Ωστόσο είναι τα παιδιά ικανά να ανταποκριθούν σ' αυτό το εγχείρημα; Οι Harel και Sowder (2005), ισχυρίζονται ότι η φύση και η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης σε έναν μαθητή είναι μια διαδικασία που μπορεί να διαμορφωθεί και να εξελιχθεί μέσα

από κατάλληλες διδακτικές πρακτικές. Κάτω από αυτήν την οπτική είναι ανεξάρτητη από την ηλικία και δυνητικά μπορεί να θεωρηθεί ότι ξεκινάει από το δημοτικό. Επιπλέον μια μαθηματική έννοια δεν μπορεί να είναι ολοκληρωμένη αν περιορίζεται στα πλαίσια μιας μίκρο-διδασκαλίας, δηλαδή σε μια προοπτική στενού εκπαιδευτικού περιβάλλοντος. Πρέπει να καλύπτει μια διαμήκη μάκρο-προοπτική (Θωμαΐδης,2012).

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, σχεδιάσαμε μια διδασκαλία προσανατολισμένη να ωθήσει τους μαθητές να δημιουργήσουν μια εικόνα της έννοιας της εφαπτομένης, κατάλληλη σε ευρύτερο πλαίσιο από την αρχή, με απώτερο σκοπό να προλάβουμε παρανοήσεις και δυσκολίες που θα αντιμετωπίσουν αργότερα στην μετάβασή τους από την ευκλείδεια γεωμετρία στην ανάλυση. Θα μπορέσουν οι μαθητές να ανταποκριθούν στο εγχείρημα; Θα παρατηρήσουν τη τοπική ευθύτητα; Θα χρησιμοποιήσουν φράσεις όπως «πολύ κοντά»; Θα περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο μια τέμνουσα γίνεται εφαπτομένη;

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην έρευνα συμμετείχαν 42 μαθητές και μαθήτριες, οι οποίοι ήταν κατανεμημένοι σε δύο τμήματα της Α γυμνασίου, συγκεκριμένα 18 μαθητές στο ένα τμήμα και 24 στο άλλο. Πραγματοποιήθηκε από μία δίωρη διδασκαλία, στα προαναφερθέντα τμήματα. Οι διδασκαλίες βασίστηκαν και σχεδιάστηκαν πάνω στην ιδέα της τοπικής ευθύτητας όπως αυτή διαφαίνεται μέσω της μεγέθυνσης της περιοχής του σημείου τομής καμπύλης-εφαπτομένης των Tall(1986) και Biza (2008), κατάλληλα διαμορφωμένο για την Α΄ γυμνασίου. Χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Geogebra και διαδραστικός πίνακας τον οποίο χειρίζεται ο εκπαιδευτικός. Προστιθέμενη αξία έδωσαν ο δυναμικός χειρισμός των σημείων, το εργαλείο της μεγέθυνσης και η ενεργοποίηση τους ίχνους των τεμνουσών. Έγινε ηχογράφηση της διδασκαλίας και ακριβής απομαγνητοφώνηση των διαλόγων. Οι πρακτικές που εφαρμόστηκαν στην τάξη ήταν η συζήτηση-αλληλεπίδραση του δασκάλου με όλη την τάξη (whole class participation), η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών και η μαιευτική μέθοδος.

Ένα μονόωρο τεστ, δόθηκε στους μαθητές μία εβδομάδα μετά την διδασκαλία. Η ανάλυση των γραπτών απαντήσεων έδωσε αρκετά στοιχεία για την έρευνα. Και ένα ακόμη ολιγόλεπτο τεστ δόθηκε αρκετές εβδομάδες αργότερα, λίγο πριν τη λήξη του σχολικού έτους μόνο στο ένα τμήμα, ώστε να μελετηθεί η επίδραση της διδασκαλίας σε κάποιο βάθος χρόνου.

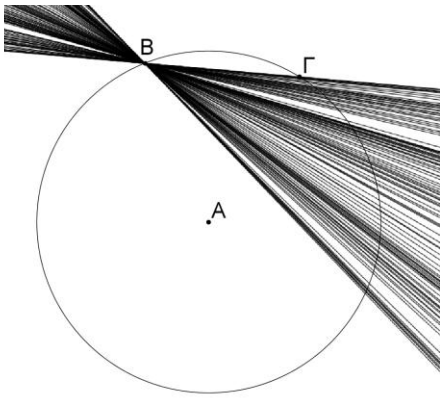
Πρώτος στόχος της διδασκαλίας ήταν ο ορισμός της εφαπτομένης κύκλου ως οριακή θέση τέμνουσας. Δεύτερος στόχος ήταν να γίνει το πέρασμα από την εφαπτομένη κύκλου στην εφαπτομένη καμπύλης (έχει ήδη γίνει εκτενή αναφορά στον ορισμό της καμπύλης). Τρίτος στόχος ήταν να διαπραγματευτούν το κατά πόσο μια ευθεία που έχει ένα κοινό σημείο με την καμπύλη είναι εφαπτομένη, καθώς και το αντίθετο,

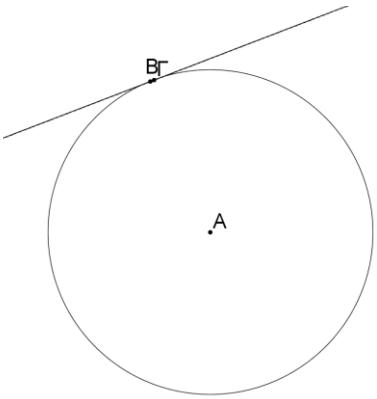
δηλαδή αν μπορεί να είναι εφαπτομένη και να έχει περισσότερα κοινά σημεία με την καμπύλη.

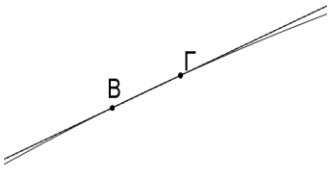
4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1. Από την τάξη των μαθηματικών

Η εισαγωγή στην νέα έννοια γίνεται αρχικά με προβολή φωτογραφιών που σχετίζονται με κύκλους-καμπύλες και εφαπτόμενες από την καθημερινή ζωή. Στη συνέχεια οι μαθητές σχολιάζουν τη θέση ευθείας και κύκλου. Δίνουν δικά τους ονόματα στην ευθεία. Προσπαθούν να ορίσουν την τέμνουσα, αντιδρώντας αρχικά για το κατά πόσο είναι θεμιτό να δώσουν μόνοι τους ορισμό. Αφού ορισθεί η τέμνουσα η εκπαιδευτικός μετακινεί το ένα σημείο τομής, με το ίχνος ενεργοποιημένο εμφανίζοντας πολλές τέμνουσες. Οι μαθητές σχολιάζουν το πλήθος των τεμνουσών (**σχήμα 1**). Όταν τα σημεία έρθουν πολύ κοντά (**σχήμα 2**), ο εκπαιδευτικός τους ζητάει να αποφασίσουν αν αυτή η ευθεία είναι τέμνουσα.







Σχήμα 1 **Σχήμα 2** **Σχήμα 3**

(Στους διαλόγους που ακολουθούν μαθητές και μαθήτριες χαρακτηρίζονται ως μαθητής. Η αρίθμηση για τους μαθητές ξεκινάει σε κάθε διαφορετικό στιγμιότυπο από το ένα. Αυτό σημαίνει ότι Μαθητής 1 δεν είναι κάθε φορά το ίδιο άτομο. Επίσης παραλείπονται τα ονόματα των μαθητών που συμμετέχουν στο διάλογο).

1 Μαθητής1: Κυρία εγώ έγραψα ότι είναι, επειδή περνάει από δύο σημεία

2 Μαθητής2: κυρία δεν τέμνεται για να είναι τέμνουσα..

3 Εκπαιδευτικός: αλλά τι κάνει;

4 Μαθητής2: (συνεχίζει) δεν τέμνεται, σωστά; δεν τον χωρίζει…

5 Εκπαιδευτικός: Από τη μια η συμμαθήτριά σας διακρίνει τα δύο σημεία αλλά από την άλλη λέει δεν τον χωρίζει τον κύκλο

6 Μαθητής3: όσο μικρό και να είναι πάντα θα υπάρχει ένα κομματάκι που θα τον χωρίζει

7 Μαθητής4: εγώ λέω όχι, γιατί δεν τέμνεται, δεν περνάει μέσα από τον κύκλο

8 Εκπαιδευτικός: αλλά από πού περνάει;

9 Μαθητής4: από έξω, από δίπλα.

10 Μαθητής5: …και τέμνει με απόσταση μη ορατή με το μάτι.

Οι μαθητές (6, 10) διαισθάνονται το απειροστό διάστημα χωρίς να έχουν δει καν τη μεγέθυνση. Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιώντας το εργαλείο της μεγέθυνσης (**σχήμα 3**) εστιάζει στην περιοχή των δύο σημείων και ζητάει από τους μαθητές να αποφασίσουν εκ νέου αν είναι τέμνουσα ή όχι.

11 Εκπαιδευτικός: Τώρα που το βλέπετε καλύτερα είναι τέμνουσα; Π…., τι παρατηρείς;

12 Μαθητής5: Φαίνεται σαν να μην είναι τέμνουσα γιατί φαίνεται σαν η ευθεία να συμπίπτει με κάποια από τα σημεία του κύκλου. Δεν μπορώ να το εξηγήσω.

13 Εκπαιδευτικός: καταλαβαίνετε τι προσπαθεί να πει ο συμμαθητής σας;

14 Μαθητής6: μοιάζει να γίνεται ένα

15 Μαθητής7: σαν να υπάρχουν και πιο μικρά σημεία ….

16 Μαθητής5: και πάλι έχει δίκιο η Σ…., μπορεί να είναι μηδαμινή η απόσταση

17 Μαθητής8: εγώ ήθελα να πω ότι αυτό που είπε ο Π…., είναι σαν αυτό που σκέφτηκα, είναι σαν να έχει πάρει δύο σημεία του κύκλου και να έχετε τραβήξει μια γραμμή και αυτά να είναι μαζί να συμπίπτουν.

Από τους διαλόγους 12, 14, 15 φαίνεται ότι οι μαθητές διακρίνουν ήδη την τοπική ευθύτητα. Ιδιαίτερα στο 12, ο μαθητής δεν διακρίνει τέμνουσα, όχι γιατί τα σημεία γίνανε ένα, αλλά γιατί διακρίνει πολλά σημεία, στο 15 ο μαθητής προκειμένου να περιγράψει τα κοινά σημεία που διακρίνει εκτός των σημειωμένων, τα χαρακτηρίζει μικρότερα. Η φράση «μηδαμινή απόσταση» παραπέμπει ασυνείδητα στο όριο στο μηδέν, έννοιες της ανάλυσης μοιάζουν να υποβόσκουν στο μυαλό των μαθητών από νεαρή ηλικία. Στο 14 ένας μαθητής ακούγοντας τα λεγόμενα του συμμαθητή της λέει «μοιάζει να γίνεται ένα» (τοπική ευθύτητα). Η τοπική ευθύτητα γίνεται ακόμα πιο ξεκάθαρη στην περιγραφή του επόμενου μαθητή (στο 17), η οποία τονίζει «είναι σαν να έχει πάρει δύο σημεία του κύκλου και να έχει τραβήξει μια γραμμή και αυτά να είναι μαζί να συμπίπτουν». Ακολουθεί προσπάθεια ορισμού της εφαπτόμενης ευθείας.

Στη συνέχεια γίνεται το πέρασμα στις καμπύλες. Αρχικά στο σχήμα 5:

18 Εκπαιδευτικός: Σ… τι βλέπεις εδώ;

19 Μαθητής1: Μια καμπύλη και τρεις ευθείες.

20 Εκπαιδευτικός: Τι θα λέγατε για την κόκκινη (ζ) ευθεία; Λ…;

21 Μαθητής2: Τέμνουσα σε καμπύλη.

22 Εκπαιδευτικός: Η μπλε; Α…

23 Μαθητής3: Εφαπτομένη σε καμπύλη.

24 Μαθητής4: κυρία διαφωνώ γιατί θα μπορούσε να είναι και τέμνουσα αφού περνάει από ένα σημείο Γ και από ένα άλλο σημείο που δεν το έχετε σημειώσει.

25 Εκπαιδευτικός: Αααααααα… Αυτό το είχε παρατηρήσει κανένας άλλος που λέει ο Π…;

26 Μαθητής: εγώ (πολλές φωνές μαζί)

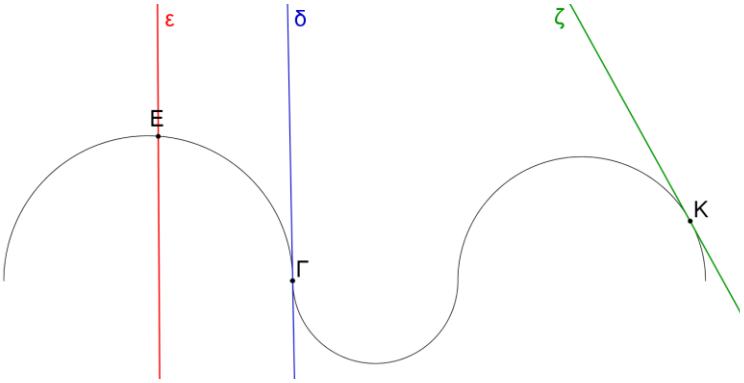
27 Εκπαιδευτικός: Εσύ Μ…;

28 Μαθητής5: κι εγώ κυρία αλλά αφού δεν έχει σημείο νομίζω ότι δεν μπορούμε να την πούμε τέμνουσα.

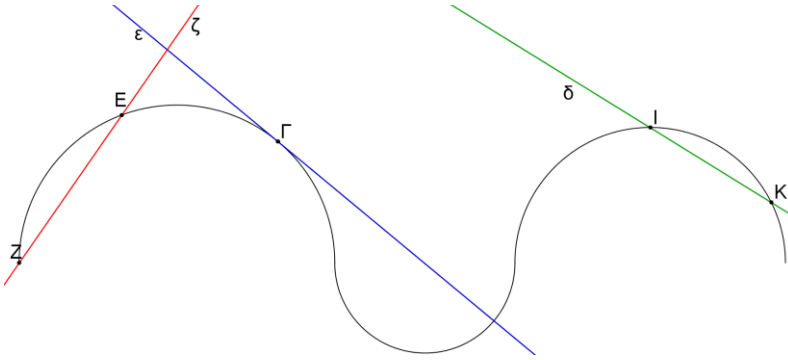
29 Εκπαιδευτικός: Ααα εννοείς ότι εγώ δεν έχω βάλει όνομα στο σημείο αυτό. Ωστόσο ο Π… και η Μ…. το είδε. Σ… θέλεις να πεις κάτι;

30 Μαθητής6: Ναι αλλά εφόσον δεν έχει σημείο κυρία πρέπει να μετρήσουμε τα σημεία που έχουμε.

31 Εκπαιδευτικός: Εδώ θα μπορούσα να έχω βάλει ένα σημείο. Ωστόσο είτε το έχω βάλει είτε όχι το σημείο υπάρχει. Οπότε πρέπει να αποφασίσουμε αν είναι τέμνουσα ή εφαπτομένη….



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Εδώ οι μαθητές αντιμετωπίζουν πρώτη φορά εφαπτομένη (δεν ξέρουν αν είναι εφαπτομένη ακόμα) η οποία τέμνει την καμπύλη σε δύο σημεία. Το ερώτημα δεν έχει ξεκαθαριστεί. Η εκπαιδευτικός αλλάζει οθόνη και εμφανίζει το σχήμα 4, προκειμένου να διαπραγματευτούν και την περίπτωση ευθειών που έχουν ένα κοινό σημείο με την καμπύλη αλλά παρόλα αυτά δεν είναι εφαπτομένη. Θα επιστρέψει στο σχήμα 5 αργότερα. Στο **σχήμα 4**, τα πράγματα αλλάζουν. Αναγνωρίζουν την ζ ως εφαπτομένη, διαπραγματεύονται τις άλλες δύο ευθείες.

32 Μαθητής1: για την κ εντάξει το ξεκαθαρίσαμε ότι είναι σίγουρα εφαπτομένη, για την Γ
το βλέπουμε πάλι το έχει ένα κοινό σημείο, η ε όμως ….διέρχεται μέσα …δεν μου μοιάζει και τόσο… (χρησιμοποιεί το σημείο Κ σαν ευθεία κ)

33 Μαθητής2: δεν φαίνεται σαν να ακουμπάει αλλά σαν να χωρίζει.

34 Μαθητής3: άμα είναι έτσι ούτε η Γ είναι.

35 Μαθητής4: Τώρα παιδιά θα το δούμε από κοντά… Θυμόσαστε την παρατήρηση που είχε πει ο Π…; Μια λέξη είχε πει…

36 Μαθητής5: συμπίπτουν για λίγο.

Μεγεθύνοντας τις περιοχές γύρω από τα σημεία τομής οι μαθητές διακρίνουν την ταύτιση καμπύλης-εφαπτομένης κοντά στα σημεία Γ και Κ αλλά όχι στο σημείο Ε. Τονίζεται ότι για να είναι εφαπτομένη πιο ουσιαστικό είναι να ταυτίζονται για λίγο γύρω από το σημείο τομής.

Επιστροφή στο **σχήμα 5** περισσότερο έτοιμοι να διαπραγματευτούν το κατά πόσο η ευθεία ε είναι εφαπτομένη ενώ τέμνει την καμπύλη σε δύο σημεία.

37 Μαθητής1: θα μπορούσε να είναι και εφαπτομένη και τέμνουσα αφού περνάει από δύο σημεία

38 Εκπαιδευτικός: Πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να το ξεκαθαρίσουμε αυτό. Ήδη είπαμε έναν τρόπο. Αυτό το συμπίπτουν που είπαμε σημαίνει ότι θα κοιτάξω κοντά στο σημείο επαφής. Δεν με νοιάζει τι γίνεται γενικά. Με νοιάζει τι γίνεται κοντά.

39 Μαθητής2: άρα δεν μας ενδιαφέρει τι γίνεται στο άλλο σημείο μόνο σε κείνο το σημείο επαφής.

40 Εκπαιδευτικός: Ακριβώς! Μπράβο Ε…. (Η εκπαιδευτικός δείχνοντας το σημείο που δεν έχει ορισθεί από κοντά συνεχίζει). Βλέποντας μόνο αυτήν την περιοχή τι θα λέγατε είναι εφαπτομένη η μπλε ευθεία (ε) ή όχι;

41 Μαθητής3: θα έλεγα πως πάλι δεν είναι εφαπτομένη γιατί δεν γίνεται ένα

42 Εκπαιδευτικός: Έτσι! Δεν βλέπω το άλλο σημείο αν υπάρχει ή δεν υπάρχει αλλά..

43 Μαθητής2: αποκλείω την εφαπτομένη.

44 Εκπαιδευτικός: (δείχνοντας στο σημείο Γ) είναι η μπλε εφαπτομένη;

45 Μαθητής: ναι

46 Εκπαιδευτικός: Τώρα είπαμε ότι η μπλε είναι εφαπτομένη και δεν είναι εφαπτομένη…

47 Μαθητής4: είναι διπρόσωπη

48 Μαθητής5: είναι εφατέμνουσα…

49 Εκπαιδευτικός: Πως θα το ξεκαθαρίσουμε αυτό; Έχετε κάποια ιδέα;

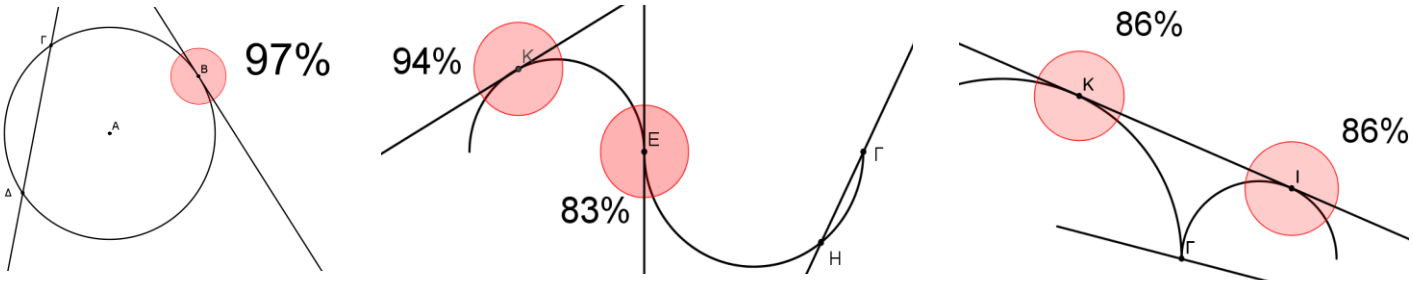
50 Μαθητής6: …εξαρτάται από το σημείο..

51 Εκπαιδευτικός: Μπράβο Θ…. Η μπλε είναι εφαπτομένη στο σημείο Γ, αλλά δεν είναι εφαπτομένη στο σημείο Λ.

Γίνεται αναφορά στην τοπικότητα της εφαπτομένης.

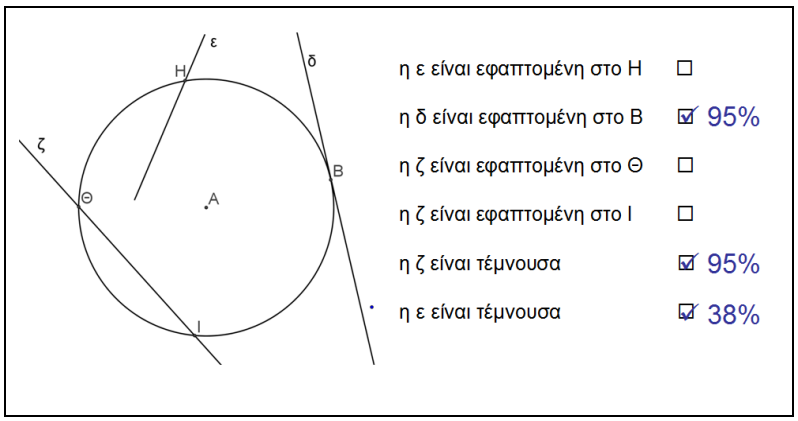
4.2 Τα τεστ. Αποτελέσματα από τα τεστ

Το 1ο τεστ. Στο 1ο ερώτημα ο μαθητής καλείται να αναγνωρίσει κυκλώνοντας (χωρίς να αναφέρεται η λέξη εφαπτομένη), τις περιοχές που η καμπύλη «γίνεται ένα» με την ευθεία. Τα σχήματα και τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων φαίνονται στο σχήμα 6.

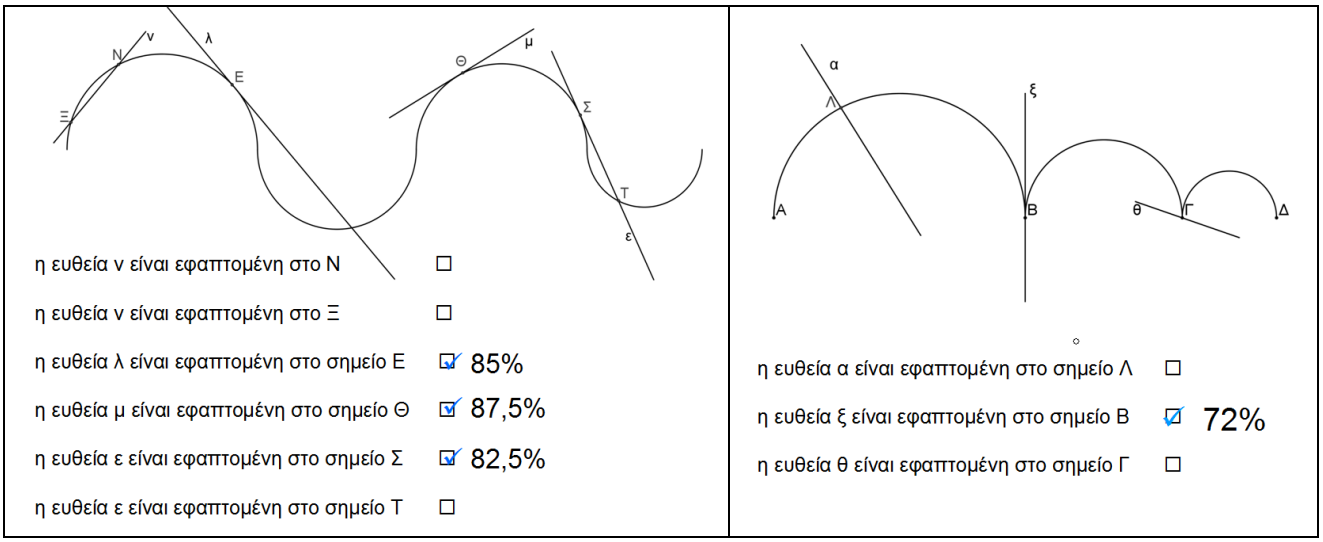


Σχήμα 6: Τεστ1-ερώτημα α.

Στο 2^{ο} ερώτημα υπάρχουν αντίστοιχα σχήματα. Ο μαθητής καλείται να αποφασίσει ποια ευθεία είναι εφαπτομένη, τσεκάροντας (☑) δίπλα στην πρόταση που θεωρεί σωστή. Τα σχήματα και τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων φαίνονται στο σχήμα 7 α, β και γ.



Σχήμα 7α: Τεστ 1- ερώτημα β.



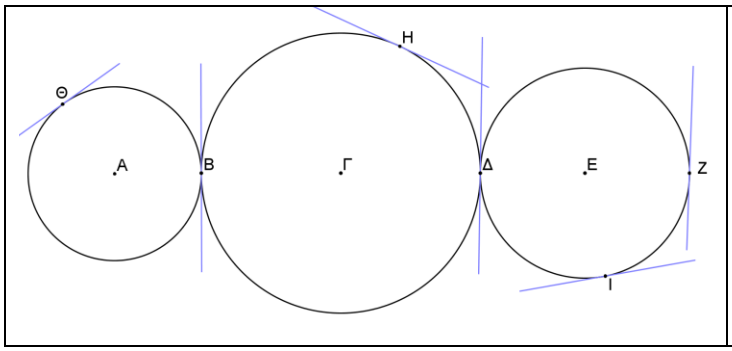
Σχήμα 7β: Τεστ 1-ερώτημα β. **Σχήμα 7γ: Τεστ 1-ερώτημα β.**

Στον πίνακα-1 που ακολουθεί συγκεντρώνονται τα αποτελέσματα που αφορούν αποκλειστικά τις εφαπτόμενες.

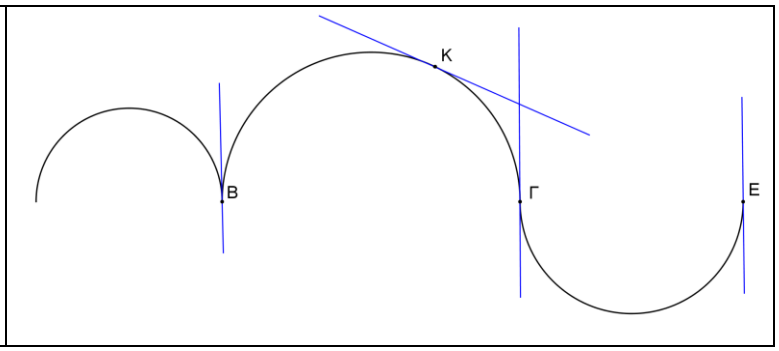
Εφαπτόμενη σε κύκλο.	95%
Εφαπτόμενη σε καμπύλη, με αντίστοιχη εικόνα έννοιας με τον κύκλο.	87,5%
Εφαπτομένη σε καμπύλη, η οποία τέμνει σε δύο σημεία, το Ε και ένα άλλο που δεν σημειώνεται.	85%
Εφαπτομένη σε καμπύλη, η οποία τέμνει σε δύο σημεία, το Σ και το Τ.	82,5%
Κατακόρυφη εφαπτομένη	72%

Πίνακας-1

Το 2^{ο} τεστ. Σε αυτήν την εξέταση τους δίνεται ένα φύλλο Α4, το οποίο στη μία σελίδα έχει τρεις άνισους κύκλους οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά (σχήμα 8). Οι μαθητές πρέπει να σχεδιάσουν εφαπτόμενες σε συγκεκριμένα σημεία και στα σημεία επαφής των κύκλων. Στην πίσω σελίδα (σχήμα 9), υπάρχει μία καμπύλη, η οποία δημιουργείται από τα ημικύκλια των κύκλων που προαναφέραμε. Οι μαθητές πρέπει πάλι να σχεδιάσουν εφαπτόμενες σε αντίστοιχα σημεία με πριν, συμπεριλαμβάνονται σημείο καμπής καθώς και σημείο που επιδέχεται κατακόρυφη εφαπτόμενη.



Σχήμα 8: Τεστ 2-σελίδα 1η



Σχήμα 9: Τεστ 2-σελίδα 2η

Στα αποτελέσματα 100% των μαθητών σχεδίασαν σωστά εφαπτόμενες στους κύκλους (σελίδα 1η-σχήμα 8), ενώ μόνο το 64,7% των μαθητών σχεδίασαν σωστά τις εφαπτόμενες και στην καμπύλη (σελίδα 2η-σχήμα 9).

4.3. Ένα ενδιαφέρον στιγμιότυπο από την τάξη των Μαθηματικών.

Το στιγμιότυπο σημειώθηκε σε ανύποπτο χρόνο αφού η ενότητα για την εφαπτομένη είχε ολοκληρωθεί και φέρνει στο προσκήνιο το γωνιακό σημείο, το οποίο δεν είχε διαπραγματευθεί καθόλου στις διδασκαλίες που προηγήθηκαν. Η εκπαιδευτικός ετοιμάζεται να αποδείξει μαζί με τους μαθητές ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^{ο}. Σχεδιάζει (ελεύθερα, χωρίς αυστηρότητα) στον πίνακα ένα τρίγωνο (ΑΒΓ) και φέρνει παράλληλη ε από την κορυφή Α προς την απέναντι πλευρά του τριγώνου. Ρωτάει τους μαθητές αν μπορούν να μαντέψουν τι είδους ευθεία είναι η ε, αναμένοντας να απαντήσουν ότι είναι παράλληλη στη ΒΓ. Οι

μαθητές τότε απαντούν ότι πρόκειται για εφαπτομένη σε καμπύλη. Η εκπαιδευτικός ρωτάει αν υπάρχουν αντιρρήσεις ή όλοι συμφωνούν σ' αυτό. Τότε κάποιοι μαθητές ισχυρίζονται ότι δεν είναι εφαπτόμενη γιατί το τρίγωνο δεν είναι καμπύλη. Γίνεται συζήτηση και ανάκληση του ορισμού της καμπύλης. Μετά η εκπαιδευτικός ρωτάει υπαινιχτικά « Τώρα τι λέτε είναι η ευθεία ε εφαπτόμενη στο τρίγωνο…;». Κάποιοι μαθητές αφυπνίζονται και πετάγονται φωνάζοντας «Όχι κυρία γιατί δεν γίνονται ένα…».

Το συμβάν επαναλήφθηκε ακριβώς με τον ίδιο αυθορμητισμό και στο δεύτερο τμήμα.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρόλο το νεαρό της ηλικίας τους, οι μαθητές εκπλήσσουν με τις παρατηρήσεις τους και την ωριμότητα που αντιμετωπίζουν τη διδασκαλία. Βασικές έννοιες της ανάλυσης όπως το πολύ κοντά και η τοπική ευθύτητα αναδύθηκαν αυθόρμητα από τους μαθητές. Ο δυναμικός χειρισμός των σημείων, η μεγέθυνση, και η ενεργοποίηση του ίχνους δείχνουν ότι βοηθούν στη δημιουργία μιας εικόνας της έννοιας καταλληλότερης σε ευρύτερο πλαίσιο, όπως ήδη έχουν αναφέρει οι Tall(1986), και Biza (2008). Αναδύθηκαν επίσης και αρκετές παρανοήσεις που σχετίζονται με την έννοια του σημείου και της καμπύλης και οι οποίες χρήζουν περαιτέρω έρευνας.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα φάνηκαν έτοιμοι να διαπραγματευτούν αυτές τις έννοιες και οι βραχυπρόθεσμοι στόχοι επιτεύχθηκαν. Η απήχηση που θα έχει αυτή η διδασκαλία στο μέλλον είναι κάτι που θα είχε ενδιαφέρον να το παρακολουθήσουμε.

Μια νέα έρευνα σε ευρύτερο πλαίσιο θα μπορούσε να ισχυροποιήσει ή να καταρρίψει τις ενδείξεις που αφήνει η παρούσα έρευνα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Biza, I.: 2008, 'Students' intuitive perspectives on the tangent line in the context of Analysis', Unpublished PhD in Mathematics Education, University of Athens, Athens, Greece.

Biza, I., Christou, C. and Zachariades, T.: 2008, 'Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis', Mathematics Education, 10: 1, 53 — 70.

Biza, I., Zachariades, T.: 2010, 'First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line', Journal of Mathematical Behavior, 29, 218–229.

Fischbein, E.: 1987, 'Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach', Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Harel, G., Sowder, L.: 2005, 'Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development', Mathematical Thinking and Learning, 7(1), 27–50, Copyright © 2005, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Tall, D. O.: 1986, 'Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics', Unpublished Ph.D, University of Warwick, Coventry, UK.

Tall, D. O., Vinner, S.: 1981, 'Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity', Educational Studies in Mathematics, 12, 151–169.

Vinner, S.: 1991, 'The role of definitions in the teaching and learning of mathematics', In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΟ ΕΜΒΑΔΟ

Αθηνά Θωμά & Έλενα Ναρδή

Πανεπιστήμιο East Anglia (UEA), Ηνωμένο Βασίλειο

a.thoma@uea.ac.uk, e.nardi@uea.ac.uk

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με το ορισμένο ολοκλήρωμα, μια από τις θεμελιώδεις έννοιες του απειροστικού λογισμού, έχει ασχοληθεί συστηματικά η διδακτική των μαθηματικών. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται οι απαντήσεις δέκα φοιτητών, ενός τμήματος Μαθηματικών στην Ελλάδα, σε ερωτήσεις που εξετάζουν την κατανόησή τους για την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και τη σχέση του με την έννοια του εμβαδού. Υιοθετώντας τη θεώρηση της εννοιολογικής κατανόησης σαν δίκτυο εννοιών, παρουσιάζουμε αποσπάσματα από την ανάλυσή μας για να παρατηρήσουμε πως οι συμμετέχοντες δεν αντιλαμβάνονται ουσιαστικά τη σχέση εμβαδού και ορισμένου ολοκληρώματος, αν και όλοι συνδέουν το ορισμένο ολοκλήρωμα με το εμβαδό. Σημειώνουμε κάποιες εξαιρέσεις που αναφέρουν το προσημασμένο εμβαδό.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Η διδασκαλία των μαθηματικών σε προπτυχιακό επίπεδο είναι ένας τομέας που τα τελευταία χρόνια έχει προσελκύσει την προσοχή πολλών ερευνητών. Οι έρευνες αυτές στοχεύουν στη βελτίωση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών από τους φοιτητές. Ένα από τα βασικότερα προπτυχιακά μαθήματα στα τμήματα Μαθηματικών είναι ο Απειροστικός Λογισμός και μια από τις θεμελιώδεις έννοιές του είναι το ολοκλήρωμα. Έρευνες δείχνουν ότι οι φοιτητές δυσκολεύονται με την έννοια του ολοκληρώματος. Είναι σημαντικό να διαπιστωθεί και να καταγραφεί η κατανόηση των φοιτητών για την έννοια αυτή καθώς και ποιες είναι οι δυσκολίες που συναντούν, ώστε να βελτιωθεί η διδασκαλία της έννοιας. Η παρούσα εργασία περιγράφει και εξετάζει την κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος μιας ομάδας φοιτητών ενός τμήματος Μαθηματικών.

ΕΡΕΥΝΑ ΠΑΝΩ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Η πολυσύνθετη και σημαντική έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος είναι στενά συνδεδεμένη με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, με τις έννοιες του αόριστου ολοκληρώματος, των αρχικών συναρτήσεων, της παραγώγου, του εμβαδού, των αθροισμάτων Riemann,της συνάρτησης και του ορίου. Είναι καλό οι φοιτητές να γνωρίζουν και να κατανοούν τις προαναφερθείσες έννοιες για να κατανοήσουν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος. Αρκετές έρευνες έχουν καταγράψει τις αντιλήψεις των μαθητών και φοιτητών για την έννοια αυτή καθώς και

τις δυσκολίες που συναντούν στη σχέση εμβαδού και ορισμένου ολοκληρώματος. Οι μαθητές και οι φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνα του Orton (1983) δυσκολεύτηκαν να συνδέσουν την έννοια του εμβαδού και του ολοκληρώματος. Δυσκολεύτηκαν να υπολογίσουν το ορισμένο ολοκλήρωμα συναρτήσεων με γραφικές παραστάσεις που τέμνουν τον άξονα $x'x$. Η παρατήρηση αυτή έγινε και από τους Rasslan και Tall (2002), Rösken και Rolka (2007) και Yasin και Enver (2007).

Ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος, καθώς και η γνώση και κατανόηση των φοιτητών και μαθητών για την έννοια αυτή, μελετήθηκε από αρκετούς ερευνητές. Στην έρευνα των Rasslan και Tall (2002) οι 41 Βρετανοί μαθητές λυκείου παρουσίασαν ελλιπή γνώση για τον ορισμό. Το ίδιο και οι 24 μαθητές λυκείου της Γερμανίας στην έρευνα των Rösken και Rolka (2007). Οι González-Martín και Camacho (2004) κατέληξαν ότι οι 31 προπτυχιακοί φοιτητές του τμήματος Μαθηματικών που συμμετείχαν στην έρευνά τους, αν και έδωσαν πιο ολοκληρωμένο ορισμό σε σύγκριση με τους μαθητές των Rasslan και Tall, είχαν ανεπαρκή κατανόηση για την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος. Πιο συγκεκριμένα δεν είχαν κατανοήσει τη σύνδεση του ορισμένου ολοκληρώματος και του εμβαδού. Οι Yasin και Enver (2007) παρατήρησαν ότι οι 64 φοιτητές τμήματος διδασκαλίας θετικών επιστημών, δυσκολεύτηκαν να εκτιμήσουν σωστά το σχήμα της περιοχής της οποίας ζητείται το εμβαδόν και να ορίσουν τα όρια ολοκλήρωσης, παρόλο που δεν δυσκολεύτηκαν στον υπολογισμό του ολοκληρώματος της συνάρτησης.

Όμοια και η έρευνά των Jukić και Dahl (2011), που εξέτασαν 18 πρωτοετείς φοιτητές, έδειξε ότι οι φοιτητές ερμήνευσαν το ορισμένο ολοκλήρωμα ως εργαλείο υπολογισμού του εμβαδού μιας περιοχής που περικλείεται από γραφικές παραστάσεις. Όμως οι φοιτητές δεν έλαβαν υπόψη τους τη γραφική παράσταση $y=0$ (δηλαδή τον άξονα $x'x$). Οι εικόνες που έδωσαν περιορίζονταν σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων πάνω από τον άξονα $x'x$. Επίσης, παρουσίασαν δυσκολίες στον ορισμό των ορίων ολοκλήρωσης καθώς και στην επιλογή της σωστής περιοχής για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Αντίστοιχα, οι 62 φοιτητές τμήματος Μαθηματικών που εξέτασε ο Mahir (2009) παρουσίασαν ελλιπή κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος ως προς τη σύνδεσή της με την έννοια του εμβαδού και του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας, όπως είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα, έχει διακριθεί από τους Hiebert και Lefevre (1986) σε δυο τύπους: *εννοιολογική* και *διαδικαστική*. Σύμφωνα με τους Hiebert και Lefevre (1986) διαδικαστική είναι η κατανόηση των κανόνων και αλγορίθμων που συνδέονται με μία έννοια, ενώ εννοιολογική είναι η κατανόηση της έννοιας καθώς και των σχέσεών της με άλλες σχετικές έννοιες. Στην περίπτωση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος οι κανόνες και οι αλγόριθμοι ολοκλήρωσης αποτελούν τη διαδικαστική κατανόηση της έννοιας, ενώ εννοιολογική είναι η κατανόηση του ορισμένου ολοκληρώματος ως όριο αθροισμάτων Riemann, η σχέση του ορισμένου ολοκληρώματος με το εμβαδό,

με το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού και με το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα είναι το αλγεβρικό άθροισμα εμβαδών.

Η παρούσα εργασία εξετάζει και καταγράφει την εννοιολογική κατανόηση των φοιτητών ενός τμήματος Μαθηματικών για το ορισμένο ολοκλήρωμα. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζει με τη οπτική γωνία της θεωρίας της Sfard (1991) μία από τις σχέσεις του δικτύου της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος, τη σχέση του με το εμβαδό. Σύμφωνα με τη Sfard μια μαθηματική έννοια μπορεί να γίνει αντιληπτή ως διεργασία – και τότε γίνεται λόγος για λειτουργική αντίληψη – αλλά και ως αφηρημένο αντικείμενο – και τότε αναφερόμαστε στη δομική αντίληψη της έννοιας. Στην περίπτωση της σχέσης του ορισμένου ολοκληρώματος και του εμβαδού θεωρούμε ως δομική αντίληψη το ότι ο φοιτητής αναγνωρίζει άμεσα και εκφράζει με σιγουριά πως το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε ένα διάστημα [a,b] είναι το προσημασμένο εμβαδό. Αντίστοιχα, θεωρούμε ως λειτουργική αντίληψη της σχέσης την περιορισμένη κατανόηση του υπολογισμού εμβαδού μιας γραμμοσκιασμένης επιφάνειας και του ορισμένου ολοκληρώματος.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 10 φοιτητές/τριες ενός τμήματος Μαθηματικών στην Ελλάδα. Η εμπειρική έρευνα που έγινε είναι ποιοτική. Συχνά η ποιοτική έρευνα εστιάζει σε βάθος σε ένα θέμα χρησιμοποιώντας σχετικά μικρό δείγμα (Patton, 1990, p. 169). Οι φοιτητές/τριες που συμμετείχαν στην έρευνα ανήκουν σε διαφορετικά έτη σπουδών και παρουσιάζουν διαφορετικές επιδόσεις στις εξετάσεις του μαθήματος που διδάσκεται το ολοκλήρωμα, όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.

Πλήθος συμμετεχό-ντων	Ψευδώνυμα		Μάθημα Απειροστικού Λογισμού – Πρώτου έτους (με άριστα το 10)		Έτος σπουδών		Βαθμοί στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης (με άριστα το 20)	
3	[1]	[2]	10	9	4	4+	20	19.9
	[3]		10		2		19.6	
3	[4]	[5]	5	5	4	4	15.9	19
	[6]		5		4+		15.1	
4	[7]	[8]	-	-	1	1	15	18
	[9]	[10]	-	-	2	2	11	18.6

Πίνακας 1. Προηγούμενες επιδόσεις των 10 συμμετεχόντων φοιτητών. Με '–' εννοούμε πως οι μαθητές δεν πέρασαν ακόμα το μάθημα.

Οι φοιτητές γνώριζαν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος ως όριο αθροισμάτων Riemann ήδη από την τελευταία τάξη του λυκείου και τη μελέτησαν

πιο αναλυτικά στο πρώτο έτος σπουδών τους. Οι συμμετέχοντες φοιτητές συμπλήρωσαν ένα ειδικά σχεδιασμένο ερωτηματολόγιο με εννέα ερωτήσεις, που στόχευαν να εξετάσουν τη κατανόησή τους για τα ορισμένα και αόριστα ολοκληρώματα. Κάποιες ερωτήσεις εξέταζαν την εννοιολογική κατανόηση και κάποιες τη διαδικαστική. Οι φοιτητές είχαν στη διάθεσή τους μια ώρα για να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο. Ακολούθως πήραν μέρος σε συνέντευξη διάρκειας 40 λεπτών κατά μέσο όρο. Η συνέντευξη είχε σκοπό να διερευνήσει περαιτέρω τις απαντήσεις που έδωσαν στο ερωτηματολόγιο.

Πριν τη συλλογή δεδομένων, η έρευνα, η οποία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής Μαθηματικών του Παιδαγωγικού τμήματος του πανεπιστημίου East Anglia (UEA), εγκρίθηκε από την επιτροπή δεοντολογίας του τμήματος. Η συμμετοχή στην έρευνα ήταν εθελοντική. Οι συμμετέχοντες πριν πάρουν μέρος είχαν ενημερωθεί για τη φύση της έρευνας και τους ζητήθηκε να δώσουν γραπτή συναίνεση για τη συμμετοχή στην έρευνα και την ηχογράφηση της συνέντευξης. Παράλληλα, οι συμμετέχοντες διαβεβαιώθηκαν ότι οι απαντήσεις και τα στοιχεία τους θα διατηρηθούν ανώνυμα και εμπιστευτικά και πως μπορούν να διακόψουν τη συμμετοχή τους στην έρευνα ανά πάσα στιγμή.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε δείγμα από την ανάλυση των δεδομένων από τα ερωτηματολόγια και τις συνεντεύξεις, εστιάζοντας στις έννοιες του ορισμένου ολοκληρώματος και του εμβαδού καθώς και στη σύνδεση μεταξύ τους.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Παρουσιάζουμε τα δεδομένα από δύο εκ των εννέα ερωτήσεων του ερωτηματολογίου (Ε1, Ε2) και επίσης αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις. Οι ερωτήσεις Ε1, Ε2 στοχεύουν στην εξέταση της εννοιολογικής κατανόησης του ορισμένου ολοκληρώματος. Η πρώτη ερώτηση εξετάζει την κατανόηση των φοιτητών όσον αφορά την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος *γενικά* και είναι η εξής:

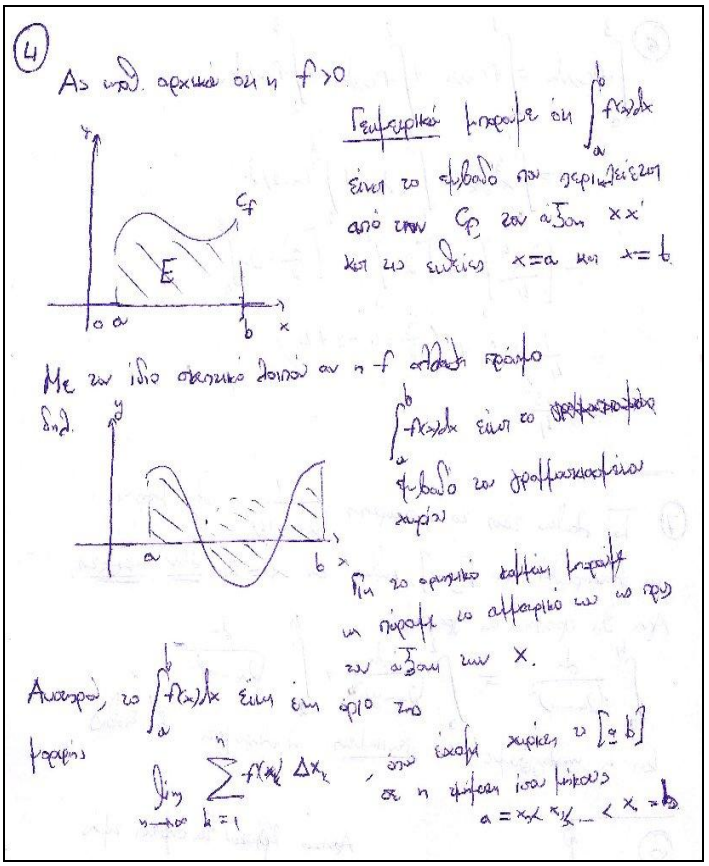
> Ε1: Ένας από τους συμφοιτητές σας έλειπε από το μάθημα όταν παρουσιάστηκαν τα ορισμένα ολοκληρώματα. Πώς θα του εξηγούσατε την σημασία του συμβόλου $\int_a^b f(x)dx$;

Στην παραπάνω ερώτηση όλοι οι φοιτητές συνέδεσαν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με την έννοια του εμβαδού. Ανάλογα με την αντίληψή τους για τη σχέση αυτή οι απαντήσεις τους μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως εξής:
Α Κατηγορία: Οι απαντήσεις δείχνουν ότι οι φοιτητές [1], [3] έχουν ξεκάθαρη και σαφή εικόνα για τη σχέση των εννοιών εμβαδού και ορισμένου ολοκληρώματος. Βλέπουν το ορισμένο ολοκλήρωμα ως προσημασμένο εμβαδό. Αναφέρονται σε αυτή τη σχέση άμεσα και με άνεση. Ο φοιτητής [1] (Εικόνα 1) συνδέει την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με το εμβαδό. Ακόμα, διαχωρίζει τις περιπτώσεις που η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι μόνο πάνω από τον άξονα $x'x$ και την

περίπτωση που είναι και πάνω και κάτω από τον άξονα. Σημειώνουμε ότι η απάντηση αυτή είναι η μοναδική που δίνει τον αυστηρό ορισμό του ολοκληρώματος, ως όριο αθροισμάτων, αν και ο [3] ανέφερε τα αθροίσματα χωρίς να δώσει τον ορισμό. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι και οι δύο φοιτητές έχουν δομική αντίληψη της σχέσης ορισμένου ολοκληρώματος και εμβαδού, που ουσιαστικά δείχνει την κατανόηση του ορισμένου ολοκληρώματος ως όριο αθροισμάτων Riemann.

Φοιτητής [3]: "Θα του έλεγα ότι σε γενικές γραμμές το παραπάνω σύμβολο παριστάνει ένα άθροισμα και ότι υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις δίνει το προσημασμένο εμβαδό".

Β Κατηγορία: Οι φοιτητές [2], [7], [8], [10] μπορούμε να υποθέσουμε ότι βρίσκονται μεταξύ διεργασίας και αφηρημένου αντικειμένου, όσον αφορά τη σχέση μεταξύ εμβαδού και ορισμένου ολοκληρώματος. Οι απαντήσεις τους δείχνουν ότι δεν έχει γίνει σαφής αυτή η σχέση. Γίνεται αναφορά στο ορισμένο ολοκλήρωμα ως το εμβαδό της περιοχής μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, των ευθειών $x=a$ και $x=b$ και του άξονα $x'x$, χωρίς να γίνεται αναφορά στις περιπτώσεις που η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$. Όμως, κατά τη διάρκεια της συνέντευξης οι ίδιοι κάνουν αναφορά στο προσημασμένο εμβαδό, όπως φαίνεται στα παρακάτω αποσπάσματα.



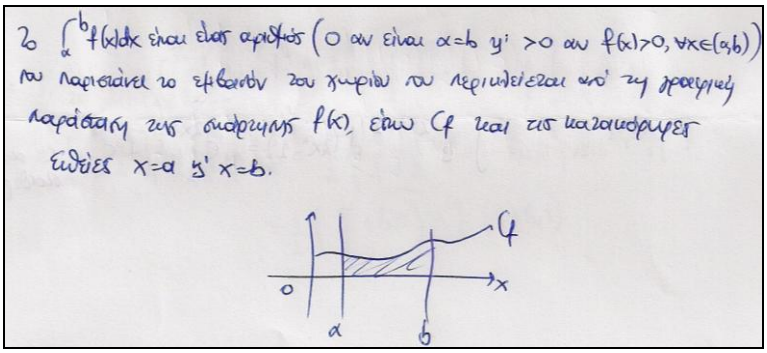
Εικόνα 1. Απάντηση [1] στην Ερώτηση 1.

Φοιτητής [2]: "παίρνουμε το προσημασμένο εμβαδό, αλλά δεν ήθελα να το γράψω γιατί περιέπλεκε τα πράγματα".

Φοιτητής [8]: "δεν είναι αρνητική ποσότητα, απλά υποδηλώνει ότι είναι κάτω από τον (άξονα) $x'x$".

Γ Κατηγορία: Οι φοιτητές [4], [5], [6], [9] περιορίζονται σε συναρτήσεις που έχουν γραφικές παραστάσεις πάνω από τον άξονα $x'x$. Μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι η αντίληψή τους για τη σχέση αυτή βρίσκεται σε λειτουργικό στάδιο. Μολονότι συνδέουν το ορισμένο ολοκλήρωμα με το εμβαδό, η σύνδεση περιορίζεται σε εμβαδό γραφικών παραστάσεων πάνω από τον άξονα $x'x$. Χαρακτηριστική απάντηση είναι της φοιτήτριας [4] (Εικόνα 2), που ορίζει το ορισμένο ολοκλήρωμα ως θετικό αριθμό ή μηδέν. Αν και εξετάζει την περίπτωση που η συνάρτηση είναι θετική, δεν

αναφέρεται σε συνάρτηση αρνητική ή σε συνάρτηση που είναι θετική σε ένα διάστημα και αρνητική σε άλλο. Παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι φοιτητές ορίζουν το ορισμένο ολοκλήρωμα ως εμβαδό. Οι απαντήσεις των φοιτητών της παρούσας έρευνας είναι σύμφωνες με τα ευρήματα των Rasllan και Tall (2002), González-Martín και Camacho (2004), και Jukić και Dahl (2011), ότι δηλαδή, η πλειονότητα των φοιτητών αναφέρεται στο ορισμένο ολοκλήρωμα ως υπολογισμό εμβαδού. Ακόμη, οι φοιτητές της παρούσας έρευνας δεν αναφέρουν τις προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται για να υπάρχει το ολοκλήρωμα και να συμβολίζει το εμβαδό. Από τους τρεις φοιτητές ([1], [4], [9]) που έδωσαν γράφημα στην απάντησή τους, οι δύο παρουσίασαν γράφημα που βρίσκεται *πάνω* από τον άξονα *x΄x*. Αντίστοιχα, οι παραπάνω

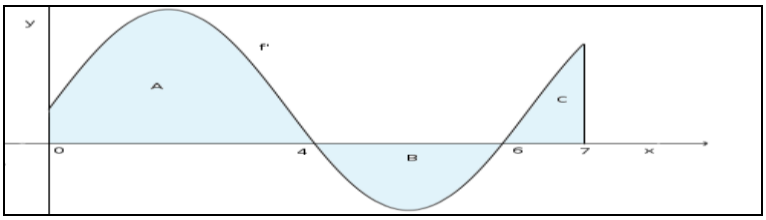


Εικόνα 2. Απάντηση [4] στην Ερώτηση 1

έρευνες κατέγραψαν ότι οι περισσότεροι συμμετέχοντες δίνουν σχεδόν αποκλειστικά σχήματα γραφικών παραστάσεων *πάνω* από τον άξονα *x΄x*.

Η δεύτερη ερώτηση σχεδιάστηκε ειδικά για την εξέταση την εννοιολογικής κατανόησης από τον Mahir (2009) και την χρησιμοποίησε και ο Huang (2011). Για την επίλυσή της χρειάζεται η εφαρμογή του Θεμελιώδους Θεωρήματος Ολοκληρωτικού Λογισμού, η σύνδεση μεταξύ των εννοιών εμβαδού και ορισμένου ολοκληρώματος καθώς και η ιδιότητα του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης να γράφεται ως άθροισμα ολοκληρωμάτων. Δηλαδή ότι αν $a < c < b$ τότε $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. Η ερώτηση εξετάζει την κατανόηση των φοιτητών για τις έννοιες αυτές και για τις συνδέσεις μεταξύ τους και είναι η εξής:

> Ε2: Η γραφική παράσταση της f', της πρώτης παραγώγου της f, είναι σχεδιασμένη παρακάτω. Τα εμβαδά είναι Α=20, Β=8 και C=5 τετραγωνικές μονάδες.
>
> Δίνεται ότι $f(0) = -5$. Υπολογίστε την τιμή του $f(6)$.

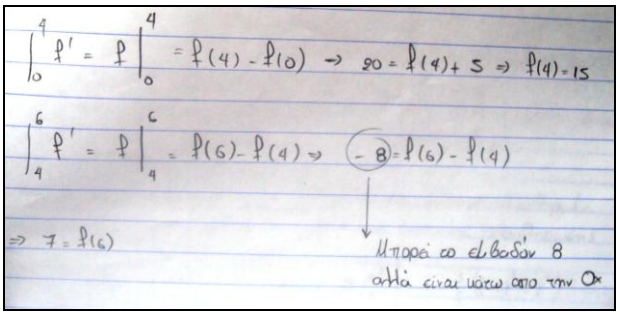


Η αναμενόμενη απάντηση στην παραπάνω ερώτηση είναι η εξής: Η γραφική παράσταση που μας δίνεται είναι της f' και από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι η f' είναι συνεχής και συνεπώς ολοκληρώσιμη. Το $\int_0^6 f'(x)dx$ εκφράζει το προσημασμένο

εμβαδό μεταξύ της f', της $y=0$ και των ευθειών $x=0$, $x=6$ και ισούται με $A-B=20-8=12$. Εφαρμόζοντας το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε οτι $\int_0^6 f'(x)dx = f(6)-f(0)$. Συνεπώς $f(6)=\int_0^6 f'(x)dx + f(0)=12-5=7$.

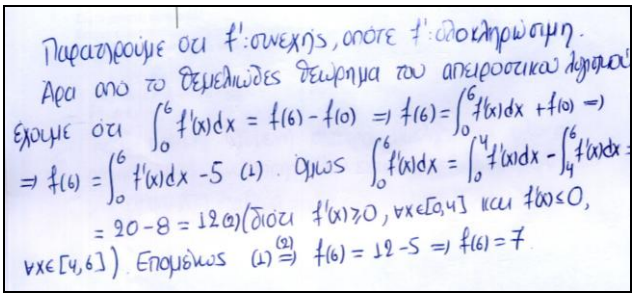
Οι απαντήσεις των φοιτητών μπορούν να διακριθούν σε τρεις κατηγορίες:
Α Κατηγορία: Οι φοιτητές [1], [7], [9], [10] φαίνεται να έχουν δομική αντίληψη για τη σχέση ορισμένου ολοκληρώματος και εμβαδού. Δηλαδή, λαμβάνουν υπόψη τους ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι το προσημασμένο εμβαδό. Για παράδειγμα, στην Εικόνα 3 βλέπουμε ότι ο φοιτητής [9] αναφέρει ξεκάθαρα ότι το εμβαδόν είναι 8 αλλά επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, το ορισμένο ολοκλήρωμα ισούται με -8.

Β Κατηγορία: Οι απαντήσεις που ανήκουν σε αυτή την κατηγορία δείχνουν ότι οι φοιτητές [3], [4] παρουσιάζουν σχετικά περιορισμένη εννοιολογική κατανόηση. Πιο συγκεκριμένα, αν και εφαρμόζουν σωστά το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού και λαμβάνουν υπόψη τους ότι το εμβαδό που βρίσκεται κάτω απο τον $x'x$ παίρνει



Εικόνα 3. Απάντηση [9] στην Ερώτηση 2

αρνητικό πρόσημο, δεν φαίνεται να έχουν συνδέσει ξεκάθαρα τις έννοιες του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος. Στην Εικόνα 4 βλέπουμε ότι ο φοιτητής αναφέρεται στο εμβαδό που βρίσκεται κάτω από τον άξονα και εξηγεί το αρνητικό πρόσημο λέγοντας ότι η συνάρτηση είναι αρνητική


Εικόνα 4. Απάντηση [3] στην Ερώτηση 2.

στο διάστημα [4,6]. Όμως δεν διαπιστώνει ότι βάζοντας το πρόσημο επηρεάζεται η ιδιότητα του ορισμένου ολοκληρώματος στο [0,6] που μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα ορισμένων ολοκληρωμάτων στο [0,4] και στο [4,6]. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι οι φοιτητές [3], [4] συγχέουν τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, που είναι ένας πραγματικός αριθμός, με τον υπολογισμό του εμβαδού που καλύπτει η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια, που είναι ένας θετικός αριθμός. Η ισότητα $\int_0^6 f'(x)dx = \int_0^4 f'(x)dx - \int_4^6 f'(x)dx$ που γράφει ο φοιτητής [3], δεν ισχύει διότι στο αριστερό μέλος της ισότητας βρίσκεται το ορισμένο ολοκλήρωμα που η τιμή του υπολογίζεται σε 12, ενώ στο δεξιό το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης

περιοχής που ισούται με 28. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι ο φοιτητής, επειδή δεν έχει ξεκαθαρίσει τη σύνδεση του ορισμένου ολοκληρώματος με το προσημασμένο εμβαδό, αλλά έχει υπόψη του τις αρνητικές τιμές που παίρνει η συνάρτηση στο διάστημα [4,6] (από το γράφημά της), εκτιμά ότι πρέπει να χρησιμοποιήσει το αρνητικό πρόσημο πριν από το $\int_4^6 f'(x)dx$. Αυτή η ενέργειά του δείχνει ότι μάλλον δεν γνωρίζει ότι ισχύει $\int_4^6 f'(x)dx = -8$.

Γ Κατηγορία: Οι φοιτητές [2], [5], [6], [8] δεν λαμβάνουν υπόψη τους το εμβαδό που δίνει η γραφική παράσταση κάτω από τον *x΄x*, φανερώνοντας περιορισμένη αντίληψη για τη σύνδεση των εννοιών του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος (Εικόνα 5). Αν και εφαρμόζουν σωστά το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού και γνωρίζουν ότι το ολοκλήρωμα είναι το αλγεβρικό άθροισμα ολοκληρωμάτων, ταυτίζουν το ορισμένο ολοκλήρωμα με το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης περιοχής.. Στις περιπτώσεις που η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα *x΄x,* είναι σωστή η αντίληψη ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα ισούται με το εμβαδό γραμμοσκιασμένης περιοχής. Η γενίκευση αυτής της αντίληψης για όλες τις πραγματικές συναρτήσεις οδηγεί σε ελλιπή σύνδεση των εννοιών εμβαδό και ορισμένο ολοκλήρωμα.

$$f(6) = \int_0^6 f'(x)dx + f(0) = \int_0^4 f'(x)dx + \int_4^6 f'(x)dx + f(0) = A + B + f(0) = 20 + 8 - 5 = 23$$

Τα ανωτέρω, έχοντας δείξει μέσω του σχήματος την συνέχεια της f' στο διάστημα που μας ενδιαφέρει.

Εικόνα 5. Απάντηση [2] στην Ερώτηση 2 (κατατέθηκε δακτυλογραφημένη από τον ίδιο)

Σημειώνουμε όμως ότι δύο από τους φοιτητές αυτής της κατηγορίας ([2], [8]) κατά τη διάρκεια της συνέντευξης διαπιστώνουν ότι δεν έχουν λάβει υπόψη τους το εμβαδό κάτω από τον *x΄x,* αναθεωρούν και διορθώνουν την απάντησή τους.

> Φοιτητής [8]: "Τώρα που το ξαναβλέπω πιθανόν να έπρεπε να βάλω -8 και όχι 8, επειδή είναι κάτω από τον *x΄x*, άρα έχει αρνητικό πρόσημο το εμβαδό".

Οι φοιτητές της παρούσας έρευνας δεν παρουσίασαν προβλήματα στον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης που δεν έχει δοθεί ο τύπος της αλλά μόνο το γράφημά της. Επιπλέον, αρκετοί λαμβάνουν υπόψη τους και αναφέρουν τη συνέχεια της συνάρτησης, που τους δίνεται έμμεσα από το γράφημα, ως προϋπόθεση για την ολοκληρωσιμότητα της. Υπενθυμίζουμε ότι στην Ε1 οι φοιτητές δεν ανέφεραν τις προϋποθέσεις για να υπάρχει το ορισμένο ολοκλήρωμα. Ακόμη, σε αντιδιαστολή με τις έρευνες των Yasin και Enver (2007) καθώς και Jukić και Dahl (2011), οι φοιτητές της παρούσας εργασίας δεν παρουσίασαν προβλήματα στον υπολογισμό των ορίων ολοκλήρωσης καθώς και στην επιλογή της σωστής περιοχής μεταξύ της γραφικής παράστασης και των αξόνων.

Οι έρευνες που χρησιμοποίησαν την ίδια ερώτηση σε πρωτοετείς φοιτητές βρήκαν ότι μόνο 15 από τους 62 συμμετέχοντες στην έρευνα του Mahir (2009) και 90 από τους 203 συμμετέχοντες στην έρευνα του Huang (2011) δείχνουν ότι κατανοούν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και τη σύνδεσή της με την έννοια του εμβαδού. Οι απαντήσεις των φοιτητών στις παραπάνω έρευνες καθώς και στην παρούσα, δείχνουν τη δυσκολία τους να υπολογίσουν το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης που η γραφική παράστασή της τέμνει τον $x'x$. Τα παραπάνω στηρίζουν τις έρευνες των Orton (1983) και Rasslan και Tall (2002) που διαπιστώνουν ότι οι συμμετέχοντες στις έρευνές τους παρουσιάζουν την ίδια δυσκολία.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τις απαντήσεις των φοιτητών φάνηκε ότι η εννοιολογική κατανόησή τους για το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι σχετικά ελλιπής. Οι περισσότεροι ορίζουν το ορισμένο ολοκλήρωμα σαν εργαλείο υπολογισμού εμβαδού και ελάχιστοι αναφέρουν την έννοια προσημασμένο εμβαδό. Παρατηρούμε ότι, αν και οι φοιτητές συνδέουν την έννοια του εμβαδού με την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, η σύνδεση μεταξύ των εννοιών αυτών είναι περιορισμένη. Το γεγονός ότι οι περισσότεροι δε λαμβάνουν υπόψη τους το εμβαδό κάτω από τον άξονα $x'x$, δείχνει ότι δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη σύνδεση του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος. Αυτή η δυσκολία πιθανόν να πηγάζει απο την αδυναμία των φοιτητών να αντιληφθούν το ορισμένο ολοκλήρωμα ως όριο αθροισμάτων Riemann.

Η βαθύτερη κατανόηση της έκφρασης $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ προυποθέτει την κατανόηση της διαφοράς Δx_k που είναι θετική ποσότητα και του $f(x_k)$ που το πρόσημό του εξαρτάται από το πρόσημο της τιμής της συνάρτησης στο συγκεκριμένο σημείο.

Οι απαντήσεις στις δύο ερωτήσεις που επιλέχθηκαν να παρουσιαστούν σ' αυτήν την εργασία δείχνουν την περιορισμένη εννοιολογική κατανόηση των φοιτητών για το ορισμένο ολοκλήρωμα και για τη σύνδεσή του με το εμβαδό. Ανάλογη έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος φανερώνουν και οι απαντήσεις τους στις υπόλοιπες εφτά ερωτήσεις της ευρύτερης έρευνας (Thoma, 2013). Αντίθετα, όσον αφορά τη διαδικαστική τους κατανόηση παρατηρήσαμε ότι γνωρίζουν και χρησιμοποιούν τις βασικές τεχνικές και τους αλγορίθμους ολοκλήρωσης. Αντίστοιχη παρατήρηση έγινε και από τον Orton (1983).

Όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα, δεν είναι προφανής η σχέση της προηγούμενης επίδοσης των φοιτητών στο μάθημα Απειροστικού Λογισμού και του έτους σπουδών τους με την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος. Αναφέρουμε το παράδειγμα των φοιτητών [7], [9], [10] που δεν πέρασαν ακόμα τις εξετάσεις του μαθήματος αλλά οι απαντήσεις τους στην δεύτερη ερώτηση φανερώνουν ότι αναγνωρίζουν τη σύνδεση ορισμένου ολοκληρώματος και εμβαδού.

Από την άλλη, οι απαντήσεις των φοιτητών [2], [3] στην ερώτηση 2 φανερώνουν οτι δεν έχουν ξεκαθαρίσει αυτή τη σύνδεση.

Τα παραπάνω ευρήματα τονίζουν την ανάγκη για αναθεώρηση του τρόπου διδασκαλίας του ορισμένου ολοκληρώματος, ώστε η εννοιολογική κατανόηση των φοιτητών να εμπλουτιστεί. Θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστούν οι λόγοι για τους οποίους κυριαρχεί ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος ως εμβαδό και όχι ως όριο αθροισμάτων Riemann. Ταυτόχρονα, είναι σημαντικό να εξεταστεί και η σύνδεση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος με άλλες έννοιες όπως αόριστο ολοκλήρωμα, αθροίσματα Riemann, παράγωγος συνάρτησης, πιθανότητες και όγκος.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ
Ευχαριστούμε θερμά τους φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνά μας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

González-Martín, A. S., & Camacho, M. (2004). What is first-year Mathematics students' actual knowledge about improper integrals?. *International journal of mathematical education in science and technology*, *35*(1), 73-89.

Hiebert, J. E., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In Hiebert, J. (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1-27.

Huang, C. H. (2011). Conceptual and procedural abilities of engineering students to perform mathematical integration. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, *9*, 31-37.

Jukić, L., & Dahl, B. (2011). University students' concept image and retention of the definite integral. In Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 73-80. Ankara, Turkey: PME

Mahir, N. (2009). Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(2), 201-211.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1-18.

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods*. London: SAGE.

Rasslan, S., & Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. In Cockburn, A. & Nardi, E. (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 89-96. Norwich, United Kingdom: PME

Rösken, B., & Rolka, K. (2007). 'Integrating intuition: the role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus'. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *3*, 181-204.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1-36.

Thoma, A. (2013). *Integrals through the eyes of a group of undergraduate students from a Department of Mathematics in Greece*. Unpublished dissertation (MA), University of East Anglia, Norwich, United Kingdom.

Yasin, S., & Enver, T. (2007). Students′ Difficulties with Application of Definite Integration. *Educaţia Matematică*, *3*(1-2), 15-27.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΚΑΛΥΨΕΙΣ ΜΕΣΑ ΣΕ ΕΡΓΑ ΤΕΧΝΗΣ

Θωμάς Ζωγράφος, Δόξα Κωτσαλίδου, Χιονάτη Παπαδοπούλου

Ε.Ε.ΔΙ.Π. στο Τ.Ε.Ε.Τ. του Π.Δ.Μ. , Ε.Ε.ΔΙ.Π. στο Π.Τ.Ν. του Π.Δ.Μ. , Μαθηματικός του Α.Π.Θ.

thozografos@yahoo.gr xionati_pap@hotmail.com kdoxa@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, προτείνουμε έναν τρόπο ενασχόλησης των μικρών παιδιών με τα μαθηματικά, μέσα από προσεγγίσεις εικαστικών έργων τέχνης. Υλοποιώντας ο εκπαιδευτικός προσεγγίσεις κατάλληλων έργων τέχνης, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές του να ανακαλύψουν βιωματικά κι ευχάριστα, ποικίλες μαθηματικές έννοιες. Το έργο ενός καλλιτέχνη, γίνεται η αφορμή για παρατήρηση, προβληματισμό, πειραματισμό, έρευνα και ανακάλυψη. Οι μαθητές, χωρίς να αντιληφθούν ότι ασχολούνται με τα μαθηματικά, δημιουργούν τα δικά τους έργα, μετρώντας, και υπολογίζοντας, μα πρωτίστως, αναπτύσσουν κριτική και μαθηματική σκέψη στην προσπάθεια να ολοκληρώσουν τους δημιουργικούς πειραματισμούς τους.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται έντονο ενδιαφέρον για τη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών. Πολλοί ερευνητές προτείνουν να αξιοποιηθεί η άτυπη μαθηματική γνώση από τη μικρότερη ηλικία και να αναπτυχθεί έγκαιρα ο μαθηματικός τρόπος σκέψης και δράσης, τον οποίο κρίνουν απαραίτητο για την ολοκληρωμένη ανάπτυξη των παιδιών και τη μεταγενέστερη μάθηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών (Τζεκάκη, 2010). Τα μικρά παιδιά δεν είναι υποχρεωμένα να αφομοιώνουν παθητικά μια νεκρή ύλη από προαποφασισμένες και προσχεδιασμένες καταστάσεις. Γι' αυτό κρίνεται απαραίτητο, ένα πρόγραμμα μαθηματικών δραστηριοτήτων να είναι ανοιχτό και ευέλικτο. Η ανάδυση λοιπόν των μαθηματικών γνώσεων, μέσα από ευχάριστες εικαστικές δραστηριότητες, είναι η πρότασή μας για τον τρόπο οργάνωσης της μαθησιακής διαδικασίας.

2. ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΙΣ ΠΡΩΤΕΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών, (Δ.Ε.Π.Π.Σ. 2003 & Νέο πρόγραμμα σπουδών, 2011), προτείνουν, στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών, να δίδεται έμφαση στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης και να λαμβάνονται επίσης υπόψη, οι βιωματικές και ανθρωπιστικές διαστάσεις που αφορούν στην ολόπλευρη ανάπτυξη του παιδιού. Η μαθηματική εκπαίδευση εντάσσεται πλέον σε ένα πρώτο και ενιαίο κύκλο σπουδών (4-8 χρόνων), στη διάρκεια που οποίου τα παιδιά θεμελιώνουν βασικές

μαθηματικές διεργασίες και γνώσεις. Τα μαθηματικά αποτελούν μέρος της βιώσιμης πραγματικότητας των παιδιών και οι Richard (1982) & Bruner (1985) προτείνουν, η μαθησιακή διαδικασία να οργανώνεται έτσι ώστε, να ανταποκρίνεται στα ενδιαφέροντά τους. Για να επιτευχθεί αυτό, ο Κοτοπούλης (2007) προτείνει, να συνδυαστούν με άλλα γνωστικά αντικείμενα και να διδαχθούν π.χ. διάφορες μαθηματικές έννοιες με τυχόν εναύσματα που θα δοθούν στα πλαίσια της εικαστικής αγωγής. Προτάσσοντας τη σημασία της πολλαπλής και ανοιχτής προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών, προβληματιζόμαστε για την επικρατούσα κατάσταση των τυποκρατικών μαθηματικών. Εστιάζουμε το κύριο ενδιαφέρον στην πραγματική σχολική τάξη και στην ανάπτυξη ερευνητικών δραστηριοτήτων (Καλαβάσης, 1997), επιζητώντας να αναπτύξουν τα παιδιά συμπεριφορά ερευνητή και δίνοντας έμφαση σε ειδικούς στόχους μεθοδολογικού χαρακτήρα και σε στρατηγικές που μπορεί να είναι από απλοί εμπειρικοί συλλογισμοί, έως πιο σύνθετοι, δημιουργικοί και παραγωγικοί. Κυρίως όμως, με την πρότασή μας, προτείνουμε έναν ελκυστικό τρόπο διαπραγμάτευσης ποικίλων μαθηματικών εννοιών, μέσα στον οποίο, τα παιδιά δρουν, εφαρμόζουν τις γνώσεις που ήδη διαθέτουν, κάνουν σκέψεις, πιθανά λάθη κ.λπ. (Λεμονίδης, 2003).

3. ΤΑ ΕΙΚΑΣΤΙΚΑ ΣΤΙΣ ΠΡΩΤΕΣ ΤΑΞΕΙΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Μέσα από την καλλιτεχνική εκπαίδευση, τα παιδιά αναπτύσσουν τις γνωστικές εκείνες ικανότητες που τους επιτρέπουν να αναλύουν, να κρίνουν, να ερμηνεύουν και να περιγράφουν τις εκφραστικές ποιότητες που κρύβονται στα έργα τέχνης και στο ευρύτερο περιβάλλον τους (Σάλλα-Δοκουμετζίδη, 1996). Για να επιτευχθούν οι στόχοι της εικαστικής αγωγής στην εκπαίδευση, προτείνεται ένα περιεχόμενο, το οποίο βασίζεται στους συνδυασμούς 5 αξόνων, ανάλογα με τις θεματικές ενότητες που επιλέγονται (Μαγουλιώτης & Λαζάρου, 2006) και είναι οι παρακάτω: *α. Απλά Υλικά, Μέσα, Τεχνικές,* β. *Μορφικά στοιχεία,* γ. *Μορφές εικαστικών τεχνών,* δ. *Έργα τέχνης* και ε. *Εισαγωγή στην καλαισθησία.* Κατά την εκπαιδευτική διαδικασία δεν είναι δυνατόν να λειτουργήσει κανένας άξονας αυτόνομα και μεμονωμένα και γι' αυτό το λόγο κρίνεται απαραίτητη η εμπλοκή και ο συνδυασμός μεταξύ τους. Η πραγματικότητα όμως στην εκπαιδευτική διαδικασία αποδεικνύει ότι οι εκπαιδευτικοί, την ώρα των εικαστικών δεν πραγματεύονται την προσέγγιση καλλιτεχνών και έργων τέχνης και μεταποιούν την εικαστική αγωγή σε δημιουργική απασχόληση.

4. Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Αναζητώντας α. έναν ελκυστικό τρόπο διαπραγμάτευσης των μαθηματικών εννοιών (όπως: Λεμονίδης, 2003) και β. τη δημιουργία ποιοτικών εικαστικών δραστηριοτήτων, εφαρμόσαμε τη διδακτική πρόταση που παρουσιάζουμε στην παρούσα εργασία, η οποία αποτελεί μέρος μιας ολοκληρωμένης διδακτικής παρέμβασης που

υλοποιήθηκε σε α' τάξη ελληνικού δημοτικού σχολείου αστικής περιοχής και έλαβαν μέρος 18 παιδιά (10 κορίτσια και 8 αγόρια). Οι οργανωμένες δραστηριότητες υλοποιήθηκαν στις προκαθορισμένες ώρες των εικαστικών (σύμφωνα με το ωρολόγιο πρόγραμμα της σχολικής μονάδας). Η έρευνα που πραγματοποιήσαμε ήταν: α. *εφαρμοσμένη* γιατί είχε προκαθορισμένο πρακτικό σκοπό και απέβλεπε στην πρακτική εφαρμογή των επιστημονικών γνώσεων και θεωριών, β. *έρευνα Δράσης,* η οποία ακολούθησε ένα προκαθορισμένο σχέδιο, με προσδιορισμό ορισμένων μεταβλητών (μαθησιακών στόχων) και επιδίωκε τη συμμετοχή όλων των μελών της εκπαιδευτικής ομάδας στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε ήταν *η πειραματική*. Υλοποιήθηκε στο φυσικό περιβάλλον της τάξης, και κατά το τέλος αυτής, καταγράφηκαν οι δημιουργίες των παιδιών και καταλήξαμε σε πορίσματα (Βάμβουκας, 1989).

4.1. Η Δομή της Διδακτικής πρότασης

Η εικαστική δραστηριότητα που σχεδιάσαμε, αποτελεί μια διδακτική πρόταση με τρεις κύριες φάσεις: α. την προσέγγιση έργων τέχνης, β. τον πειραματισμό και τη δημιουργία και γ. την αξιολόγηση.

Α' Φάση: Προσέγγιση έργων τέχνης

Η προσέγγιση των έργων τέχνης, αποτελεί το «κλειδί» της διδακτικής παρέμβασης. Η γνώση των εικαστικών στοιχείων, καθίσταται αναγκαία, γιατί βοηθάει το παιδί να αιτιολογήσει μια εικόνα, το παροτρύνει στη δημιουργία δικών του οπτικών μηνυμάτων, ασκώντας την αντίληψη, τη μνήμη (Μαγουλιώτης, 1994) και την κριτική του ικανότητα. Επιπλέον, όπως υποστηρίζει ο Eisner σε έρευνες του (1999 και 2002), με την «ανάγνωση» ενός εικαστικού έργου επιτυγχάνεται ο «αλφαβητισμός», δηλαδή η ικανότητα του ανθρώπου να ανακαλύπτει και να κατανοεί τα βαθύτερα νοήματα μιας εικόνας. Όταν τα παιδιά καλούνται να συμμετέχουν στη διαδικασία προσέγγισης ενός έργου τέχνης: α. Εξασκούνται στην προσεκτική παρατήρηση, β. Προβληματίζονται, αναζητούν απαντήσεις και αποκτούν κριτική σκέψη. γ. Έρχονται σε επαφή με τον περιγραφικό λόγο εμπλουτίζοντας το λεξιλόγιό τους σε εικαστικούς και μαθηματικούς όρους, δ. Γνωρίζουν έργα τέχνης, μορφές τέχνης και καλλιτέχνες και αποκτούν σιγά-σιγά εικαστική παιδεία και πολιτιστική κουλτούρα και ε. Προσεγγίζοντας ένα έργο τέχνης, τα παιδιά, άλλοτε ως δημιουργοί και άλλοτε ως θεατές, χρησιμοποιούν την εικαστική γλώσσα που την αποτελούν τα εικαστικά και μορφικά στοιχεία (σημείο, γραμμή, σχήμα, μορφή, φως, τόνος, υφή και διάστημα) και αρχές του design (σύνθεση, θέμα, χώρος, χρόνος, επανάληψη, ύφος) που είναι οργανωμένα κατάλληλα σε κάθε εικόνα με στόχο την αποτύπωση σκέψεων, ιδεών και συναισθημάτων του δημιουργού της.

Β' Φάση: Πειραματισμού και Δημιουργίας

Μετά την ολοκλήρωση της προσέγγισης των έργων τέχνης, ακολουθεί η φάση του πειραματισμού και της δημιουργίας των παιδιών. Είναι η πιο δημιουργική στιγμή της μαθησιακής διαδικασίας, όπου τα παιδιά προσπαθούν να εφαρμόσουν τις νέες γνώσεις και εμπειρίες που απέκτησαν. Επίσης, μπορεί να χρησιμοποιούν τις γραμμές, τα σχήματα και τα χρώματα για να συνθέσουν διάφορες μορφές. Τα παιδιά έχουν τη δυνατότητα να δημιουργούν, να σχεδιάζουν, να ζωγραφίζουν, να κατασκευάζουν εικόνες που δεν έχουν καμιά σχέση με την πραγματική απεικόνιση αλλά με ό,τι συλλαμβάνει, επεξεργάζεται ή πλάθει η φαντασία ή κρίνει η σκέψη τους. Για τον ερευνητή Langer (1957), η εικαστική δημιουργία καθίσταται ως μια παιδαγωγική δραστηριότητα, η οποία αντικατοπτρίζει τον εσωτερικό κόσμο του παιδιού και συνάμα καλλιεργεί και αναπτύσσει τη σκέψη του. Ένα σημαντικό στοιχείο της εικαστικής δημιουργίας, είναι ότι απαλλάσσει τα παιδιά από το φόβο της κριτικής (του σωστού ή λάθους), με αποτέλεσμα, τα «προϊόντα» που παράγονται στη διάρκεια αυτής, να είναι πιο ειλικρινή και αυθόρμητα, κι ως εκ τούτου, και η ανάλυση αυτών, να εξάγει αποτελέσματα ουσιαστικά και αδιαμφισβήτητα. Στην αρχή αυτής της φάσης, δόθηκαν κατευθυντήριες οδηγίες και στη συνέχεια, τα παιδιά δημιούργησαν ελεύθερα και αβίαστα είτε ατομικά είτε σε ομάδες. Σε όλη τη διάρκεια των δράσεων, η εκπαιδευτικός βρισκόταν κοντά στα παιδιά, συζητούσε, βοηθούσε, εμψύχωνε και παρότρυνε για περαιτέρω ανακαλύψεις και πειραματισμούς (Dewey, 1959).

Γ' Φάση: Αξιολόγηση

Η αξιολόγηση της δραστηριότητας είναι πολύ σημαντική και απαραίτητη, έτσι ώστε να κατανοήσουν τα παιδιά, τι είναι αυτό που έκαναν, γιατί το έκαναν και πώς το έκαναν. Επαναλαμβάνουν εικαστικούς και μαθηματικούς όρους, περιγράφουν μια κατάσταση, ένα αποτέλεσμα και καταλήγουν σε συμπεράσματα. Επιτυγχάνεται η εμπέδωση των νεοαποκτηθέντων γνώσεων και παράλληλα, τα παιδιά νιώθουν περήφανα για τα έργα τους. Επιπλέον, συνειδητοποιούν τη διαδικασία που ακολούθησαν, εθίζονται στον επιστημονικό τρόπο εργασίας και παρουσίασης της εργασίας τους, Σύμφωνα με τη Τζεκάκη (2010), μια δραστηριότητα ολοκληρώνεται με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων και τη συζήτηση πάνω στους τρόπους με τους οποίους δούλεψαν τα παιδιά, τις ιδέες που είχαν ή τις στρατηγικές που ανέπτυξαν. Η φάση αυτή, είναι πολύ σημαντική γιατί επιτυγχάνονται δύο σημαίνοντες στόχοι: από τη μια, όταν τα παιδιά εκφράζουν με λόγια μια ιδέα, μια κατασκευή ή δίνουν μια εξήγηση, αναπαράγουν νοερά τη δράση τους και οργανώνουν τη σκέψη τους, με αποτέλεσμα να αντιληφθούν την ιδέα, τη λύση, την κατασκευή κ.λπ. σε ένα ουσιαστικό επίπεδο, και από την άλλη, όταν αλληλεπιδρούν με τους ενήλικες ή τα άλλα παιδιά, προσλαμβάνουν από αυτούς νέα νοήματα και σημασίες. Τα νέα αυτά νοήματα λειτουργούν ανατροφοδοτικά στην ανάπτυξη και της δικής τους σκέψης (Τζεκάκη, 2010).

4.2. Το Δείγμα της έρευνας

Δείγμα της έρευνας, αποτέλεσαν τα ατομικά και ομαδικά έργα που δημιούργησαν τα παιδιά κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας. Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων, χρησιμοποιήσαμε κατά κύριο λόγο τη σημειωτική ανάλυση (Belting, κ.α. 1995). Το περιεχόμενο του υλικού μας ταξινομήθηκε και κωδικοποιήθηκε σε 10 κατηγορίες, και στη συνέχεια αναλύθηκε ως προς τους εικαστικούς και μαθηματικούς άξονες που προτείνει το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών (2011). Οι 10 κατηγορίες είναι:

α. Εικαστικές:

1. Υλικά, Μέσα, Τεχνικές: Όλα τα υλικά και μέσα που χρησιμοποιούμε για την παραγωγή δημιουργημάτων.

2. Μορφικά στοιχεία: Τα στοιχεία που χρησιμοποιούμε για να δημιουργήσουμε ένα έργο (σημείο, γραμμή, σχήμα, μορφή, χρώμα, υφή).

3. *Μορφές εικαστικών τεχνών:* Οι μορφές των εικαστικών τεχνών όπως: ζωγραφική, πλαστική, υφαντική κ. ά.

4. *Έργα τέχνης:* Έργα τέχνης και καλλιτέχνες από διάφορες εποχές και χώρες, από την αρχαία έως τη σύγχρονη εποχή.

5. *Εισαγωγή στην καλαισθησία:* Εισαγωγή το «ωραίο», εικαστικοί όροι, έκφραση συναισθημάτων κ.λπ.

Και β. Μαθηματικές:

1. *Αριθμοί και πράξεις:* Φυσικοί αριθμοί ως το 100 και πράξεις (ανάγνωση και γραφή των αριθμών μέχρι το 100, αναγνώριση ποσοτήτων, καταμέτρηση, διάταξη ποσοτήτων και αριθμών, πρόσθεση και αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση).

2. *Εισαγωγή στην Αλγεβρική σκέψη:* Κανονικότητες και ισότητες (κανονικότητες, συναρτήσεις, ανισότητες-ισότητες)

3. *Χώρος και Γεωμετρία:* Προσανατολισμός στο χώρο, γεωμετρικά σχήματα, μετασχηματισμοί και οπτικοποίηση (θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές, ανάγνωση χαρτών, δόμηση χώρου και συντεταγμένες, γεωμετρικά σχήματα, μετασχηματισμοί και συμμετρία, οπτικοποίηση και χωρικός συλλογισμός,)

4. Μετρήσεις: Εισαγωγή στη μέτρηση μήκους, επιφάνειας, όγκου και χωρητικότητας (τυπικά και μη τυπικά όργανα μέτρησης κ.λπ.)

5. Στοχαστικά Μαθηματικά: Οργάνωση δεδομένων και εισαγωγή στην πιθανότητα (στατιστική, πιθανότητες)

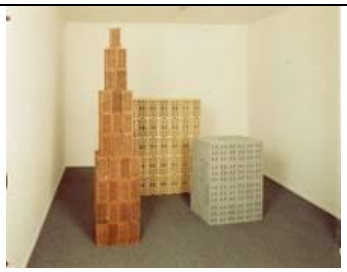
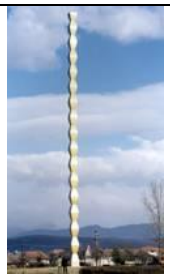
Επειδή η έρευνά μας είναι ποιοτική, θεωρήσαμε ως μονάδες μέτρησης, επίσης, οποιοδήποτε στοιχείο που αποδεικνύει ότι τα παιδιά χρησιμοποίησαν και κατανόησαν μια εικαστική ή μαθηματική έννοια.

5. Η ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΕΙΚΑΣΤΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η δραστηριότητα υλοποιήθηκε σύμφωνα με τις τρεις προαναφερθείσες φάσεις:

5.1. Προσέγγιση έργων τέχνης

Παρουσιάσαμε τα έργα των καλλιτεχνών (πίνακας 1) και καλέσαμε τα παιδιά να τα παρατηρήσουν και να τα περιγράψουν. Για την προσέγγιση των έργων τέχνης χρησιμοποιήσαμε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή και προβάλαμε τα έργα σε οθόνη προβολής, επιτυγχάνοντας καλύτερο οπτικό αποτέλεσμα και κάνοντας χρήση των εργαλείων της μεγέθυνσης των εικόνων, όπου αυτή χρειαζόταν. Η προσέγγιση των έργων πραγματοποιήθηκε με βάση τις εικαστικές και μαθηματικές έννοιες που αναδεικνύονται σύμφωνα με τον πίνακα 2.

		
Εικ.1. Τόνι Γκραγκ. Τρία μοντέρνα κτίρια, 1984. Ύψος 3,50 m. Πήλινα τούβλα και τσιμεντόλιθοι, Ιδιωτική Συλλογή	Εικ.2. Κωνσταντίν Μπρανκούζι, Ατέρμονη στήλη, («Endless Column») 1938, 29,35 m. Σύνθεση από 17 ρομβοειδείς σιδερένιες κάψουλες. Τάργκου Ζίου (νότια Ρουμανία)	Εικ. 3. Κωνσταντίν Μπρανκούζι, Masa tacerii («Τραπέζι της σιωπής»), Ασβεστόλιθος

Πίνακας 1. Τα έργα τέχνης που χρησιμοποιήθηκαν στην προσέγγιση

Εικαστικές έννοιες των έργων τέχνης	Μαθηματικές έννοιες των έργων τέχνης
Τρισδιάστατος χώρος, τρισδιάστατες κατασκευές, όμοια σχήματα, εγκατάσταση, επανάληψη σχημάτων, υλικά, θέσεις, διευθύνσεις σχημάτων, διαφορετικές οπτικές γωνίες, μνημειακή τέχνη.	Μετρήσεις επιφανειών, όγκου, μήκους, συγκρίσεις, ομαδοποιήσεις και άμεση αναγνώριση ποσοτήτων, τρισδιάστατος χώρος και όμοια σχήματα, επανάληψη σχημάτων, άμεση αναγνώριση ποσοτήτων και κανονικότητας, θέσεις και κατευθύνσεις των σχημάτων, διαφορετικές οπτικές γωνίες.

Πίνακας 2. Οι εικαστικές και μαθηματικές έννοιες των έργων τέχνης

5.2. Πειραματισμός και Δημιουργία

Στη φάση του πειραματισμού, τα παιδιά δημιούργησαν 24 συνθέσεις-κατασκευές.



Πίνακας 3. Δείγμα από τις κατασκευές των παιδιών

5.3. Αποτελέσματα - Αξιολόγηση

Τα παιδιά παρουσίασαν τις συνθέσεις και κατασκευές τους και εξήγησαν τον τρόπο που εργάστηκαν

Ανάλυση και ερμηνεία των αποτελεσμάτων

Από την καταγραφή και ταξινόμηση των παιδικών δημιουργημάτων στις 10 προαναφερθείσες κατηγορίες και την ανάλυσή τους, παρατηρήθηκε ότι:

1. Στην 1η κατηγορία που αφορά στη χρήση *Υλικών, Μέσων και Τεχνικών,* εντάσσονται και τα 24 έργα των παιδιών με ποσοστό 100%, καθώς όλα τα έργα έχουν δημιουργηθεί με τη χρήση κάποιων υλικών και μέσων, τα οποία ήταν: *πλαστικά ποτήρια διαφόρων χρωμάτων, πλαστικά μαχαιροπίρουνα κ.ά.*.

2. Στη 2η κατηγορία που αφορά στα *Μορφικά Στοιχεία* (σημείο, γραμμή, σχήμα, χρώμα, υφή, μορφή), εντάσσονται όλα τα έργα (100%) που δημιούργησαν τα παιδιά, καθώς όλα χρησιμοποίησαν οικείες *μορφές (ποτήρια, πιρούνια)* για να δημιουργήσουν τις συνθέσεις που επιθυμούσαν.

3. Στην 3η κατηγορία που αφορά στις ποικίλες *Μορφές Τέχνης,* και πάλι όλα τα έργα (100%) εντάσσονται σε αυτήν, καθώς τα παιδιά δημιούργησαν *24 έργα με συνδυασμό σύνθεσης και κατασκευής.*

4. Στην 4η κατηγορία που αφορά στα *Έργα Τέχνης,* όλα τα έργα (100%) ήταν επηρεασμένα και εμπνευσμένα από τα έργα τέχνης που προσέγγισαν τα παιδιά κατά την έναρξη της εικαστικής δραστηριότητας.

5. Στην 5η κατηγορία που αφορά στην *Εισαγωγή στην Καλαισθησία,* θεωρήσαμε ότι σε όλα τα παιδικά έργα (100%) υπάρχουν στοιχεία καλαισθησίας και εικαστικοί όροι, τους οποίους τα παιδιά, γνώρισαν στην προσέγγιση του έργου τέχνης, εφάρμοσαν στους πειραματισμούς τους και κατανόησαν στην αξιολόγηση της δραστηριότητας, όπως: *μνημειακή τέχνη, χρώματα, σχήματα, ρυθμός, επανάληψη μοτίβων, σύνθεση, κατασκευές κ.λπ.*

6. Στην 6η κατηγορία που αφορά στους *Αριθμούς και τις Πράξεις,* όλα τα έργα, με ποσοστό 100% προσέφεραν ευκαιρίες μέτρησης, αρίθμησης, απαρίθμησης, πρόσθεσης ποσοτήτων, διατάξεις, όπως π.χ.: *μετρούσαν πόσα ποτήρια έχει η κάθε σειρά, δημιούργησαν αριθμοσκάλες με τα ποτήρια κ.λπ.*

7. Στην 7η κατηγορία που αφορά στην *Εισαγωγή στην Αλγεβρική Σκέψη,* και πάλι, με ποσοστό 100% όλα τα έργα περιείχαν *στοιχεία ρυθμού, κανονικοτήτων, επαναλαμβανόμενων μοτίβων, υπολογισμούς ισοτήτων και ανισοτήτων.*

8.Στην 8η κατηγορία που αφορά στο *Χώρο & Γεωμετρία, και πάλι* όλα τα έργα, με ποσοστό 100% είχαν άμεση σχέση: *με κατευθύνσεις στο χώρο, με δόμηση μιας επιφάνειας με σχήματα, με τρισδιάστατες κατασκευές κ.ά.*

9. Στην 9η κατηγορία που αφορά τη *Μετρήσεις,* και πάλι όλα τα έργα με ποσοστό 100% είχαν άμεση σχέση: *με υπολογισμούς και συγκρίσεις μεγεθών, μέσα από τις συγκρίσεις των κατασκευών που έφτιαξαν τα παιδιά κ.λπ.*

10. Στη 10η κατηγορία που αφορά τα Στοχαστικά Μαθηματικά με τη *Στατιστική και τις Πιθανότητες*, δόθηκαν αφορμές: *α) στη φάση της προσέγγισης των έργων, με τη συλλογή των απαραίτητων πληροφοριών για τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των έργων τέχνης, β) στη φάση της δημιουργίας με τα σχόλια των παιδιών που αφορούσαν σε πιθανότητες π.χ. αν θα μπορέσει να ισορροπήσει η κατασκευή τους κ.ά. και γ) στη φάση του αναστοχασμού, με την παρουσίαση του τρόπου εργασίας των παιδιών.*

Από τις παραπάνω καταγραφές, καταλήγουμε ότι: α) στην εικαστική μας πρόταση, εμπεριέχονται και οι 10 κατηγορίες που αντιστοιχούν στους 5 άξονες των εικαστικών και στους 5 άξονες-τροχιές των μαθηματικών, β) τα παιδιά συμμετείχαν ενεργητικά στις μαθησιακές αναζητήσεις, εργάστηκαν και κατανόησαν με ευχάριστο και δημιουργικό τρόπο πληθώρα μαθηματικών εννοιών, όπως: *αρίθμηση, απαρίθμηση, διάταξη, αντικειμένων, δημιουργία μιας κανονικότητας και επανάληψη ενός μοτίβου,*

μετρήσεις και συγκρίσεις ποσοτήτων, δόμηση μιας επιφάνειας, ισορροπία, δημιουργία αριθμοσκάλας, προσανατολισμό σε ένα χώρο, δημιουργία τρισδιάστατων κατασκευών κ.λπ. και γ) ο 5ος άξονας των μαθηματικών (στοχαστικά μαθηματικά) δεν επιτυγχάνεται μόνο με τη φάση της δημιουργίας των παιδιών, αλλά κρίνονται απαραίτητες οι φάσεις α) της προσέγγισης των έργων τέχνης, όπου τα παιδιά συλλέγουν πληροφορίες για τη δημιουργία ενός έργου τέχνης και β) της αξιολόγησης της δραστηριότητας, όπου δίδεται η ευκαιρία στα παιδιά να καταθέσουν τις απόψεις και εμπειρίες τους, να προβληματιστούν και να οργανώσουν τα στοιχεία-δεδομένα με τα οποία εργάστηκαν.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σημείο εκκίνησης και σταθερής αναφοράς της μαθησιακής διαδικασίας, στάθηκαν οι απόψεις των επιστημόνων που προαναφέραμε στο θεωρητικό μέρος της εργασίας, οι οποίες επαληθεύτηκαν με τη σημειολογική ανάλυση των δημιουργημάτων των παιδιών. Η διδακτική μας πρόταση, απέδειξε την αρχική μας υπόθεση, ότι το μάθημα των εικαστικών δεν είναι μόνο καλλιτεχνικό, αλλά και βαθιά επιστημονικό. Σχεδιάζοντας και υλοποιώντας ο εκπαιδευτικός μια εικαστική δραστηριότητα, προσφέρει στους μαθητές του καλλιτεχνική παιδεία και ταυτόχρονα αναπτύσσει και καλλιεργεί το μαθηματικό τρόπο σκέψης, μέσα από τις μαθηματικές έννοιες που εντάσσονται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνόγλωσση

Βάμβουκας, Ι. Μ. (1998). *Εισαγωγή στην Ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία,* 5η έκδοση, Αθήνα: Γρηγόρης.

ΔΕΠΠΣ, (2001), Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΦΕΚ 1366 τ. Β, 18 – 10 – 2001).

Καλαβάσης Φ. (1997). *Η συμβολή της διδακτικής των μαθηματικών στην επεξεργασία της εκπαιδευτικής πολιτικής, επιστροφή στη σχολική τάξη με ερευνητικές δραστηριότητες,* 14ο Πανελλήνιο συνέδριο ΕΜΕ, Μυτιλήνη.

Κοτοπούλης, Θ. (2007). Η διδακτική των μαθηματικών εννοιών στη βασική εκπαίδευση: Όψεις και Προοπτικές, στο: *Επιστημονικό Βήμα του Δασκάλου,* τ. 7, σ. 142-156, ΔΟΕ, ΙΠΕΜ, Αθήνα.

Λεμονίδης, Χ. (2003). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου,* Αθήνα: Πατάκης.

ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (2011). (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450

Μαγουλιώτης, Α. (1994). *Το μπλοκ της φαντασίας: Τα παιδιά παρατηρούν και δημιουργούν.* Αθήνα: Gutenberg.

Μαγουλιώτης Α. & Λαζάρου, Σ. (2006). «Το μάθημα των Εικαστικών τα τελευταία χρόνια στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση», στο *ΜΑΚΕΔΝΟΝ,* τ. 15ο, Φλώρινα.

Belting, H. κ.α.(1995). *Εισαγωγή στην ιστορία της τέχνης,* μτφ. Γυιόκα Λ. Θεσσαλονίκη: Βάνιας.

Σάλλα-Δοκουμετζίδη, Τ. (1996). *Δημιουργική φαντασία και παιδική τέχνη.* Αθήνα, Εξάντας

Τζεκάκη Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία,* Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Ξενόγλωσση

Bruner. J. (1985), *Models of the learner*, Educational Research, 14, 410.Brooks. J. G. (1993). *In search of understanding:* The cuse for constructivist classrooms. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Dewey, J. (1959). *The child and the curriculum.* In M.S. Dworkin (ed), Dewey on education. New York: Teachers College Press. Originally published, 1916.

Eisner, E., (2002). *The arts and the creation of mind.* New Haven & London: Yale University Press.

Langer, S., (1957). *The Problems of Art.* London: Routledge.

Richard J. (1982). *Memoire et résolution des problèmes,* Revue Française de pédagogie, Paris: INRP.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ: ΜΙΑ «ΕΥΚΟΛΗ» ΑΛΛΑ ΑΓΝΩΣΤΗ ΕΝΝΟΙΑ

Αριστούλα Κοντογιάννη, Ευγενία Κολέζα
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Πατρών
akontog@upatras.gr, ekoleza@upatras.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το παρόν άρθρο περιγράφει τον τρόπο που αντιλαμβάνονται την έννοια της μέσης τιμής υποψήφιοι δάσκαλοι. Οι συμμετέχοντες απάντησαν σε ερωτήματα σχετικά με τις ιδιότητες της μέσης τιμής και συμμετείχαν σε συνεντεύξεις που διενεργήθηκαν με σκοπό την σε βάθος ανάλυση των γραπτών απαντήσεων τους. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν αντιπαραβάλλονται με αυτά προγενέστερων ερευνών και διατυπώνονται προτάσεις για την βελτίωση της στατιστικής εκπαίδευσης των υποψηφίων δασκάλων.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσος και επικρατούσα τιμή) συνιστούν ένα βασικό μέρος της γνώσης του περιεχομένου, που πρέπει να κατέχουν οι δάσκαλοι στο πλαίσιο της στατιστικής εκπαίδευσης που καλούνται να παρέχουν στους μαθητές τους. Στα Α.Π.Σ. των Μαθηματικών διεθνώς, προτείνεται ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν αναπτύξει την κατανόηση των μέτρων θέσης πριν την εισαγωγή τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (π.χ. Australian Education Council, 2010). Το πιο γνωστό μέτρο θέσης είναι η μέση τιμή (ή μέσος όρος), του οποίου η χρήση, έστω και άτυπη, ανάγεται στην αρχαιότητα (Bakker & Gravemeijer, 2006). Στη χώρα μας, η διδασκαλία της μέσης τιμής αποτελούσε (Α.Π.Σ., 2006) και αποτελεί (νέο Α.Π.Σ., 2011) μέρος του Α.Π.Σ. των Μαθηματικών του Δημοτικού.

Η έρευνα που περιγράφεται στο παρόν άρθρο αποτελεί μέρος μίας ευρύτερης έρευνας για την αξιολόγηση της στατιστικής γνώσης των υποψηφίων δασκάλων. Στην παρούσα εργασία, επικεντρωνόμαστε στο πώς κατανοούν οι υποψήφιοι δάσκαλοι την μέση τιμή, με στόχο την διαμόρφωση μίας πρότασης για την αναβάθμιση της στατιστικής εκπαίδευσής τους, δεδομένου ότι οποιοσδήποτε σχεδιασμός διδασκαλίας πρέπει να βασίζεται στη βαθιά κατανόηση του τρόπου σκέψης και του επιπέδου γνώσεων των «μαθητών» (Mewborn, 2003).

2. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Η έννοια της μέσης τιμής υπάρχει στο Α.Π.Σ. των Μαθηματικών για περισσότερο από 100 χρόνια (Watson & Moritz, 2000). Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα να έχει διεξαχθεί μια πληθώρα ερευνών σχετικά με την κατανόησή της μέσης τιμής από τους μαθητές (π.χ. Mokros & Russell, 1995) σε αντίθεση με την έρευνα η οποία εστιάζει στην κατανόηση της μέσης τιμής από τους δασκάλους, και είναι πολύ περιορισμένη (Jacobbe & Carvalho, 2011).

Οι Batanero κ.ά. (1997) ανέλυσαν τις απαντήσεις 273 υποψηφίων δασκάλων σε ένα ερωτηματολόγιο σχετικά με τον υπολογισμό της μέσης τιμής. Στα αποτελέσματα τους συγκαταλέγονται η έλλειψη κατανόησης του αλγορίθμου υπολογισμού της μέσης τιμής, η άγνοιά τους για την σχέση μεταξύ της μέσης τιμής με τα υπόλοιπα μέτρα θέσης και η περιορισμένη κατανόηση του πώς επηρεάζουν οι ακραίες παρατηρήσεις τη μέση τιμή. Σε ανάλογη έρευνα με υποψήφιους δάσκαλους οι Estrada κ.ά. (2004) διαπίστωσαν ότι τα πιο συνηθισμένα λάθη των υποψηφίων δασκάλων ήταν το να μην λαμβάνουν υπόψη την επίδραση των ακραίων παρατηρήσεων, να εφαρμόζουν τον αλγόριθμο υπολογισμού χωρίς να λαμβάνουν υπόψη το είδος των δεδομένων, να μην μπορούν να αντιστρέψουν τον αλγόριθμο υπολογισμού και να συγχέουν την μέση τιμή με κάποιο από τα άλλα δύο μέτρα θέσης. Οι Leavy και O'Loughlin (2006) διερεύνησαν την κατανόηση 263 υποψηφίων δασκάλων του Δημοτικού σχολείου σχετικά με την μέση τιμή. Μία παρανόηση που καταγράφηκε στα αποτελέσματά τους αφορούσε το ότι το μοναδικό κατάλληλο μέτρο θέσης -ή μέθοδος σύγκρισης μεταξύ δύο συνόλων δεδομένων- είναι η μέση τιμή. Η παρούσα έρευνα έρχεται να επιβεβαιώσει συμπεράσματα αυτών των ερευνών, αλλά και να προσθέσει καινούργια μεταξύ των οποίων συγκαταλέγονται η αδυναμία χρήσης του αντίστροφου του αλγορίθμου υπολογισμού της μέσης τιμής από τους υποψηφίους δασκάλους και η λανθασμένη αντιμετώπιση της ως προς τον τρόπο που συνδέεται με το πλαίσιο των δεδομένων.

3. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Έχοντας ως θεωρητική αναφορά την έρευνα της Ball και των συνεργατών της (ενδεικτικά Ball κ.ά., 2008) σχετικά με τα είδη της μαθηματικής γνώσης που απαιτούνται για τη διδασκαλία, χαρακτηρίζουμε την έρευνά μας ως (1) μια προσπάθεια προσδιορισμού της *στατιστικής γνώσης του περιεχομένου,* επιλέγοντας ερωτήματα που αφορούν τόσο την *κοινή,* όσο και την *εξειδικευμένη* διάσταση της, και (2) ως μια προσπάθεια αξιολόγησης αυτής της γνώσης μέσα απο το φίλτρο του διαχωρισμού μεταξύ *εννοιολογικής* και *διαδικαστικής* μορφής της.

Στην κοινότητα των ερευνητών της στατιστικής εκπαίδευσης (π.χ. Watson & Callingham, 2003; Garfield & Ben-Zvi, 2008) η κοινή γνώση του περιεχομένου ταυτίζεται με τον Στατιστικό Γραμματισμό, δηλαδή τη γνώση και κατανόηση βασικών στατιστικών εννοιών που πρέπει να έχει ο «μέσος» πολίτης, ενώ η εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου αναφέρεται στη βαθιά κατανόηση του περιεχομένου, ιδιαίτερα εκείνου που χρησιμοποιείται στο χώρο εργασίας. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι ικανός να επιλέγει μοντέλα και εξηγήσεις για την καλύτερη κατανόηση του περιεχομένου από τους μαθητές (π.χ. επιλογή του κατάλληλου στατιστικού μέτρου που ενδείκνυται για ένα συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων ή εξήγηση του πότε και του γιατί ένα συγκεκριμένο μέτρο είναι πιο κατάλληλο σε σχέση με κάποιο άλλο). Στην πραγματικότητα, δεδομένου ότι δεν μπορεί να ορισθεί με ακρίβεια το είδος της στατιστικής γνώσης που χρειάζεται να

έχει ο «μέσος» πολίτης, οι διαφορές μεταξύ της εξειδικευμένης γνώσης του περιεχομένου και της κοινής γνώσης του περιεχομένου δεν είναι πάντα διακριτές.

Όσον αφορά τον τρόπο κατανόησης της μέσης τιμής από τους συμμετέχοντες στην ερευνά μας επιλέξαμε να αξιολογήσουμε την εννοιολογική και διαδικαστική διάσταση της στατιστικής γνώσης του περιεχομένου. Η εννοιολογική γνώση περιγράφεται από τους Hiebert και Lefevre (1986), ως μια γνώση πλούσια σε σχέσεις, ως *«ένα δίκτυο εννοιών και σχέσεων»,* ενώ η διαδικαστική ως αποτελούμενη από την τυπική γλώσσα, το σύστημα αναπαράστασης συμβόλων και τους αλγόριθμους ή τους κανόνες για την ολοκλήρωση των μαθηματικών διαδικασιών. Στην παρούσα έρευνα, η διαδικαστική γνώση αφορά την χρήση των σχετικών αλγορίθμων, ενώ η εννοιολογική γνώση αντιμετωπίζεται ως η γνώση των ιδεών που βρίσκονται πίσω από τις μαθηματικές διαδικασίες, αλλά και του πώς συνδέονται αυτές μεταξύ τους. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός της μέσης τιμής για ένα σύνολο δεδομένων αξιολογείται ως ένδειξη διαδικαστικής γνώσης, ενώ η σύνδεση του με το είδος των δεδομένων για την εξαγωγή συμπερασμάτων συγκαταλέγεται στην εννοιολογική γνώση.

Συγκεκριμένα, αξιολογήσαμε την μέση τιμή σε σχέση με τους παρακάτω άξονες:

- Την χρήση του αλγόριθμου υπολογισμού της.
- Την κατανόηση του αλγόριθμου υπολογισμού της σε βάθος μέσω της κατασκευής ενός συνόλου δεδομένων από μία γνωστή μέση τιμή.
- Την παρανόηση που σχετίζεται με αυτή, ότι πρέπει να είναι ένας *«λογικός»* (reasonable) αριθμός ανάλογα με το πλαίσιο μέσα στο οποίο δίνεται.

4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για την συλλογή των δεδομένων μας επιλέξαμε να διεξάγουμε μία ποιοτική έρευνα η οποία περιελάμβανε τη διανομή και συλλογή ερωτηματολογίων, που απαρτιζόταν από ερωτήσεις ανοικτού τύπου, καθώς και τη διεξαγωγή «*ημι-δομημένων»* (semi-structured) συνεντεύξεων. Επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε δύο διαφορετικά εργαλεία συλλογής δεδομένων έτσι ώστε να αποδειχθεί ότι τα συμπεράσματα που προέκυψαν δεν εξαρτώνται από το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε (μέθοδο της τριγωνοποίησης-triangulation).

Οι συμμετέχοντες στην ερευνά μας ήταν 100 φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Πατρών στο τρίτο έτος των σπουδών τους. Τα δημογραφικά τους στοιχεία δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Φύλο	Άνδρες	9
	Γυναίκες	91
Κατεύθυνση	Θεωρητική	70
	Τεχνολογική	11

	Θετική	19
Ηλικία	21-22	98
	>22	2
Μαθήματα στα οποία είχαν εξεταστεί με επιτυχία	Μαθηματικά: Αριθμητική και Άλγεβρα	80
	Μαθηματικά: Γεωμετρία	77

Πίνακας 1: Δημογραφικά στοιχεία των συμμετεχόντων στην έρευνα

Στηριζόμενοι στα στοιχεία που παρουσιάζονται στον πίνακα, συμπεραίνουμε ότι οι συμμετέχοντες στην πλειονότητα τους ήταν γυναίκες, η κατεύθυνση εισαγωγής τους ήταν η θεωρητική και είχαν εξεταστεί με επιτυχία στα υποχρεωτικά μαθήματα τα σχετικά με τα Μαθηματικά, στα πρώτα έτη των σπουδών τους. Όσον αφορά τις στατιστικές τους γνώσεις, περιοριζόταν στο επίπεδο της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Όπως και με όλους τους συμμετέχοντες στην έρευνα, οι συμμετέχοντες στην συνέντευξη αποτέλεσαν ένα «*δείγμα σκοπιμότητας*» -*purposeful sampling* (Patton, 2002). Η συμμετοχή τους στη διαδικασία των συνεντεύξεων ήταν εθελοντική, επομένως επιλέχθηκαν βάση της προθυμίας τους να συμμετάσχουν. Από τους 100 συμμετέχοντες, για την συνέντευξη δήλωσαν συμμετοχή 23, αλλά ήρθαν μόνο οι 15 (13 γυναίκες και 2 άνδρες, όλοι φοιτητές στο 3^{ο} έτος σπουδών τους). Αποτελούσαν ένα *ομοιογενές* (homogenous) δείγμα το οποίο (Patton, 2002) απλοποιεί την ανάλυση των συνεντεύξεων. Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήσαμε ημι-δομημένες συνεντεύξεις, καθώς θέλαμε να εμβαθύνουμε στα δεδομένα που προέκυψαν για να τεκμηριώσουμε τα συμπεράσματα μας. Υποθέσαμε ότι θα παρατηρούσαμε μοτίβα τα οποία δεν ήταν εμφανή στις γραπτές απαντήσεις ή που θα λειτουργούσαν ως επιβεβαίωση/συμπλήρωμα των δεδομένων.

Όσον αφορά την ανάλυση και την κωδικοποίηση των δεδομένων, βασιστήκαμε στην ταξινομία SOLO (ενδεικτικά Biggs & Collis, 1982), σε αναλογία με τον τρόπο που έχει χρησιμοποιηθεί σε πληθώρα ερευνών για την στατιστική εκπαίδευση, κυρίως των μαθητών (π.χ. Watson & Callingham, 2003). Όσον αφορά την αξιολόγηση της γνώσης των υποψηφίων δασκάλων σχετικά με στατιστικές έννοιες, η χρήση της ταξινομίας SOLO είναι περιορισμένη (Groth & Bergner, 2006; Bruno& Espinel, 2009). Για την ταξινόμηση των απαντήσεων χρησιμοποιήσαμε την «*τεχνική της στοιβαδοποίησης*»-*clustering technique* (Miles & Huberman, 1994: 248) σύμφωνα με την οποία δημιουργούμε κατηγορίες συγκρίνοντας και αντιπαραβάλλοντας τις γραπτές απαντήσεις στα ερωτήματα.

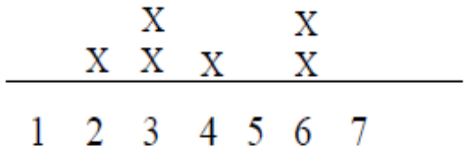
Τα ερωτήματα είτε προέρχονταν από αντίστοιχες έρευνες του εξωτερικού, είτε κατασκευάστηκαν από τις ερευνήτριες για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας. Η αξιοπιστία του ερωτηματολογίου ελέγχθηκε με τον στατιστικό έλεγχο Cronbach-Alpha, ο οποίος έδειξε ότι για το σύνολο των ερωτημάτων α=0,767, το οποίο αποδεικνύει ότι το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήσαμε διαθέτει καλή αξιοπιστία.

Αν και για την αξιολόγηση της γνώσης των συμμετεχόντων για την μέση τιμή χρησιμοποιήσαμε συνολικά τρια ερωτήματα, λόγω έλλειψης χώρου στην παρούσα εργασία αναλύουμε μόνο ένα από αυτά.

4.1. Περιγραφή ερωτήματος

Το πρώτο ερώτημα (προσαρμογή από Sorto, 2004), αφορούσε την ερμηνεία ενός σημειογράμματος και την εξαγωγή συμπερασμάτων για τα δεδομένα που απεικονίζονται σε αυτό, μέσω του υπολογισμού της μέσης τιμής.

2.Στο παρακάτω σημειόγραμμα αναπαριστάται ο αριθμός ατόμων στις οικογένειες μίας γειτονιάς.



Αριθμός ατόμων στις οικογένειες

a) Βρείτε την μέση τιμή. **Δείξτε πως την βρήκατε.**
b) Είναι δυνατόν να έχουμε άλλα σύνολα δεδομένων με την ίδια μέση τιμή; **Δικαιολογήστε την απάντηση σας.**
c) Είναι δυνατόν να έχουμε έξι οικογένειες με μέση τιμή ατόμων $3\frac{1}{2}$;

Αν ναι, δώστε ένα παράδειγμα.Αν όχι, δικαιολογήστε την απαντησή σας.

Εικόνα 1: Ερώτημα

Το πρώτο υποερώτημα αφορούσε τον υπολογισμό της μέσης τιμής, ενώ στο δεύτερο υποερώτημα ζητούμενο ήταν, από τη δοθείσα μέση τιμή να κατασκευαστεί ένα σύνολο δεδομένων, δηλαδή να γίνει η *«αντίστροφη»* διαδικασία. Τέλος, το τρίτο υποερώτημα αναφερόταν σε μια παρανόηση σχετικά με την μέση τιμή, ότι δηλαδή, πρέπει να είναι ένας *«λογικός»-reasonable* (Mokros & Russell, 1995) αριθμός, να έχει μια λογική υπόσταση ανάλογα με το πλαίσιο μέσα στο οποίο δίνεται. Το πρώτο υποερώτημα απαιτούσε διαδικαστική γνώση καθώς για την απάντησή του χρειαζόταν να μπορεί κάποιος να διαβάσει το σημειόγραμμα και να εφαρμόσει τον αλγόριθμο υπολογισμού της μέσης τιμής. Το δεύτερο και τρίτο υποερώτημα απαιτούσαν εννοιολογική γνώση γιατί χρειαζόταν η κατανόηση της μέσης τιμής μέσα σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο και η σύνδεσή της με την χρήση της ως ενός τρόπου εξαγωγής συμπερασμάτων. Και τα τρία υποερωτήματα απαιτούσαν στατιστική γνώση του περιεχομένου, με το πρώτο να εντάσσεται στην κοινή γνώση του περιεχομένου ενώ τα άλλα δύο στην εξειδικευμένη.

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Όσον αφορά το πρώτο υποερώτημα η κωδικοποίηση των απαντήσεων αλλά και η απόδοση των συμμετεχόντων φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

Κωδικός	Περιγραφή	Πλήθος
4	Διαβάζει σωστά τα δεδομένα που δίνονται στο σημειόγραμμα. Υπολογίζει σωστά την μέση τιμή χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο.	42
3	Διαβάζει σωστά τα δεδομένα που δίνονται στο σημειόγραμμα. Υπολογίζει τη μέση τιμή, αλλά κάνει αριθμητικό λάθος.	4
2	Διαβάζει σωστά το σημειόγραμμα, αλλά αντί της μέσης τιμής υπολογίζει τη διάμεσο.	3
1	Δεν διαβάζει σωστά το σημειόγραμμα. Υπολογίζει σωστά τη μέση τιμή ή τη διάμεσο χρησιμοποιώντας λανθασμένους αριθμούς. Συγχέει τη μέση τιμή με τη διάμεσο. Δεν υπολογίζει σωστά τη διάμεσο.	44
0	Αδυνατεί να διαβάσει το σημειόγραμμα και να υπολογίσει τη μέση τιμή. /Προσθέτει τους αριθμούς που βλέπει./Μονολεκτική απάντηση/Καμία απάντηση.	7

Πίνακας 2: Κωδικοποίηση απαντήσεων για το υποερώτημα 2α

Τα παραπάνω αποτελέσματα δηλώνουν ότι οι περισσότεροι από τους συμμετέχοντες μπορούσαν να διαβάσουν το σημειόγραμμα και να υπολογίσουν σωστά την μέση τιμή. Οι λανθασμένες απαντήσεις οφείλονταν είτε στο ότι δεν γνώριζαν πώς να διαβάσουν το σημειόγραμμα, είτε στο ότι υπολόγιζαν τη διάμεσο, αντί της μέσης τιμής. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται και στο παρακάτω απόσπασμα.

Ε: Πώς υπολογίσατε ότι η μέση τιμή είναι 4 άτομα ανά οικογένεια; Περιγράψτε την διαδικασία που ακολουθήσατε.

Α: Ότι έβγαλα (...), ξεκίνησα από τις άκρες και βρήκα τη μεσαία τιμή που είναι το 4.

Η υποψήφια δασκάλα συγχέει την μέση τιμή με την διάμεσο. Περιγράφει τον τρόπο υπολογισμού της διαμέσου καθώς λέει: *«ξεκίνησα από τις άκρες και βρήκα τη μεσαία τιμή που είναι το 4.»*

Όσον αφορά το δεύτερο υποερώτημα η κωδικοποίηση δίνεται στον επόμενο πίνακα:

Κωδικός	Περιγραφή	Πλήθος
4	Απαντά καταφατικά και δίνει σωστή δικαιολόγηση. Βασίζεται στον αλγόριθμο της μέσης τιμής (μέσου όρου) για να γενικεύσει και να υποστηρίξει την απάντηση του.	11

3	Απαντά καταφατικά δίνοντας ένα σωστό αριθμητικό αντιπαράδειγμα και χρησιμοποιώντας σημειόγραμμα.	8
2	Απαντά καταφατικά, αλλά στο αντιπαράδειγμα που δίνει συγχέει τη μέση τιμή με τη διάμεσο.	6
1	Απαντά καταφατικά χωρίς να δίνει αντιπαράδειγμα ή δίνοντας λανθασμένο αντιπαράδειγμα.	59
0	Απαντά αρνητικά/ Μονολεκτική απάντηση/Καμία απάντηση/Άσχετη απάντηση.	16

Πίνακας 3: Κωδικοποίηση απαντήσεων για το υποερώτημα 2b

Στο δεύτερο υποερώτημα οι συμμετέχοντες, στην πλειονότητά τους, απάντησαν καταφατικά, αλλά δεν ήταν σε θέση να δικαιολογήσουν την απάντησή τους με ένα αντιπαράδειγμα. Στο απόσπασμα που ακολουθεί η υποψήφια δασκάλα συγχέει την μέση τιμή με την διάμεσο, καθώς την αντιλαμβάνεται ως έναν τρόπο εξισορρόπησης των δεδομένων, ως κάτι επομένως που βρίσκεται στη μέση από τα δεδομένα.

Ε: Όσον αφορά το δεύτερο υποερώτημα γράφετε ότι η μέση τιμή τελικά μπορεί να είναι η ίδια.

Θ: Ναι, σε διαφορετικά σύνολα δεδομένων. Γιατί ουσιαστικά η μέση τιμή είναι κάτι το οποίο εξισορροπεί, παλαντζάρει την κατανομή οπότε μπορεί η κατανομή να είναι πιο απλωμένη μπορεί να είναι πιο μαζεμένα τα δεδομένα…

Όσον αφορά το τρίτο υποερώτημα η κωδικοποίηση των απαντήσεων των συμμετεχόντων φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

Κωδικός	Περιγραφή	Πλήθος
4	Απαντά καταφατικά και δίνει σωστή δικαιολόγηση. Βασίζεται στον αντίστροφο του αλγόριθμου της μέσης τιμής για να υποστηρίξει την απάντηση του. Δίνει ένα σωστό αριθμητικό παράδειγμα. Απαντά καταφατικά και δίνει σωστή δικαιολόγηση. Βασίζεται στον αντίστροφο του αλγόριθμου της μέσης τιμής για να υποστηρίξει την απάντηση του. Δίνει ένα σωστό αριθμητικό παράδειγμα χρησιμοποιώντας σημειόγραμμα.	17
3	Απαντά καταφατικά, αλλά δεν δίνει αριθμητικό αντιπαράδειγμα. Απαντά καταφατικά, αλλά κάνει λάθος στο αριθμητικό αντιπαράδειγμα ή στο σημειόγραμμα που χρησιμοποίησε.	12
2	Χρησιμοποιεί τον αντίστροφο του αλγόριθμου της μέσης τιμής δίνοντας ένα σωστό αντιπαράδειγμα, αλλά υποστηρίζει ότι επειδή μιλάμε για ανθρώπους δεν μπορεί η μέση τιμή να είναι	2

	δεκαδικός αριθμός. Απαντά αρνητικά υποστηρίζοντας ότι επειδή μιλάμε για ανθρώπους δεν μπορεί η μέση τιμή να είναι δεκαδικός αριθμός.	
1	Απαντά καταφατικά ή αρνητικά, αλλά αντί για τη μέση τιμή εννοεί τη διάμεσο. Δίνει σωστό αντιπαράδειγμα, αλλά υποστηρίζει ότι επειδή μιλάμε για ανθρώπους δεν μπορεί η μέση τιμή -διάμεσος να είναι δεκαδικός αριθμός.	45
0	Μονολεκτική απάντηση/Καμία απάντηση/Άσχετη απάντηση.	24

Πίνακας 4: Κωδικοποίηση απαντήσεων για το υποερώτημα 2c

Στην πλειονότητα τους (71%), οι συμμετέχοντες απάντησαν ότι **η μέση τιμή δεν μπορεί να είναι δεκαδικός αριθμός γιατί μιλάμε για ανθρώπους.** Το γεγονός αυτό αναδεικνύει την έλλειψη γνώσης σε βάθος, της έννοιας της μέσης τιμής, αφού τη συνδέουν με το πλαίσιο των δεδομένων που αυτή εκπροσωπεί, χωρίς να μπορούν να την αντιληφθούν ως μια αντιπροσωπευτική τιμή αυτών.

Ε: Στο τρίτο υποερώτημα λέτε ότι δεν είναι δυνατόν να έχουμε 6 οικογένειες με μέση τιμή 3½ άτομα. Γιατί;

Σ: Γιατί το θεώρησα ότι είναι ακέραιο, πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός το άτομο.

Ε: Στο τρίτο υποερώτημα λέτε «όχι, γιατί η μέση τιμή δεν μπορεί να είναι δεκαδικός αριθμός». Πείτε μου λίγο πως σκεφτήκατε για αυτό.

Γ: (...)Επειδή είναι δεκαδικός αριθμός και σε αριθμό ατόμων αναφερόμαστε κυρίως σε ακεραίους (….)δεν είναι δυνατόν να έχουμε δεκαδικό αριθμό. Πίστευα ότι πρέπει να είναι ακέραιος …

Ε: Στο τρίτο υποερώτημα γράφετε ότι δεν γίνεται η μέση τιμή να ισούται με 3½, γιατί το λέτε αυτό;

Θ: Σύνδεσα τη μέση τιμή με το συγκεκριμένο παράδειγμα. Δεν μπορεί να είναι ένας άνθρωπος και ένας μισός….

Στα προηγούμενα τρια αποσπάσματα φαίνεται ότι οι υποψήφιοι δάσκαλοι συνδέουν τη μέση τιμή με τα δεδομένα που δίνονται, και κρίνουν κατά πόσο αυτή είναι ένας λογικός αριθμός με την έννοια που αναφέρθηκε παραπάνω. Και στα τρία αποσπάσματα τονίζεται ότι δεν μπορεί να έχουμε έναν δεκαδικό αριθμό για τη περιγραφή ατόμων:*«δεν μπορεί να είναι ένας άνθρωπος και ένας μισός….».*

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεραίνουμε:

- Στην πλειονότητα τους οι συμμετέχοντες γνώριζαν τον αλγόριθμο υπολογισμού της μέσης τιμής σε αντίθεση με αντίστοιχη έρευνα (Batanero κ.ά., 1997)
- Αρκετοί από τους συμμετέχοντες, αντί της μέσης τιμής υπολόγισαν τη διάμεσο όπως και σε αντίστοιχη έρευνα (Estrada κ.ά., 2004).

- Αρκετοί από τους συμμετέχοντες, γνώριζαν ότι μπορούμε να έχουμε πολλά σύνολα δεδομένων με την ίδια μέση τιμή. Ωστόσο, λίγοι από αυτούς μπορούσαν να το δικαιολογήσουν με κάποιο αντιπαράδειγμα, χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο του αλγορίθμου υπολογισμού της μέσης τιμής.
- Στην πλειονότητα τους οι συμμετέχοντες θεωρούσαν ότι η μέση τιμή πρέπει να είναι ένας λογικός αριθμός, συνδέοντας την με το πλαίσιο από το οποίο προερχόταν τα δεδομένα.

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, οι υποψήφιοι δάσκαλοι, ενώ γνώριζαν τον αλγόριθμο υπολογισμού της μέσης τιμής δεν κατανοούσαν την έννοια σε βάθος, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να συνδέσουν τις διάφορες συνιστώσες κατανόησής της μεταξύ τους. Δηλαδή, η γνώση τους σχετικά με τη μέση τιμή ήταν περισσότερο διαδικαστική, παρά εννοιολογική, καθώς περιοριζόταν στην απομνημόνευση και εφαρμογή του σχετικού αλγορίθμου και όχι στη βαθύτερη κατανόησή της. Όσον αφορά την στατιστική γνώση του περιεχομένου για τη μέση τιμή μπορούμε να ισχυριστούμε ότι δεν είναι επαρκής, εφόσον περιορίζεται μόνο στον αλγόριθμο υπολογισμού της και δεν επεκτείνεται στην πλήρη κατανόηση της μέσω της αποφυγής των παρανοήσεων που συνδέονται με αυτή. Επομένως συμπεραίνουμε ότι οι υποψήφιοι δάσκαλοι έχουν κοινή γνώση του περιεχομένου αλλά όχι εξειδικευμένη. Αποτελέσματα ερευνών (Mokros & Russell, 1995; Garcia & Garret, 2008) που αφορούν τη γνώση των μαθητών, εντοπίσθηκαν και στη γνώση των υποψηφίων δασκάλων του δείγματός μας.

Συγκεκριμένα, οι υποψήφιοι δάσκαλοι, σε αντιστοιχία με τους μαθητές:

- Περιορίζονται στο να συνδέουν την μέση τιμή μόνο με τον αλγόριθμο υπολογισμού της.
- Συγχέουν την μέση τιμή με τη διάμεσο.
- Θεωρούν ότι η μέση τιμή πρέπει να έχει λογική υπόσταση ανάλογα με τα δεδομένα που αντιπροσωπεύει και το πλαίσιο της ερώτησης στην οποία ο υπολογισμός της απαντά.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της ερευνάς μας επιβεβαιώνουν τον ισχυρισμό των Pollatsek κ.ά. (1981) ότι η *«γνώση της μέσης τιμής μοιάζει να ξεκινάει και να τελειώνει σε έναν υποβαθμισμένο υπολογιστικό τύπο»* (σελ.191), και αναδεικνύουν σοβαρές εννοιολογικές δυσκολίες σχετικά με την μέση τιμή ακόμη και μετά από χρόνια μαθηματικής εκπαίδευσης. Το χαμηλό ποσοστό υποψηφίων δασκάλων με επαρκή εννοιολογική γνώση της μέσης τιμής, η οποία είναι μία σχετικά *«εύκολη»* έννοια εξαιτίας του ότι συναντάται σε όλες τις εκφάνσεις της καθημερινότητας (Jacobbe & Carvalho, 2011), αποτελεί ένδειξη του ότι η διδασκαλία της περιγραφικής Στατιστικής στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση περιορίζεται μόνο στην απόκτηση διαδικαστικής γνώσης. Άλλωστε στην τριτοβάθμια εκπαίδευση δεν

διδάσκονται αρκετά μαθήματα αφιερωμένα εξ' ολοκλήρου στην μάθηση και διδασκαλία της Στατιστικής που χρειάζεται στο Δημοτικό σχολείο, αλλά και αυτά που διδάσκονται είναι προσανατολισμένα στην χρήση της Στατιστικής για ερευνητικούς σκοπούς εφόσον επικεντρώνονται στην ανάλυση δεδομένων, μέσω της εκμάθησης στατιστικών λογισμικών πακέτων. Το γεγονός αυτό έχει σημαντικές επιπτώσεις στην προετοιμασία των υποψηφίων δασκάλων. Κρίνεται, επομένως, απαραίτητη η ένταξη στο πρόγραμμα σπουδών των Παιδαγωγικών Τμημάτων, μαθημάτων με περιεχόμενο επικεντρωμένο στην διδασκαλία και μάθηση της Στατιστικής. Όσον αφορά τη μέση τιμή, στόχος πρέπει να είναι η ανάπτυξη της εννοιολογικής γνώσης μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων στις οποίες θα τονίζεται:

- Η χρήση της ως ενός αριθμού-εκπροσώπου των δεδομένων.
- Το πώς σχετίζεται με το πλαίσιο των δεδομένων για την εξαγωγή συμπερασμάτων
- Το πώς συνδέεται με το σύνολο των δεδομένων πέρα από την «ευθεία» διαδικασία υπολογισμού της αλλά από την «αντίστροφη» διαδικασία κατασκευής του συνόλου των δεδομένων, από την τιμή αυτής.
- Το πώς συνδέεται με τα υπόλοιπα μέτρα θέσης αλλά και διασποράς.

Αν θέλουμε οι υποψήφιοι δάσκαλοι μετά το πέρας των σπουδών τους να είναι σε θέση να διδάσκουν την έννοια της μέσης τιμής, αλλά και τις υπόλοιπες έννοιες της Στατιστικής με κατανόηση, οφείλουμε να επενδύσουμε στην προετοιμασία τους. Δεν αρκεί να είναι σε θέση να λύνουν τις ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου, αλλά πρέπει να κατανοούν το πώς οι έννοιες που εμφανίζονται σε αυτές σχετίζονται μεταξύ τους έτσι ώστε να μπορούν να εμπλέκουν τους μαθητές ενεργά στην μάθηση.

Ευχαριστίες

Αυτή η έρευνα συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο-ΕΚΤ) και Ελληνικούς εθνικούς πόρους, μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς: Ερευνητικό Πρόγραμμα Ηράκλειτος ΙΙ. «Επενδύοντας στο μέλλον σας».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ACARA Australian Curriculum Consultation Portal, 2010.

Bakker, A., & Gravemeijer, K. P. E. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 149-168.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.

Batanero, C., Godino, J., & Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formcion sobre promedios (Primary school teachers' conceptions on averages). In H. Salmeron (Ed.), *Actas de las VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (310–340).

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy. New York: Academic.

Bruno A. & Espinel M.C. (2009). Construction and evaluation of histograms in teacher training, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(4), 473-493.

Estrada, A., Batanero, C., & Fortuny, J. M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadvstica elemental de profesores en formacion (Prospective teachers' knowledge on elementary statistics). Educación matemática, 16(1), 89–111.

Garcia C. J. A., & Garrett, A. J. (2008). Understanding the Arithmetic Mean: A Study with Secondary and University Students. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series, Research in Mathematical Education*, 12(1), 49-66.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). Developing Students' Statistical Reasoning Research and Teaching Practice. Springer Publishers.

Groth, R.E. & Bergner J.A. (2006). Preservice elementary teacher's conceptual and procedural knowledge of mean, median and mode. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(1), 37-63.

Hiebert, J., Lefevre, J. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Jacobbe, T. & Carvalho, C. (2011). Teachers' understanding of averages. In C. Batanero, G. Burril, and C.Reading (eds.),Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICME/IASE Study,Springer Science+Business Media B.V. 2011.

Leavy, A., & O'Loughlin, N. (2006). Preservice teachers understanding of the mean: Moving beyond the arithmetic average. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 53–90.

Mewborn, D. S. (2003). Teaching, teachers' knowledge, and their professional development. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A research companion to Principles and Standards for School Mathematics , 45-52.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). Qualitative data analysis. Thousand Oaks, CA: Sage.

Mokros, J., & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 20–39.

Patton, M. Q. (2002). Qualitative Research and Evaluation Methods (3rd ed.) Thousand Oaks, CA: Sage.

Pollatsek, S.J., Lima, S. & Well, A.D. (1981). Concept or understanding: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.

Sorto, M. A. (2004). Prospective middle school teachers' knowledge about data analysis and its application to teaching. Unpublished doctoral thesis, Michigan State University.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning*, 2, 11–50.

ΟΙ ΕΙΚΟΝΕΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Β' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΚΑΙ Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΔΟΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Δεσλή Δέσποινα & Μολασιώτη Κυριακή
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.
ddesli@eled.auth.gr & kyriakim91@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να μελετηθεί αφενός το είδος των εικόνων που παρουσιάζονται στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών και αφετέρου να εξεταστεί η επίδραση των εικόνων και των λειτουργιών τους στην επίλυση προβλήματος. Για το σκοπό αυτό πραγματοποιήθηκε: α) ανάλυση περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών της Β' Δημοτικού αναφορικά με το είδος των εικόνων που συνοδεύουν τα προβλήματα αριθμητικών πράξεων με ακέραιους αριθμούς και β) έρευνα σε μαθητές Β' Δημοτικού (N=54) στους οποίους παρουσιάστηκαν τέσσερις κατηγορίες προβλημάτων που συνοδεύονταν από ισάριθμα είδη εικόνων: διακοσμητικές, βοηθητικές-αναπαραστατικές, βοηθητικές-οργανωτικές και πληροφοριακές εικόνες. Οι διακοσμητικές και οι πληροφοριακές εικόνες που εμφανίζονται πιο συχνά στα σχολικά εγχειρίδια, δεν βρέθηκε να επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών, ενώ οι βοηθητικές εικόνες – αναπαραστατικές και οργανωτικές – συμβάλλουν σημαντικά. Τα αποτελέσματα αναδεικνύουν τη σημασία του οπτικού γραμματισμού στα μαθηματικά και την ανάγκη για περαιτέρω έρευνα.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις μέρες μας τα παιδιά έχουν στη διάθεσή τους, εντός και εκτός σχολικού πλαισίου, όγκο πληροφοριών από το συνδυασμό τεχνολογικών και απλών μέσων επικοινωνίας. Παρόλο που το γλωσσικό σημειωτικό σύστημα κυριαρχεί, η χρήση και άλλων σημειωτικών τρόπων και αναπαραστάσεων έχει αυξηθεί καθώς οι εικόνες περιβάλλουν το παιδί με παρόμοιο τρόπο που παλαιότερα το περιέβαλε ο γραπτός λόγος (Γρόσδος, 2009) και γιατί, κατά τη Χοντολίδου (1999), το κίνημα της εικόνας και της πληροφορικής έδωσε θέση σε μία νέα εποχή πολυγραμματισμών που επιτρέπει τη γρήγορη διαχείριση πολυτροπικών μέσων. Η θέση της εικόνας και του κειμένου, ωστόσο, προδίδει το βαθμό κυριαρχίας του ενός ή του άλλου είδους και την πληροφοριακή τους αξία (Kress & van Leeuwen, 2010). Σε κάθε περίπτωση, ευεργετική θεωρείται η κατανόηση λεκτικών και εικονικών πληροφοριών για τη διαδικασία μάθησης (Carney & Levin, 2002).

Στην περίπτωση των μαθηματικών, οι εικόνες αποτελούν –ανάμεσα σε άλλες εξωτερικές αναπαραστάσεις όπως σχήματα, πίνακες, γραφικές παραστάσεις – τους

πιο συνηθισμένους τρόπους έκφρασης των μαθηματικών πληροφοριών. Παρατηρείται μάλιστα έντονη ποσοτική μεταβολή στην παρουσία των εικόνων στα σχολικά εγχειρίδια. Για παράδειγμα, ο Πλειός (2005), κατά τη μελέτη των προηγούμενων σχολικών εγχειριδίων, αναφέρει την εμφάνιση πλήθους εικόνων στο βιβλίο των μαθηματικών της Στ' τάξης, για μαθησιακούς κυρίως λόγους σε σύγκριση με τα βιβλία των μαθημάτων που αφορούν ανθρωπιστικές σπουδές στα οποία οι εικόνες εξυπηρετούν αισθητικούς σκοπούς. Εξηγεί επίσης ότι, επειδή το περιεχόμενο των μαθηματικών είναι περισσότερο αφηρημένο, οι εικόνες απέχουν αρκετά από μια απλή αισθητική προσέγγιση. Παρόμοια και η Λουμάκου (2010) αναλύοντας τα βιβλία των μαθηματικών του νέου και του παλιού προγράμματος σπουδών για τις πρώτες πέντε τάξεις του δημοτικού σχολείου περιγράφει τη ραγδαία αύξηση στον αριθμό των εικόνων που χρησιμοποιούνται στα νέα βιβλία, αναδεικνύοντας τον καθολικό ρόλο των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση των γραπτών κειμένων.

Θεωρώντας πλέον δεδομένη την παρουσία των εικόνων στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών, ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα αποτελέσματα ερευνών σχετικά με το ρόλο της εικόνας στην επεξεργασία των κειμένων. Οι Θεοδούλου και Γαγάτσης (2003), βασισμένοι στην ταξινόμηση των Carney και Levin (2002) για τη λειτουργία των εικόνων στα λογοτεχνικά κείμενα, πρότειναν την κατάταξη των εικόνων με βάση τις λειτουργίες που επιτελούν στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος στις εξής τέσσερις κατηγορίες: α) *'διακοσμητικές εικόνες'* – δεν παρέχουν πληροφορίες και έχουν διακοσμητικό ρόλο, β) *'βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες'* – αναπαριστούν μέρος των δεδομένων ή όλο το πρόβλημα και δεν είναι απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος, γ) *'βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες'* – οργανώνουν τις πληροφορίες του προβλήματος και καθοδηγούν στην επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης χωρίς να είναι απαραίτητες, και δ) *'πληροφοριακές εικόνες'* – παρέχουν τα απαραίτητα στοιχεία για την κατανόηση και επίλυση του προβλήματος. Σε επίπεδο ερευνών ο Γαγάτσης και οι συνεργάτες του μελέτησαν το ρόλο των εικόνων και τη χρήση τους από Κύπριους μαθητές κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Συγκεκριμένα, βρήκαν ότι οι διακοσμητικές εικόνες δεν επηρεάζουν τις επιδόσεις μαθητών Β' και Γ' τάξης σε προβλήματα πρόσθεσης, ενώ οι πληροφοριακές εικόνες δεν τις βελτιώνουν (Γαγάτσης, Ηλία, Ρούσου-Μιχαηλίδου & Τσακίρης, 2004). Επίσης, οι βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες επιδρούν άλλοτε θετικά και άλλοτε αρνητικά (σε μαθητές Β' δημοτικού), σε αντίθεση με τις βοηθητικές-οργανωτικές που συνεισφέρουν θετικά σε προβλήματα πρόσθεσης, αφαίρεσης και διαίρεσης (Θεοδούλου & Γαγάτσης, 2003). Σε προβλήματα πολλαπλασιασμού, ωστόσο, αρνητική βρέθηκε η επίδραση των βοηθητικών-οργανωτικών εικόνων για μαθητές Γ' Δημοτικού καθώς επιβάρυναν τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος (Δεληγιάννη, Γαγάτσης & Κουκκούφης, 2003). Παρά ταύτα, μαθητές Α' τάξης επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν εικονικές αναπαραστάσεις -αντί λεκτικές- για να λύσουν προβλήματα πολλαπλασιασμού

(Γαγάτσης & Μοδέστου, 2004). Τέλος, η λειτουργία της εικόνας επηρεάζει τη συμπεριφορά και την επικοινωνία ακόμη και μαθητών Στ' τάξης με υψηλή επίδοση στα μαθηματικά, οι οποίοι φαίνεται να αδιαφορούν για τις διακοσμητικές εικόνες, να αξιοποιούν τις βοηθητικές (αναπαραστατικές και οργανωτικές) συμπληρωματικά των λεκτικών πληροφοριών και να χρησιμοποιούν πλήρως τις πληροφοριακές εικόνες (Ηλία, Χρυσάνθου & Φιλίππου, 2003).

Η παρούσα εργασία στοχεύει αφενός στην καταγραφή του είδους των εικόνων που συνοδεύουν τα προβλήματα αριθμητικών πράξεων με ακέραιους αριθμούς στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Β' Δημοτικού στον ελλαδικό χώρο και αφετέρου στη μελέτη της επίδρασης του ρόλου της εικόνας στην επίλυση προσθετικών προβλημάτων από μαθητές Β΄ Δημοτικού. Η βασική υπόθεση της εργασίας είναι ότι οι εικόνες, ανάλογα με τη λειτουργία που επιτελούν, επιδρούν στην κατανόηση των μαθηματικών προβλημάτων και την ενεργοποίηση συγκεκριμένων διαδικασιών επίλυσης και στρατηγικών σκέψης των παιδιών.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

2.1. Ανάλυση περιεχομένου – Σχολικά εγχειρίδια

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων προκειμένου να εξεταστεί η συχνότητα των λειτουργιών των εικόνων. Από τα δύο βιβλία μαθητή και τα τέσσερα τετράδια εργασιών των μαθηματικών της Β' Δημοτικού που αποτελούν τα σχολικά εγχειρίδια της συγκεκριμένης τάξης στον ελλαδικό χώρο, μελετήθηκαν μόνο τα κεφάλαια (συνολικά 40) που εστιάζουν στις αριθμητικές πράξεις ακεραίων αριθμών μέσα από προβλήματα. Οι εικόνες που συνόδευαν τα προβλήματα κατηγοριοποιήθηκαν, σύμφωνα με την ταξινόμηση των Θεοδούλου και Γαγάτση (2003), με βάση τη λειτουργία τους σε: *διακοσμητικές, βοηθητικές-αναπαραστατικές, βοηθητικές-οργανωτικές και πληροφοριακές*. Προστέθηκε, επίσης, η κατηγορία της *μηδενικής αναπαράστασης* που αφορούσε τη μη ύπαρξη εικόνας. Οι εικόνες που μελετώνται βρίσκονται είτε ενδιάμεσα της λεκτικής διατύπωσης του προβλήματος, είτε δίπλα ή πάνω ή κάτω αυτού. Κάθε ερώτημα θεωρήθηκε ως πρόβλημα και, συνεπώς, κατηγοριοποιήθηκε το εικονικό είδος που το συνοδεύει σε μία ή περισσότερες κατηγορίες εικόνων, ισάριθμες των ερωτημάτων. Τέλος, όταν ένα πρόβλημα συνοδευόταν από περισσότερες εικόνες, κάθε εικόνα κατηγοριοποιήθηκε ξεχωριστά ως προς τη λειτουργία που επιτελεί.

2.2. Ερευνητική στρατηγική

Συμμετέχοντες. Στην έρευνα συμμετείχαν 54 παιδιά Β' Δημοτικού (με μ.ο. ηλικίας τα 7 χρόνια και 4 μήνες) που φοιτούσαν σε δημόσια σχολεία της Καρδίτσας

και προέρχονταν από διαφορετικά κοινωνικο-οικονομικά στρώματα καλύπτοντας μια ποικιλία μορφωτικών επιπέδων.

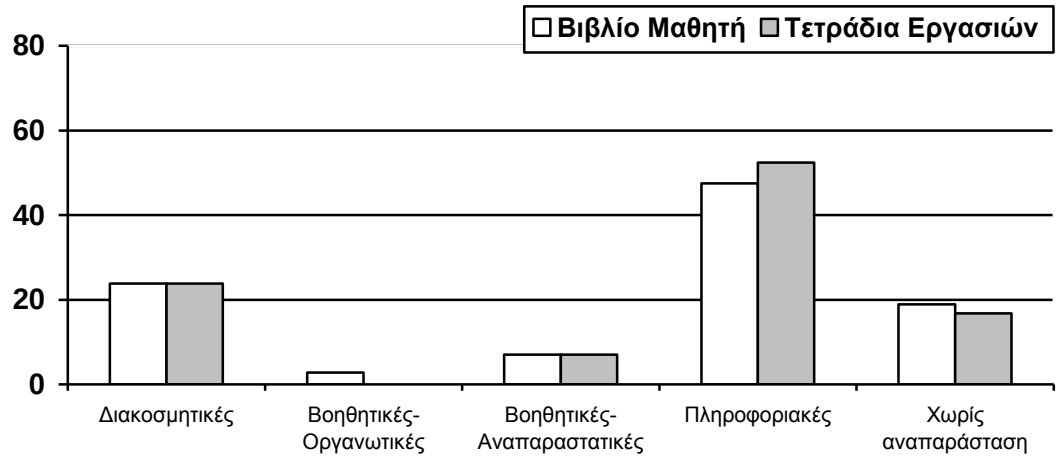
Σχεδιασμός – Εργαλείο μέτρησης. Σχεδιάστηκαν 16 μαθηματικά προβλήματα με εικόνες τα οποία χωρίστηκαν ισάριθμα σε τέσσερις κατηγορίες με βάση τη λειτουργία των εικόνων που τα συνόδευαν (διακοσμητικές, βοηθητικές-αναπαραστατικές, βοηθητικές-οργανωτικές και πληροφοριακές εικόνες). Οι συμμετέχοντες μπορούσαν να βασιστούν στις εικόνες για την επίλυση των προβλημάτων, ανάλογα με τη λειτουργία που αυτές επιτελούσαν. Για παράδειγμα, τα προβλήματα με πληροφοριακές εικόνες, δεν ήταν δυνατόν να επιλυθούν χωρίς να αντληθούν στοιχεία από τις εικόνες. Δημιουργήθηκαν, επίσης, επιπλέον 16 προβλήματα χωρίς εικόνες, που περιείχαν τις ίδιες λεκτικές πληροφορίες με τα προβλήματα με εικόνες, αλλά διέφεραν ως προς την απουσία των εικόνων. Όλα τα προβλήματα αφορούσαν καταστάσεις καθημερινής ζωής. Τα μισά από αυτά απαιτούσαν την αριθμητική πράξη της πρόσθεσης και τα άλλα μισά της αφαίρεσης με αριθμούς μικρότερους του 100.

Οι συμμετέχοντες κατανεμήθηκαν ισάριθμα κατά τυχαίο τρόπο σε δύο ομάδες που αφορούσαν την παρουσία ή απουσία των εικόνων. Σε κάθε ομάδα παρουσιάστηκαν 16 προβλήματα (4 για κάθε είδος εικόνας) με τέτοιο τρόπο ώστε τα προβλήματα που η μία ομάδα έβλεπε με εικόνες, η άλλη ομάδα τα έβλεπε χωρίς εικόνες, και το αντίστροφο. Τέλος, η σειρά παρουσίασης των προβλημάτων διέφερε στις δύο ομάδες προκειμένου να διασφαλιστεί ότι η σειρά δεν επηρεάζει την επίδοση των παιδιών.

Διαδικασία. Κάθε παιδί εξετάστηκε ατομικά σε ήσυχο χώρο του σχολείου σε δύο συναντήσεις, που η καθεμία διαρκούσε περίπου 15 λεπτά, με διαφορά μεταξύ τους λίγων ημερών. Διατηρήθηκε η ανωνυμία των παιδιών ενώ η συμμετοχή τους στην έρευνα έγινε σε εθελοντική βάση.

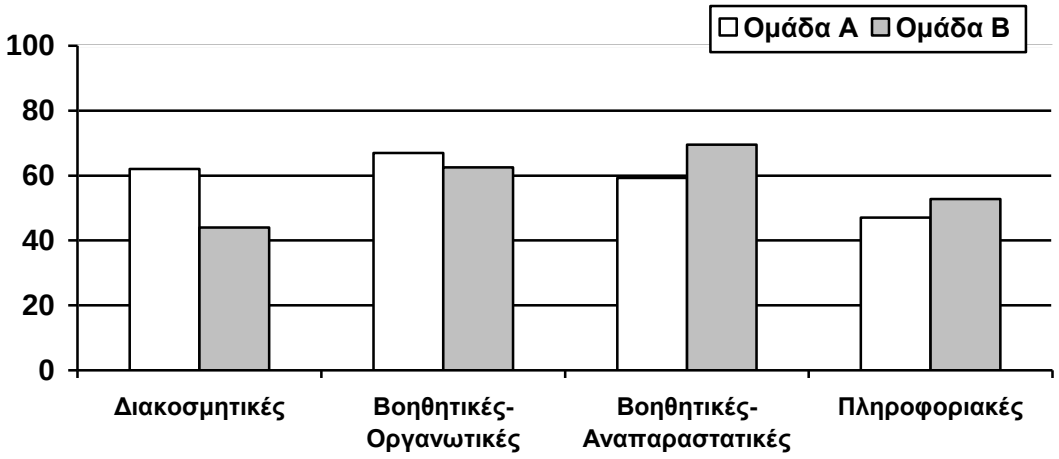
3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

α. Σχολικά εγχειρίδια. Από την ανάλυση περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων βρέθηκε ότι οι πληροφοριακές εικόνες εμφανίζονται πολύ συχνά να συνοδεύουν τα προβλήματα τόσο στο βιβλίο του μαθητή (47,5%) όσο και στα τετράδια εργασιών (52,4%). Ακολουθούν οι διακοσμητικές εικόνες (περίπου 24%), ενώ οι βοηθητικές (οργανωτικές και αναπαραστατικές) δεν ξεπερνούν σε συχνότητα συνολικά το 10%. Το Σχήμα 1 παρουσιάζει τα στοιχεία αυτά.



Σχήμα 1: Συχνότητα (%) εμφάνισης των εικόνων ως προς τη λειτουργία τους στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Β' Δημοτικού

β. Επίδοση παιδιών και λειτουργίες εικόνων. Προκειμένου να μελετηθεί η γενική επίδοση των συμμετεχόντων ως προς το είδος εικόνας, την ομάδα και το φύλο, χρησιμοποιήθηκε πολυπαραγοντική ανάλυση διασποράς. Ο παράγοντας εικόνα δεν βρέθηκε να επηρεάζει την επίδοση των παιδιών ($F(1,40)=.904$, $p=.348$): παρόμοιες επιδόσεις εμφάνισαν τα παιδιά ανεξάρτητα από το είδος των εικόνων που συνόδευε τα προβλήματα που τους παρουσιάστηκαν. Δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ούτε για τους παράγοντες της ομάδας και του φύλου ($F(1,40)=.039$, $p=.844$ και $F(1,40)=1.122$, $p=.296$, αντίστοιχα). Η αλληλεπίδραση, ωστόσο, των παραγόντων εικόνας και ομάδας έδειξε στατιστικά σημαντική διαφορά ($F(1,40)=18.994$, $p<.001$), με τους συμμετέχοντες της ομάδας Α να έχουν την καλύτερη επίδοσή τους στα προβλήματα με βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες (67%), ενώ της ομάδας Β στα προβλήματα με βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες (69,5%). Τα προβλήματα στα οποία εμφανίστηκαν τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας ήταν αυτά με πληροφοριακές εικόνες για τα παιδιά της Ομάδας Α (47%) και αυτά με διακοσμητικές εικόνες για τα παιδιά της Ομάδας Β (44%). Αυτές οι διαφορές παρουσιάζονται στο Σχήμα 2. Τέλος, όλα τα παιδιά παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στα προβλήματα πρόσθεσης σε σχέση με αυτά της αφαίρεσης ($t=6,141$, $df=43$, $p<.001$) ανεξάρτητα από την ομάδα και την παρουσία εικόνων.



Σχήμα 2: Ποσοστά σωστών απαντήσεων ανά είδος εικόνας και ομάδα

γ. Χρήση των εικόνων. Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων που αφορούν στη χρήση των εικόνων στις κατηγορίες προβλημάτων που συνοδεύονταν από συγκεκριμένα είδη εικόνων ανά ομάδα χρησιμοποιήθηκε μονοπαραγοντική ανάλυση διασποράς. Συγκεκριμένα, στα προβλήματα με διακοσμητικές εικόνες δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη χρήση των εικόνων ανά ομάδα ($F(1,53)=2.247$, $p=.140$). Σχεδόν όλα τα παιδιά και από τις δύο ομάδες δεν χρησιμοποίησαν τις διακοσμητικές εικόνες που τους παρουσιάστηκαν. Στατιστικά σημαντικές διαφορές βρέθηκαν, ωστόσο, στη χρήση των εικόνων ανά ομάδα τόσο στα προβλήματα με βοηθητικές-αναπαραστατικές εικόνες όσο και σε αυτά με βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες ($F(1,53)=14.559$, $p<.001$ και $F(1,53)=12.458$, $p<.01$, αντίστοιχα). Αυτές οι διαφορές ενδεχομένως οφείλονται στο περιεχόμενο των προβλημάτων και, πιο συγκεκριμένα, στις συνοδευτικές εικόνες που είδαν τα παιδιά της Ομάδας Β στα προβλήματα που τους παρουσιάστηκαν, οι οποίες προφανώς αντιμετωπίστηκαν πιο οικεία σε σχέση με τις αντίστοιχες που είδαν τα παιδιά της Ομάδας Α. Αξίζει να σημειωθεί ότι η εικόνα που συνόδευε το πρόβλημα στο οποίο παρουσιάστηκε μικρότερη χρήση της εικόνας δεν ήταν ψευδοεικόνα.

Τέλος, η χρήση των πληροφοριακών εικόνων ως προς την ομάδα δεν βρέθηκε να διαφέρει στατιστικά σημαντικά ($F(1,53)=.924$, $p=.341$): ανεξάρτητα από την ομάδα, τα παιδιά είχαν παρόμοια συχνότητα στη χρήση των εικόνων. Προκειμένου να περιγραφεί ο τρόπος χρήσης των πληροφοριακών εικόνων από τα παιδιά, καθώς όλα χρησιμοποίησαν αυτές τις εικόνες, υιοθετήθηκαν οι εξής όροι: α) *'αυτοτελής χρήση'*, β) *'χρήση με παρακίνηση'* και γ) *'χρήση με καθοδήγηση'*, για τα παιδιά που χρησιμοποίησαν τις εικόνες από μόνα τους, μετά από παρότρυνση και μετά από πλήρη καθοδήγηση από τους ερευνητές, αντίστοιχα. Περίπου οι μισοί συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν τις εικόνες με παρότρυνση, ενώ το 27% των παιδιών από μόνοι τους. Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τα στοιχεία για τη χρήση των εικόνων στα προβλήματα που αφορούν όλες τις κατηγορίες εικόνων.

Εικόνες	Μη χρήση	Χρήση		
Διακοσμητικές	98,1%	1,9%		
Βοηθητικές-αναπαραστατικές	69,7%	30,3%		
Βοηθητικές-οργανωτικές	75,4%	24,6%		
Πληροφοριακές		***Αυτοτελής***	***Με παρακίνηση***	***Με καθοδήγηση***
		27,8%	46%	26,2%

Πίνακας 1: Ποσοστά χρήσης των εικόνων στα προβλήματα ως προς το είδος των εικόνων

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τη μελέτη των εικόνων στα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών της Β' Δημοτικού προέκυψε ότι οι πληροφοριακές εικόνες υπερτερούν σε συχνότητα έναντι των άλλων ειδών και ακολουθούν σε φθίνουσα σειρά οι διακοσμητικές, οι βοηθητικές-αναπαραστατικές και οι βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες, με τις τελευταίες να έχουν σχεδόν μηδαμινή παρουσία. Το εύρημα αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές της Β' Δημοτικού τυπικά θα πρέπει να είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τις πληροφοριακές εικόνες και την ερμηνεία τους στα μαθηματικά προβλήματα σε σχέση με τα άλλα είδη εικόνων που εμφανίζονται λιγότερο συχνά. Σε κάθε περίπτωση, επειδή στην πλειοψηφία τους τα προβλήματα συνοδεύονταν από εικόνες (μόνο περίπου το 18% δεν είχαν κάποια εικονική αναπαράσταση), οι μαθητές έχουν την ευκαιρία πολύ συχνά να χρησιμοποιούν και να ερμηνεύουν εικόνες, οι περισσότερες από τις οποίες είναι έγχρωμες ψευδοεικόνες.

Εξετάζοντας την επίδραση του είδους των εικόνων στην επίδοση των μαθητών βρέθηκε ότι οι μαθητές παρουσιάζουν παρόμοια επίδοση στα προβλήματα ανεξάρτητα από τη λειτουργία που επιτελεί η εικόνα που τα συνοδεύει. Μάλιστα συχνά δυσκολεύονται στην εύρεση της λύσης, όταν η αναζήτηση των μαθηματικών πληροφοριών εξαρτάται μόνο από το οπτικό μέσο, όταν δηλαδή τα απαραίτητα στοιχεία για το πρόβλημα δίνονται στην εικόνα, όπως στην περίπτωση των προβλημάτων με πληροφοριακές εικόνες.

Τα αποτελέσματα αυτά φαίνεται να οδηγούν σε μία αντίφαση. Ενώ το σχολικό εγχειρίδιο αποτελείται κατεξοχήν από πληροφοριακές εικόνες, οι μαθητές δεν διαφοροποιούνται στις επιδόσεις τους ως προς τις εικόνες που τους παρουσιάζονται και είτε δυσκολεύονται είτε τις χρησιμοποιούν και προχωρούν στη λύση. Σε ό,τι αφορά τις διακοσμητικές εικόνες, οι μαθητές φαίνεται να τις αγνοούν.

Οι βοηθητικές εικόνες, γενικά, δεν εξυπηρέτησαν ιδιαίτερα το ρόλο τους: πιο συγκεκριμένα, οι βοηθητικές-οργανωτικές εικόνες δεν είχαν θετική συνεισφορά και μάλλον επιβάρυναν τους μαθητές με μία εικονική αναπαράσταση που δεν χρησιμοποίησαν, ενώ οι βοηθητικές-αναπαραστατικές άλλοτε επιδρούσαν θετικά και άλλοτε αρνητικά. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τα ευρήματα των Δεληγιάννη, Γαγάτση και Κουκκούφη (2003) σε Κύπριους μαθητές Γ' τάξης. Ωστόσο, διαφορετική ήταν η επίδραση των βοηθητικών–οργανωτικών εικόνων στην έρευνα των Θεοδούλου και Γαγάτση (2003).

Η χρήση των εικόνων – και συγκεκριμένα των πληροφοριακών- για την επίλυση προβλημάτων βρέθηκε ότι προκαλεί δυσκολία στους μαθητές. Ένα μικρό μέρος των συμμετεχόντων χρησιμοποίησε αυτοβούλως την εικόνα και κατάφερε να αντλήσει τις απαραίτητες πληροφορίες, ενώ οι περισσότεροι χρειάστηκαν κάποια υπόδειξη, πιθανότατα λόγω έλλειψης εξοικείωσης με την ανάγνωση των πληροφοριακών εικόνων. Η αδυναμία χρήσης των πληροφοριακών εικόνων επιβεβαιώνει τους Γαγάτσης κ.α. (2004) και Ηλία κ.α. (2003) που βρήκαν ότι οι επιδόσεις των μαθητών δεν επηρεάστηκαν από τις πληροφοριακές εικόνες στα προβλήματα προσθετικής δομής. Παρόμοια, χαμηλά είναι και τα ποσοστά χρήσης των βοηθητικών-οργανωτικών εικόνων, γεγονός που επιβεβαιώνει τη δυσκολία των παιδιών να 'διαβάσουν' και να χρησιμοποιήσουν τις εικόνες, παρόλο που αυτό το είδος των εικόνων σχεδιάστηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν τη δομή του προβλήματος και να αναπαραστήσουν τα δεδομένα του. Η περιορισμένη χρήση των βοηθητικών εικόνων, ωστόσο, ενδεχομένως, εξηγείται και από την περιορισμένη παρουσία αυτού του είδους των εικόνων στο σχολικό βιβλίο. Κάτι τέτοιο, όμως, δεν μπορεί να ισχύει για τις πληροφοριακές εικόνες που έχουν συχνή παρουσία στο σχολικό εγχειρίδιο.

Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι, ενώ οι διακοσμητικές εικόνες περνούν απαρατήρητες και δεν προσφέρουν τη δυνατότητα ερμηνευτικής λειτουργίας, οι εικονογράφοι τις προτιμούν ιδιαίτερα ακόμα και σε μεγαλύτερες τάξεις (Λουμάκου, 2010), πιθανότατα για την ελκυστικότητα που προσφέρουν. Επισημαίνεται, επίσης, ότι οι πρωτότυπες εικόνες είναι λίγες και κυριαρχούν οι ψευδοεικόνες που δεν αντιπροσωπεύουν την πραγματικότητα (Γρόσδος, 2009). Πιθανότατα, στη μη εξοικείωση των μαθητών με ρεαλιστικές εικόνες οφείλεται και η μικρή χρήση των βοηθητικών-αναπαραστατικών εικόνων που συμπεριλάμβαναν και ρεαλιστικές εικόνες στην παρούσα έρευνα. Με άλλα λόγια, οι ρεαλιστικές εικόνες που χρησιμοποιήθηκαν είχαν μικρότερη αποτελεσματικότητα από τις μη ρεαλιστικές, οι οποίες μάλλον ήταν πιο οικείες για τα παιδιά. Κατά συνέπεια, αξίζει να διερευνηθεί και κατά πόσο η παρουσία περισσότερο ή λιγότερο ρεαλιστικών εικόνων στα μαθηματικά βοηθά ή δυσχεραίνει την ερμηνεία και χρήση των εικόνων.

Με την επικράτηση και κυριαρχία των πολυτροπικών κειμένων στα σχολικά εγχειρίδια παρατηρείται πλέον μία σαφής αλλαγή του ρόλου των μαθητών: μυούνται περισσότερο στον οπτικό γραμματισμό προκειμένου να είναι σε θέση να

αναπτύσσουν στρατηγικές για να κατανοούν τις εικόνες που τους παρουσιάζονται (Kress & van Leeeuwen, 2010). Ο εξεικονισμός του σχολικού εγχειριδίου αποτέλεσε μεγάλη αλλαγή στον εκπαιδευτικό χώρο (Πλειός, 2005) κάνοντας τις εικόνες δυναμικά διδακτικά μέσα για γνωστικά αντικείμενα όπως, για παράδειγμα, στις Φυσικές Επιστήμες, όπου οι εικόνες χρησιμοποιούνται σε μεγάλο βαθμό ως βοηθητικά εργαλεία επεξεργασίας δύσκολων εννοιών και κατανόησής τους (Ιμβριώτης & Γκικοπούλου, 2009). Η παρούσα εργασία αποτελεί διερευνητική προσπάθεια για το ρόλο των εικόνων και, κατά συνέπεια, την ανάδειξη της σημασίας του οπτικού γραμματισμού στην κατανόηση των μαθηματικών προβλημάτων και τις διαδικασίες επίλυσής τους. Η ικανότητα των παιδιών να χρησιμοποιούν και να ερμηνεύουν εικόνες απαιτεί και επιτρέπει την εξοικείωσή τους με τις μαθηματικές έννοιες και την επίλυση προβλήματος. Έτσι, γίνεται αντιληπτό τόσο ο σύνθετος ρόλος των εικόνων όσο και η σημασία τους στη μαθησιακή διαδικασία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Carney, R.N. & Levin, J.R. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review, 14*(1), 101-120.

Γαγάτσης, Α., Ηλία, Ι., Ρούσου-Μιχαηλίδου, Π. & Τσακίρης, Μ. (2004). Η επίδραση των εικόνων στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Στο Α. Γαγάτσης (επιμ.), *Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 19-62). Λευκωσία: UNESCO.

Γαγάτσης, Α. & Μοδέστου, Μ. (2004). Η επίδραση των εικόνων στην επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιασμού. Στο Α. Γαγάτσης (επιμ.), *Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 63-81). Λευκωσία: UNESCO.

Γρόσδος, Σ. (2009). Μαθηματικός γραμματισμός και οπτικός γραμματισμός: χρειάζονται τα παιδιά εικόνες για να λύσουν μαθηματικά προβλήματα; Στο Σ. Γρόσδος (επιμ)., *Η διδακτική των θετικών επιστημών στην εκπαίδευση: δημιουργώντας γέφυρες επικοινωνίας ανάμεσα στο Νηπιαγωγείο, το Δημοτικό, το Γυμνάσιο* (σελ. 37-62). Θεσσαλονίκη: ΟΜΕΡ.

Δεληγιάννη, Ε., Γαγάτσης, Α & Κουκκούφης, Α. (2003). Η επίδραση των εικόνων στην επίδραση προβλημάτων πολλαπλασιασμού στη Γ' τάξη δημοτικού σχολείου. Στο Α. Γαγάτσης & Ι. Ηλία (επιμ.), *Οι αναπαραστάσεις και τα γεωμετρικά μοντέλα στη μάθηση των μαθηματικών* (Τόμος Ι, σελ. 87-104). Λευκωσία: Intercollege.

Ηλία, Ι., Χρυσάνθου, Α. & Φιλίππου, Γ. (2003). Ο ρόλος της εικόνας στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Στα *Πρακτικά του 2ου Συνεδρίου για τα μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση*. Αθήνα: ΕΚΠΑ & Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Θεοδούλου, Ρ. & Γαγάτσης, Α. (2003). Μια εικόνα αξίζει χίλιες λέξεις … ποιο είδος εικόνας όμως βοηθά στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος; Στα *Πρακτικά του*

2ου Συνεδρίου για τα μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αθήνα: ΕΚΠΑ & Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Ιμβριώτης, Δ. & Γκικοπούλου, Ο. (2009). Το εκπαιδευτικό πρότυπο του μικροκόσμου και οι προσομοιώσεις/οπτικοποιήσεις που ερμηνεύουν και ενοποιούν τα φαινόμενα του μικροκόσμου στο μάθημα των Φυσικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Στο Π. Καριώτογλου, Α. Σπύρτου & Α. Ζουπίδης (επιμ.), *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου διδακτικής των Φυσικών Επιστημών και Νέων Τεχνολογιών στην εκπαίδευση* (σελ. 106-113). Αθήνα: Γράφημα.

Kress, G. & van Leeuwen, T. (2010). *Η ανάγνωση των εικόνων: Η γραμματική του οπτικού σχεδιασμού*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Λουμάκου, Μ. (2010). *Η χρήση των εξωτερικών αναπαραστάσεων στα σύνθετα προβλήματα: Συγκριτική θεώρηση παλιού και νέου Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών*. Αδημοσίευτη διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών: Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η.

Πλειός, Γ. (2005). *Πολιτισμός της εικόνας και εκπαίδευση. Ο ρόλος της εικονικής ιδεολογίας*. Αθήνα: Πολύτροπον.

Χοντολίδου, Ε. (1999). Εισαγωγή στην έννοια της πολυτροπικότητας. *Γλωσσικός Υπολογιστής, 1* (www.netschoolbook.gr/polytropy.html).

ΣΧΕΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΜΙΑ ΤΡΟΧΙΑ ΜΑΘΗΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ

Αλχασίδης Νικόλαος
Διεύθυνση Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Καστοριάς
nalchas@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η κατανόηση του σχήματος του λόγου αποτελεί ένα ουσιώδες ζήτημα στη διδακτική των μαθηματικών, επειδή συνδέεται με την άλγεβρα και τις εξισώσεις (α=yx, a/y=x/β), τη στατιστική και τη θεωρία των πιθανοτήτων (γεωμετρικός & αρμονικός μέσος). Τα curricula της Μ. Βρετανίας και των ΗΠΑ (Common Core) έχουν προσανατολιστεί στη δημιουργία τροχιών μάθησης και χαρτών προόδου για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Στο παρόν άρθρο εξετάζω συνδυαστικά τα curricula της Αυστραλίας, των ΗΠΑ και της Μ. Βρετανίας στοχεύοντας να καταδείξω τη χρήση μιας τροχιάς μάθησης αναφορικά με το σχήμα του λόγου μέσα από τη συγκρότηση μίας πρότασης η οποία ενδέχεται να τροφοδοτήσει τη σχετική έρευνα.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το σχήμα του λόγου επισύρει μία σειρά ερμηνειών η οποία το καθιστά ένα απαιτητικό αντικείμενο μελέτης και πολύ περισσότερο ένα επίπονο αντικείμενο διδακτικής εφαρμογής (Thompson, 1992; Lesh, Post & Behr, 1988). Η βιβλιογραφία αναφέρει 5 σχήματα των ρητών, το σχήμα του μέρους – όλου, του τελεστή, του μέτρου, του πηλίκου, και του λόγου (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Kieren, 1988). Το σχήμα του μέρους – όλου αντιμετωπίζει τον ρητό αριθμό α/β ως μέρος μιας ποσότητας (συνεχούς ή διακριτής) η οποία εκλαμβάνεται ως ακέραια μονάδα και χωρίζεται σε β ίσα κομμάτια από τα οποία παίρνουμε τα α. Το σχήμα του τελεστή, μπορεί να θεωρηθεί ως μία συνάρτηση (το α/β του χ). Το σχήμα του μέτρου θεωρεί τον ρητό α/β ως μία ποσότητα η οποία προκύπτει από την επανάληψη του μοναδιαίου κλάσματος 1/β (το 1/β εκλαμβάνεται ως μία αυθαίρετη μονάδα αναφοράς). Το πηλίκο αναφέρεται στη διαίρεση α ποσοτήτων σε β μέρη. Τέλος το σχήμα του λόγου εστιάζει σε μία σχέση δύο ποσοτήτων (α/β) και στην αναζήτηση ισοδύναμων σχέσεων ($\alpha/\beta=\alpha_1/\beta_1= \ldots.= \alpha_x/\beta_n$).

Αποτελέσματα ερευνών Mamede, Nunes & Bryant (2005: 3-285) έδειξαν ότι τα παιδιά που εργάστηκαν σε προβλήματα ισοδιαμερισμού χρησιμοποιώντας το σχήμα του λόγου παρουσίασαν επιτυχία με στατιστικά σημαντική διαφορά έναντι των παιδιών που χρησιμοποίησαν το σχήμα του μέρους – όλου. Ο Streefland (1997: 361) υποστηρίζει ότι πρέπει να διατηρήσουμε την ρεαλιστική άποψη της σχέσης *μέρους-όλου*, επειδή

αναφέρεται στη συγκεκριμένη σκέψη του παιδιού, θεωρεί όμως εξίσου σημαντικό το σχήμα του πηλίκου (α:β) για να μπορέσουν τα παιδιά να προσδώσουν στα κλάσματα τις αφηρημένες ιδιότητες (properties) των ρητών αριθμών.

Οι Behr et al (1983) παραδέχονται ότι το σχήμα του πηλίκου συνδέεται με το σχήμα του λόγου, με την επίλυση προβλημάτων και την έννοια της ισοδυναμίας, το σχήμα του τελεστή με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, ενώ το μέτρο με την πρόσθεση και την αφαίρεση. Στην παρούσα προσέγγιση συζητείται η σύνδεση του σχήματος του λόγου με τον τελεστή, το σχήμα του διαμερισμού, αλλά και με το σχήμα του μέρους – όλου υπό ειδικές προϋποθέσεις, επειδή το σχήμα του λόγου συνδέεται μέσα από μία σειρά ερμηνειών με τα ανωτέρω σχήματα (Thompson, 1992: 21-22; Lesh, Post & Behr, 1988).

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΕΡΕΙΣΜΑΤΑ

2.1. Οι ορισμοί του λόγου

Κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση καταγράφονται διαφορετικοί ορισμοί για τον λόγο και το τι συνιστά εξωτερικό λόγο. Ο Vergnaud (1983), υιοθετώντας την αντίληψη των αρχαίων Ελλήνων για τον εξωτερικό λόγο (αναλογία), υποστηρίζει ότι ο εξωτερικός λόγος συσχετίζει ποσότητες με διαφορετικές μονάδες μέτρησης (πχ. 5 μήλα/2 αχλάδια). Οι Resnick & Singer (1993: 112) ονομάζουν αυτή την αναλογία ως μία πρωταρχική μορφή λόγου (protoratio). Οι Lesh, Post, & Behr (1988) υποστηρίζουν ότι ο εξωτερικός λόγος είναι η σχέση μεταξύ μιας ποσότητας και της μονάδας μιας άλλης ποσότητας. Στην παρούσα εργασία δέχομαι ότι τόσο ο εσωτερικός λόγος, όσο και ο εξωτερικός αναφέρονται στη σχέση δύο ποσοτήτων α/β με α & β ≠ 0 και στην αναζήτηση ισοδύναμων σχέσεων ($\alpha/\beta=\alpha_1/\beta_1= \ldots.= \alpha_x/\beta_n$). Ο εσωτερικός λόγος αφορά ποσότητες της ίδιας μονάδας μέτρησης, ενώ ο εξωτερικός ποσότητες διαφορετικών μονάδων μέτρησης. Όταν ο λόγος αναφέρεται στην σχέση μιας ποσότητας και της μονάδας μιας άλλης ποσότητας χαρακτηρίζεται ως ρυθμός μεταβολής (unit rate) του λόγου. Ο λόγος επίσης διακρίνεται από ίδια μοτίβα πολλαπλασιαστικής και όχι προσθετικής λογικής, δηλαδή δεν μπορεί να θεωρηθεί λόγος η σχέση 6/2=4-1 (Lesh et al, 1988).

2.2. Ορισμός της Τροχιάς Μάθησης

Οι Confrey, Maloney, Nguyen, Mojica & Myers (2009: 345-346) ορίζουν την τροχιά μάθησης ως μία εμπειρική, ερευνητικά αποδεδειγμένη περιγραφή ενός διατεταγμένου δικτύου εμπειριών που προσλαμβάνει ο μαθητής μέσω των στοιχείων της διδασκαλίας (π.χ. δραστηριότητες, εργασίες, εργαλεία, μεθόδους αλληλεπίδρασης και

μεθόδους αξιολόγησης), ώστε να προχωρήσει από τις δικές του ιδέες σε σταδιακά αυξανόμενες σύνθετες ιδέες με την πάροδο του χρόνου. Η τροχιά επηρεάζεται από τα επιστημολογικά και γνωστικά εμπόδια των υποκειμένων τα οποία μπορούν να παρακαμφθούν μέσα από τα στοιχεία της διδασκαλίας. Στην παρούσα εργασία υιοθετώ τον ορισμό των Confrey et al (2009), οι οποίοι δε συνδέουν στην τροχιά μάθησης τη γεωμετρική αναλογία. Η γεωμετρική αναλογία συνδέεται με το σχήμα του μέτρου και την προσθετική λογική (Behr et al, 1983), επομένως συμπεριλαμβάνει στην τροχιά της μία σειρά εργαλείων που αναφέρονται στη γεωμετρία, στη χωρική αντίληψη των υποκειμένων και στην πρόσθεση/αφαίρεση μονάδων μέτρησης και στο σχήμα του "πολλά ως ένα", το οποίο διαφέρει από το σχήμα "πολλά σε ένα" (Confrey et al, 2009: 347). Συνεπώς συνδέω την τροχιά με τα εμπόδια που αναφέρονται στο διαμερισμό και την πολλαπλασιαστική λογική, τη στατιστική και τις πιθανότητες καθώς και με τα εργαλεία που ενδέχεται να άρουν αυτά τα εμπόδια και όχι με εκείνα τα εργαλεία που αναφέρονται στην προσθετική λογική, τις μετρήσεις και τη γεωμετρική αναλογία.

2.3. Ορισμός των εμποδίων

Οι ρητοί αριθμοί είναι ένα σύστημα αριθμών που παρουσιάζει ένα χάσμα αναφορικά με τους ακέραιους (Siegler, Thompshon & Schneider, 2011). Αυτό το χάσμα δημιουργεί επιστημολογικά και γνωστικά εμπόδια στα υποκείμενα (Brousseau, 1997). Τα επιστημολογικά εμπόδια προκύπτουν από την κατασκευαστική φύση των ρητών και τις διαφορές τους με τους ακεραίους. Η ύπαρξη συνεχούς-διακριτού και απόλυτου-σχετικού μεγέθους στους ρητούς, η απουσία ενός μικρότερου προκαθορισμένου αριθμού, ο άπειρος διαμερισμός, η απουσία φυσικής ακολουθίας των ρητών, συνιστούν σημαντικά επιστημολογικά εμπόδια τα οποία μπορούν να εμφανιστούν άτακτα κατά τη διδασκαλία στην τάξη ακόμη και μετά από κατάλληλες δραστηριότητες, επειδή οι μαθητές συνήθως παραβλέπουν το πρόβλημα το εμποδίου (Brousseau 1997:109). Η ύπαρξη του εμποδίου επομένως εκδηλώνεται με τα λάθη που αναπαράγουν τα υποκείμενα επίμονα, παροδικά και άτακτα παρά την διδασκαλία (Brousseau, 1997: 100 -110), συνεπώς κατά τη διάρκεια της τροχιάς πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η επανεμφάνιση των εμποδίων, οπότε και πρέπει να επανέρχεται ο εκπαιδευτικός σε έργα τα οποία παρακάμπτουν το εμπόδιο.

Τα γνωστικά εμπόδια προκύπτουν από σχήματα που ανέπτυξαν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία των ακεραίων και προσπαθούν να τα εφαρμόσουν στους ρητούς. Οι μαθητές της Μ. Βρετανίας (DfEE/QCA, 1999) χρησιμοποιούν τη στρατηγική της απαρίθμησης στους ρητούς (π.χ. 0.1, 0.2, 0.3 ή ¼, $^{2}/_{4}$, ¾, $^{4}/_{4}$ …) κατά τα πρότυπα των ακεραίων αριθμών, παραβλέποντας το επιστημολογικό ζήτημα ότι άπειροι αριθμοί παρεμβάλλονται μεταξύ δύο ρητών αριθμών. Για να παρακαμφθεί αυτό το εμπόδιο ίσως πρέπει η απαρίθμηση των ρητών (¼, $^{2}/_{4}$, ¾) να διδαχθεί ως άλμα σε μία αριθμογραμμή

(κατά τα πρότυπα του 10, 20, 30) και όχι ως μία συνεχής ακολουθία αριθμών (1, 2, 3…).

Λαμβάνοντας υπόψη τα προαναφερόμενα θεωρώ ότι τα εμπόδια πρέπει να εξετάζονται συνδυαστικά και η όποια διαμόρφωση των τροχιών θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη το συνδυασμό των δύο ειδών εμποδίων, ώστε οι στόχοι να διαμορφώνονται κατάλληλα, ενσωματώνοντας εκείνες τις ασκήσεις και τα εργαλεία (οπτικά και μαθηματικά μοντέλα, χειραπτικό υλικό …) τα οποία έχει αποδειχθεί ερευνητικά ότι είναι τα καταλληλότερα για να άρουν, έστω και προσωρινά, τα επιστημολογικά και γνωστικά εμπόδια, εμπόδια τα οποία ενδέχεται να εμφανιστούν σε ένα ανώτερο και πιο εξελιγμένο επίπεδο μαθηματικής σκέψης σε επόμενη διδασκαλία.

3. ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΡΟΧΙΑΣ

3.1. Θεμελίωση του σχήματος του λόγου

Το σχήμα του λόγου σύμφωνα με τους ερευνητές θεμελιώνεται πάνω σε τέσσερα σχήματα: Το πρωταρχικό θεμέλιο είναι το σχήμα της διαίρεσης με τον πολλαπλασιασμό να παρουσιάζεται ως η αντίθετη πράξη και όχι το αντίστροφο (Confrey et al, 2009).

Επίσης θεμελιώνεται στο σχήμα του διαμερισμού ως ισομερής κατανομή ποσοτήτων, σύμφωνα και με τις τρεις συνθήκες του Streefland (1997: 347), δηλαδή την ύπαρξη ίσων ή ισοδύναμων μονάδων, τον εξαντλητικό διαμερισμό και την ισότητα-ισοδυναμία των μεριδίων. Αναφερόμαστε επομένως στον ισοδιαμερισμό (equipartitioning), ο οποίος εκφράζεται ως η βάση όλων των σχημάτων και συνδέεται με την μεγάλη ιδέα της «δίκαιης μοιρασιάς» (Confrey et al, 2009). Ο ισοδιαμερισμός παραπέμπει στο σχετικό μέγεθος των ρητών αναφορικά με το σχήμα του λόγου, ιδιαίτερα όταν συνδέεται με τις εντατικές ποσότητες, τη σύγκριση λόγων, τα πειράματα τύχης και τα ποσοστά. Επομένως αν και σε συγκεκριμένα προβλήματα λόγων ζητούμε την εύρεση της τιμής μιας ποσότητας, κύριο διακύβευμα της διδακτικής πράξης είναι κατανόηση της ισοδυναμίας των σχέσεων και όχι της ισότητας των μερών των ποσοτήτων που παρατίθενται.

Τέλος η θεμελίωση του σχήματος σε συμφωνία με τον ισοδιαμερισμό στηρίζεται στην πολλαπλασιαστική λογική η οποία υπαγορεύει, σύμφωνα με τις συνθήκες του Streefland (ο.π.), την αντιμετώπιση των ποσοτήτων ως προϊόν πολλαπλασιασμού δηλ ¾ = 3 **φορές η ποσότητα του** ¼ και όχι ¼ + ¼ + ¼ και αργότερα το σχήμα του λόγου ως εξίσωση της μορφής y=ax και όχι της μορφής y=ax±z.

Οι Confrey et al (2009) αναφέρουν ότι το σχήμα του λόγου στηρίζεται στο σχήμα του "πολλά σε ένα" ως μονάδα μέτρησης του λόγου και οι Cramer et al (1993) αναφέρουν ένα ανάλογο παράδειγμα: «μία μητέρα ετοιμάζει κουτιά δώρων για ένα πάρτι και τοποθετεί 4 δωράκια σε ένα κουτάκι. Αμέσως το κουτί γίνεται μονάδα μέτρησης. Η μητέρα λέει στο παιδί "δώσε ένα κουτί σε κάθε παιδί", αντί να μιλήσει για 4 δώρα. Κάθε παιδί συγκρίνει τα δώρα του με τα δώρα των άλλων. Σε περίπτωση λάθους το παιδί θα μπορούσε να πάει στην οικοδέσποινα και να πει "δεν πήρα ένα γεμάτο κουτί". Η νοικοκυρά θα έλεγε "Ω Θεέ μου! Πήρες μόνο τρία δώρα, γέμισα το κουτί κατά τα ¾". Επομένως ένα δώρο θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένα από τα τέσσερα δώρα του κουτιού ή ως ¼ της μονάδας μέτρησης. Ένα κουτί με τρία δώρα θα μπορούσε να θεωρηθεί ως τα τρία από τα τέσσερα δώρα του κουτιού ή τα ¾ ενός κουτιού μονάδας μέτρησης ή ως 3 μέρη του ¼ μονάδας κουτιών. Κατά την εξέλιξη του σχήματος σε μία αλγεβρική παράσταση τα x δώρα και n κουτιά μπορούν να ειδωθούν ως x δώρα σε n κουτιά ή σε x/n δώρα ανά μονάδα κουτιού ή ένα x/n δώρο ή c(d/n μονάδα κουτιού), όπου cd = x και x, c, & d είναι φυσικοί αριθμοί».

Στο παρόν άρθρο εξετάζω την τροχιά μάθησης των Confrey et al (2009) σε αντιπαραβολή με την τροχιά μάθησης των Common Core Writing Team (2011), τα curricula της Αυστραλίας (ACARA, 2012) και της Μ. Βρετανίας (DfEE/QCA, 1999; UK National Archives, 2014), αλλά και με την έκθεση του υπουργείου παιδείας των ΗΠΑ (Siegler et al, 2010), ώστε να προτείνω μία τροχιά μάθησης που ενσωματώνει σε κάθε στάδιο εργαλεία και μοντέλα που ανέπτυξαν οι ανωτέρω φορείς και ερευνητές για την αντιμετώπιση των εμποδίων, υπό το πρίσμα της πολλαπλασιαστικής λογικής.

4. Η ΑΡΘΡΩΣΗ ΜΙΑΣ ΥΠΟΘΕΤΙΚΗΣ ΤΡΟΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ

Σύμφωνα με τα προαναφερόμενα μία πρωταρχική αντίληψη της ισοδυναμίας στους μικρούς μαθητές αφορά την αίσθηση της σύγκρισης ποσοτήτων υπό όρους μεγαλύτερου ίσου ή μικρότερου, χωρίς αναφορά σε αριθμητικά μεγέθη (Resnick & Singer, 1993: 112). Σε αυτό το επίπεδο σκέψης τα παιδιά μπορούν να συγκρίνουν μερίδια διαφορετικών ακέραιων μονάδων, ως προς το σχετικό τους μέγεθος, αλλά με τον ίδιο αριθμό μεριδίων x/n για όλες τις μονάδες, με x & n φυσικούς αριθμούς. Επομένως, σε ένα πρώτο επίπεδο η τροχιά αφορά τη δίκαιη μοιρασιά και τη σύγκριση απλών ποσοτήτων υπό όρους μεγαλύτερο από, ίσο με ή μικρότερο από. Επίσης αφορά συγκρίσεις ως προς το σχετικό μέγεθος ½ κύκλων (ή άλλων σχημάτων) διαφόρων διαστάσεων, ώστε να αναδειχθεί το σχετικό μέγεθος των ρητών (ACARA, 2012).

Σε ένα δεύτερο επίπεδο η εξέλιξη της τροχιάς μάθησης αφορά: α) την διδασκαλία των "πολλών σε ένα" η οποία εκφράζεται στις μικρές ηλικίες με τα κουτιά δώρων (fair share boxes). Τα κουτιά δώρων αποτελούν τη βάση για την εξέλιξη των

οπτικών αναπαραστάσεων σε επόμενα στάδια σε κουτιά λόγων και κατόπιν σε πίνακες λόγων (Common Core Writing Team, 2011). Σε αυτή την κατεύθυνση ενδέχεται να βοηθήσουν οι νοεροί υπολογισμοί που στηρίζονται αρχικά στο σχήμα του μισού/διπλάσιου, ύστερα στο μισό του μισού και τέλος στο xπλάσιο ($x \in N$ και $x \geq 3$), ώστε οι μαθητές να ασκηθούν στην αναγνώριση της ισοδυναμίας λόγων και στη σύγκριση ποσοτήτων υπό την πολλαπλασιαστική λογική (Moss & Case, 1999; Hart, 1984).

Σε ένα τρίτο επίπεδο παρουσιάζονται οι αναλογίες κυρίως με τη μορφή μιγμάτων και συνδέονται με το πηλίκο (Confrey et al, 2009). Σε αυτό το επίπεδο περνάμε από την αναγνώριση της ισοδυναμίας των λόγων με τη χρήση αναπαραστάσεων όπως τα κουτιά δώρων (fair share boxes), στα κουτιά λόγων (που παρουσιάζουν μέσα από σύμβολα και μηχανισμούς πράξεων τις σχέσεις των ποσών), μετά στους πίνακες, στα ραβδογράμματα και στις διπλές αριθμογραμμές. Εδώ αρχίζει να συνδέεται η αναπαράσταση του πηλίκου (α:β) με αυτή του κλάσματος (α/β). Τα παιδιά αρχικά επανέρχονται στο σχήμα του "πολλά σε ένα" με τα δωράκια γενεθλίων σε 1 κουτί, αλλά αρχίζουν να συνδέουν το σχήμα του λόγου με αυτό του τελεστή και το σχήμα της σταθεράς του διαμερισμού x/n μερίδια ανά μονάδα μέτρησης. Στο αυστραλιανό curriculum μάλιστα οι μαθητές ασκούνται σε πειράματα τύχης, γράφοντάς τα αποτελέσματα με κλάσματα (ACARA, 2012).

Σε ένα τέταρτο επίπεδο ολοκληρώνεται η σύνδεση του σχήματος του λόγου με αυτό του τελεστή (π.χ. το A/B του C με $B \neq 0$) και με τα ποσοστά (π.χ. το x% του n με $x \& n \neq 0$). Επίσης παρουσιάζεται συστηματικά ο λόγος x/n ως κλάσμα και ως πηλίκο. Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα δεν χρησιμοποιούνται ούτε τα κουτιά δώρων, ούτε τα κουτιά λόγου, αλλά διδάσκεται η αναγωγή στη μονάδα όπως και ο σχηματισμός πινάκων όπου οι άγνωστες τιμές βρίσκονται με εξισώσεις ή τη «χιαστί» μέθοδο, μέθοδο η οποία θεωρείται ότι δυσκολεύει αρκετούς μαθητές (Ellis, 2013: 3). Επίσης συνηθίζεται η μετατροπή των λόγων σε ισοδύναμα κλάσματα με τη χρήση του ΕΚΠ και του ΜΚΔ και όχι με στρατηγικές νοερών υπολογισμών σε αντίθεση με το αυστραλιανό ή το βρετανικό curriculum (ACARA, 2012; DfEE/QCA, 1999).

Σε ένα πέμπτο επίπεδο οι μαθητές ασκούνται σε προβλήματα (Lesh et al, 1988) που αφορούν ισοδύναμους και μη λόγους, εντατικές και εκτατικές ποσότητες ή εξισώσεις, συμπεριλαμβανομένων προβλημάτων: α) όπου ζητείται μία από τις τιμές των λόγων A/B = x/D, β) συγκρίσεων A/B ‹= ? =› C/D όπου δίνονται και οι τέσσερις τιμές και καλείται ο μαθητής να κρίνει εάν A/B < C/D ή A/B = C/D ή A/B > C/D, γ) μεταφοράς όπου δίνονται και οι τέσσερις τιμές μιας αναλογίας A/B = C/D, αλλά αυξάνεται ή μειώνεται μία ή δύο τιμές από τις A, B, C, ή D και ο στόχος είναι να κριθεί ποια σχέση(<, >, ή =) είναι αληθής για τις νέες τιμές, δ) μετατροπών λόγων ώστε να καταστεί ισοδύναμη η σχέση $A/B \neq C/D$, όταν για τις τιμές A, B, C, ή D, πρέπει να

προστεθεί μία τιμή x ώστε να ισχύει η συνθήκη (A+x)/B = C/D), ε) μέσης τιμής, όπου δίνονται δύο τιμές και ο στόχος είναι να βρεθεί μία τρίτη που εκπληρώνει είτε τη συνθήκη του γεωμετρικού μέσου A/x = x/B, είτε τη συνθήκη του αρμονικού μέσου A/B = (A-x)/(x-B),στ) μεριδίων που συμπεριλαμβάνουν τη μετατροπή εσωτερικών ή εξωτερικών λόγων σε κλάσματα, όπως π.χ. "ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια ήταν 15 προς 12. Ποιο είναι το κλάσμα των αγοριών της τάξης;" και ζ) εντατικών ποσοτήτων, όπως π.χ. "(3 feet)/(2 seconds) = x miles per hour ή 5 feet/second = x miles/hour" (Confrey et al 2009). Σε αυτό το επίπεδο από τις αριθμογραμμές οι μαθητές περνούν σε αναπαραστάσεις στο καρτεσιανό επίπεδο. Εδώ η εξέλιξη της πολλαπλασιαστικής λογικής συνδέεται με την αναπαράσταση του σχήματος του λόγου σε μία γραφική παράσταση που διέρχεται από το σημείο (0,0) των αξόνων και όχι από οποιοδήποτε σημείο (x, 0) ή (0, n) (με x, n ≠ 0). Επίσης συνδέεται το σχήμα του λόγου με τα ποσοστά, και οι αναπαραστάσεις αφορούν ποιοτικά γραφικά (καρτεσιανούς άξονες και γραφήματα στατιστικών ερευνών) (Common Core Writing Team, 2011; Confrey et al, 2009; Lesh et al, 1988).

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο παρόν άρθρο συζητήθηκαν τα κυριότερα ζητήματα τα οποία αφορούν την ανάπτυξη μιας τροχιάς μάθησης αναφορικά με το σχήμα του λόγου και τα εργαλεία – μοντέλα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά τη διδασκαλία. Θεμέλια του σχήματος του λόγου μπορούν να θεωρηθούν, η διαίρεση, ο ισοδιαμερισμός, η πολλαπλασιαστική λογική, το σχήμα της ισοδυναμίας, το σχήμα του "πολλά σε ένα" και το σχήμα του μισού – διπλάσιου. Η διδασκαλία του λόγου θα πρέπει να ξεκινά άτυπα από την Α΄ δημοτικού με τη χρήση της κλασματικής μονάδας του ½ εξετάζοντας τις σχέσεις ανάμεσα στα μέρη μονάδων συνεχούς και σχετικού μεγέθους (ACARA, 2012). Στη συνέχεια ο διαμερισμός να περνάει από το μισό στο μισό του μισού, στα πέμπτα, τα τρίτα και τα (υπο)πολλαπλάσιά τους ωθώντας τα υποκείμενα στη χρήση στρατηγικών νοερών υπολογισμών προκειμένου να υιοθετήσουν ευέλικτες μεθόδους υπολογισμού όπως οι νοεροί υπολογισμοί και οι υπολογισμοί που εξετάζουν τις σχέσεις ανάμεσα (within) στα μέρη (α/β= γ/δ, β/xα => δ = xγ) και αναμεταξύ (in between) των μερών (α/β = γ/δ, α = xγ =>β = xδ) αλλά και να προχωρήσουν σταδιακά και σε αλγορίθμους. Οι αναπαραστάσεις θα πρέπει να περνούν από τα σχήματα και τις συλλογές υλικών σε κουτιά δώρων, σε κουτιά λόγων, ράβδους, πίνακες και γραφικά, όπως η διπλή αριθμογραμμή και οι καρτεσιανοί άξονες. Έμφαση αφενός θα πρέπει να δοθεί στη σύνδεση του σχήματος του λόγου με το σχήμα του τελεστή και του πηλίκου και αφετέρου στη σύνδεση του ισοδιαμερισμού με τον ρυθμό μεταβολής του λόγου (unit rate). Σε αυτή την κατεύθυνση ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ξεκινήσει από τη σύγκριση του σχετικού συνεχούς μεγέθους μονάδων για να περάσει στη σύγκριση μονάδων διακριτού σχετικού μεγέθους και από την άτυπη μορφή του ρυθμού μεταβολής στην

αναγνώριση της ισοδυναμίας των σχέσεων. Επίσης θα πρέπει να ξεκινήσει από τον εξωτερικό λόγο ως πρωταρχική μορφή για να περάσει στη συνέχεια στον εσωτερικό λόγο, στις εκτατικές ποσότητες και από εκεί στις εντατικές ποσότητες. Επιπρόσθετα το σχήμα του λόγου θα πρέπει να συνδεθεί με τη στατιστική και τα πειράματα τύχης, όπου οι λόγοι θα παρουσιάζονται λεκτικά (α για κάθε β), με τη μορφή κλάσματος (α/β) και πηλίκου (α:β), περνώντας σταδιακά από τους λόγους στα ποσοστά.

Πρέπει να σημειωθεί όμως ότι οποιαδήποτε εφαρμογή μέρους της τροχιάς στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα χρήζει ερευνητικής τεκμηρίωσης για να αποκτήσει εγκυρότητα. Παράλληλα πρέπει να δοθεί προσοχή σε μία σειρά επιμέρους ζητημάτων όπως, η σχέση των επιστημολογικών και γνωστικών εμποδίων με τα έργα τα οποία μπορούν να άρουν έστω και προσωρινά τα εμπόδια, η σχέση νοερών υπολογισμών και εντατικών ποσοτήτων, η σύνδεση των λόγων με τα πειράματα τύχης και τη στατιστική, η παρουσίαση των ειδών των ρητών ως διαφορετικών μορφών γραφής του ίδιου αριθμού και η σύνδεση των κουτιών δώρων με τα κουτιά λόγων και το ρυθμό μεταβολής λόγου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Australian Curriculum Assesment & Reporting Authority (ACARA) (2012). Mathematics Curriculum. Ανακτήθηκε στις 11/10/2014 από το δικτυακό τόπο http://www.australiancurriculum.edu.au/Mathematics/Rationale

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Common Core Writing Team (2011). Progressions for the Common Core State Standards in Mathematics (draft). Ανακτήθηκε στις 26/12/2011 από το δικτυακό τόπο: http://commoncoretools.wordpress.com

Confrey, J., Maloney, A. P., Nguyen, K. H., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.345-352). Thessaloniki, Greece: PME.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and Teaching Ratio and Proportion: Research Implications. In D. Owens (Ed.), *Research Ideas For the Classroom* (pp. 159-178). NY: Macmillan Publishing Company.

Department for Education and Employment/Qualifications and Curriculum Authority (DfEE/QCA) (1999). *The National Curriculum: Handbook for Primary Teachers in England*. London, QCA/DfEE.

Ellis, A. (2013). *Teaching Ratio and Proportion in the middle grades: Research Brief.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's strategies & errors*. Windsor, England: NFER-NELSON Publishing Company

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. A. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 162-181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum.

Lesh R, Post T, Behr M. (1988). Proportional Reasoning. In: Hiebert J, Behr M, editors. Number concepts and operations in the middle grades (pp. 93–118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum and National Council of Teachers of Mathematics

Mamede, E., Nunes, T. & Bryant, P. (2006). The Equivalence and Ordering of Fractions in Part-whole and Quotient Situations. In Helen Chick & Jill L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 281- 288. Australia: Melbourne.

Moss, J., Case, R. (1999). Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30(2),* 122–147

Resnick, L.B. & Singer, J.A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In Carpenter TP, Fennema E, Romberg TA, (eds). *Rational Numbers: An Integration of Research*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates. (pp.107-130)

Siegler, R. S., Thopmshon, C.A., Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology* doi:10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., Wray, J. (2010). Developing Effective Fractions Instruction for Kindergarden Through 8th Grade. Washington D.C.: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance: U.S. Department of Education

Streefland, L. (1997). Charming Fractions or Fractions Being Charmed? In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics – An International Perspective* (pp. 347-372). Psychology Press Ltd.: East Sussex.

Thompson, P.W. (1992). Images of Rate. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA, 20-25 April 1992.

UK National Archives (2014). Teaching and Learning Resources. Department of Education (προσπελάστηκε 04/02/2014) http://webarchive.nationalarchives.gov.uk/20110722102733/http://teachingandlearningresources.org.uk/collection/24722/node/24783

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ «ΑΙΣΘΗΣΗΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ»: ΕΝΑ ΑΝΑΠΤΥΞΙΑΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Μάριος Πιττάλης, Δήμητρα Πίττα-Πανταζή, Κωνσταντίνος Χρίστου & Στέλλα Σταυροπούλου

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

m.pittalis@ucy.ac.cy, dpitta@ucy.ac.cy, edchrist@ucy.ac.cy, sstavropoulou@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή την ερευνητική εργασία, διαμορφώσαμε και εγκυροποιήσαμε ένα μοντέλο για την «αίσθηση του αριθμού» μαθητών Α΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Οι τρεις βασικές συνιστώσες που περιλαμβάνονται σε αυτό το μοντέλο είναι: (α) οι βασικές αριθμητικές δεξιότητες, (β) ο τυπικός αριθμητικός συλλογισμός και (γ) ο αλγεβρικός αριθμητικός συλλογισμός. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι τρεις αυτοί παράγοντες αναπτύσσονται με διαφορετικό ρυθμό. Παρατηρήθηκαν 6 ομάδες μαθητών που ακολουθούν διαφορετικό ρυθμό ανάπτυξης. Δύο ομάδες με χαμηλή αρχική επίδοση, δύο με μεσαία αρχική επίδοση και δύο με υψηλή αρχική επίδοση. Στην πορεία, η μία από τις δύο ομάδες που ξεκινούν από το ίδιο σημείο επιταχύνει σημαντικά τον ρυθμό ανάπτυξής της.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σημαντικός αριθμός ερευνητών έχουν τεκμηριώσει τη σημασία της ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού» (number sense) στο επιστημονικό πεδίο της μαθηματικής παιδείας και της γνωστικής ψυχολογίας (Baroody & Wilkins, 1999· Jordan, Kaplan, Olah, & Locuniak, 2006· Yang, Li, & Lin, 2007). Επιστημονικοί σύνδεσμοι όπως το National Council of Teachers of Mathematics (2000) υποστηρίζουν ότι η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού των μαθητών πρέπει να αποτελεί θεμελιώδη στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης στον 21^{ο} αιώνα. Παρόλο ότι η σημασία της αίσθησης του αριθμού στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών είναι ευρέως αποδεκτή, η χρησιμότητα του όρου αυτού στο ερευνητικό πεδίο αμφισβητείται (Verschaffel et al. 2007). Αυτό πιθανόν να προκύπτει από το γεγονός ότι δεν υπάρχει ένας ευρέως αποδεκτός ορισμός για την αίσθηση του αριθμού που να περιγράφει με σαφήνεια τα συστατικά του στοιχεία. Οι Yang, Li και Lin (2008) περιγράφουν την αίσθηση του αριθμού ως τη γενική κατανόηση των αριθμών και πράξεων και την ικανότητα χειρισμού καθημερινών καταστάσεων που εμπλέκουν αριθμούς.

Συνήθως η «αίσθηση του αριθμού» εμπερικλείει την αναγνώριση του σχετικού μεγέθους του αριθμού, τους τρόπους αναπαράσταση ενός αριθμού, την αξιολόγηση της ορθότητας αριθμητικών υπολογισμών, την κατανόηση πράξεων και της επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς, καθώς και την ικανότητα εκτέλεσης υπολογισμών με ευελιξία, με τη χρήση αριθμητικών στρατηγικών (Reys, et al., 1999). Η πλειοψηφία των ερευνητικών εργασιών συγκλίνουν στο ότι η αίσθηση του

αριθμού αποτελεί σύνθεση δύο βασικών διαστάσεων (Jordan et al., 2006). Η πρώτη διάσταση αναφέρεται στις βασικές αριθμητικές δεξιότητες ενώ η δεύτερη διάσταση σε δεξιότητες που σχετίζονται με την τυπική διδασκαλία. Αυτό που φαίνεται ότι απουσιάζει από τις προηγούμενες έρευνες είναι τα αποτελέσματα ερευνών που αναδεικνύουν τη σημασία της αλγεβρικής φύσης των αριθμών και της αριθμητικής (Carpenter, Levi, Berma, & Pligge, 2005). Με βάση τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, εισηγούμαστε ότι τα αλγεβρικά αριθμητικά έργα μπορούν να αποτελέσουν μια σημαντική παράμετρο της ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού των μαθητών της Α΄ δημοτικού. Στόχος μας σε αυτή την εργασία είναι να επεκτείνουμε και να επανεξετάσουμε τον όρο της αίσθησης του αριθμού προτείνοντας και επιβεβαιώνοντας εμπειρικά ένα μοντέλο το οποίο υποθέτει ότι ο αλγεβρικός αριθμητικός συλλογισμός αποτελεί συνιστώσα της ευρύτερης έννοιας της αίσθησης του αριθμού.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Η πλειοψηφία των ερευνητικών εργασιών που αναφέρονται στην αίσθηση του αριθμού καταπιάνονται κυρίως με την βαθμιαία ανάπτυξή της και τον τρόπο που εμφανίζεται στους μαθητές (NCTM, 2000). Η αίσθηση του αριθμού μπορεί να εμφανιστεί με διαφορετικούς τρόπους, για παράδειγμα, όταν χρειάζεται να κρίνει κανείς το σχετικό μέγεθος ενός αριθμού, ή όταν χρησιμοποιεί με ευελιξία τους αριθμούς ώστε να υπολογίσει ή να εκτιμήσει ή να κρίνει τη λογικότητα μιας αριθμητικής απάντησης. Η αίσθηση του αριθμού εμφανίζεται, επίσης, όταν χρειάζεται να κατανοήσουν οι μαθητές την επίδραση που έχουν διαφορετικές αριθμητικές πράξεις σε ένα αριθμό, καθώς και στη σύνθεση και ανάλυση των αριθμών και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Η κατανόηση του σχετικού μεγέθους του αριθμού περιλαμβάνει τις ικανότητες της σύγκρισης αριθμών, την λήψη απόφασης κατά πόσο ένας αριθμός βρίσκεται πλησιέστερα σε κάποιον άλλο αριθμό ή σε κάποιους άλλους αριθμούς, όπως επίσης και τον υπολογισμό του εύρους κάποιων αριθμών. Η γενικότερη αντίληψη για την «αίσθηση του αριθμού» είναι ότι αναφέρεται στην κατανόηση των αριθμών και των αριθμητικών πράξεων, στην ευέλικτη χρήση των αριθμών και στην ανάπτυξη κατάλληλων στρατηγικών για το χειρισμών διαφόρων αριθμητικών καταστάσεων (Reys, et al., 1999).

Η αίσθηση του αριθμού πρέπει να οδηγεί τα άτομα στην κατανόηση των αριθμών ως αντικειμένων που φέρουν συγκεκριμένο νόημα. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν αναπτύξουμε την αίσθηση των αριθμών με βάση το πλαίσιο που ακολουθεί: (α) αναγνώριση του συγκριτικού μεγέθους των αριθμών, (β) χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για τους αριθμούς και τις πράξεις, (γ) αξιολόγηση της λογικότητας απαντήσεων που προέκυψαν από υπολογισμούς, (δ) αναγνώριση του νοήματος και της επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς (Yang, Li & Lin, 2008). Οι Jordan et al. (2006) εισηγούνται ότι η αίσθηση του αριθμού είναι μια δισδιάστατη έννοια, της οποίας οι δύο πτυχές είναι: (α) οι βασικές αριθμητικές δεξιότητες (απαρίθμηση,

αναγνώριση και γνώση αριθμών, αριθμητικά μοτίβα, μη-λεκτικοί υπολογισμοί) και (β) ο τυπικός αριθμητικός συλλογισμός (λεκτικά προβλήματα και αριθμητικές πράξεις). Οι πιο πάνω ερευνητικές εργασίες δεν κατάφεραν να συμπεριλάβουν τη δυναμική φύση των αλγεβρικών σχέσεων ανάμεσα στην αριθμητική και την άλγεβρα. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι ο τεχνητός διαχωρισμός της αριθμητικής από την άλγεβρα στερεί τους μαθητές από δυναμικούς τρόπους σκέψης για τα μαθηματικά των μικρών τάξεων και κάνει πιο δύσκολη την εκμάθηση της άλγεβρας στις μεγαλύτερες τάξεις (Carpenter, Levi, Berman, & Pligge, 2005). Επιπρόσθετα, οι Molina, Castro και Mason (2008) εισηγούνται ότι η αξιοποίηση στρατηγικών που προάγουν το συσχετιστικό συλλογισμό στην επίλυση μαθηματικών προτάσεων συμβάλει στην κατανόηση της δομής των αριθμητικών εκφράσεων. Ο συσχετιστικός συλλογισμός εμπλέκεται, επίσης, στην κατανόηση των ιδιοτήτων και των σχέσεων των αριθμητικών πράξεων (Empson, Levi, & Carpenter, 2011).

3. Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να προτείνει ένα μοντέλο το οποίο να περιγράφει τη δομή και τον τρόπο ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού. Συγκεκριμένα οι στόχοι της εργασίας ήταν: (α) να εξετάσει τη δομή της φύσης της αίσθησης του αριθμού μέσω της εμπειρικής επιβεβαίωσης ενός θεωρητικού μοντέλου και (β) να διερευνήσει την ανάπτυξη των συνιστωσών της αίσθησης του αριθμού μέσω της επιβεβαίωσης ενός αναπτυξιακού μοντέλου. Με βάση τη βιβλιογραφία, στην παρούσα εργασία υποθέσαμε ότι η αίσθηση του αριθμού είναι μια ευρύτερη ικανότητα, η οποία προκύπτει από τη σύνθεση τριών επιμέρους αλλά συσχετιζόμενων παραγόντων. Σύμφωνα με το μοντέλο που προτείνεται, η αίσθηση του αριθμού μαθητών Α΄ τάξης δημοτικού σχολείου αποτελεί σύνθεση (α) των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων, (β) του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού και (γ) του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού. Υποθέσαμε ότι ο παράγοντας βασικές αριθμητικές δεξιότητες αναφέρεται σε στοιχειώδη στοιχεία του αριθμητικού συλλογισμού όπως η αρίθμηση, η γνώση των αριθμών, ο συντονισμός ποσοτήτων και η διεξαγωγή αριθμητικών συγκρίσεων (δείτε Baroody & Wilkins, 1999; Jordan, et al., 2006). Ο παράγοντας τυπικός αριθμητικός συλλογισμός αναφέρεται κυρίως στην επίλυση αριθμητικών προβλημάτων και στην εκτέλεση υπολογισμών. Τέλος, ο αλγεβρικός αριθμητικός συλλογισμός αναφέρεται στην κατανόηση των αριθμητικών μοτίβων και την επίλυση εξισώσεων σε διαφορετικές μορφές. Επιπρόσθετα, περιλαμβάνει στοιχεία του συσχετιστικού συλλογισμού, όπως περιγράφεται από τους Empson, Levi και Carpenter (2011).

3.1 Εργαλεία Μέτρησης

Τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση της αίσθησης του αριθμού υιοθετήθηκαν ή αναπτύχθηκαν με βάση προηγούμενες ερευνητικές εργασίες. Η πλειοψηφία των έργων προέρχεται από το πρόγραμμα Curriculum Based

Measurement (Fernstrom & Powell, 2007). Για τη μέτρηση του παράγοντα που αναφέρεται στις βασικές αριθμητικές δεξιότητες χρησιμοποιήθηκαν έξι είδη έργων: (α) αρίθμησης, (β) αναγνώρισης αριθμών, (γ) σύγκρισης αριθμών, (δ) γνώσης αριθμών, (ε) απαρίθμησης αντικειμένων και (στ) μη-λεκτικών υπολογισμών. Στα έργα αρίθμησης ζητήθηκε από τους μαθητές να μετρήσουν από έναν αριθμό μέχρι έναν άλλο με διαφορετικούς τρόπους (για παράδειγμα να ξεκινήσουν από το 10 και να αριθμήσουν ανά 10 μέχρι το 100 ή να μετρήσουν προς τα πίσω), στα έργα αναγνώρισης αριθμών οι μαθητές έπρεπε να διαβάσουν μονοψήφιους και διψήφιους αριθμούς, στα έργα σύγκρισης αριθμών να επιλέξουν τον μεγαλύτερο ανάμεσα σε τέσσερις αριθμούς, στα έργα γνώσης αριθμών ζητήθηκε να βρουν τον αριθμό που είναι κατά ένα ή δύο μεγαλύτερος/μικρότερος από έναν δεδομένο αριθμό, στα έργα απαρίθμησης οι μαθητές έπρεπε να μετρήσουν το πλήθος αντικειμένων (σε διαφορετικές διατάξεις) και τέλος στους μη λεκτικούς υπολογισμούς οι μαθητές έπρεπε να βρουν το πλήθος των αντικειμένων που έπρεπε να προστεθούν ή να διαγραφούν από ένα σύνολο αντικειμένων ώστε ο πληθικός αριθμός να ταυτιστεί με τον αριθμό που δινόταν σε κάθε περίπτωση. Για τη μέτρηση του παράγοντα τυπικός αριθμητικός συλλογισμός χρησιμοποιήθηκαν τρία είδη έργων. Το πρώτο είδος αναφέρεται στην εκτέλεση υπολογισμών. Οι μαθητές έπρεπε να εκτελέσουν υπολογισμούς πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μέχρι το 20 καθώς και πράξεις με πολλαπλάσια του 10. Το δεύτερο είδος αφορούσε την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων στα οποία οι μαθητές έπρεπε να γράψουν κατάλληλες μαθηματικές προτάσεις ή πράξεις για την επίλυση του κάθε προβλήματος. Τέλος, τα έργα του τρίτου τύπου αναφέρονταν στην κατανόηση της έννοιας των πράξεων και για αυτό οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν την κατάλληλη μαθηματική πρόταση σε απλά λεκτικά προβλήματα. Τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία συμπεριλαμβάνει τα αριθμητικά μοτίβα στα οποία οι μαθητές καλούνται να τα επεκτείνουν ή να συμπληρώσουν κάποιον όρο που λείπει. Η ικανότητα επίλυση αριθμητικών μοτίβων προϋποθέτει την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των όρων του. Η δεύτερη κατηγορία αφορούσε τον υπολογισμό της τιμής που λείπει σε μια εξίσωση, όπως 3+5=4+□. Η επίλυση τέτοιων εξισώσεων εμπεριέχει την ικανότητα ανάγνωσης του συμβόλου ίσον ως ισότητα δύο ποσοτήτων. Η τρίτη κατηγορία έργων αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού περιλάμβανε αριθμητικές ισότητες σε μορφή ζυγαριών που ισορροπούν, στις οποίες χρειαζόταν να υπολογιστεί η αξία των σταθμών.

3.2 Υποκείμενα, Διαδικασία και Ανάλυση Δεδομένων

Τα υποκείμενα της έρευνας αποτέλεσαν 203 μαθητές από έξι δημοτικά σχολεία. Ο κάθε μαθητής συμμετείχε σε δύο συνεντεύξεις που η καθεμία είχε διάρκεια περίπου 30 λεπτά. Για κάθε τύπο έργου υπήρχε χρονικός περιορισμός (ένα λεπτό για την πλειοψηφία των έργων). Οι τέσσερις μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν στο χρονικό

διάστημα Δεκέμβριος 2012 με Ιούνιο 2013. Ο κάθε μαθητής εξετάστηκε ατομικά στις τέσσερις μετρήσεις.

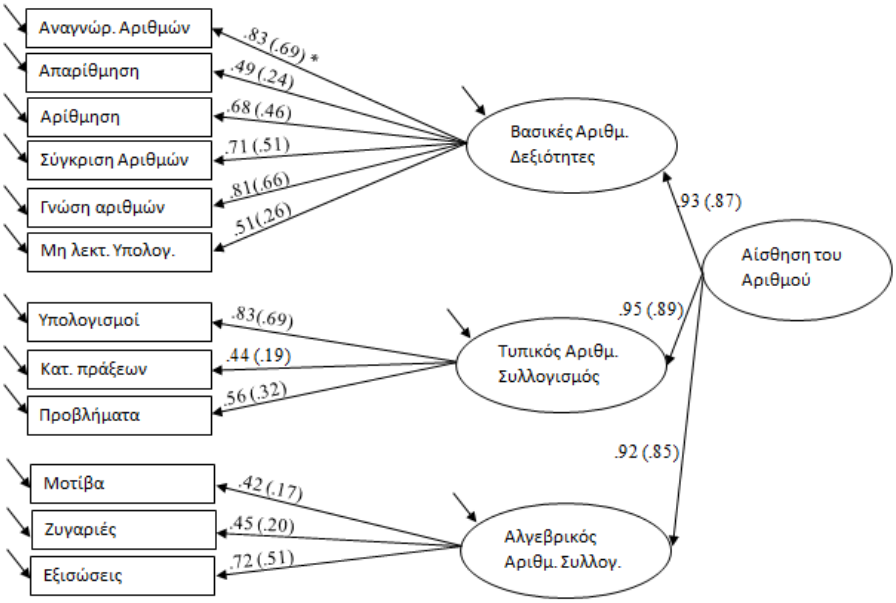
Για την επιβεβαίωση της εγκυρότητας του προτεινόμενου μοντέλου χρησιμοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση. Η χρήση της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης κρίθηκε κατάλληλη για το λόγο ότι θέλαμε να επιβεβαιώσουμε την εγκυρότητα ενός μοντέλου που αναπτύχθηκε με βάση προηγούμενες ερευνητικές εργασίες και τη σχετική βιβλιογραφία. Στη συνέχεια, για την περιγραφή της διαχρονικής ανάπτυξης των παραγόντων της αίσθησης του αριθμού έγινε αξιολόγηση της εγκυρότητας ενός ενιαίου αναπτυξιακού μοντέλου – growth model (δείτε Muthén & Muthén, 2007). Στην επιβεβαίωση αναπτυξιακών μοντέλων οι ατομικές διαφορές μεταξύ των υποκειμένων μοντελοποιούνται μέσω δύο άδηλων μεταβλητών, της άδηλης αρχικής τιμής (latent intercept) και του άδηλου ρυθμού ανάπτυξης (latent slope). Τέλος για τον εντοπισμό ομάδων μαθητών με διαφορετική συμπεριφορά ως προς την ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση Latent Class, η οποία εντοπίζει ομάδες υποκειμένων με διαφορετική συμπεριφορά. Για τη διεξαγωγή των αναλύσεων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό MPLUS (Muthén & Muthén, 2007). Για την επιβεβαίωση των μοντέλων χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθοι τρεις δείκτες (Marcoulides & Schumacker, 1996): (α) Ο λόγος x^2/df (< 2), ο δείκτης Comparative Fit Index, CFI, (> 0,9) και (γ) ο δείκτης Root Mean-Square Error of Approximation, RMSEA, (< 0,08).

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το Διάγραμμα 1 παρουσιάζει τη δομή του μοντέλου που προτείνεται, τις συνιστώσες των παραγόντων της «αίσθησης του αριθμού» καθώς και τις σχέσεις μεταξύ των παραγόντων. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση που χρησιμοποιήθηκε είχε ως σκοπό να εξετάσει την εγκυρότητα εννοιολογικής κατασκευής του μοντέλου. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι οι δείκτες προσαρμογής ήταν ικανοποιητικοί, για να υποστηρίξουν τη δομή του μοντέλου που προτείνεται (χ^2/df=1,72, CFI=,96, και RMSEA=,06) και επιβεβαιώνουν την προσαρμογή του στα εμπειρικά δεδομένα της έρευνας. Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαίωσαν ότι η «αίσθηση του αριθμού» αποτελεί μια γενική, ανώτερου επιπέδου εννοιολογική οντότητα που περιγράφεται ως σύνθεση των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων, του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού και του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού. Η τυποποιημένη λύση του μοντέλου έδειξε ότι όλες οι φορτίσεις ήταν στατιστικά σημαντικές και στην πλειοψηφία τους ήταν αρκετά υψηλές και κυμάνθηκαν από 0,42 έως 0,83 (δείτε Διάγραμμα 1). Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι κάθε είδος έργου φόρτιζε επαρκώς σε έναν μόνο από τους παράγοντες πρώτης τάξης, επιβεβαιώνοντας με αυτόν τον τρόπο την υπόθεση ότι οι τρεις παράγοντες πρώτης τάξης αναπαριστούν τρεις διακριτές ικανότητες όσον αφορά την αίσθηση του αριθμού. Παρόλα αυτά, η σχέση μεταξύ των τριών διαφορετικών ικανοτήτων είναι αρκετά ισχυρή ώστε να συνθέτουν έναν παράγοντα

ανώτερης τάξης, ο οποίος αναπαριστά την ευρύτερη εννοιολογική οντότητα «αίσθηση του αριθμού». Οι φορτίσεις των παραγόντων πρώτης τάξης στην αίσθηση του αριθμού (παράγοντας δεύτερης τάξης) ήταν ιδιαίτερα υψηλές (0,93, 0,95 και 0,92 αντίστοιχα). Το γεγονός αυτό καταδεικνύει ότι η γενική εννοιολογική κατασκευή που αναφέρεται στην αίσθηση του αριθμού μπορεί να ερμηνεύσει και να επεξηγήσει τις διακυμάνσεις των μαθητών σε τέτοιου είδους καταστάσεις με σημαντική ακρίβεια. Οι τρεις παράγοντες πρώτης τάξης είχαν περίπου την ίδια προβλεπτική εγκυρότητα στον παράγοντα ανώτερης τάξη ($r^2_{\text{βασικ.αριθμ.δεξ..}}$ =.87, $r^2_{\text{αλγεβρ.αριθμ.}}$ =.85,and $r^2_{\text{τυπικ. αριθμ.}}$=.89, αντίστοιχα).

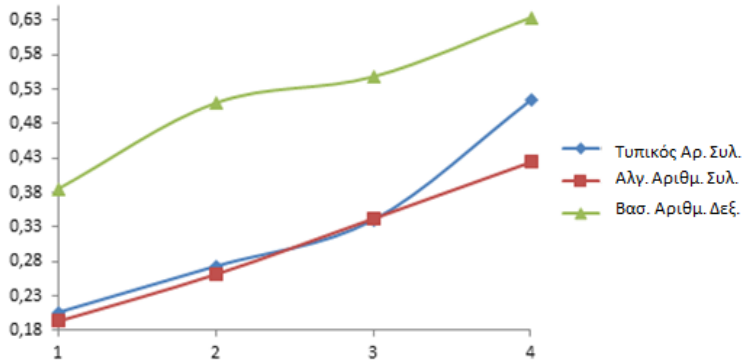
Τα δεδομένα από τις τέσσερις μετρήσεις χρησιμοποιήθηκαν, για να διερευνηθεί ο τρόπος ανάπτυξης των παραγόντων της αίσθησης του αριθμού. Εξετάσαμε την εγκυρότητα εναλλακτικών ενοποιημένων μοντέλων ανάπτυξης με τα οποία υποθέσαμε ότι οι βασικές αριθμητικές δεξιότητες, ο τυπικός αριθμητικός συλλογισμός και ο αλγεβρικός αριθμητικός συλλογισμός ακολουθούν γραμμικό (linear) ή καμπυλόγραμμο (quadratic) ρυθμό ανάπτυξης. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι το μοντέλο με τους καλύτερους δείκτες προσαρμογής (μικρότερες τιμές AIC και BIC, χ^2/df=2,34, CFI=0,98, και RMSEA=0,08) ήταν αυτό με βάση το οποίο, οι βασικές αριθμητικές δεξιότητες αναπτύσσονται ακολουθώντας λογαριθμικό ρυθμό ανάπτυξης (ΒΑΔ_1@0, ΒΑΔ_2@0,69, ΒΑΔ_3@1,10, ΒΑΔ_4@1,39), ενώ ο τυπικός αριθμητικός συλλογισμός και ο αλγεβρικός αριθμητικός συλλογισμός ακολουθούν γραμμικό ρυθμό ανάπτυξης μέχρι την τρίτη μέτρηση και στη συνέχεια αναπτύσσονται με μεγαλύτερο ρυθμό. Συγκεκριμένα, ο ρυθμός ανάπτυξης του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού μεταξύ τρίτης και τέταρτης μέτρησης υπερδιπλασιάζεται σε σχέση με τον αντίστοιχο ρυθμό ανάπτυξης ανάμεσα στις προηγούμενες μετρήσεις (ΤΑ_1@0, ΤΑ_2@1, ΤΑ_3@2, ΤΑ_4@4,4), ενώ ο ρυθμός ανάπτυξης του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού μεταξύ τρίτης και τέταρτης μέτρησης είναι περίπου ενάμιση φορές τον αντίστοιχο ρυθμό ανάπτυξης των προηγούμενων μετρήσεων (ΑΛ_1@0, ΑΛ_2@1, ΑΛ_3@1, ΑΛ_4@3,5).



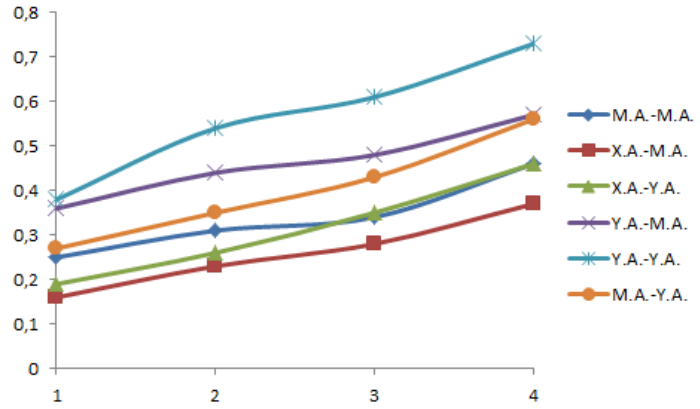
* Ο πρώτος αριθμός δείχνει τη φόρτιση του έργου ενώ ο αριθμός στην παρένθεση την αντίστοιχη ερμηνευμένη διασπορά

Διάγραμμα 1: Η δομή της αίσθησης του αριθμού.

Συνεπώς, τα αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι οι τρεις παράγοντες της αίσθησης του αριθμού αναπτύσσονται με διαφορετικό ρυθμό (δείτε Διάγραμμα 2). Επιπρόσθετα, πρέπει να σημειωθεί ότι ενώ ο ρυθμός ανάπτυξης των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων σταδιακά μειώνεται (λογαριθμικός ρυθμός), ο ρυθμός ανάπτυξης του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού και του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού ακολουθούν σταθερό ρυθμό ανάπτυξης ο οποίος επιταχύνεται ιδιαίτερα μετά την τρίτη μέτρηση. Συνολικά, όμως, ο μέσος ρυθμός ανάπτυξης των τριών παραγόντων είναι περίπου ο ίδιος. Οι βασικές αριθμητικές δεξιότητες είχαν τον υψηλότερο μέσο ρυθμό ανάπτυξης (3,57), ακολουθεί ο μέσος ρυθμός ανάπτυξης του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού (3,29), ενώ τον μικρότερο μέσο ρυθμό ανάπτυξης είχε ο αλγεβρικός αριθμητικός συλλογισμός (3,23).



Διάγραμμα 2: Η ανάπτυξη των παραγόντων της αίσθησης του αριθμού.



Διάγραμμα 3: Ομάδες ατόμων με διαφορετικό τρόπο ανάπτυξης.

Για τον εντοπισμό ομάδων μαθητών που ακολουθούν διαφορετικό ρυθμό ανάπτυξης στην αίσθηση του αριθμού ακολουθήθηκε η ακόλουθη διαδικασία. Στην αρχή πραγματοποιήθηκε ανάλυση Latent Class με βάση την αρχική μέτρηση των μαθητών στη συνολική αίσθηση του αριθμού. Η ανάλυση αυτή έδειξε την ύπαρξη τριών ομάδων: (α) ομάδα με χαμηλή αρχική τιμή, (β) ομάδα με μέτρια αρχική τιμή και (γ) ομάδα με υψηλή αρχική τιμή. Στη συνέχεια εξετάσαμε κατά πόσον τα άτομα της κάθε ομάδας δημιουργούν επιμέρους ομάδες με βάση τις επιδόσεις τους στις τρεις επόμενες μετρήσεις. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής (Latent Class) έδειξαν ότι η κάθε μία από τις τρεις αρχικές ομάδες διασπάται στην πορεία με αποτέλεσμα να δημιουργηθούν 6 ομάδες μαθητών (Διάγραμμα 3). Δύο ομάδες με χαμηλή αρχική επίδοση από τις οποίες η μία ακολουθεί μέτριο ρυθμό ανάπτυξης (Χ.Α.-Μ.Α.) και η άλλη ιδιαίτερα υψηλό ρυθμό ανάπτυξης (Χ.Α.-Υ.Α.), δύο ομάδες με μέτρια αρχική επίδοση από τις οποίες και πάλι η μία ακολουθεί πολύ υψηλότερο ρυθμό ανάπτυξης (Μ.Α.-Υ.Α.), κάτι το οποίο συμβαίνει και για τις δύο ομάδες με υψηλή αρχική επίδοση (Υ.Α.-Μ.Α. & Υ.Α.-Υ.Α.). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ομάδες με ιδιαίτερα υψηλό ρυθμό ανάπτυξης στην πορεία πλησιάζουν ή προσπερνούν την επίδοση της ομάδας που ξεκίνησε με υψηλότερη αρχική επίδοση, αλλά ακολούθησε μέτριο ρυθμό ανάπτυξης.

5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η συνεισφορά της παρούσας εργασίας εδράζεται κυρίως στην επέκταση του δισδιάστατου μοντέλου που εισηγήθηκε η Jordan et al. (2006), με τη συμπερίληψη του αλγεβρικού αριθμητικού συλλογισμού. Ο αλγεβρικός αριθμητικός συλλογισμός δίνει μια διαφορετική δυναμική στη μέχρι τώρα αντιμετώπιση της αίσθησης του αριθμού. Η συμπερίληψη της αλγεβρικής αριθμητικής μπορεί να θεωρηθεί ως μια μετακίνηση από τη σκέψη για συγκεκριμένους αριθμούς και ποσότητες προς τη διερεύνηση και κατανόηση των σχέσεων των συνόλων αριθμών και ποσοτήτων. Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας έδειξαν ότι οι τρεις διαστάσεις της αίσθησης του αριθμού ακολουθούν διαφορετικό ρυθμό ανάπτυξης. Το γεγονός αυτό

καταδεικνύει την ανάγκη περαιτέρω εξέτασης του τρόπου με τον οποίο η ανάπτυξη του ενός παράγοντα επηρεάζει περαιτέρω την ανάπτυξη των άλλων παραγόντων. Το γεγονός, επίσης, της ύπαρξης έξι διαφορετικών ομάδων που αναπτύσσονται με διαφορετικό τρόπο υπογραμμίζει τη σημασία των ατομικών διαφορών. Συστηματικά, η μία από τις δύο ομάδες που είχαν σχεδόν την ίδια αρχική επίδοση στην πορεία αναπτύσσεται με πολύ υψηλότερο ρυθμό σε σχέση με την αντίστοιχη ομάδα μαθητών που ξεκίνησε από το ίδιο σημείο. Συνεπώς, θα πρέπει να εξεταστεί η επίδραση του μαθηματικού περιεχομένου και ο τρόπος με τον οποίο οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών έχουν ως αποτέλεσμα διαφορετικά μαθησιακά αποτελέσματα όσον αφορά την αίσθηση του αριθμού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Baroody, A. J., & Wilkins, J. L. M. (1999). The development of informal counting, number, and arithmetic skills and concepts. In J. Copeley (Ed.), *Mathematics in the early years, birth to five*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carpenter, T., Levi, L., Berman, P.W., & Pligge. (2005). Developing algebraic reasoning in the elementary school. In T. Romberg,T.P. Carpenter & F. Dremock, (Eds.),*Understanding mathematics and science matters*. New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Fernstrom, P., & Powell, S. (2007). *Using curriculum-based measurement for progress monitoring in Math*. National Center on Student Progress Monitoring.

Empson, S. B., Levi, L., & Carpenter, T. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education* (pp. 409-428). Springer.

Jordan, N.C., Kaplan, D., Olah, L., & Locuniak, M. (2006). Number Sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development, 77,* 153-175.

Marcoulides, G. A., & Schumacker, R. E. (1996). *Advanced structural equation modelling: Issues and techniques*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Molina, M., Castro, E., & Mason, J. (2008). Elementary school students' approaches to solving true/false number sentences. *PNA 2*(2), 75-86.

Muthén L. K, & Muthén, B. O (1998-2007). *Mplus user's guide* (5th ed.). Los Angeles: Authors.

National Council of Teachers of Mathematics (2000).*Principles and standards for school mathematics*. Reston: Va, NCTM.

Reys, R., Reys, B., Emanuelsson, G., Johansson, B., Mclntosh, A., & Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics, 99*(2), 61-70.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.

Yang, D. C., Li, M.N., & Lin, C. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*, 789-807.

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΠΟΙΗΣΗΣ ΕΝΟΣ 'ΜΙΣΟΨΗΜΕΝΟΥ ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΟΥ'

Ζάντζος Ιωάννης[1] , Κυνηγός Χρόνης[2]

[1]Καθηγητής Μαθηματικών, Υποψήφιος Διδάκτωρ, ΕΚΠΑ izantzos@math.uoa.gr

[2]Καθηγητής, Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Φ.Π.Ψ, ΕΚΠΑ kynigos@ppp.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται μερικά από τα αποτελέσματα μιας ερευνητικής μελέτης που αναφέρεται σε μαθητές Γ΄ γυμνασίου και στην προσπάθειά τους να σχεδιάσουν τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ δυο σημείων σε μια κυλινδρική επιφάνεια με τη χρήση ενός μισοψημένου μικρόκοσμου. Οι μαθητές εργάστηκαν χρησιμοποιώντας ένα υπολογιστικό περιβάλλον (MaLT) που συνδυάζει το δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων και τη συμβολική έκφραση μέσα από τη γλώσσα προγραμματισμού Logo. Αν και αρχικά ο μικρόκοσμος εκλαμβάνεται από τους μαθητές ως 'ψευδό – αντικείμενο', η αντικειμενοποίησή του και η χρήση του στην κατασκευή καμπυλών και σχημάτων του χώρου συνεισφέρει τόσο στην λειτουργική όσο και στην δομική αντίληψη της έννοιας της καμπυλότητας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα από τα βασικά προβλήματα στη Γεωμετρία είναι να προσδιορίσουμε εκείνα τα γεωμετρικά μεγέθη που μας επιτρέπουν να διακρίνουμε ένα γεωμετρικό αντικείμενο από ένα άλλο (π.χ διάκριση τριγώνων, διάκριση καμπυλών). Είναι επίσης γνωστό από τη διαφορική γεωμετρία ότι μια καμπύλη ορίζεται κατά ένα και μοναδικό τρόπο (εκτός από τη θέση της στο χώρο) από δυο συναρτήσεις του μήκους τόξου της: την καμπυλότητα και τη στρέψη. Οι έννοιες όμως που σχετίζονται με την έννοια της καμπύλης και συναντώνται στα αναλυτικά προγράμματα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, φαίνεται να εστιάζουν σε διάφορες ιδιότητες παρά «στην έννοια της φύσης της καμπύλης ως αντίθεσης στην ευθεία γραμμή» και επιπλέον «η εστίαση δεν τίθεται στην έννοια της καμπυλότητας ως πεδίο δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων» (Kynigos & Psycharis, 2003). Η εμφάνιση όμως τα τελευταία χρόνια περιβαλλόντων όπως του MaLT που αποτελεί ένα κατεξοχήν πλαίσιο πειραματισμού εννοιών διαφορικής γεωμετρίας και σε συνδυασμό με δομήματα όπως του 'μισοψημένου μικρόκοσμου', μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για μια ανακατασκευή του τρόπου παρουσίασης της έννοιας της καμπύλης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στηριζόμενη στη διαφορική εφαπτομενική προσέγγισή της (Zantzos and Kynigos, 2012).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Μισοψημένοι μικρόκοσμοι

Έχοντας ως βασικό στόχο τη διερεύνηση της ανάπτυξης νοημάτων από τους μαθητές σχετικά με έννοιες του εννοιολογικού πεδίου της καμπυλότητας μιας καμπύλης του χώρου (Ζάντζος και Κυνηγός, 2011), σχεδιάσαμε δραστηριότητες στηριζόμενοι στη θεωρία μάθησης μέσω κατασκευών (constructionism, Kafai and Resnick, 1996). Ένα κεντρικό χαρακτηριστικό της μεθόδου που θεωρήσαμε κατάλληλο για τη συγκεκριμένη περίπτωση, ήταν να τους δώσουμε να ξεκινήσουν με έναν 'μισοψημένο μικρόκοσμο' (Kynigos, 2007). Οι μισοψημένοι μικρόκοσμοι είναι λογισμικά σχεδιασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να προκαλούν μαθητές αλλά και εκπαιδευτικούς να κατασκευάσουν κάτι με αυτούς ή ακόμα να τους αλλάξουν αλλά και να τους αποδομήσουν. Δεν αποτελούν έτοιμα περιβάλλοντα για να κατανοηθούν από τους εκπαιδευτικούς και μετά να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές. Στόχος τους είναι να λειτουργούν ως σημεία εκκίνησης, και ο χρήστης να οικειοποιηθεί τις ιδέες που βρίσκονται πίσω από τη διαδικασία κατασκευής τους.

Το πλαίσιο της Zandieh

Σύμφωνα με την Sfard (1991), μια έννοια μπορεί να προσεγγιστεί με δυο τρόπους: λειτουργικά που σημαίνει την ερμηνεία της ως μια διαδικασία, και δομικά, που αναφέρεται σε μια σφαιρική αντίληψη της έννοιας. Για παράδειγμα, η έννοια της καμπυλότητας μιας καμπύλης σε ένα σημείο, μπορεί να ερμηνευτεί λειτουργικά, ως μια οριακή διαδικασία αλλά και δομικά ως το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασία και τη χρήση του για την κατασκευή μιας καμπύλης. Η μετάβαση από τη λειτουργική στη δομική αντίληψη απαιτεί την αντίληψη αυτής της έννοιας ως ένα συνεχές αυτοτελές αντικείμενο. Αυτό το βήμα, που η Sfard ονομάζει reification (υποστασιοποίηση ή πραγμοποίηση), είναι ένα ξαφνικό ποιοτικό άλμα που ενώ αρχικά γίνεται αντιληπτό ως διαδικασία, στη συνέχεια σταθεροποιείται σε αντικείμενο, σε μια στατική δομή. Αυτή η αντικειμενοποίηση καθιστά την όλη διαδικασία ανεξάρτητη πλαισίου και αποδεσμευμένη από συγκεκριμένους αλγόριθμους οντότητα (Κολέζα, 2003). Ταυτόχρονα τονίζει, ότι η αντίληψη μιας έννοιας και με τους δυο τρόπους θεωρείται απαραίτητη για την κατανόηση της.

Στηριζόμενη στην παραπάνω θεώρηση, η Zandieh (2000), αναπτύσσει ένα θεωρητικό πλαίσιο για την ανάλυση της κατανόησης της έννοιας της παραγώγου μιας συνάρτησης. Σύμφωνα με αυτό το πλαίσιο, η έννοια της παραγώγου εμπλέκει τρία 'διαδικασία-αντικείμενο' ζεύγη τα οποία συνδέονται σε μια αλυσίδα και τα οποία είναι: ο λόγος, το όριο και η συνάρτηση. Τα τρία αυτά επίπεδα μπορούν να αναλυθούν σε διαφορετικές αναπαραστάσεις, όπως για παράδειγμα τη συμβολική και τη γραφική. Στη συμβολική μορφή και στο επίπεδο του λόγου, το πηλίκο διαφορών για δυο σημεία μιας συνάρτησης δίνεται ως: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Αυτό το πηλίκο μπορεί να

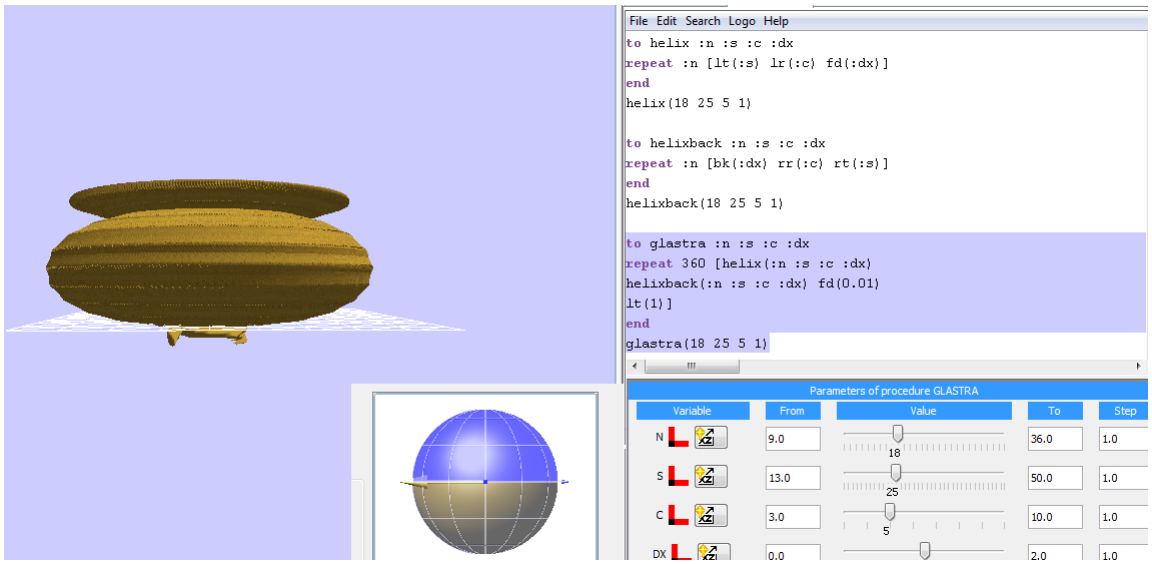
θεωρηθεί ως διαδικασία ή ως αντικείμενο. Ως αντικείμενο ενεργεί στο δεύτερο επίπεδο της οριακής διαδικασίας, όπου η έκφραση $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ δίνει την παράγωγο σε ένα σημείο x_0. Στη γραφική αναπαράσταση, μπορεί κάποιος να εστιάσει σε ένα σταθερό σημείο τη καμπύλης, και να θεωρήσει ένα άλλο σημείο κινούμενο προς το πρώτο. Έτσι στην οριακή διαδικασία η οριακή θέση της τέμνουσας θα είναι η εφαπτομένη της καμπύλης. Αυτή η οριακή διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ότι επαναλαμβάνεται σε κάθε σημείο του πεδίου της f΄, και έτσι προχωράμε στο τρίτο επίπεδο, της συνάρτησης παραγώγου.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η παρούσα έρευνα είναι μια 'έρευνα σχεδιασμού' (Cobb et al., 2003) και αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας με τη συμμετοχή 15 μαθητών Γ γυμνασίου. Για την καταγραφή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε ένα λογισμικό ήχου και εικόνας (Hypercam) το οποίο έδωσε τη δυνατότητα καταγραφής των ενεργειών των μαθητών με το λογισμικό και των συζητήσεων μεταξύ των συμμετεχόντων. Για την ανάλυση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών ενδιαφερθήκαμε για τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές αλληλεπιδρούσαν με τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις του λογισμικού και τους τρόπους με τους οποίους κατασκεύαζαν και ανέπτυξαν μαθηματικά νοήματα τόσο για την έννοια της καμπυλότητας όσο και για έννοιες σχετικές με αυτήν. Ένα πλαίσιο το οποίο θεωρήσαμε κατάλληλο για τη μελέτη της ανάπτυξης αυτών των εννοιών ήταν το πλαίσιο της Zandieh (2000), το οποίο συμπληρώσαμε και αναπτύξαμε για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Στους μαθητές δόθηκε το εξής πρόβλημα: «Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ δυο σημείων σε μια κυλινδρική επιφάνεια». Για τους πειραματισμούς, αναφέραμε στους μαθητές ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν όποια υλικά θέλουν (π.χ χαρτί, ψαλίδι), και τον μισοψημένο μικρόκοσμο με την ονομασία 'σύντομος δρόμος' (εικόνα 1).Ο μικρόκοσμος (στην εικόνα φαίνεται ως 'helix') περιλαμβάνει ένα πρόγραμμα με τέσσερις παραμέτρους με την κάθε μια να εκφράζει το εξής: n-πλήθος επαναλήψεων, s-στροφή της χελώνας γύρω από την κατεύθυνση της κίνησής της (καθορίζει τη στρέψη), dx-καθορίζει το μήκος του βήματος της χελώνας και c- στροφή της χελώνας στο επίπεδό της (εγγύτατο επίπεδο, καθορίζει την καμπυλότητα).



Εικόνα 1: Το περιβάλλον του MaLT και οι κώδικες για τη 'γλάστρα'

ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

Η έννοια της καμπυλότητας μιας καμπύλης σε ένα σημείο της, ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες σε δυο σημεία της ως προς το αντίστοιχο μήκος τόξου (Για λεπτομέρειες: Zantzos and Kynigos, 2012). Στηριζόμενοι στο πλαίσιο της Zandieh (2000), παρουσιάζουμε παρακάτω τα επίπεδα με βάση τα οποία θα μελετήσουμε την ανάπτυξή της, με αναφορές και στο συμβολικό αλλά και στο γραφικό πλαίσιο. Για το πρώτο επίπεδο, της εφαπτομενικής προσέγγισης της καμπύλης, και για το οποίο δεν θα κάνουμε εκτενή ανάλυση αφού τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε δεν αναφέρονται σε αυτό, αναφέρουμε ότι: Η φύση το προβλήματος που είχε δοθεί στους μαθητές, απαιτεί σε πρώτη φάση η γραμμή που δίνει ο κώδικας να περιελίσσεται σε έναν κύλινδρο ή σε ένα στερεό κύκλο και οπτικά τουλάχιστον η γραμμή να φαίνεται λεία. Σε αυτήν τη περίπτωση, θεωρούμε ότι έχουμε προσεγγίσει για παράδειγμα τον κύκλο με εφαπτόμενα τμήματα σε σημεία του που απέχουν δχ. Έτσι, έχουμε δημιουργήσει μια εφαπτομενική πολυγωνική γραμμή, με τη χελώνα να διανύει αυτό το μονοπάτι και ανά δχ να στρέφεται και να περιστρέφεται κατά c και ψ αντίστοιχα.

2ο επίπεδο: Μέση καμπυλότητα

Το πηλίκο διαφορών για τη γωνία στροφής c που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες σε δυο γειτονικά σημεία s_o και $s_o+\delta\chi$ (με το s να δίνει το μήκος τόξου) δίνεται σε συμβολική μορφή από το λόγο: $\frac{c(s_o+\delta x)-c(s_o)}{\delta x}$, (1) ενώ με βάση το συμβολισμό του

Leibniz θα είναι: $\frac{\delta c}{\delta \chi}$.Ο τελευταίος λόγος αντικατοπτρίζει και τον συμβολικό τρόπο εργασίας (σε γλώσσα Logo) κατά τη διάρκεια των πειραματισμών με βάση τον κώδικα του σύντομου δρόμου. Σε γραφικό επίπεδο, ταυτόχρονα αλλά και δυναμικά με τον συμβολικό τρόπο αναπαράστασης με βάση τη γλώσσα logo, παρατηρούμε για παράδειγμα δυο εφαπτόμενες σε δυο σημεία της καμπύλης, και αυτό που μπορεί να υπολογιστεί είναι η γωνία που σχηματίζουν. Η διαδικασία (process) είναι ο υπολογισμός της γωνίας που σχηματίζουν οι δυο εφαπτόμενες, ενώ το αντικείμενο (object) είναι ο λόγος της γωνίας προς το μήκος του αντίστοιχου τόξου.

Ένα επιπλέον σημαντικό στοιχείο στην περίπτωση της καμπυλότητας με τη χρήση του μισοψημένου μικρόκοσμου που χρησιμοποιούμαι, έγκειται στο ότι το πηλίκο διαφορών, λόγω της εντολής repeat και της δυνατότητας για δυναμικό χειρισμό μέσω των μεταβολέων, μπορεί να μας δώσει το πηλίκο διαφορών σε κάθε σημείο της καμπύλης. Έτσι με κατάλληλο πλήθος επαναλήψεων (repeat :n) δημιουργείται η συνάρτηση της μέσης καμπυλότητας που δίνεται από την παρακάτω σχέση: $\frac{c(s+dx)-c(s)}{dx}$,(2). Να επισημάνουμε ότι το δχ σε αυτή την περίπτωση παραμένει σταθερό, και αυτό το οποίο μεταβάλλεται είναι το s με τη χρήση της εντολής repeat. Στην γραφική παράσταση αυτό που παρατηρούμε είναι μια πολυγωνική γραμμή να εφάπτεται στον κύλινδρο είτε στον κύκλο που αντικατοπτρίζει τη αντίστοιχη γραμμή της μέσης καμπυλότητας. Αυτό το πηλίκο μπορεί να εκληφθεί ως μια διαδικασία ή ως ένα αντικείμενο. Ως αντικείμενο μπορεί να ληφτεί υπόψη στο τρίτο επίπεδο που θα περιγράψουμε παρακάτω, στην οριακή διαδικασία καθώς το dχ θα τείνει στο μηδέν.

3ο επίπεδο (Στιγμιαία καμπυλότητα)

Αν τώρα μεταβάλλουμε το δχ με στόχο να πετύχουμε καλύτερη προσέγγιση είτε ομαλοποίηση της γραμμής, αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε τα εφαπτόμενα τμήματα της καμπύλης σε πιο κοντινά σημεία το ένα με το άλλο ενώ ταυτόχρονα η γραφική παράσταση μετακινείται σαν ένα όλο. Στην περίπτωση που η παραπάνω διαδικασία λαμβάνει τη μορφή μιας άπειρης οριακής διαδικασίας, υπό την έννοια ότι το δχ τείνει στο μηδέν, μπορούμε γραφικά και συμβολικά (τόσο με βάση τον συμβολισμό κατά Leibniz, αλλά και με βάση τον ορισμό της στιγμιαίας καμπυλότητας) να πάρουμε την έννοια της στιγμιαίας καμπυλότητας: $\lim_{dx\to 0}\frac{c(s_0+dx)-c(s_0)}{dx}=c'(s_0)$. Το τελικό αντικείμενο στο τρίτο επίπεδο είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής, δηλαδή η καμπυλότητα σε ένα σημείο και μπορεί να παρασταθεί με βάση το συμβολισμό του Leibniz ως : $\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta c}{\delta x}$

4ο επίπεδο (Συνάρτηση καμπυλότητας και προσέγγιση καμπύλης)

Η παραπάνω έκφραση δίνει την καμπυλότητα σε ένα σημείο s_0, αλλά καθώς στη διαδικασία κατασκευής της εφαπτομενικής γραμμικής προσέγγισης υπεισέρχεται και η εντολή repeat, μπορεί να υπολογιστεί η καμπυλότητα σε κάθε σημείο. Κατά αυτόν τον τρόπο προχωράμε στο τέταρτο επίπεδο, στη συνάρτηση καμπυλότητας: $\lim_{dx\to 0}\frac{c(s+dx)-c(s)}{dx}=c'(s)$. Στο περιβάλλον του MaLT, οι μαθητές παρατηρούν ότι: καθώς το δχ συνεχώς ελαττώνεται, προκύπτει διαδοχικά μια απειρία γραμμών οι οποίες γραμμές συγκλίνουν και προσεγγίζουν, με οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια, την αντίστοιχη καμπύλη έλικα ή κύκλο. Σύμφωνα με την Sfard (1991), όταν εργάζεσαι με μια οικογένεια γραμμών είναι ήδη ένα βήμα προς τη διαδικασία υποστασιοποίησης.

5ο επίπεδο: Περιλαμβάνει την αντικειμενοποίηση του διορθωμένου μικρόκοσμου και τη χρήση του για την κατασκευή σχημάτων και καμπυλών στο χώρο. Τόσο ο κώδικας όσο και το γραφικό του αποτέλεσμα που συνιστά (προσεγγιστικά) καμπύλη, χρησιμοποιούνται σε διαδικασίες για την κατασκευή εννοιών ανωτέρου επιπέδου, όπως για παράδειγμα στη χρήση της αναδρομής για την κατασκευή καμπυλών με μεταβλητή καμπυλότητα και /ή στρέψη.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Θα παραθέσουμε αποτελέσματα από μια ομάδα μαθητών και θα αναλύσουμε την πορεία ανάπτυξης της έννοιας της καμπυλότητας από το σημείο που ξεκίνησαν οι πειραματισμοί τους με τον μισοψημένο μικρόκοσμο και με βάση το πλαίσιο που αναπτύξαμε.

Ο Μισοψημένος Μικρόκοσμος ως 'Ψευδό - Αντικείμενο'

Πειραματιζόμενοι οι συγκεκριμένοι μαθητές, θεώρησαν επαρκές το γεγονός ότι η καμπύλη φαινόταν για αυτούς λεία, και επειδή ταυτόχρονα περιελισσόταν στον κύλινδρο και κατέληγε στα δυο άκρα μιας γενέτειρας θα αποτελούσε τη λύση του προβλήματος. Να σημειώσουμε ότι σε προηγούμενο διερευνητικό στάδιο, οι παραπάνω προϋποθέσεις αποτέλεσαν το συμπέρασμα σχετικά με τον ορισμό της έλικας. Οι τιμές που θεώρησαν ως λύση ήταν: δχ=1, c=25 και ψ=5 και τις οποίες αντικαταστούν στον κώδικα. Για αυτούς, ο καινούριος κώδικας αποτελεί τον τρόπο σχεδίασης της έλικας και κατόπιν τον χρησιμοποιούν για την κατασκευή και άλλων σχημάτων και καμπυλών όπως απαιτούσαν και οι ερωτήσεις του φύλλου εργασία που τους είχε δοθεί. Αυτό το οποίο όμως επιτυγχάνουν είναι η σχεδίαση μιας πολυγωνικής γραμμής με βάση και μόνο την οπτική αντίληψη (M1: μοιάζει με έλικα) και χωρίς να αναδεικνύεται η διαδικαστική φύση της έννοιας της καμπυλότητας τόσο σε συμβολικό όσο και σε γραφικό επίπεδο, γεγονός που παραπέμπει σε ψευδό-αντικείμενο (pseudo-object, Zandieh, 2000). Η προσέγγιση που θεωρούν ως λύση,

έχει δημιουργηθεί με βάση την έννοια της μέσης καμπυλότητας για τμήμα μήκους ίσο με ένα. Εδώ να σημειώσουμε, ότι η έκφραση ψευδό-αντικείμενο δεν έχει αρνητική σημασία, απλά υποδηλώνει το γεγονός ότι σε αυτή την περίπτωση ο χρήστης δεν έχει κατανοήσει τη διαδικασία δημιουργίας της αντίστοιχης μαθηματικής έννοιας. Δηλαδή, ο ψευδό-κώδικας που δίνει την αντίστοιχη προσέγγιση της έλικας, αντιμετωπίζεται ο ίδιος ως το τελικό αντικείμενο της διαδικασίας και χρησιμοποιείται σε έννοιες ανωτέρου επιπέδου, χωρίς να αναγνωρίζεται η μαθηματική διαδικασία που οδηγεί σε αυτό και οι αντίστοιχες ιδιότητες όπως για παράδειγμα το ότι ο λόγος γωνίας και μήκους τόξου είναι σταθερός (pseudo-structural conception, Sfard, 1991).

Ο Διορθωμένος Μικρόκοσμος: Η συμβολική έκφραση (σε γλώσσα Logo) της έννοιας της καμπυλότητας μιας καμπύλης.

Παρατηρώντας ο ερευνητής τον τρόπο εργασίας της συγκεκριμένης ομάδας, τους έθεσε την παρακάτω ερώτηση:

Ε: είναι αυτό έλικα;

Αν και οι μαθητές προσπάθησαν να αιτιολογήσουν την κατασκευή τους με εκφράσεις όπως: 'μοιάζουν σαν πολλές ευθείες', 'μοιάζει με έλικα και καταλήγει στα άκρα μιας γενέτειρας του κυλίνδρου', γρήγορα συνειδητοποίησαν (κάνοντας zoom) ότι, η περίπτωση που το dx είναι μικρό, είναι μεν οπτικά βολικό αλλά δεν αποτελούσε λύση του προβλήματος.

Μαθητής 1: θα προσπαθούσαμε να εξαφανίσουμε τις γωνίες

Ερευνητής: πως θα εξαφανίσετε τις γωνίες;

Μαθητής 1: να κάνουμε το dx μικρό, ας πούμε 0.1

Οι μαθητές με τη βοήθεια των μεταβολέων μικραίνουν τη τιμή του dx από dx=1 σε dx=0.1 και κατόπιν κάνουν το ίδιο για dx=0.01 ενώ ταυτόχρονα τροποποιούν και τις τιμές των c και ψ για να συνεχίσει η έλικα να περιελίσσεται στον στερεό κύλινδρο. Δεν δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν ότι ο λόγος c/dx είναι πάντα σταθερός και ίσος με 25, αλλά αδυνατούν να το συνδυάσουν και να το περιγράψουν με βάση την αντίστοιχη οριακή διαδικασία. Το μόνο που τους ενδιέφερε ήταν η εύρεση μιας σχέσης και η αντικατάσταση στον κώδικα. Να σημειώσουμε ότι την ίδια τακτική ακολουθήσανε και στην περίπτωση του κύκλου. Μόνο όταν εκτελέσανε τον διορθωμένο κώδικα αντιληφτήκανε ότι με τιμές του dx να τείνουν στο μηδέν παίρνουμε προσέγγιση με τη επιθυμητή ακρίβεια.

Ερευνητής: και ποιες μπορεί να είναι οι ζητούμενες τιμές;

Μαθητής 2: δεν μπορούμε να πούμε ακριβώς γιατί όσο θα βάζουμε μικρότερες τιμές τόσο θα πλησιάζει καλύτερα

Ο μικρόκοσμος του 'Σύντομου Δρόμου' ως αντικείμενο στην κατασκευή σχημάτων στο χώρο

Αφού οι μαθητές κατασκευάσανε τον κώδικα με βάση τον οποίο μπορούσαν να προσεγγίσουν μια καμπύλη με σταθερή καμπυλότητα και στρέψη, ο ερευνητής τους ζήτησε να φτιάξουν ένα σχήμα της επιλογής τους στηριζόμενοι στα συμπεράσματα που είχαν καταλήξει. Στην αρχή ο ένας εκ των μαθητών σκέφτηκε να κάνουν μια πυραμίδα και ο άλλος να φτιάξουν ένα 'εγκάρσιο κύμα'. Μετά από λίγο και χωρίς να κάνουν κάποιες προσπάθειες υλοποίησης των παραπάνω, ο M1 ρίχνει την ιδέα να φτιάξουν μια γλάστρα. Όπως φάνηκε από τον διάλογο που ακολούθησε, φανταζόταν την γλάστρα ως μια έλικα με μικρή γωνία περιστροφής lr και έτσι ώστε να προκύπτει ουσιαστικά ένας κύλινδρος (κυλινδρική γλάστρα).

Μαθητής 1: με το μικρό left role θα είναι κολλημένα τα τμήματα της έλικας

Μαθητής 2: ένας κύλινδρος θα βγει πάλι…

Μαθητής 1: να κάνεις κοιλιά με βάση την έλικα

Μαθητής 2: μπορούμε να κάνουμε πολλές φορές μια έλικα

Μαθητής 1: η μια βάση όμως δεν πρέπει να είναι κύκλος;

Φαίνεται να αντιλαμβάνονται τη γλάστρα ως ένα στερεό εκ περιστροφής (ελικοειδής επιφάνεια) με οδηγό την επίπεδη καμπύλη (κύκλος) και αντί να περιστρέφουν την ευθεία γραμμή, όπως στην περίπτωση κατασκευής μιας κυλινδρικής επιφάνειας, να περιστρέφουν την έλικα, που για αυτούς αποτελεί την γενέτειρα της επιφάνειας. Το αξιοσημείωτο είναι ότι δεν περιστρέφουν την έλικα κατά τυχαίο τρόπο, θεωρούν τον κώδικα που την σχηματίζει ως αντικείμενο το οποίο ενσωματώνουν στον κώδικα κατασκευής ενός κύκλου, όπως φαίνεται και στην εικόνα (1). Να σημειώσουμε ότι ο κώδικας 'helixback' που απεικονίζεται, δόθηκε στους μαθητές έτοιμος [όταν ζητήθηκε] και ο οποίος απλά επαναφέρει τη χελώνα στην αρχική της θέση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε να παρατηρήσουμε ότι οι μαθητές στην προσπάθεια τους να προσεγγίσουν μια κυλινδρική έλικα, έπρεπε να μετατρέψουν μια σειρά από διαδικαστικής φύσεως έννοιες σε μια ενοποιημένη στατική μορφή που εκφραζόταν μέσα από τη διόρθωση του μισοψημένου μικρόκοσμου. Ο διορθωμένος μικρόκοσμος του σύντομου δρόμου, φάνηκε να αποτελεί τελικά για τους μαθητές μια έννοια η οποία ενσωμάτωνε και αναδείκνυε τη διπλή φύση της καμπυλότητας μιας καμπύλης: την διαδικαστική φύση ως οριακή διαδικασία αλλά και το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας που αποτελούσε τη στιγμιαία καμπυλότητα. Ένα επιπλέον σημαντικό στοιχείο στα παραπάνω, είναι το γεγονός ότι η χρήση της εντολής repeat έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές να δημιουργούν (τουλάχιστον γραφικά) και την αντίστοιχη συνάρτηση της μέσης καμπυλότητας ενώ ταυτόχρονα με τη χρήση των

μεταβολέων να παρατηρούν μια απειρία γραμμών των οποίων η σύγκλιση αποτελούσε την καμπύλη έλικα. Δηλαδή τόσο η διαδικαστική όσο και η δομική κατανόηση φαίνεται να ενσωματώνονται στον διορθωμένο κώδικα και να λειτουργούν συμπληρωματικά στα διάφορα στάδια τα οποία ενυπάρχουν στην κατανόηση της από αυστηρά μαθηματικής άποψης. Φαίνεται ότι ο προγραμματισμός 'τους δίνει τη δυνατότητα να ομαδοποιήσουν ένα σύνολο ιδεών και έπειτα, είτε να τις χρησιμοποιήσουν ως ένα αντικείμενο με ορισμένη ονομασία σε ένα υψηλότερο αφαιρετικό επίπεδο είτε να στοχαστούν πάνω σε μια συγκεκριμένη ιδέα που ενυπάρχει σε αυτό το αντικείμενο', (Κυνηγός, 2006, σελ 130).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

Ζάντζος, Ι. και Κυνηγός, Χ. (2011). Η σχεδίαση της συντομότερης διαδρομής μεταξύ δυο σημείων μιας κυλινδρικής επιφάνειας από μαθητές Γ΄ Γυμνασίου, με τη χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας. 4ο Συνέδριο της ΕΝΕΔΙΜ. 'Η τάξη ως πεδίο ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας' Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 1 - 4 Δεκεμβρίου 2011

Κυνηγός, Χ.(2006). Το μάθημα της διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών. Από την έρευνα στη σχολική τάξη. Αθήνα: Εκδ. Ελληνικά γράμματα

Κολέζα, Ε.(2003). Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, ΕΚΠΑ-Πανεπιστήμιο Κύπρου

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. Educational Researcher, Vol. 32-1, 9-13.

Kafai, Y. and Resnick, M. (eds.) (1996). Constructionism in practice: Designing, thinking and learning in a digital world. Lawrence Erlbaum Publishers, Mahwah

Kynigos, C. (2007). Half-Baked Logo Microworlds as Boundary Objects in Integrated Design, Informatics in Education, 2007, Vol. 6, No. 2, 1–24, Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius

Kynigos, C., & Psycharis, G. (2003). 13 year-olds meanings around intrinsic curves with a medium for symbolic expression and dynamic manipulation. In N. A. Paterman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Ed.), Proc. 27th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 165–172). Honolulu, Hawaii, U.S.A: PME.

Sfard A. (1991). On the Dual Nature of the Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36

Zandieh, M. (2000). A Theoretical Framework for Analyzing Student Understanding of the Concept of Derivative. In E. Dubinsky, Schoenfeld, A.,

Kaput, J. (Ed.), Research in Collegiate Mathematics Education, IV (Vol. 8, pp. 103-127). Providence, RI: American Mathematical Society.

Zantzos, I. and Kynigos C., (2012). Differential approximation of a cylindrical helix by secondary school students. Constructionism 2012 Theory, Practice and Impact. Athens, Greece

Η ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗΣ ΔΕΞΙΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΟΡΘΩΝ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΕΠΑΦΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ιωάννης Κανέλλος, Έλενα Ναρδή, Ειρήνη Μπιζά

Πανεπιστήμιο East Anglia

I.Kanellos@uea.ac.uk, E.Nardi@uea.ac.uk, I.Biza@uea.ac.uk

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η απόδειξη είναι αποφασιστικής σημασίας για την έρευνα και η διδασκαλία της είναι στενά συνδεδεμένη με τις δεξιότητες και τις αντιλήψεις των μαθητών για αυτήν. Διάφορες μελέτες (π.χ. Hoyles & Healy, 2000) ερευνούν την πρόσληψη της απόδειξης από τους μαθητές και αναλύουν τις δεξιότητές τους όσο και το τι αποδέχονται ως απόδειξη. Στην ίδια κατεύθυνση η έρευνά μας επιχειρεί να αποτυπώσει πώς η αποδεικτική δεξιότητα αναδύεται σε πρώιμα στάδια διδασκαλίας της απόδειξης και να κατανοήσει τη σχέση της με την εκτίμηση ορθών αποδεικτικών διαδικασιών. Το εργαλείο ανάλυσης είναι η ταξινομία Harel & Sowder (1998, 2007). Σε αυτό το άρθρο παρουσιάζουμε ένα τεστ Άλγεβρας που δόθηκε σε 85 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διδασκαλία και η μάθηση της απόδειξης αποτελεί αποφασιστικό ζήτημα στην έρευνα της μαθηματικής εκπαίδευσης καθώς η απόδειξη θεωρείται εξόχως σημαντική μαθηματική δραστηριότητα. Στη μελέτη που παρουσιάζουμε εδώ υιοθετούμε τον ορισμό της απόδειξης των Harel & Sowder (2007): «Απόδειξη είναι η διαδικασία που εφαρμόζεται από ένα άτομο (ή μια κοινότητα) για να άρει τις αμφιβολίες που αφορούν ένα ισχυρισμό» (σ.808). Ένα μέτρο προόδου της μάθησης της απόδειξης είναι ο βαθμός αποδεικτικής δεξιότητας (στο εξής δεξιότητα) που αποκτούν οι μαθητές με τη διδασκαλία. Σε συμφωνία με τους Harel & Sowder ο ορισμός της δεξιότητας που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το άρθρο είναι η ικανότητα να διατυπώνεται μια αποδεκτή απόδειξη στο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο μιας κοινότητας, που στην περίπτωσή μας είναι η τάξη της Γ΄ Γυμνασίου. Κατ' ακολουθία ο ορισμός της εκτίμησης ορθών αποδεικτικών διαδικασιών (στο εξής εκτίμηση) είναι ο βαθμός αναγνώρισης εκ μέρους των μαθητών της αναγκαιότητας για απόδειξη καθώς και της ορθότητάς της. Η έρευνά μας εξετάζει τα πρώιμα στάδια μάθησης της απόδειξης στο πλαίσιο της ελληνικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ιδιαίτερα σε ό,τι αφορά τη δεξιότητα και την εκτίμηση. Η Γ΄ Γυμνασίου είναι η πρώτη τάξη στην οποία διδάσκεται η απόδειξη στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία. Στην παρούσα εργασία περιοριζόμαστε στην παρουσίαση αποτελεσμάτων ενός τεστ Άλγεβρας. Παρακάτω αναφερόμαστε σε σχετικές εργασίες

και στην ταξινομία των Harel και Sowder που είναι το εργαλείο της ανάλυσης των δεδομένων μας. Περιγράφουμε τη μέθοδο ανάλυσης των δεδομένων. Παρουσιάζουμε παραδείγματα απαντήσεων των μαθητών και ένα πίνακα που δίνει τη συγκεντρωτική εικόνα στο σύνολο του τεστ. Τέλος, προβαίνουμε σε μερικά σχόλια σχετικά με τα αποτελέσματα της ανάλυσης σε σχέση με την εισαγωγή της απόδειξης στη σχολική τάξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Ερευνώντας τη δεξιότητα των μαθητών στην απόδειξη οι Healy και Hoyles (2000) παρατηρούν ότι οι μαθητές αποδίδουν αξία σε επεξηγηματικά επιχειρήματα στην Άλγεβρα και, παρότι τείνουν να δίνουν εμπειρικές αποδείξεις, τις θεωρούν ατελείς. Στη μελέτη τους για τη δεξιότητα μαθητών στη γεωμετρική απόδειξη (Β΄ Γυμνασίου, 14 ετών, Realschule, Γερμανία) οι Heinze και Kwak (2002) βρίσκουν πτωχή την αντίστοιχα απαιτούμενη γνώση, ιδιαίτερα με βάση τη διάκριση ανάμεσα σε δηλωτική γνώση (γνώση αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων) και μεθοδολογική γνώση (των αρχών της μαθηματικής απόδειξης). Οι Weber και Alcock (2004) αναφέρονται σε συντακτικές αποδείξεις (βασισμένες αποκλειστικά στην ορθή χρήση διαδικασιών) και σε σημαίνουσες αποδείξεις (στις οποίες ο αποδεικνύων αναφέρεται ευθέως σε μαθηματικά αντικείμενα και το νόημά τους) και καταλήγουν στο ότι οι σημαίνουσες αποδείξεις δηλώνουν αυξημένη δεξιότητα.

Η ταξινομία των αποδεικτικών σχημάτων (proof schemes: Harel & Sowder, 1998, 2007), το αναλυτικό εργαλείο στην παρούσα εργασία, προσφέρει ένα τρόπο για να οργανωθεί η εξέταση της αποδεικτικής συμπεριφοράς των μαθητών. Στη συνέχεια παραθέτουμε τα αποδεικτικά σχήματα με τα ονόματά τους στα Αγγλικά και τις συντομογραφίες τους με λατινικούς χαρακτήρες:

(1) Η κατηγορία της Εξωτερικής Πεποίθησης (External Conviction=EC.). (1α) Αποδεικτικό σχήμα που χαρακτηρίζεται από εξάρτηση από μια αυθεντία (π.χ. τον καθηγητή) καλείται Αυθεντίας (External Conviction Authoritarian=EC.A.). (1β) Αποδεικτικό σχήμα που χαρακτηρίζεται από εξάρτηση από την εξωτερική εμφάνιση ενός επιχειρήματος (π.χ. απόδειξη σε δυο στήλες) καλείται Τελετουργίας (External Conviction Ritual=EC.R.). (1γ) Αποδεικτικό σχήμα που χαρακτηρίζεται από την αυθαίρετη διαχείριση συμβόλων (π.χ. $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$) καλείται Μη Αναφορικό (External Conviction Non Referential Symbolic=EC.NRS.).

(2) Η κατηγορία του Εμπειρικού (Empirical=E.). (2α) Αποδεικτικό σχήμα που βασίζεται σε ειδικές περιπτώσεις (πχ. παράδειγμα, μέτρηση, αντικατάσταση μεταβλητών με συγκεκριμένες τιμές) καλείται Επαγωγικό (Empirical Inductive=E.I.). (2β) Αποδεικτικό σχήμα που βασίζεται σε προσλαμβάνουσες εικόνες (π.χ. ένα παραλληλόγραμμο καλείται τετράγωνο όταν φαίνεται ως τέτοιο) καλείται Αντιληπτικό (Empirical Perceptual=E.P.).

(3) Τέλος η κατηγορία του Παραγωγικού (Deductive=D.). (3α) το Μετασχηματιστικό (Deductive Transformational=D.T.) και το (3β) Αξιωματικό (Deductive Axiomatic=D.A.). Μια από τις διαφορές μεταξύ των αποδεικτικών σχημάτων D.T. και D.A. είναι ότι το τελευταίο βασίζεται στην κατανόηση ότι οποιαδήποτε απόδειξη πρέπει να ξεκινά από αξιώματα.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήσαμε μόνο το χαρακτηρισμό D.T. για τα παραγωγικά αποδεικτικά σχήματα θεωρώντας ότι μαθητές της Γ΄ τάξης Γυμνασίου οι οποίοι διδάσκονται για πρώτη φορά απόδειξη, δυσκολεύονται να διακρίνουν την αξιωματική θεμελίωση των εννοιών.

Η μελέτη μας εξετάζει τη σχέση μεταξύ δεξιότητας και εκτίμησης, όπως αυτές ορίσθηκαν στην εισαγωγή του άρθρου, στους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου. Σύμφωνα με την ταξινομία των αποδεικτικών σχημάτων που προαναφέραμε, η δεξιότητα φανερώνεται στην παραγωγή D.T. σχημάτων ενώ η εκτίμηση αντανακλάται στην ικανότητα αναγνώρισης καθώς και στην κατανόηση της αναγκαιότητας των D.T. σχημάτων. Η ανάλυσή μας επίσης θέτει το ερώτημα εάν, και εφόσον έτσι έχουν τα πράγματα με τι τρόπους, συνδέεται η δεξιότητα με την εκτίμηση. Σε ό,τι ακολουθεί, στηριζόμενοι στα δεδομένα μας, υποστηρίζουμε την άποψη ότι η εκτίμηση μπορεί να συνυπάρχει με σχετικά χαμηλή, αναπτυσσόμενη δεξιότητα. Για το λόγο αυτό σκιαγραφούμε τους σκοπούς, το πλαίσιο και τις μεθόδους της μελέτης μας και παραθέτουμε επεξηγηματικά παραδείγματα από τα δεδομένα.

ΣΚΟΠΟΙ, ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα, οι μαθητές διδάσκονται την απόδειξη για πρώτη φορά στην Γ΄ Γυμνασίου. Στην Άλγεβρα μαθαίνουν να αποδεικνύουν ταυτότητες όπως $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ή συνεπαγωγές όπως «αν $x<-2$ τότε $-3x+7>13$». Στη Γεωμετρία μαθαίνουν να αποδεικνύουν προτάσεις βασισμένες κυρίως στα κριτήρια ισότητας τριγώνων (π.χ. μαθαίνουν να αποδεικνύουν ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της). Έτσι η Γ΄ Γυμνασίου είναι ένα σημείο καμπής για τους μαθητές αφού η εμπειρική επαλήθευση μαθηματικών ισχυρισμών αντικαθίσταται σταδιακά από λογικές επεξηγήσεις και δομημένη επιχειρηματολογία βασισμένη σε ορισμούς και ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων.

Η μελέτη μας αποτυπώνει στιγμιότυπα από τη διδασκαλία και τη μάθηση της απόδειξης στη Γ΄ Γυμνασίου. Για το σκοπό αυτό συνεργασθήκαμε με εκπαιδευτικούς ενός δημόσιου σχολείου με τυπικούς μαθητές. Εργασθήκαμε ιδιαίτερα στενά με μια εκπαιδευτικό και τα τέσσερα τμήματα της Γ΄ Γυμνασίου που δίδασκε, συνολικά 85 μαθητές. Πραγματοποιήσαμε εκτεταμένες παρατηρήσεις της διδασκαλίας της εκπαιδευτικού κατά τη διάρκεια των οποίων διαπιστώσαμε την αυξημένη παιδαγωγική επίγνωση και ευαισθησία της. Συνεργαστήκαμε με την εκπαιδευτικό

στην κατασκευή δυο τεστ που δόθηκαν στην αρχή και στο τέλος της σχολικής χρονιάς.

Για να αναλύσουμε τα γραπτά των μαθητών κατασκευάσαμε ένα λογιστικό φύλλο με την εξής δομή. Οι γραμμές αντιστοιχούν στους μαθητές και οι στήλες στα ερωτήματα (ή υποερωτήματα όταν το ερώτημα αποτελείται από δύο υποερωτήματα). Το περιεχόμενο κάθε κελιού περιέχει τη συντομογραφία του αποδεικτικού σχήματος που θεωρήσαμε ότι ανήκει η απάντηση. Με αυτήν την έννοια κάθε γραμμή παρέχει στοιχεία για τα αποδεικτικά σχήματα κάθε μαθητή και κάθε στήλη τα αποδεικτικά σχήματα του αντίστοιχου ερωτήματος κατά την εκτίμησή μας.

Στην παρούσα εργασία αναφερόμαστε στις απαντήσεις των μαθητών σε τρία ερωτήματα Άλγεβρας (Α1, Α2 και Α3) που περιέχονται στο τεστ που δόθηκε στο τέλος της σχολικής χρονιάς. Τα ερωτήματα Α2 και Α3 αποτελούνται από δυο υποερωτήματα (Α2α, Α2β, Α3α, Α3β). Στην επόμενη ενότητα εκθέτουμε τα ερωτήματα και ένα πίνακα με τα αποδεικτικά σχήματα που εμφανίστηκαν στις απαντήσεις των μαθητών. Στη συνέχεια, παραθέτουμε τις παρατηρήσεις μας από την συνολική εικόνα των δεδομένων και επεξηγούμε με παραδείγματα.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΤΕΣΤ

Τα τρία ερωτήματα Άλγεβρας στα οποία εστιάζουμε στην παρούσα εργασία είναι τα ακόλουθα:

Ερώτημα 1: «Δίνεται ότι για τους πραγματικούς αριθμούς a και b ισχύει $5^2 = a^2 + b^2$. Να αποδείξεις ότι $\left(a\sqrt{3}+b\sqrt{2}\right)^2+\left(a\sqrt{2}-b\sqrt{3}\right)^2=125$»

Ερώτημα 2: «Αν η διαφορά των τετραγώνων δυο άνισων φυσικών αριθμών κ και λ (κ>λ) είναι ίση με το άθροισμα αυτών των φυσικών αριθμών τότε (α) Να αποδείξεις ότι η διαφορά των δύο φυσικών αριθμών κ και λ είναι ίση με τη μονάδα. (β) Να αποδείξεις ότι $5556^2-5555^2=11111$».

Ερώτημα 3: «Δύο συμμαθήτριές σου συζητούν πώς να αποδείξουν ότι $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Η μία προτείνει να δώσουν αριθμητικές τιμές στα a και b (π.χ. a=2 και b=1) και να κάνουν τις πράξεις για να διαπιστώσουν αν το αριστερό μέλος δίνει το ίδιο αριθμητικό αποτέλεσμα με το δεξιό μέλος. Πειραματίζονται με μερικές τιμές των a και b και διαπιστώνουν ότι το αριθμητικό αποτέλεσμα στο αριστερό και το δεξιό μέλος είναι κάθε φορά το ίδιο. Μετά από αυτά πιστεύουν ότι η σχέση αποδείχθηκε (α) Εσύ που παρακολουθείς τη συζήτηση, συμφωνείς με την άποψή τους; Αν όχι, τι έχεις να τους προτείνεις; (β) Πιστεύεις ότι ο καθηγητής τους θα συμφωνούσε μαζί τους;»

Τα ερωτήματα Α1 και Α2 δίνουν κατά κύριο λόγο το μέτρο της δεξιότητας ενώ το ερώτημα Α3 δίνει το μέτρο της εκτίμησης. Σημειώνουμε ότι το ερώτημα Α3

επηρεάστηκε από τη δομή ερωτημάτων στην εργασία των Healy και Hoyles (2000) και είναι απλό θέμα θεωρίας του βιβλίου. Τα ερωτήματα Α1 και Α2β είναι πιο σύνθετα αλλά μέσα στα πλαίσια επίσης του βιβλίου και της διδασκαλίας στην τάξη. Τέλος το Α2α είναι σχετικά απαιτητικό για μαθητές που βρίσκονται στα πρώτα στάδια της επαφής τους με αποδεικτικές διαδικασίες. Έτσι τα θέματα παρουσιάζουν μια διαβαθμισμένη αύξηση δυσκολίας. Αυτή όμως ήταν η πρόθεσή μας. Δεν θελήσαμε να δώσουμε ερωτήματα που θα παρήγαγαν μια υπεραισιόδοξη εικόνα της δεξιότητας. Στοχεύσαμε να δώσουμε ερωτήματα που θα προκαλούσαν τους μαθητές να ξεδιπλώσουν τις αποδεικτικές τους δυνατότητες με παράλληλη σύνθετη αντιμετώπιση αλγεβρικών συμβόλων. Συνειδητά με αυτή την επιλογή διακινδυνεύσαμε υψηλό αριθμό γραπτών χωρίς απαντήσεις.

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζουμε συγκεντρωτικά αποτελέσματα για κάθε ερώτημα. Στην πρώτη στήλη παραθέτουμε τα αποδεικτικά σχήματα που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυσή μας. Η συντομογραφία NS (=No Solution) σημαίνει απουσία απάντησης. Σημειώνουμε ακόμη ότι από τις 9 συντομογραφίες οι 4 είναι συνδυασμοί αποδεικτικών σχημάτων (π.χ. D.T.-EC.NRS.). Οι μικτοί χαρακτηρισμοί σημαίνουν ότι στις απαντήσεις εμφανίστηκαν στοιχεία από περισσότερα από ένα αποδεικτικά σχήματα. Παρατηρούμε επίσης την πλήρη απουσία του αποδεικτικού σχήματος Ε.Ρ. από τον Πίνακα 1. Θεωρούμε αυτήν την απουσία ως αναμενόμενη διότι στο σώμα των δεδομένων μας το σχήμα αυτό εμφανίζεται κυρίως στη Γεωμετρία, όταν για παράδειγμα ένας μαθητής διατυπώνει έναν ισχυρισμό παρατηρώντας ένα γεωμετρικό σχήμα (π.χ. ένα τρίγωνο φαίνεται να είναι ορθογώνιο). Στα Αλγεβρικά ερωτήματα που εξετάζουμε εδώ τέτοια εμφάνιση θεωρείται χαμηλής πιθανότητας. Από την άλλη πλευρά η πιθανότητα ενός Ε.Ι. αποδεικτικού σχήματος είναι υψηλή σε αυτά τα ερωτήματα εκτός του ερωτήματος Α2β όπου αναμενόταν οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν την ταυτότητα $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ή να υπολογίσουν απευθείας τη διαφορά 5556^2-5555^2. Τέλος το αποδεικτικό σχήμα ΕC.Α. εμφανίζεται μόνο σε σχέση με το ερώτημα Α3. Και αυτό είναι αναμενόμενο καθώς αυτό το ερώτημα ήταν μάλλον πιθανό να προκαλέσει την επίκληση μιας αυθεντίας, στην περίπτωση αυτή του καθηγητή.

ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ	Α1	Α2α	Α2β	Α3α	Α3β
D.T.	14	8	35	45	42
D.T.-E.I.	-	1	-	10	5
D.T.-EC.A.	-	-	-	-	1
D.T.-EC.NRS.	11	3	1	5	2
E.I.	10	11	-	9	11

E.I.-EC.NRS.	17	6	-	1	-
EC.A.	-	-	-	1	4
EC.NRS.	14	13	12	2	-
NS	34	58	52	27	35
TOTAL	100	100	100	100	100

Πίνακας 1: Ποσοστά αποδεικτικών σχημάτων ανά ερώτημα.

Για τα ερωτήματα A2α (τρίτη στήλη) και A2β (τέταρτη στήλη) παρατηρούμε μάλλον υψηλά ποσοστά NS. Από την άλλη πλευρά παρατηρούμε μάλλον υψηλά ποσοστά D.T. απαντήσεων στα ερωτήματα A2β, A3α και A3β. Την ίδια στιγμή τα ποσοστά των D.T. στα A1 και A2α είναι σχετικά χαμηλά. Αυτή η διαφορά μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: παρά τη χαμηλή δεξιότητα στις απαντήσεις αυτών των ερωτημάτων, η εκτίμηση είναι μάλλον υψηλή. Πράγματι, παρατηρούμε ότι το 45% των μαθητών απέρριψε την αριθμητική αντικατάσταση και πρότεινε αντίθετα την εφαρμογή του επιμεριστικού νόμου ώστε να αποδειχθεί η ταυτότητα του ερωτήματος. Παρατηρούμε επίσης το πιο χαμηλό ποσοστό NS απαντήσεων στην A3α (27%).

Παραθέτουμε τώρα παραδείγματα από τα δεδομένα για να συζητήσουμε τις προηγούμενες παρατηρήσεις στα συγκεντρωτικά αποτελέσματα. Ο μαθητής [81] απαντά το A1 όπως φαίνεται στην εικόνα 1

$$\begin{aligned}
&(a\sqrt{3}+b\sqrt{2})^2+(a\sqrt{2}-b\sqrt{3})^2=125\Leftrightarrow\\
&((a\sqrt{3})^2+2(a\sqrt{3})(b\sqrt{2})+(b\sqrt{2})^2+((a\sqrt{2})^2-2(a\sqrt{2})(b\sqrt{3})+(b\sqrt{3})^2)=125\\
&(3a^2+2ab\sqrt{6}+2b^2)+(2a^2-2ab\sqrt{6}+3b^2)=125\Leftrightarrow\\
&3a^2+2\sqrt{6}ab+2b^2+2a^2-2\sqrt{6}ab+3b^2=125\Leftrightarrow\\
&3a^2+2b^2+2a^2+3b^2=125\Leftrightarrow\\
&5a^2+5b^2=125\Leftrightarrow\frac{5(a^2+b^2)}{5}=\frac{125}{5}\Leftrightarrow\\
&a^2+b^2=25\Leftrightarrow a^2+b^2=5^2
\end{aligned}$$

Εικόνα 1. Μαθητής [81] : Απάντηση στο ερώτημα A1 (μεταγραφή του χειρόγραφου)

Η απάντηση του μαθητή [81] χαρακτηρίσθηκε D.T.. Η απάντηση περιέχει μια αμελητέα ανακρίβεια (λανθασμένη αναγραφή του εκθέτη 2 έξω από την παρένθεση στη δεύτερη γραμμή) στην κατά τα άλλα ορθή απόδειξη κατά την οποία γίνεται σωστή χρήση του συμβόλου της λογικής ισοδυναμίας, παρότι οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου δεν έχουν διδαχθεί συστηματικά τη χρήση του. Επομένως ο μαθητής [81] επιδεικνύει υψηλό βαθμό δεξιότητας.

Ο ίδιος μαθητής απαντά το A3α και A3β ως εξής:

(α) Η σχέση πρέπει να αποδειχθεί χωρίς να αντικαταστήσουμε τα α και β με αριθμητικές τιμές. Έπειτα από την απόδειξη μπορούμε να αντικαταστήσουμε για να

επαληθεύσουμε το συμπέρασμά μας $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\beta^2 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$

(β) Ναι, αυτός μας το έμαθε!

Στο (β) φαίνεται ο μαθητής να αναφέρεται σε μια αυθεντία (EC.A.). Στο (α) αποδίδεται μια σαφής προτεραιότητα στο παραγωγικό αποδεικτικό σχήμα (D.T.) αλλά με παράλληλη αναγνώριση του ότι η αριθμητική αντικατάσταση (E.I.) ενισχύει τον ισχυρισμό του παραγωγικού επιχειρήματος. Δηλαδή, μέσα στις λίγες γραμμές του γραπτού του μαθητή γινόμαστε μάρτυρες μιας σύγκρουσης προτεραιοτήτων σχετικά με το τι αποτελεί αποδεκτή απόδειξη: αυθεντία του καθηγητή, παραγωγικός συλλογισμός και πειστικότητα του παραδείγματος.

Ο μαθητής [19] απαντά το Α1 όπως φαίνεται στην Εικόνα 2. Η απάντηση του μαθητή [19] χαρακτηρίστηκε ως EC.NRS.. Στην 3η και την 5η γραμμή ο μαθητής διαπράττει το γνωστό σφάλμα ότι η τετραγωνική ρίζα μιας διαφοράς είναι ίση με τη διαφορά των τετραγωνικών ριζών. Στην 4η γραμμή ο μαθητής επίσης ισχυρίζεται ότι τετραγωνική ρίζα του a^2 είναι ίση προς a αντί ίση προς $|a|$ αγνοώντας ότι $(-a)^2=a^2$. Στην 6η γραμμή τα a και b αντικαθίστανται αντίστοιχα με 5-b και 5-a. Από την 7η γραμμή και πέρα ο μαθητής εφαρμόζει την «ιδιότητα» το τετράγωνο αθροίσματος/διαφοράς

$$5^2=a^2+b^2 \qquad 5^2-a^2=b^2$$
$$5^2-b^2=a^2 \qquad 25-a^2=b^2$$
$$25-b^2=a^2 \qquad 5-a=b$$
$$\sqrt{25-b^2}=a$$
$$5-b=a$$
$$\left[(5-b)\sqrt{3}+(5-a)\sqrt{2}\right]^2+\left[(5-b)\sqrt{2}-(5-a)\sqrt{3}\right]^2=125$$
$$\left[(5-b)^2\sqrt{3}^2+(5-a)^2\sqrt{2}^2\right]+\left[(5-b)^2\sqrt{2}^2-(5-a)^2\sqrt{3}^2\right]=125$$
$$\left[(25-b^2)3+(25-a^2)2\right]+\left[(25-b^2)2-(25-a^2)3\right]=125$$
$$\left[(75-3b^2)+(50-2a^2)\right]+\left[(50-2b^2)-(75-3a^2)\right]=125$$
$$(75+50-3b^2-2a^2)+(50-75-2b^2+3a^2)=125$$
$$(125-3b^2-2a^2)+(-25-2b^2+3a^2)=125$$
$$125-3b^2-2a^2-25-2b^2+3a^2=125$$
$$-5b^2+a^2+120=125$$

Εικόνα 2: Μαθητής [19] : Απάντηση στο ερώτημα Α1 (μεταγραφή του χειρόγραφου)

είναι ίσο προς το άθροισμα/τη διαφορά των τετραγώνων επαναληπτικά μέχρι την 13η γραμμή οπότε εγκαταλείπει την αποδεικτική προσπάθεια. Σε όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις ο μαθητής φαίνεται ότι αποδίδει γραμμικές ιδιότητες στην τετραγωνική ρίζα αθροισμάτων και διαφορών.

Ο μαθητής [19] δίνει τις ακόλουθες απαντήσεις στα Α3α και Α3β:

(α) Ένας τρόπος για να δούμε αν ισχύει μια ταυτότητα είναι να βάλουμε οποιεσδήποτε τιμές στις μεταβλητές, ωστόσο δεν θα την έχουμε αποδείξει.

(β) Όχι δεν θα συμφωνούσε μαζί τους για τον παραπάνω λόγο.

Στο (α) ο μαθητής διαχωρίζει με σαφήνεια τον έλεγχο της ισχύος της ταυτότητας για ιδιαίτερες περιπτώσεις (E.I.) και υπογραμμίζει ότι τέτοιος έλεγχος δεν αποτελεί απόδειξη (D.T.). Στο (β) αναμένει ότι ο καθηγητής θα δώσει απάντηση στο ίδιο πνεύμα (D.T.). Έτσι ενώ η δεξιότητα του μαθητή φαίνεται στο A1 περιορισμένη, κυρίως λόγω της κακής χρήσης του συμβόλου της ρίζας, στο A3 η ιδέα που έχει για το τι αποτελεί μια αποδεκτή απόδειξη, η εκτίμηση εκ μέρους του φαίνεται μάλλον ισχυρή.

Ο μαθητής [74] απαντά το A2α ως εξής:

$\kappa^2-\lambda^2=\kappa+\lambda$

$(\kappa-\lambda)(\kappa+\lambda)=\kappa+\lambda$

Άρα για να είναι ίσο το $(\kappa-\lambda)(\kappa+\lambda)$ ίσο με $(\kappa+\lambda)$, θα πρέπει το $(\kappa-\lambda)$ να είναι ίσο με 1.

Επομένως $\lambda+1=\kappa$ και $\kappa-1=\lambda$

Στις δυο πρώτες γραμμές ο μαθητής αντικαθιστά το $\kappa^2-\lambda^2$ με $(\kappa-\lambda)(\kappa+\lambda)$ και καταλήγει στην $(\kappa-\lambda)(\kappa+\lambda)= \kappa+\lambda$. Κατόπιν ισχυρίζεται ότι για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει το $(\kappa-\lambda)$ να είναι ίσο με τη μονάδα. Στην επόμενη γραμμή δίνει σωστές ισότητες μεν, οι οποίες όμως δε χρειάζονται διότι έχει ήδη αποδείξει το ζητούμενο. Η απάντηση χαρακτηρίσθηκε ως D.T..

Ο ίδιος μαθητής απαντά στο A3α ως εξής (στο (β) απλώς αναφέρει ότι ο καθηγητής δεν θα συμφωνούσε):

(α) Αν και οι πειραματισμοί που έκαναν με τους αριθμούς έδειξαν ότι η σχέση αυτή ισχύει δεν σημαίνει ότι το έχουν αποδείξει. Για να το αποδείξουν θα πρέπει να λύσουν την εξίσωση και να έχουν πει εξαρχής ότι τα a και b μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή. Αλλιώς θα μπορεί να θεωρηθεί και τυχαίο το γεγονός ότι η σχέση ίσχυε με τους αριθμούς που επέλεξαν.

Πλην αδόκιμων διατυπώσεων (π.χ. «…πρέπει να λύσουν την εξίσωση») η απάντηση του μαθητή χαρακτηρίσθηκε D.T. και φέρει ουσιαστικά και ικανά στοιχεία εκτίμησης.

Στα τρία παραδείγματα απαντήσεων των A1, A2 και A3 παρατηρείται το ακόλουθο φάσμα απαντήσεων: (1) Υψηλή δεξιότητα αλλά λιγότερο ισχυρή εκτίμηση (μαθητής [81]). (2) Περιορισμένη δεξιότητα αλλά ισχυρή εκτίμηση (μαθητής [19]). Τέλος, (3) (μαθητής [74]) υψηλή δεξιότητα και ισχυρή εκτίμηση. Η πρώτη και η τρίτη περίπτωση δεν προκαλούν ιδιαίτερη εντύπωση και συχνά αναφέρονται σε ερευνητικές εργασίες σχετικές με την ανάπτυξη αντιλήψεων των μαθητών αναφορικά με την απόδειξη (π.χ. Healy & Hoyles, 2000). Ο σημαντικός αριθμός

απαντήσεων της δεύτερης κατηγορίας (περιορισμένη δεξιότητα, υψηλή εκτίμηση) και η φύση των απαντήσεων αυτών σχολιάζονται συνοπτικά παρακάτω.

ΤΕΛΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάσαμε αποτελέσματα ενός τεστ Άλγεβρας που αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης μελέτης των αναπτυσσόμενων αντιλήψεων μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου σχετικά με την απόδειξη. Το ενδιαφέρον μας εστιάστηκε στις ενδείξεις δεξιότητας και εκτίμησης όπως εκδηλώνονται στις απαντήσεις 85 μαθητών στα ερωτήματα του τεστ. Το εργαλείο ανάλυσης ήταν η ταξινομία των Harel και Sowder (1998, 2007) η οποία θεμελιώθηκε σε δεδομένα από ένα εντελώς διαφορετικό πολιτισμικό και εκπαιδευτικό περιβάλλον (τριτοβάθμια εκπαίδευση στις ΗΠΑ). Μια θεωρητική και μεθοδολογική παρατήρηση που αναδύεται από την ανάλυσή μας είναι η ενίσχυση της εγκυρότητας της ταξινομίας σε ένα διαφορετικό εκπαιδευτικό περιβάλλον, στην περίπτωσή μας της Ελλάδας.

Εστιάσαμε στο γεγονός της συνύπαρξης χαμηλής αποδεικτικής δεξιότητας και υψηλής εκτίμησης ορθών αποδεικτικών διαδικασιών. Είναι πέρα από τα όρια της παρούσας εργασίας να συμπεριλάβει αποτελέσματα και από τη Γεωμετρία. Πάντως η μέχρι τώρα ανάλυσή μας φαίνεται να αποκαλύπτει μια ελαφρά καλύτερη απόδοση των μαθητών στη Γεωμετρία. Κατά τη μελέτη των ευρύτερων δεδομένων μας ενδιαφερόμαστε να αναγνωρίσουμε πιθανές αιτίες για τις διαφορές μεταξύ δεξιότητας και εκτίμησης και μεταξύ Άλγεβρας και Γεωμετρίας. Υπάρχουν πάντως σοβαρές ενδείξεις στα γραπτά των μαθητών του ρόλου της εκπαιδευτικού στη καλλιέργεια ιδεών σχετικών με το τι είναι αποδεκτή απόδειξη στα Μαθηματικά καθώς και στην ανάπτυξη υψηλής εκτίμησης. Αυτό που φαίνεται πως μπορεί να ειπωθεί για το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων, και είναι ένα πιθανώς γενικεύσιμο συμπέρασμα της ανάλυσής μας, είναι πως η υψηλή εκτίμηση μπορεί να αναπτυχθεί από τα πρώιμα στάδια επαφής με τη μαθηματική απόδειξη ακόμη και αν η δεξιότητα δεν αναπτύσσεται στον ίδιο βαθμό. Η εκπαιδευτικός στην περίπτωσή μας φαίνεται να έχει πετύχει στο να στρέψει την προσοχή ενός σημαντικού αριθμού μαθητών σε αποφασιστικής σημασίας χαρακτηριστικά της μαθηματικής απόδειξης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, v.III, (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, National Council of Teachers of Mathematics, (pp. 805-842).

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Heinze, A., & Kwak, J.Y. (2002). Informal prerequisites for informal proofs. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 34*(1), 9-16.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and Syntactic Proof Productions. *Educational Studies in Mathematics, 56*(2), 209-234.

ΙΚΑΝΟΤΗΤΕΣ ΠΑΙΔΙΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΗΛΙΚΙΑΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΧΩΡΙΚΟ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ

Πετρίδου Ανδρούλλα, Ηλία Ιλιάδα, Γαγάτσης Αθανάσιος

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

apetri02@ucy.ac.cy; elia.iliada@ucy.ac.cy; gagatsis@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα ποιοτική έρευνα, έχει ως σκοπό να εντοπίσει τις ικανότητες των παιδιών προσχολικής ηλικίας, διαφορετικών μαθηματικών επιδόσεων (ΜΕ), στον χωρικό προσανατολισμό. Έξι παιδιά ηλικίας 4 με 5 χρονών κλήθηκαν να εκτελέσουν και να παράγουν οδηγίες προσανατολισμού. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν σημαντικές διαφορές στις στρατηγικές προσανατολισμού σε κάθε επίπεδο ΜΕ. Συγκεκριμένα, τα παιδιά με πιο χαμηλό βαθμό ΜΕ δυσκολεύονται στη διεκπεραίωση των έργων. Τα παιδιά αυτά παράγουν εκτεταμένη χρήση δεικτικών χειρονομιών και προτιμούν να «πράττουν» παρά να «πουν». Αντιθέτως, τα παιδιά με υψηλό δείκτη ΜΕ χρησιμοποιούν δεικτικές και εικονικές χειρονομίες, με ευχέρεια στο λόγο.

1.ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

1.1 Χωρική Ικανότητα και Χωρικός Προσανατολισμός

Η αντίληψη του χώρου είναι δύσκολη έννοια. Πολλές φορές οι άνθρωποι χάνουν τον προσανατολισμό τους ή δίνουν οδηγίες τις οποίες είναι δύσκολο να ακολουθήσει κανείς ή εμπεριέχουν λάθη (Newcombe & Frick, 2010). Πολύ λίγες είναι οι έρευνες (π.χ. Clements, Sarama & DiBiase, 2004) συσχετισμού του χωρικού προσανατολισμού με τις ΜΕ των παιδιών προσχολικής ηλικίας. Οι έρευνες γύρω από το θέμα έγιναν σε πιο μεγάλες ηλικιακές ομάδες, όπου φαίνεται να υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των δύο παραμέτρων (Geary, Saults, Liu, & Hoard, 2000). Για το λόγο αυτό, η παρούσα μελέτη επιχειρεί να συσχετίζει τη χωρική ικανότητα με τη γενική ΜΕ των παιδιών νηπιοσχολικής ηλικίας.

Η χωρική αίσθηση είναι η ικανότητα «αντίληψης του εξωτερικού κόσμου» (Freudenthal, NCTM, 1989). Μια πλειάδα ερευνών υποστηρίζουν την ύπαρξη σχέσης μεταξύ της χωρικής ικανότητας και της ΜΕ (π.χ. Guay & McDaniel, 1977). Σύμφωνα και με το NCTM (2000), η ικανότητα των παιδιών προσχολικής ηλικίας να αντιλαμβάνονται χωρικές δομές είναι πολύ σημαντική για την ανάπτυξη των γενικών μαθηματικών ικανοτήτων.

Η έννοια της χωρικής ικανότητας ορίζεται από τους Clements κ. ά. (2004), ως η γνώση του πού βρίσκεται το άτομο και πώς να περιηγηθεί στο κόσμο, το οποίο αφορά την κατανόηση και την διαχείριση των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ διαφορετικών θέσεων στο χώρο. Οι Hegarty και Waller (2004), αναφέρουν ότι ο όρος αυτός αφορά την ικανότητα αλλαγής του εγωκεντρικού προσανατολισμού του ατόμου ανάλογα με το χώρο, κρατώντας σταθερές τις σχέσεις του χώρου και του αντικειμένου. Οι προσανατολιστικές οδηγίες χώρου στηρίζονται στην επεξεργασία των σχέσεων μεταξύ διαφορετικών θέσεων στο χώρο, σε σχέση με τη θέση του ατόμου στο χώρο αυτό (Clements, 2004).

Τα παιδιά προσχολικής ηλικίας, όπως αναφέρει το TAL (teaching/learning trajectory for geometry), πρέπει να έρθουν σε επαφή με την έννοια του προσανατολισμού (Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2008) από πολύ νωρίς. Με τον προσανατολισμό τα παιδιά μαθηματικοποιούν τις εμπειρίες τους. Χρησιμοποιούν και δημιουργούν απλούς χάρτες πλοήγησης και αρχίζουν να σχηματίζουν νοερές αναπαραστάσεις του χωρικού περιβάλλοντος τους (Clements κ.ά., 2004). Όσο πιο μικρά είναι τα παιδιά τόσο πιο αόριστες είναι αυτές οι αναπαραστάσεις τους, οι οποίες είναι περισσότερο χωρικά προσανατολισμένες παρά οπτικά. Παρόλα αυτά, οι δυσκολίες των παιδιών στις έννοιες αυτές ποικίλουν και πηγάζουν από την πλειάδα των χωρικών λέξεων (Rieser, Garing, & Young, 2004), από την εγωκεντρική τους τάση να συσχετίζουν αντικείμενα με τη δική τους προοπτική (Newcombe & Huttenlocher, 1992) και τέλος, από τις στατικές νοερές εικόνες που φτιάχνουν στο μυαλό τους, οι οποίες έχουν συγκεκριμένη προοπτική του χώρου και δεν επιδέχονται τροποποίηση (Clements et al., 2004). Οι Clements κ.ά. (2004), αναφέρουν ότι μέσα από τη χρήση υπολογιστικών μοντέλων και ρομπότ τα παιδιά μπορούν να ενισχυθούν στην αντίληψη, ανάπτυξη εννοιών χώρου και στην εκτέλεση οδηγιών, αλλά και στην παραγωγή δυναμικών εικόνων.

1.2 Χειρονομίες και Χωρική Ικανότητα

Συχνά, οι έννοιες του χώρου παρουσιάζονται από τους ανθρώπους εκτός από τη γλώσσα, και με χειρονομίες (Ehrlich, Levine, & Goldin-Meadow, 2006). Οι χειρονομίες ορίζονται ως οι αυθόρμητες κινήσεις των χεριών και των μπράτσων που συγχρονίζονται με τη ροή της ομιλίας (McNeill, 1992). Ο McNeill (1992) καταλήγει σε τέσσερις κατηγορίες χειρονομιών: τις δεικτικές, τις εικονικές, τις μεταφορικές και τις επαναλαμβανόμενες. Ειδικότερα, οι δεικτικές χειρονομίες, αφορούν πραγματικά αντικείμενα και ενέργειες στο χώρο και καθορισμός της θέσης τους, ενώ οι εικονικές χειρονομίες είναι στενά συνδεδεμένες με το σημασιολογικό περιεχόμενο της ομιλίας, αφού αναπαριστούν οπτικά το περιεχόμενο πραγματικών οντοτήτων και ενεργειών.

Πληθώρα ερευνητών, όπως ο Alibali (2005), τονίζουν ότι οι χειρονομίες αποτελούν μέσο μεταφοράς χωρικών μηνυμάτων, οι οποίες βοηθούν στην ενεργοποίηση νοερών εικόνων και στο χειρισμό τους στην εργαζόμενη μνήμη. Όμοια και οι Newcombe και Frick (2010), προσθέτουν ότι οι κινήσεις των χεριών βοηθούν τα παιδιά να

προσομοιώνουν τους μετασχηματισμούς στο χώρο. Τέλος, οι Elia, Gagatsis, Michael, Georgiou και Van den Heuvel-Panhuizen (2011), ανέδειξαν τη θετική συσχέτιση ανάμεσα στη χωρική σκέψη και στις χειρονομίες στην προσχολική ηλικία.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η διερεύνηση των συμπεριφορών παιδιών προσχολικής ηλικίας, με διαφορετικές μαθηματικές επιδόσεις (ΜΕ), στο χωρικό προσανατολισμό. Ειδικότερα, η έρευνα εστιάζει σε παιδιά ηλικίας 4-5 χρονών και θέτει τα εξής ερευνητικά ερωτήματα: (1) Ποια είναι η συμπεριφορά των παιδιών διαφορετικής ΜΕ κατά την εκτέλεση προφορικών οδηγιών για προσανατολισμό στο χώρο, με ίδιο ή διαφορετικό σημείο αναφοράς; (2) Ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν τα παιδιά με διαφορετική ΜΕ σε έργα παραγωγής προφορικών οδηγιών για τον προσανατολισμό στο χώρο, με ίδιο ή διαφορετικό σημείο αναφοράς;

Το χρονικό πλαίσιο διεξαγωγής της έρευνας ήταν οι μήνες Οκτώβριος και Νοέμβριος 2013. Το δείγμα της έρευνας αποτελούν 6 παιδιά προσχολικής ηλικίας διαφορετικών ΜΕ (βλ. πίνακα 1).

Πίνακας 1: Δημογραφικά Στοιχεία Υποκειμένων.

Ψευδώνυμο	Βάλια	Νικόλας	Νεφέλη	Ζωή	Αντρέας	Κυριάκος
Φύλο	Κορίτσι	Αγόρι	Κορίτσι	Κορίτσι	Αγόρι	Αγόρι
Ηλικία	4 χρ.	$4\frac{11}{12}$ χρ.	$4\frac{1}{2}$ χρ.	$4\frac{10}{12}$ χρ.	$4\frac{2}{12}$ χρ.	5 χρ.
Μαθηματική Επίδοση	87	82	108	109	127	113

2.1 Εργαλεία Συλλογή Δεδομένων

Τα εργαλεία συλλογή δεδομένων ήταν τέσσερις δραστηριότητες χωρικού προσανατολισμού και το τεστ μαθηματικών ικανοτήτων ΤΕΜΑ – 3. Τα προαναφερθέντα έγιναν εξατομικευμένα στο κάθε παιδί.

Πραγματοποιήθηκαν τέσσερις δραστηριότητες ιεραρχικά διαβαθμισμένες, με τη βοήθεια της «Bee Bot» (Focus Educational Software Ltd), ένα μικρό ρομπότ σε σχήμα μέλισσας, που προγραμματίζεται για να εκτελέσει κάποια βήματα στο χώρο. Οι δραστηριότητες στηρίχθηκαν στα εξελικτικά στάδια των δράσεων της Τζεκάκη (2010) και των Clements κ.ά. (2004). Ειδικότερα, ασχολείται με δύο από τις τέσσερις δράσεις της Τζεκάκη (2010), τη δράση «ψάχνω να βρω» και την «κάνω μια διαδρομή». Δινόταν ένα σενάριο κρυμμένου θησαυρού με πρωταγωνιστές το παιδί και μία μέλισσα (Bee Bot). Η $1^{η}$ και η $4^{η}$ δραστηριότητα αφορούσε την εκτέλεση οδηγιών από τα παιδιά έχοντας παιδί και ερευνητής τη μία ίδιο («ψάχνω να βρω»,

π.χ. Στρίψε στα δεξιά σου) και την άλλη διαφορετικό («κάνω μια διαδρομή», π.χ. Στρίψε στα δεξιά μου) προσανατολισμό, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, η ερευνήτρια έκρυβε το μέλι και το παιδί έπρεπε να ακολουθήσει τις οδηγίες της για να το βρει. Η $2^{η}$ και η $3^{η}$ δραστηριότητα ασχολείτο με την παραγωγή οδηγιών από το παιδί προς τη μέλισσα έχοντας παιδί και μέλισσα τη μία ίδιο και την άλλη διαφορετικό προσανατολισμό, αντίστοιχα. Ειδικότερα, το παιδί έκρυβε το μέλι και έδινε οδηγίες στο ρομπότ -μέλισσα- να το βρει. Κατά τη διάρκεια εκτέλεσης των δραστηριοτήτων, τα παιδιά βιντεοσκοπούνταν και για την ανάλυση των δεδομένων τα συγκεκριμένα βίντεο τους απομαγνητοφωνήθηκαν.

Το σταθμισμένο τεστ μαθηματικών ικανοτήτων ΤΕΜΑ - 3 (Test of Early Mathematics Ability – Third Edition) με προέλευση τις ΗΠΑ εφαρμόζεται σε παιδιά 3-8 χρονών. Η συγγραφική ομάδα του τεστ είναι Ginsburg και Baroody (2003). Ο μέσος όρος επίδοση στο τεστ είναι 90 – 110.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1 Συμπεριφορά κατά την Εκτέλεση Προφορικών Οδηγιών

Η απομαγνητοφώνηση και η ανάλυση των δεδομένων της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ δραστηριότητας οδήγησε σε επίπεδα και στρατηγικές εκτέλεσης προφορικών οδηγιών των παιδιών. Τα επίπεδα εκτέλεσης προφορικών οδηγιών είναι: (1)Μη ακριβής εκτέλεση οδηγιών με λανθασμένο προσανατολισμό, (2)Ακριβής εκτέλεση οδηγιών με λανθασμένο προσανατολισμό, (3)Μη ακριβής εκτέλεση οδηγιών με σωστό προσανατολισμό, (4)Ακριβής εκτέλεση οδηγιών με σωστό προσανατολισμό. Με την έννοια «ακριβής» εννοούμε το παιδί να είναι ικανό να εκτελεί το σωστό αριθμό βημάτων, να σταματάει όταν ολοκληρώσει τα βήματα και να μη στρίβει το κορμί του σε μοίρες περισσότερες από τις $90^{ο}$.

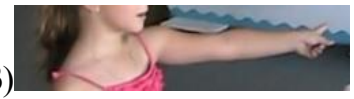
Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τα παιδιά είναι η καταμέτρηση των βημάτων που εκτελούν, η χρήση λεκτικών εκφράσεων και η παραγωγή δεικτικών και εικονικών χειρονομιών. Παρατίθενται, πιο κάτω, οι συμπεριφορές, ανά επίπεδο ΜΕ, των παιδιών αρχίζοντας από την πιο χαμηλή επίδοση στο ΤΕΜΑ.

Η Βάλια και ο Νικόλας είναι παιδιά με ΜΕ κάτω από το μέσο όρο. Οι συμπεριφορές τους παρουσιάζουν κοινά στοιχεία του $1^{ου}$ επιπέδου. Κατά την εκτέλεση οδηγιών με τον ίδιο ή διαφορετικό προσανατολισμό τα παιδιά δεν παρήγαγαν χειρονομίες και δε μετρούσαν τα βήματα τους. Τα παιδία δεν ανταποκρίνονται στους όρους «στρίψε» ή «ευθεία», αφού εκτελούν στροφές με μεγαλύτερο από το αναμενόμενο αριθμό μοιρών ή έκαναν αυθαίρετα βήματα προς κατευθύνσεις που δε συνάδουν με τις οδηγίες. Συγκεκριμένα, ο Νικόλας όταν καλέστηκε να στρίψει δεξιά έκανε στροφή

180^o και περπάτησε 3 βήματα, ενώ η Βάλια γύρισε 45^o αριστερά και έκανε 2 βήματα. Οι συμπεριφορές των παιδιών διαφοροποιούνται κατά την εκτέλεση οδηγιών με διαφορετικό προσανατολισμό. Το κορίτσι παρατηρείται να έχει βελτιωμένη αντίληψη της αρίθμησης των βημάτων του, εφόσον εκτελεί τις οδηγίες πιο καλά από προηγουμένως και εύλογα μπορεί να χαρακτηριστεί ότι ικανοποιεί τα χαρακτηριστικά του $2^{ου}$ επίπεδο. Παρόλα αυτά, δε στρίβει το κορμί της όταν η οδηγία το απαιτεί, αλλά κάνει πλάγια βήματα. Ο Νικόλας, από την άλλη, δε βελτιώνει τις στρατηγικές που χρησιμοποιεί, αλλά εξακολουθεί να κάνει περισσότερα βήματα προς αυθαίρετες εγωκεντρικές κατευθύνσεις (δηλαδή κατευθύνσεις που ο ίδιος επιθυμεί από ένστικτο), παραμένοντας στο 1^o επίπεδο.

Η Νεφέλη και η Ζωή έχουν δείκτη ΜΕ στο μέσο όρο. Η Νεφέλη, αρχικά, εκτελεί οδηγίες στο σωστό προσανατολισμό, αλλά πραγματοποιεί περισσότερα βήματα από όσα ζητούνται, χρησιμοποιεί 6 δεικτικές χειρονομίες και εκφράζεται λεκτικά μόνο 2 φορές. Τα λεγόμενα της κάποιες φορές ταυτίζονται με τις πράξεις τις (βλ. εικόνα 1α, δηλ. λέει δεξιά και δείχνει δεξιά) και κάποιες όχι (βλ. εικόνα 1β, δηλ. λέει δεξιά και δείχνει αριστερά). Στην $3^η$ δραστηριότητα το κορίτσι μετρά τα βήματα της και εκτελεί με επιτυχία τις οδηγίες με διαφορετικό προσανατολισμό. Κάνει χρήση 2 δεικτικών χειρονομιών. Συνεπώς, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι πληρεί περισσότερο χαρακτηριστικά του $4^{ου}$ επίπεδου.

Εικόνα 1: Δεικτικές χειρονομίες Νεφέλης (α) δεξιά (β) δεξιά.

(α)  (β) 

Από την άλλη, η Ζωή δυσκολεύεται να εκτελέσει σωστά τις λεκτικές οδηγίες της ερευνήτριας. Κάνει περισσότερα βήματα και χρησιμοποιεί 2 δεικτικές χειρονομίες. Όταν καλείται να στρίψει «δεξιά» αυτή στρίβει «αριστερά» και κάνει στροφή με περισσότερες μοίρες (180^o). Το κορίτσι έχει χαρακτηριστικά του $3^{ου}$ επιπέδου. Στη $3^η$ δραστηριότητα, το κορίτσι εκτελεί τις οδηγίες με μεγαλύτερη ακρίβεια και μετράει τα βήματα της. Δε χρησιμοποίησε λεκτική έκφραση, ούτε χειρονομίες και εκτελεί με επιτυχία τις οδηγίες με διαφορετικό προσανατολισμό, περνώντας στο 4^o επίπεδο.

Ο Αντρέας και ο Κυριάκος έχουν ΜΕ πάνω από το μέσο όρο. Ο Αντρέας, αρχικά, έκανε πλάγια βήματα προς την κατεύθυνση που του ζητείτο, αλλά αργότερα εκτέλεσε τις οδηγίες με ακρίβεια. Βρήκε γρήγορα το θησαυρό, χωρίς χειρονομίες ή λεκτικές εκφράσεις. Στη $3^η$ δραστηριότητα, μετράει τα βήματα που κάνει και κάνει μία δεικτική χειρονομία στα αριστερά του, που ταυτίζεται με την οδηγία της ερευνήτριας «Στρίψε στα δεξιά μου». Έτσι, παρουσιάζει στοιχεία από το 4^o επίπεδο. Ο Κυριάκος, από την άλλη, ακολουθεί τις οδηγίες που του δίνονται με άνεση. Στο σημείο που δυσκολεύεται παράγει μία δεικτική χειρονομία προς τα δεξιά, που συνάδει με τη λεκτική οδηγία. Δεν εκφράζεται λεκτικά. Μερικές φορές, κατά την εκτέλεση οδηγιών από διαφορετικό προσανατολισμό το αγόρι δε στρίβει το κορμί

του και πηγαίνει ευθεία προς την σωστή κατεύθυνση. Τα στοιχεία αυτά τον οδηγούν στο 4ο επίπεδο εκτέλεσης προφορικών οδηγιών.

3.2 Στρατηγικές Παραγωγής Προφορικών Οδηγιών

Στη 2η και 4η δραστηριότητα διαφάνηκαν επίπεδα και στρατηγικές των παιδιών κατά την προσέγγιση της έννοια αυτή. Τα επίπεδα παραγωγής προφορικών οδηγιών είναι: (1) «Πράττουν» αντί να «πουν»: Μετακίνηση από τη θέση του παιδιού στη θέση που βρίσκεται το μέλι, (2) Δεικτικές Χειρονομίες, (3) Εικονικές Χειρονομίες διαδρομής, (4) Μη ακριβής Λεκτική Παραγωγή Οδηγιών, (5) Ακριβής Λεκτική Παραγωγή Οδηγιών. Με την έκφραση «ακριβής» εννοούμε την έκφραση του αριθμού των βημάτων που έπρεπε να κάνει η μέλισσα και προς ποιο προσανατολισμό.

Ειδικότερα, η Βάλια κατά την παραγωγή οδηγιών χρησιμοποιεί 8 δεικτικές χειρονομίες και δεν εκφράζεται λεκτικά. Χαρακτηριστικό είναι ο διάλογος που ακολουθεί, όπου η Βάλια επιλέγει να «πράξει» παρά να πει με λόγια τις οδηγίες. Σχηματίζει νοητικά το μονοπάτι που πρέπει να ακολουθήσει η μέλισσα παράγοντας έτσι 2 εικονικές χειρονομίες (π.χ. βλ. εικόνα 2α).

> «Όχι, έτσι έτσι [παράγει εικονικές χειρονομίες] και μετά στρίφκει … να πάει [σηκώνεται και περπατάει στο χώρο δείχνοντας τη διαδρομή που θα πρέπει να κάνει η μέλισσα για να βρει το μέλι της] έτσι έτσι και εν να το βρει το μέλι.»

Εικόνα 2: Εικονική χειρονομία (α) Βάλιας και (β) Ζωής.

(α)  (β) 

Το κορίτσι δίνει νύξη για τον προσανατολισμό που πρέπει να ακολουθήσει το ρομπότ, αλλά δεν μπορεί να τη ρυθμίσει, δεξιότητα 3ου επιπέδου. Νιώθοντας αδύναμη να συνεχίσει τη δραστηριότητα το κορίτσι κάλεσε την ερευνήτρια να πάρει τη θέση της μέλισσας και να την κατευθύνει για να βρει το μέλι. Λόγω δυσκολίας έκφρασης το κορίτσι πήρε την ερευνήτρια από το χέρι και την οδήγησε στο μέλι (επίπεδο 1). Το ίδιο μοτίβο ακολουθήθηκε και στην 4η δραστηριότητα, όπου το κορίτσι δυσκολεύτηκε πάρα πολύ. Στη δραστηριότητα αυτή χρησιμοποίησε 4 δεκτικές χειρονομίες. Το κορίτσι παίρνει στοιχεία από το 1ο και 3ο επίπεδο.

Ο Νικόλας ακολουθεί το ίδιο μοτίβο με τη Βάλια στην παραγωγή οδηγιών. Το παιδί δίνει οδηγίες που δε συνάδουν με τις 8 δεικτικές του χειρονομίες π.χ. κάνει δεικτική χειρονομία προς τα αριστερά και λέει ότι είναι το δεξιά. Επιλέγει να «πράττει» παρά να πει με λόγια τις οδηγίες, γι' αυτό μετακινεί τη μέλισσα με το χέρι του ή απομακρύνει αντικείμενα που της κλείνουν το δρόμο. Κατά την παραγωγή οδηγιών με διαφορετικό προσανατολισμό, ερχόταν συνεχώς κοντά στη μέλισσα, έδινε οδηγίες με ίδιο προσανατολισμό με αυτή και παρήγαγε άλλες 8 δεικτικές χειρονομίες που δεν ταυτίζονται με τα λεγόμενα του, π.χ. λέει δεξιά και δείχνει στα αριστερά της μέλισσας. Ο ίδιος παρουσιάζει στοιχεία από το 1ο, 2ο και 4ο επίπεδο.

Η Νεφέλη μετράει τα βήματα που βάζει στη μέλισσα και δεν παράγει δεικτικές χειρονομίες, αλλά μόνο λεκτικές εκφράσεις π.χ. «Τέσσερα βήματα.. δεξιά», γεγονός που μαρτυρεί ότι το κορίτσι βρίσκεται στο $4^{ο}$ επίπεδο. Στην παραγωγή οδηγιών από διαφορετικό προσανατολισμό το κορίτσι χρησιμοποιεί 4 δεικτικές χειρονομίες, που συμφωνούν με τα λεγόμενα της π.χ. «Να στρίψει δεξιά της» και κάνει δεικτική χειρονομία προς τα δεξιά της μέλισσας, τα οποία είναι τα αριστερά του κοριτσιού. Επομένως, το κορίτσι μπορεί να χαρακτηριστεί ως $5^{ου}$ επιπέδου, αφού κατονομάζει με ακρίβεια τα βήματα και την κατεύθυνση που θα πρέπει να ρυθμιστεί η μέλισσα.

Η Ζωή απαριθμεί τα βήματα της για να ρυθμίσει τη μέλισσα. Χρησιμοποίησε 8 δεικτικές χειρονομίες στην $1^{η}$ δραστηριότητα και 4 στην $3^{η}$, που δε συνοδεύονται με λεκτικές εκφράσεις της, αφού λέει δεξιά και δείχνει αριστερά της. Παρήγαγε 2 εικονικές χειρονομίες της διαδρομής που έπρεπε να ακολουθήσει η μέλισσα, λέγοντας τις εξής οδηγίες στη μέλισσα: «Πάεις τζαμέ (Πας εκεί) μπροστά, στρίφκεις (στρίβεις) [βλ. εικόνα 2β] δεξιά και μετά θα δεις ένα κόκκινο που θα είναι το μέλι σου». Εντυπωσιακό ήταν ότι όταν η μέλισσα βρήκε εμπόδιο στο δρόμο της, το μετακίνησε αντί να τη ρυθμίσει να περάσει από δίπλα του. Η Ζωή έχει στοιχεία από το $2^{ο}$, $3^{ο}$ και $4^{ο}$ επίπεδο.

Ο Αντρέας για να καθοδηγήσει τη μέλισσα παρήγαγε 4 δεικτικές χειρονομίες που συμφωνούν με τις λεκτικές του εκφράσεις (π.χ. δείχνει αριστερά και λέει αριστερά) στην $1^{η}$ και στη $3^{η}$ δραστηριότητα, αντίστοιχα. Ο Αντρέας χρησιμοποιεί και 3 εικονικές χειρονομίες, δύο εκ των οποίων ήταν στη $3^{η}$ δραστηριότητα. Παρουσιάζει χαρακτηριστικά από το $2^{ο}$, $3^{ο}$ και $5^{ο}$. Ο Κυριάκος, στην αρχή, παράγει 6 δεικτικές χειρονομίες που ταυτίζονται με τα λεγόμενα του π.χ. δείχνει δεξιά και λέει δεξιά. Ο Κυριάκος βρίσκεται στο $4^{ο}$ επίπεδο με στοιχεία από το $2^{ο}$ και στη $3^{η}$ δραστηριότητα μεταπηδάει στο $5^{ο}$ επίπεδο, αφού εκφράζεται πλέον με ακρίβεια, όπου χρησιμοποιεί και 2 δεικτικές χειρονομίες (π.χ. δείχνει και ονομάζει αριστερά της μέλισσας).

4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα επίπεδα που καθορίστηκαν για την κάθε πτυχή του φαινομένου φαίνεται να δείχνουν ξεκάθαρα τη διαφοροποίηση που υπάρχει μεταξύ παιδιών διαφορετικών ΜΕ. Τα παιδιά με υψηλή ΜΕ αντιδρούσαν καλύτερα στα χωρικά έργα, γεγονός που συνάδει και με τα λεγόμενα πλειάδας ερευνητών (π.χ. Guay & McDaniel, 1977). Γενικά, παρατηρήθηκε ότι οι λέξεις «δεξιά» και «αριστερά» μπερδεύουν τα παιδιά (Sarama & Clements, 2009). Η συνεχής μετακίνηση των παιδιών στο χώρο φάνηκε να βοηθάει στην ανάπτυξη του χωρικού προσανατολισμού και της επίδοσης τους σε έργα χωρικής αντίληψης (Frick & Wang, 2010), αφού εξελικτικά τα παιδιά κατονόμαζαν τις θέσεις των αντικειμένων στο χώρο με μεγαλύτερη ακρίβεια. Τα παιδιά όντως αρχίζουν σταδιακά να κάνουν δυναμικές τροποποιήσεις των νοερών τους εικόνων (Clements κ.ά., 2004).

Κατά την εκτέλεση προφορικών οδηγιών τα παιδιά δε συμπεριφέρονται το ίδιο όταν αλλάζει ο προσανατολισμός τους. Ειδικότερα τα παιδιά χαμηλών ΜΕ φαίνεται να δυσκολεύονται πολύ να ακολουθήσουν βασικές οδηγίες και οι αλλαγές στην συμπεριφορά τους αφορούν κυρίως την καταμέτρηση των βημάτων που εκτελούν. Φαίνεται να έχουν τις δικές τους πεποιθήσεις για το πού είναι το μέλι και να εμμένουν σε αυτές, με αποτέλεσμα να μην εκτελούν σωστά τις οδηγίες που τους δίνονται. Τα προαναφερθέντα είναι σημάδια ανωριμότητας και εγωκεντρισμού της ηλικίας τους (π.χ. Newcombe & Frick, 2010). Τα παιδιά με βαθμολογία ΜΕ στο μέσο όρο χρησιμοποιούν λίγες δεικτικές χειρονομίες, οι οποίες αρχικά δε συμπίπτουν με τις λεκτικές τους εκφράσεις και έπειτα με την αλλαγή του προσανατολισμού ταυτίζονται. Το γεγονός αυτό ταυτίζεται με το ότι οι χειρονομίες προωθούν τη βελτίωση των χωρικών ικανοτήτων (π.χ. Elia κ.ά., 2011). Αντιθέτως, τα παιδιά με ΜΕ πάνω από το μέσο όρο δεν εκφράζονται λεκτικά και εκτελούν τις οδηγίες στην αρχή με λιγότερη άνεση και αργότερα με μεγαλύτερη ακρίβεια, μετρώντας τα βήματα τους. Στην εξέλιξη των δραστηριοτήτων κάνουν χρήση δεικτικών χειρονομιών που ταυτίζονται με την ομιλία τους. Αυτό συνάδει με την άποψη των ερευνητών Alibali, Kita, & Young (2000), ότι η αντιστοιχία γλώσσας και χειρονομιών σημαίνει μετάβαση σε ανώτερα επίπεδα γνωστικής ανάπτυξης ή ανώτερα επίπεδα εκτέλεσης ενός έργου.

Κατά την παραγωγή οδηγιών τόσο τα παιδιά με ΜΕ κάτω από το μέσο όρο, όσο και τα παιδιά στο μέσο όρο παράγουν πολλές δεικτικές χειρονομίες, χωρίς να εκφράζονται ιδιαίτερα λεκτικά. Χρησιμοποιούσαν τις χειρονομίες πολλές φορές ως μέσω επικοινωνίας, λόγω του ότι η γλώσσα είναι εμπόδιο στα παιδιά αυτής της ηλικιακής ομάδας (Ehrlich κ.ά., 2006). Τα παιδιά με ΜΕ πάνω από το μέσο όρο ταυτίζουν τις δεικτικές χειρονομίες τους με την ομιλία τους. Τα παιδιά ανεξαρτήτου ΜΕ επιλέγουν κυρίως να «πράξουν» παρά να μιλήσουν (Rieser, Garing, & Young, 1994), και δυσκολεύονται να δώσουν οδηγίες διατηρώντας διαφορετικό προσανατολισμό.

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μέρος μιας πιο ευρείας κλίμακας έρευνας. Θα ήταν καλό να γίνει μία εστιασμένη μελέτη στο κάθε επίπεδο ΜΕ για την αποσαφήνιση των στρατηγικών που χρησιμοποιούν τα παιδιά στην προσπάθεια τους να προσανατολιστούν στο χώρο και πώς οι στρατηγικές αυτές αλλάζουν μέσω παρεμβατικής ενισχυτικής διδασκαλίας.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Alibali, M. W. (2005). Gesture in spatial cognition: Expressing, communicating, and thinking about spatial information. *Spatial Cognition and Computation*, *5*(4), 307-331.

Alibali, M. W., Kita, S., and Young, A. (2000). Gesture and the process of speech production: We think, therefore we gesture. *Language and cognitive processes, 15*: 593- 613.

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*, 7-72. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Clements, D. H., Sarama, J., & DiBiase, A. M. (Eds.). (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Routledge.

Ehrlich, S. B., Levine, S. C., & Goldin-Meadow, S. (2006). The importance of gesture in children's spatial reasoning. *Developmental psychology*, *42*(6), 1259.

Elia, I., Gagatsis, A., Michael, P., Georgiou, A., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2011). Kindergartners' use of gestures in the generation and communication of spatial thinking. *The 7th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 13:*1842-1851. Rzeszów, Poland: ERME.

Frick, A., & Wang, S. (2010). Round and round she goes: Effects of hands-on training on mental rotation in 13-to 16-month-olds. In *Poster presented at the XVIIth Biennial International Conference on Infant Studies, Baltimore*.

Geary, D. C., Saults, S. J., Liu, F., & Hoard, M. K. (2000). Sex Differences in Spatial Cognition, Computational Fluency, and Arithmetical Reasoning. *Journal of Experimental Child Psychology*, *77*, 337-353.

Ginsburg H. P., & Baroody A. J., (2003). *Test of Early Mathematics Ability – Third Edition (TEMA - 3).* Austin: PRO-ED, Inc.

Guay, R. B., & McDaniel, E. D. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 211-215.

Hegarty, M., &Waller, D. (2004). *A dissociation between mental rotation and perspective-taking spatial abilities.* Intelligence, 32, 175–191.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought.* Chicago: The University of Chicago Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989/ 2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Newcombe, N. S., & Frick, A. (2010). Early education for spatial intelligence: Why, what, and how. *Mind, Brain, and Education*, *4*(3), 102-111.

Rieser, J. J., Garing, A. E., & Young, M. F. (1994). Imagery, action, and young children's spatial orientation: It's not being there that counts, it's what one has in mind. *Child Development*, *65*(5), 1262-1278.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. Routledge, New York.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Buys, K. (Eds.) (2008). *Young children learn measurement and geometry. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. Rotterdam /Tapei: Sense Publishers.

Τζεκάκη, Μ., (2010). *Μαθηματική Εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία: Αλλάζοντας την τάξη των Μαθηματικών.* Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΩ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ (BAR MODEL)

Ζωγράφου Μαρία[1] & Κολέζα Ευγενία[2]

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Πατρών

[1]mirelazz91@yahoo.gr, [2] ekoleza@upatras.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

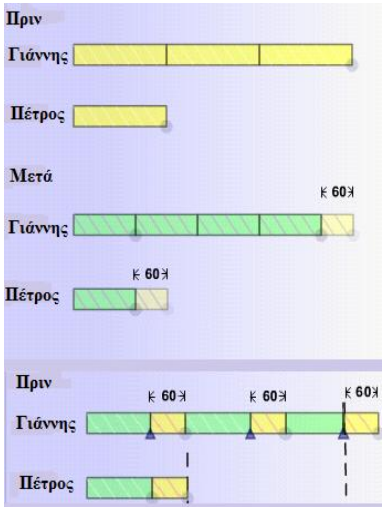
Η έρευνα που παρουσιάζεται αφορά την ικανότητα εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης να κατασκευάζουν οπτικές αναπαραστάσεις, προκειμένου να επιλύσουν μαθηματικά προβλήματα. Η εστίαση του ενδιαφέροντός μας ήταν στο βαθμό δυσκολίας τους για να διαχειριστούν ένα συγκεκριμένο αναπαραστασιακό μοντέλο-το Μοντέλο του Ορθογωνίου-. Δεδομένου ότι οι εκπαιδευτικοί δεν είχαν καμία εξοικείωση με αυτό το είδος αναπαράστασης, η έρευνα φέρνει στην επιφάνεια παραμέτρους που επηρεάζουν την «αυθόρμητη» χρήση αναπαραστάσεων, καθώς και παραμέτρους που επηρεάζουν την ικανότητα «αποκωδικοποίησης» της εκφώνησης και κατά προέκταση, επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος από τους εκπαιδευτικούς.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ικανότητα οπτικοποίησης είναι μια σημαντική ικανότητα για τη μάθηση και την εφαρμογή των Μαθηματικών (Billman, 1999, Stufflebeam, 1999). Η οπτική εικόνα της δομής του προβλήματος, εξωτερικευμένη υπό μορφή αναπαράστασης ή εσωτερικευμένη υπό τη μορφή "σχήματος", αποτελεί ουσιαστική παράμετρο της διαδικασίας επίλυσης ενός προβλήματος (Presmeg, 1986).

Το Μοντέλο του Ορθογωνίου (Μ.Ο.) είναι μια ιδιαίτερη μορφή αναπαράστασης των δεδομένων ενός προβλήματος, που εστιάζει στη δομή του προβλήματος και οπτικοποιεί τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών, ενισχύοντας με αυτόν τον τρόπο τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης των μαθητών (Yaep, 2010). Ένα βασικό χαρακτηριστικό του μοντέλου είναι η ανεξαρτησία του από τις τυποποιημένες μονάδες μέτρησης. Το μέγεθος των δομικών του μονάδων (επιμέρους ορθογωνίων), είναι κατά προσέγγιση. Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο λειτουργεί περισσότερο ως μοντέλο εννοιολογικής στήριξης και όχι ως εργαλείο ακριβούς μέτρησης και «ανάγνωσης» των αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, η αναπαράσταση του μεγέθους ...(έχω) «20 ευρώ», μπορεί να γίνει με ένα ορθογώνιο αυθαίρετου μήκους. Η ακρίβεια απαιτείται στην περίπτωση που θέλουμε να αναπαραστήσουμε σχέσεις μεταβλητών. Αυτός είναι και ο λόγος που συνιστάται η χρήση τετραγωνισμένου χαρτιού ή κατάλληλα σχεδιασμένου λογισμικού. Για παράδειγμα το πρόβλημα «*Ο Γιάννης έχει τριπλάσια*

χρήματα από το φίλο του τον Πέτρο. Αφού ξόδεψαν και οι δυο 60 ευρώ, ο Γιάννης βρέθηκε με τετραπλάσια χρήματα από το φίλο του. Πόσα χρήματα είχε αρχικά;», μπορεί να επιλυθεί μέσω του Μ.Ο. ως εξής (για λόγους περιορισμένου χώρου η διαδικασία κατασκευής τ



Η λύση που αναδύεται με βάση το Μ.Ο. είναι:

1 κίτρινη μπάρα = 1 πράσινη μπάρα+60, έτσι το πριν μοντέλο γίνεται όπως φαίνεται στο δίπλα σχήμα και προκύπτει ότι:

3 πράσινες μπάρες +(3Χ60)=4 πράσινες μπάρες +60.

Άρα *1 πράσινη μπάρα=120* και *1 κίτρινη μπάρα= 180.*

Έτσι τα χρήματα του Γιάννη αρχικά ήταν 3x180=540 €.

Από το παράδειγμα καθίσταται προφανές το ότι το Μ.Ο. αποτελεί ένα οπτικό εργαλείο που διευκολύνει την έκφραση των σχέσεων μεταξύ δυο μεταβλητών και επιτρέπει ένα ομαλό πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα.

Το Μ.Ο., αν και εισήχθη στις χώρες της ανατολικής Ασίας για πρώτη φορά γύρω στο 1983, σήμερα είναι ευρύτατα αποδεκτό και χρησιμοποιείται- ιδιαίτερα στη Σιγκαπούρη- από τους περισσότερους δασκάλους όλων των επιπέδων, διότι επιτρέπει στους μαθητές να επιλύουν προβλήματα που παραδοσιακά απευθύνονται σε μεγαλύτερες ηλικίες (Kho, 1987, Fong, 1994). Η χρήση του σε απλά προβλήματα προσθετικής δομής είναι εύκολη. Άλλωστε απλουστευμένες μορφές Μ.Ο. συναντάμε στα εγχειρίδια των μαθηματικών (ακόμα και σε εκείνα της Ελλάδας), ιδιαίτερα για να εκφραστούν σχέσεις μέρους-όλου. Η εφαρμογή του όμως σε συνθετότερα προβλήματα απαιτεί εξάσκηση, ιδιαίτερα σε ότι αφορά τη φάση που έπεται της αρχικής αναπαράστασης των δεδομένων του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, η οπτική αναπαράσταση ενός προβλήματος μπορεί να οπτικοποιεί απλά τη σχέση των μεταβλητών που υπεισέρχονται στην εκφώνηση (οι δυο πρώτες αναπαραστάσεις στην Εικόνα 1), αλλά η στρατηγική επίλυσης προκύπτει μετά από κατάλληλη αναδιαμόρφωση του Μ.Ο. Με άλλα λόγια, από τη στιγμή που έχεις φτιάξει το μοντέλο, έχεις βρει και τη λύση (Yan, 2002).

Η ΕΡΕΥΝΑ ΜΑΣ

Το ερέθισμα για την έρευνα προέκυψε μέσα από τη μελέτη των διαφόρων τύπων αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στα εγχειρίδια των Μαθηματικών του Δημοτικού Σχολείου. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι αναπαραστάσεις

προτείνονται ως «οπτικά» εργαλεία για την υποστήριξη της κατανόησης μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών. Δεν είναι, όμως, καθόλου προφανής η ικανότητα των μαθητών και των δασκάλων να «διαβάζουν» αυτές τις αναπαραστάσεις, και να τις ενσωματώνουν λειτουργικά στη διαδικασία μάθησης. Ακόμα λιγότερο προφανής είναι η ικανότητά τους να κατασκευάζουν αυτοί οι ίδιοι αναπαραστάσεις οι οποίες θα «μεταφράζουν» τα δεδομένα του προβλήματος και θα δρουν υποστηρικτικά στη διαδικασία επίλυσης.

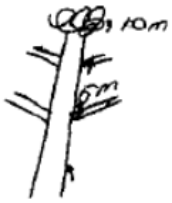
Τα δεδομένα που παρουσιάζουμε και αναλύουμε αποτελούν μέρος μιας ευρύτερης έρευνας που αφορά και τα δυο προηγούμενα σκέλη του προβληματισμού. Εδώ θα περιοριστούμε στο δεύτερο, και συγκεκριμένα στα ερευνητικά ερωτήματα:

- ***Με βάση ποιά κριτήρια αξιολογείται μια αναπαράσταση από τους δασκάλους;***
- ***Τι είδους αναπαραστάσεις χρησιμοποιούν οι δάσκαλοι για να «μεταφράσουν» τα δεδομένα ενός προβλήματος;***

Για να απαντήσουμε στα ερευνητικά ερωτήματα επιλέξαμε να διεξαγάγουμε μια ποσοτική έρευνα, η οποία περιλάμβανε τη διανομή και συλλογή ερωτηματολογίων με ερωτήσεις ανοικτού τύπου. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του περασμένου Απριλίου (Απρίλιος 2013) σε 7 δωδεκαθέσια σχολεία και σε 1 διθέσιο στην πόλη της Πάτρας. Αξίζει να αναφερθεί ότι οι δάσκαλοι δεν ήταν καθόλου πρόθυμοι να συμμετέχουν, θεωρώντας πιθανόν ότι αυτός ήταν ένας έμμεσος τρόπος αξιολόγησής τους. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι ενώ τους δόθηκε χρόνος 1 ημέρας για να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο, από τα 90 ερωτηματολόγια που μοιράσθηκαν επεστράφησαν μόνον τα 21. Η τεχνική της ποσοτικής μεθοδολογικής προσέγγισης που επιλέχθηκε είναι αυτή της *επισκόπησης*. Η τεχνική αυτή έχει περιγραφικό και επεξηγηματικό χαρακτήρα. Είναι μια συνήθης ποσοτική, περιγραφική τεχνική στην εκπαιδευτική έρευνα δεδομένου ότι «οι επισκοπήσεις συλλέγουν δεδομένα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό σημείο, αποσκοπώντας να περιγράψουν τη φύση των υπαρχουσών συνθηκών ή να εντοπίσουν σταθερές με βάση τις οποίες να μπορούν να συγκριθούν οι υπάρχουσες συνθήκες ή να προσδιορίσουν τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα σε συγκεκριμένα γεγονότα» (Cohen, Manion, 1994).

Το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους δασκάλους περιείχε 4 ανοιχτά ερωτήματα: Στο πρώτο ερώτημα δόθηκε μια αναπαράσταση που είχε γίνει από μαθήτρια του δημοτικού σε ένα απλό μαθηματικό πρόβλημα και ζητήθηκε από τους δασκάλους να την αξιολογήσουν και να παρουσιάσουν τη δική τους αναπαράσταση σε περίπτωση που δεν συμφωνούσαν με εκείνη της μαθήτριας. Στο δεύτερο ερώτημα

παρουσιάστηκε η αναπαράσταση μέσω της οποίας ένας μαθητής της Γ΄ τάξης του Δημοτικού σε σχολείο του εξωτερικού έλυνε ένα πρόβλημα. Στη συνέχεια, τους δόθηκε ένα παρόμοιο πρόβλημα και τους ζητήθηκε να εκτιμήσουν ποια θα ήταν η αναπαράσταση που ενδεχομένως θα χρησιμοποιούσε ένας μαθητής του ελληνικού σχολείου, καθώς και να προτείνουν μια δική τους αναπαράσταση για την επίλυση του προβλήματος. Στο τρίτο ερώτημα, οι δάσκαλοι έπρεπε να κατασκευάσουν οποιαδήποτε αναπαράσταση οι ίδιοι ήθελαν για να επιλύσουν δυο προβλήματα.

Προβλήματα προς επίλυση	
Πρόβλημα αναρρίχησης (1)	Ένα κοάλα θέλει να σκαρφαλώσει πάνω σε ένα δέντρο ύψους 10μ. Κάθε μέρα το κοάλα σκαρφαλώνει 5μ. αλλά κάθε βράδυ, ενώ κοιμάται, γλιστράει προς τα κάτω 4μ. Έτσι λοιπόν, σε πόσες μέρες θα φτάσει στην κορυφή του δέντρου;  (αυτή ήταν η αναπαράσταση της μαθήτριας)
Πρόβλημα διαφοράς βάρους (2)	Ο Άλεξ είναι 10 κιλά πιο βαρύς από τον Μπεν. Το συνολικό βάρος τους είναι 100 κιλά. Ποιό είναι το βάρος του Άλεξ;
Πρόβλημα ηλικιών (3α)	Η Μαρία είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από την ξαδέρφη της. Σε διάστημα 10 χρόνων, η συνολική τους ηλικία θα γίνει 32 χρόνια. Ποια είναι η τωρινή ηλικία της Μαρίας;
Πρόβλημα κλασμάτων (3β)	Η Άννα ξόδεψε τα 2/5 από τα χρήματά της για να αγοράσει ένα βραχιόλι και το 1/6 από τα χρήματα που της περίσσεψαν για ένα σάντουιτς. Τελικά, η Άννα έμεινε με 7,5 €. Πόσα ήταν τα χρήματα που ξόδεψε για το βραχιόλι;

Πίνακας 1: Ερωτήσεις που δόθηκαν

Να σημειωθεί ότι ανάλογη έρευνα πάνω στη χρήση του bar model από εκπαιδευτικούς δεν έχει συμβεί στο εξωτερικό. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι όμως η μελέτη περίπτωσης του 2005 από τους Fong και Lee σε μαθητές 10-11 χρονών και την επιτυχία τους σε αριθμητικά και αλγεβρικά προβλήματα κάνοντας χρήση της συγκεκριμένης μεθόδου.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

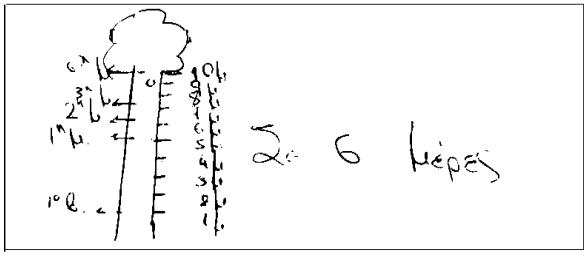
Αρχικά οι εκπαιδευτικοί ερωτήθηκαν για τα χρόνια προϋπηρεσία τους, σύμφωνα με τις απαντήσεις τους προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Χρόνια προϋπηρεσίας	1 έως 9 χρόνια	10 έως 19 χρόνια	20 χρόνια και πάνω
	13	5	3

Πίνακας 2: Ταξινόμηση ερωτηθέντων ως προς τα χρόνια προϋπηρεσίας τους

Ωστόσο επειδή το δείγμα ήταν μικρό, δεν μελετήσαμε ως προς αυτόν τον παράγοντα τις απαντήσεις τους, αλλά σε γενικές γραμμές μπορούμε να πούμε ότι ούτε οι μισοί σε κάθε κατηγορία δεν κατάφεραν να ανταποκριθούν στα 3 από τα 4 προβλήματα. Συγκεκριμένα 5 στους 13, 2 στους 5 και 1 στους 3 (γύρω στο 35-40% σε κάθε περίπτωση) προσέγγισαν με κάποιο τρόπο τα 3 από τα 4 προβλήματα. Επίσης, όσον αφορά την επαφή τους με τα μαθηματικά, κανείς δεν είχε ειδικευτεί σε αυτά, παρά μόνο ένας εκπαιδευτικός όπου είχε και πτυχίο στα μαθητικά αλλά άφησε το πρόβλημα ηλικιών αναπάντητο.

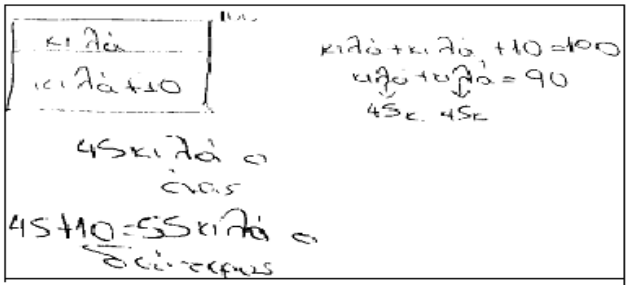
Στο πρόβλημα της αναρρίχησης, 13 στους 21 δασκάλους χαρακτήρισαν την εικονική αναπαράσταση της μαθήτριας ως *μη βοηθητική και ελλιπή*. Αντίθετα, στην ερώτηση: «*Τι θα προτείνατε εσείς αντί αυτής*»; μόλις 6 στους 21 απάντησαν χρησιμοποιώντας κατακόρυφη ή οριζόντια αριθμογραμμή.



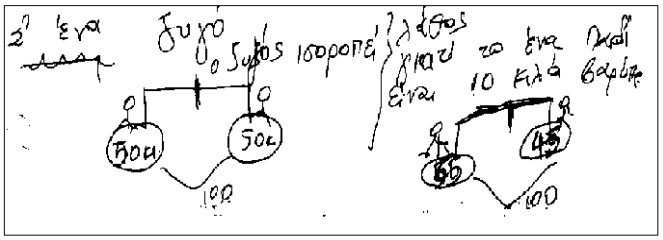
Εικόνα 1: Ενδεικτική απάντηση στο πρόβλημα της αναρρίχησης

Το πρόβλημα διαφοράς βάρους οι περισσότεροι δάσκαλοι (18 στους 21) το χαρακτήρισαν ως *δύσκολο ή αρκετά δύσκολο* δεδομένου ότι απαιτούσε την πράξη της διαίρεσης με την οποία δεν είναι ιδιαίτερα εξοικειωμένοι οι μαθητές της Γ΄ τάξης, αλλά κυρίως γιατί «*τα παιδιά δεν μπορούν απευθείας με τους αριθμούς που τους δίνονται από το πρόβλημα να καταλήξουν σε αποτέλεσμα*».

Μόνο 2 στους 21 υποστήριξαν ότι οι μαθητές τους είναι ικανοί να λύσουν το πρόβλημα, με τον τρόπο που φαίνεται στις Εικόνες 2 και 3.



Εικόνα 2: Αναπαράσταση που θυμίζει bar model και απεικονίζει τη σχέση Άλεξ= Μπεν +10



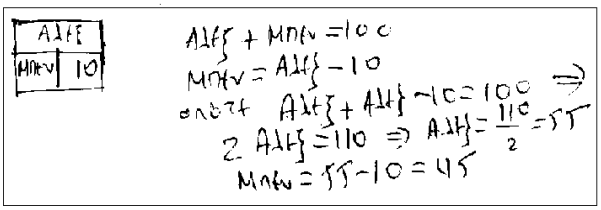
Εικόνα 3: Αναπαράσταση του προβλήματος με τη μορφή ζυγαριάς

Αναμέναμε πως στο τρίτο ερώτημα που οι εκπαιδευτικοί έπρεπε να κατασκευάσουν τη δική τους αναπαράσταση θα χρησιμοποιούσαν κατά κύριο λόγο το Μ.Ο., λόγω του υποδείγματος που τους είχε δοθεί στο πρώτο ερώτημα. Εντούτοις, μόνον οι μισοί από τους δασκάλους επέλεξαν να το χρησιμοποιήσουν.

Πρόβλημα διαφοράς βάρους	Bar model	Αριθμογραμμή	Σχεδιάγραμμα	Κάτι άλλο
	10	2	3	2

Πίνακας 3: Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποίησαν οι 17 στους 21 δασκάλους που απάντησαν

Από αυτούς που χρησιμοποίησαν το Μ.Ο., οι 5 απλώς «μετέφρασαν» την σχέση των ποσοτήτων της εκφώνησης και μόνον 2 οδηγήθηκαν στη λύση με «αλγεβρικό» τρόπο (Εικόνα 4).



Εικόνα 4: Απόδοση της σχέσης Άλεξ= Μπεν+10 και σωστή επίλυση προβλήματος

Ενώ οι άλλοι 5 έκαναν μια απεικόνιση που μπορούσε να τους οδηγήσει στη λύση αν την εφάρμοζαν σωστά (Εικόνα 5).



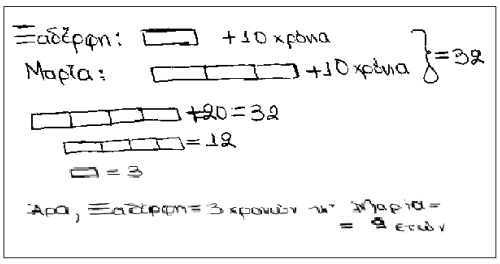
Εικόνα 5: Απεικόνιση του προβλήματος μέσω του Μ.Ο.

Η επίλυση του προβλήματος των ηλικιών μέσω μιας αναπαράστασης φάνηκε πως δυσκόλεψε αρκετά τους δασκάλους (Πίνακας 3).

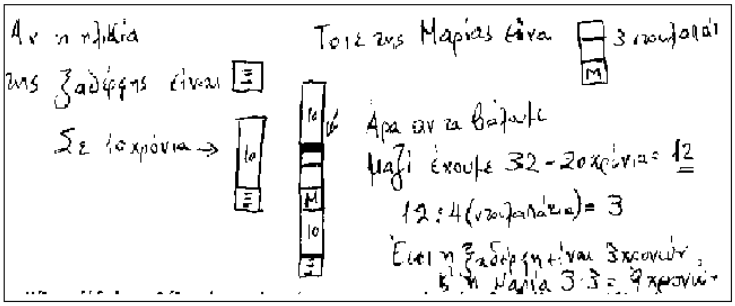
Πρόβλημα ηλικιών (απεικονίσεις δασκάλων)	Απεικόνιση που την εφάρμοσαν και οδηγήθηκαν στη λύση	Απεικόνιση σωστή που αν την εφάρμοζαν μπορεί να οδηγούνταν στη λύση	Απεικόνιση ΜΟΝΟΝ της σχέσης (τριπλάσια),και λάθος ερμηνεία της εκφώνησης	Απεικόνιση ΜΟΝΟΝ της σχέσης (τριπλάσια), και σωστή λύση	Απεικόνιση ΜΟΝΟΝ της σχέσης	Λύση μέσω εξίσωσης
	4	2	9	1	2	2

Πίνακας 4: Ο βαθμός επίδοσης των ερευνητικών υποκειμένων στο πρόβλημα ηλικιών (20 στους 21 απάντησαν)

Συγκεκριμένα, μόνον 4 εκπαιδευτικοί απεικόνισαν την κατάσταση που περιγράφεται στην εκφώνηση και μέσω αυτής οδηγήθηκαν στη λύση (Εικόνες 6 και 7), ενώ άλλοι 2, παρότι δημιούργησαν μια απεικόνιση δεν μπόρεσαν να την χρησιμοποιήσουν για να καταλήξουν σε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα.

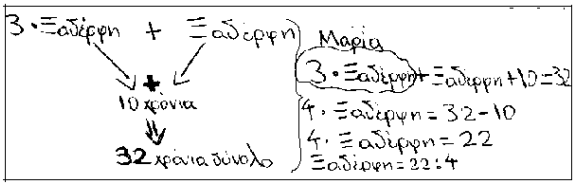


Εικόνα 6: Σωστή απεικόνιση και λύση με χρήση του Μ.Ο.



Εικόνα 7: Σωστή απεικόνιση και λύση με χρήση κάθετης μορφής Μ.Ο.

Παρουσιάζει ενδιαφέρον το γεγονός ότι περίπου οι μισοί από τους ερωτηθέντες, δεν μπορούσαν να εκφράσουν σωστά την αλγεβρική σχέση των δεδομένων του προβλήματος. Συγκεκριμένα, ενώ αναπαριστούν τη σχέση *«Η Μαρία είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από την ξαδέρφη της»* δεν μπορούσαν να αποδώσουν σχηματικά την πρόταση: *«Σε διάστημα 10 χρόνων, η συνολική τους ηλικία θα γίνει 32 χρόνια»*.(Εικόνα 8)



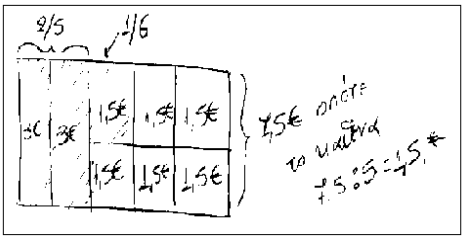
Εικόνα 8: Λανθασμένη ερμηνεία του διαστήματος των 10 χρόνων

Τέλος, στο πρόβλημα κλασμάτων, οι εκπαιδευτικοί απάντησαν αποκλειστικά με τη χρήση του Μ.Ο., εκτός από έναν που απάντησε με αριθμογραμμή. Πιο συγκεκριμένα:

Πρόβλημα κλασμάτων (απεικονίσεις δασκάλων)	Σωστή απεικόνιση και λύση του προβλήματος	Απεικόνιση με ορθογώνιο, χωρίς λύση	Λανθασμένη απεικόνιση ορθογωνίου	Συμβολική απεικόνιση και λύση μέσω εξίσωσης
	8	7	2	1

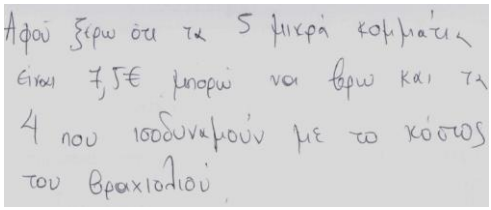
Πίνακας 5: Ο βαθμός επίδοσης των εκπαιδευτικών στο πρόβλημα κλασμάτων (18 στους 21 απάντησαν)

Οι εκπαιδευτικοί της πρώτης στήλης αξιοποίησαν το μοντέλο του ορθογωνίου, μέσω του οποίου έλυσαν το πρόβλημα. Χαρακτηριστικά:

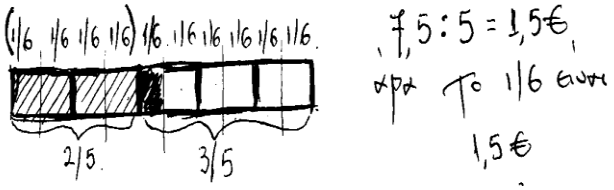


Εικόνα 9: Σωστή αναπαράσταση και απάντηση μέσω Μ.Ο.

Παρατήρησαν δηλαδή ότι το 1/6 των χρημάτων που περίσσεψαν (δηλαδή το 1/6 των 3/5) ήταν ίσο με το μισό του 1/5. Έφτασαν στη σωστή απάντηση παρατηρώντας την ισότητα των «δομικών μονάδων» του ορθογωνίου (το αρχικό τους σχήμα ήταν ένα ορθογώνιο χωρισμένο σε 5 «δομικές μονάδες»). Χαρακτηριστική ήταν η απάντηση:

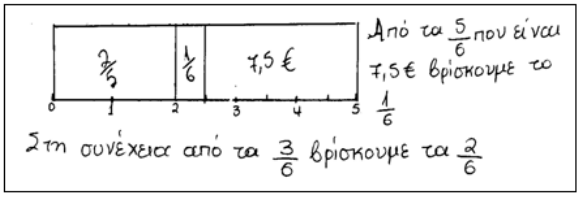

Αφού ξέρω ότι τα 5 μικρά κομμάτια είναι 7,5€ μπορώ να βρω και τα 4 που ισοδυναμούν με το κόστος του βραχιολιού

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αποτελεί το υποκείμενο (2) που έχει καταχωρηθεί στη πρώτη στήλη, αλλά επιλύει το πρόβλημα κάνοντας λανθασμένη χρήση συμβολισμού, καθότι ονομάζει σαν 1/6 το μισό του 1/5:



Η συμβολική γραφή «1/6» χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει την ισότητα των δυο τμημάτων, ανεξαρτήτως του όλου στο οποίο αναφέρονται. Δηλαδή, τα πρώτα τέσσερα τμήματα που ονομάζονται «1/6» δεν παίρνουν την ονομασία τους σε σχέση με κάποιο «όλο», αλλά λόγω της ισότητάς τους με τα επόμενα έξι τμήματα του ορθογωνίου.

Οι εκπαιδευτικοί της δεύτερης στήλης κατασκεύασαν σωστά το μοντέλο του ορθογωνίου με μεγαλύτερη ή μικρότερη ακρίβεια, αλλά δεν μπόρεσαν να το αξιοποιήσουν σωστά για να οδηγηθούν στη λύση. (Εικόνα 10)



Εικόνα 10: Σωστή απεικόνιση, χωρίς απάντηση

Οι δάσκαλοι της τρίτης στήλης προβαίνουν σε λάθος κατασκευή του ορθογωνίου που αναπαριστά το πρόβλημα, καθότι δεν παρατηρούν ότι το 1/6 των χρημάτων που περίσσεψαν μετά την αγορά του σάντουιτς είναι ίσο με το μισό του 1/5.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την έρευνα φάνηκε ότι οι εκπαιδευτικοί δεν ήταν ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με τη χρήση αναπαραστάσεων των δεδομένων και των σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών σε αριθμητικά προβλήματα. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι μονάχα 1 ερευνητικό υποκείμενο απάντησε σωστά σε όλα τα προβλήματα και μόνο 5 από τα 21 απάντησαν σωστά σε 2 από τα 4 προβλήματα. Η έρευνα έδειξε, επίσης, ότι ο βαθμός δυσκολίας στη χρήση αναπαραστάσεων για την επίλυση προβλημάτων εξαρτάται από κάποιες παραμέτρους.

Συγκεκριμένα:

Το πρόβλημα της αναρρίχησης αποδείχτηκε το πιο απλό, δεδομένου ότι οι δάσκαλοι (9 στους 21), ενώ παρουσίαζαν κάποια έλλειψη ακρίβειας στις αναπαραστάσεις τους, μπόρεσαν να αποδώσουν το πρόβλημα σχηματικά και να οδηγηθούν μέσα από νοερούς υπολογισμούς στην επίλυσή του. Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν είχαν *σημαντική συνάφεια με το μοντέλο της αριθμογραμμής που τους είναι σχετικά οικείο.* Το πρόβλημα κλασμάτων φάνηκε, επίσης, εύκολο στους εκπαιδευτικούς από άποψη αναπαράστασης δεδομένου ότι 15 στους 21 έκαναν σωστή αναπαράσταση και 8 από αυτούς έφτασαν και σε αριθμητικό αποτέλεσμα. Αυτό οφείλεται στο ότι-όπως και στο πρόβλημα της αναρρίχησης-, *η ροή των πληροφοριών στην εκφώνηση ήταν «συνεχής»*-σε αντίθεση με τα άλλα δυο προβλήματα που θα δούμε στη συνέχεια-, και στο ότι -παρά την ύπαρξη κλασματικών αριθμών- *η σχέση μεταξύ των μεταβλητών μπορούσε να εντοπισθεί με ευκολία.* Επιπλέον, και σε αυτό το πρόβλημα η αναπαράσταση της αριθμογραμμής θα μπορούσε εύκολα να οδηγήσει στην απάντηση.

Συνοπτικά, το κοινό σημείο μεταξύ των δυο προβλημάτων (αναρρίχησης και κλασμάτων) ήταν ότι οι δάσκαλοι με τις πληροφορίες που τους έδινε το πρόβλημα

μπορούσαν *απευθείας να τις αποδώσουν σε ένα διάγραμμα* και να οδηγηθούν στη λύση. Επιπλέον, η ιστορία που περιγράφεται στην εκφώνηση *διαδραματίζεται σε συνεχή χρόνο,* κάτι το οποίο δεν συμβαίνει για παράδειγμα στο πρόβλημα διαφοράς βάρους.

Το πρόβλημα διαφοράς βάρους περιέγραφε δυο διακριτές στατικές καταστάσεις («Ο Άλεξ είναι 10 κιλά πιο βαρύς από τον Μπεν», «Το συνολικό βάρος τους είναι 100 κιλά») τις οποίες μπορούσαν εύκολα να τις αναπαραστήσουν οι δάσκαλοι την κάθε μια μόνη της. Αλλά η απάντηση στο ερώτημα «Ποιό είναι το βάρος του Άλεξ;» απαιτούσε από τους εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν πρώτα τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών στην εκφώνηση και έπειτα να «αναζητήσουν» αυτή τη σχέση στην αναπαράσταση. Δηλαδή *η απάντηση δεν προέκυπτε από την απλή κατασκευή της αναπαράστασης, αλλά προϋπέθετε την ερμηνεία*. Κάτι τέτοιο φάνηκε να δυσκόλεψε πολύ τους δασκάλους, εφόσον μόνο 5 έκαναν σωστή αναπαράσταση και οδηγήθηκαν στη λύση. Στο πρόβλημα ηλικιών εκτός του ότι θα έπρεπε να κατασκευασθούν δυο αναπαραστάσεις για την επίλυση του, η κατάσταση που περιγράφεται διαδραματιζόταν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Η αναπαράσταση της χρονικής εξέλιξης ενός γεγονότος σε συνδυασμό με την ερμηνεία της σχέσης των μεταβλητών του προβλήματος, οδήγησε στο πολύ μικρό ποσοστό επιτυχούς αναπαράστασης του προβλήματος από τους εκπαιδευτικούς: μόνο 4 κατάφεραν να επιλύσουν σωστά το πρόβλημα κάνοντας χρήση του Μ.Ο..

Γενικά, όσον αφορά την ευχρηστία του Μοντέλου του Ορθογωνίου, φάνηκε ότι χρησιμοποιήθηκε κατά 45% στα 3 από τα 4 προβλήματα παρότι οι εκπαιδευτικοί δεν το είχαν συναντήσει ξανά στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια ως στρατηγική επίλυσης προβλήματος, παρά μόνο για την απόδοση εννοιών (ακεραίων ή κλασματικών αριθμών) και διαδικασιών (πολλαπλασιασμός κλασμάτων). Η ευχρηστία και η σημασία του μοντέλου αποδείχτηκε και από την μελέτη των Fong & Lee (2005) ιδιαίτερα σε προβλήματα κλασμάτων και μέρος- όλου.

Τα πρώτα αυτά αποτελέσματα, και δεδομένου της τεράστιας επιτυχίας του συγκεκριμένου μοντέλου στο εξωτερικό, θέτουν την πρόκληση για μια πιο ουσιαστική έρευνα του τρόπου χρήσης του στις σχολικές τάξεις. Μια τέτοια εφαρμογή, έχει ήδη ξεκινήσει πειραματικά σε μια τάξη της Γ΄ Δημοτικού, από την ερευνητική μας ομάδα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bilman, D. (1999). *Representations*, in A Companion to Cognitive Science, Blackwell, London, 649-659.

Cohen, L, L. Manion, L (1994), *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας*, Εκδόσεις Μεταίχμιο, Αθήνα.

Fong, H. K. (1994). Bridging the gap between secondary and primary mathematics. Teaching and Learning, 14(2), 73-84.

Fong, N. S. and Lee, K. (2005). How primary five pupils use the model method to solve word problems. The Mathematics Educator, 9(1), 60-83.

Kho, T. H. (1987). Mathematical models for solving arithmetic problems. Proceedings of the Fourth SEAC on Mathematics (ICMI – SEAMS), 345-351.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high school mathematics. For the Learning of Mathematics, 6(3), 42-46.

Stufflebeam, R. S. (1999). *Representations and computation*, in A Companion to Cognitive Science, (Edit. By Bechtel & Graham G.), Blackwell, London, 636-648.

Yan, K. C. (2002). The Model Method in Singapore. The Mathematics Educator, 6(2), 47–64.

Yeap, B. H. (2010). *Bar modeling: A problem solving tool*. Singapore: Marshall Cavendish Education.

ΕΧΕΙ ΒΑΣΗ (Β) ΤΟ ΕΜΒΑΔΟ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ;

Λυμπεροπούλου Λέλα[1], Δουκάκης Σπύρος[2], Μισυρλής Δημήτριος[2]
[1]Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών
[2]Καθηγητής Μαθηματικών, Αμερικανικό Κολλέγιο Ελλάδος-PIERCE
[1]lelalibe@gmail.com, [2]{sdoukakis, missirlisdem}@acg.edu

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

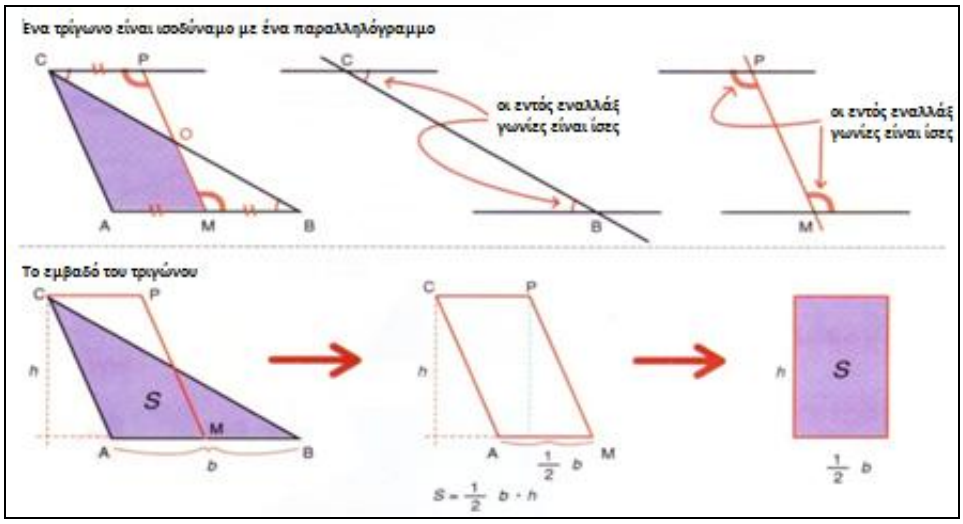
Στην εργασία παρουσιάζεται ο τρόπος εισαγωγής του εμβαδού τριγώνου στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, και επιχειρείται σύγκριση με τον τρόπο που προσεγγίζεται το ζήτημα σε αντίστοιχα βιβλία δυτικοευρωπαϊκών χωρών. Βάσει της προσέγγισης των ελληνικών βιβλίων μελετάται ένα δείγμα 53 μαθητών/τριών της Β Γυμνασίου, που εργάστηκε σε σχετικά ζητήματα. Τα ευρήματα αναδεικνύουν ότι η χρήση της λέξης «βάση», που αξιοποιείται ευρέως στην υποχρεωτική εκπαίδευση για τον υπολογισμό του εμβαδού τριγώνου δημιουργεί διδακτικά εμπόδια στους μαθητές και οδηγεί στην απομνημόνευση τύπων παρά στην κατανόηση του εμβαδού τριγώνου.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα αντικείμενο για να έχει εμβαδόν πρέπει να έχει μήκος και πλάτος να είναι, δηλαδή, ένα δισδιάστατο αντικείμενο. Στο επίπεδο της υποχρεωτικής εκπαίδευσης το μήκος μπορεί να μετρηθεί από τα μέρη του συγκρίνοντάς το με ένα συγκεκριμένο μήκος, που επιλέγουμε ως μονάδα, ενώ το εμβαδόν μπορεί να συντίθεται με διάφορους τρόπους.

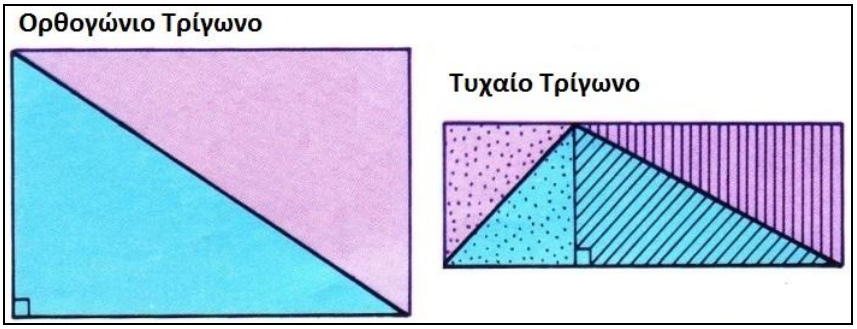
Πιο συγκεκριμένα, για την μέτρηση του μήκους διαλέγουμε ένα μήκος, εξετάζουμε πόσες φορές χωράει και αν περισσεύει παίρνουμε μικρότερη μονάδα κ.λπ. Για τις επιφάνειες, αν περιοριστούμε σε κλειστές επιφάνειες που περικλείονται από ευθύγραμμα τμήματα, η παραπάνω μέθοδος δεν είναι αποτελεσματική. Το πιο φυσικό είναι να χρησιμοποιήσουμε την γεωμετρική δομή του σχήματος η οποία θα διαιρεθεί σε μικρότερα και, με την χρήση μετασχηματισμών, να καταλήξουμε σε ένα, εύκολα μετρήσιμο, ισοδύναμο (ισεμβαδικό) με αυτό, γεωμετρικό σχήμα.

Η μέτρηση του εμβαδού ενός ευθυγράμμου σχήματος ανάγεται στην μέτρηση μηκών των διαστάσεών του [1]. Οι μετασχηματισμοί που μας βοηθούν σε αυτήν την αναγωγή, όσον αφορά στο τρίγωνο, χρησιμοποιούνται και ως ένας διαισθητικός τρόπος απόδειξης του τύπου υπολογισμού του εμβαδού τριγώνου. Παραδείγματα τέτοιων προσεγγίσεων φαίνονται στην Εικόνα 1 και την Εικόνα 2.



Εικόνα 1: Από το βιβλίο Matematica oggi. Per il biennio. (Castelnuovo, Gori Giorgi & Valenti, 1992, σελ. 209).

Μια άλλη αλληλουχία εικόνων που παραπέμπει, επίσης στην απόδειξη του τύπου υπολογισμού του εμβαδού τριγώνου, από γαλλικό βιβλίο της αντίστοιχης ΣΤ΄ Δημοτικού παρουσιάζεται στην Εικόνα 2.



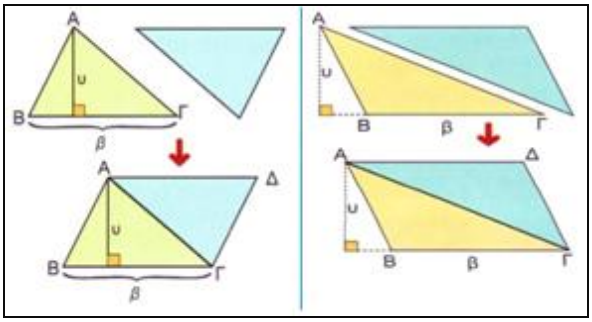
Εικόνα 2: Από το βιβλίο Connaître et pratiquer les mathématiques. 6e (Pouts-Lajus, 1986, σελ. 97)

Ο κανόνας που προκύπτει από τα παραπάνω είναι ο ακόλουθος:

> Το εμβαδόν ενός οποιουδήποτε τριγώνου είναι το μισό του γινομένου μιας πλευράς με το αντίστοιχο ύψος.

Το ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος κ.α., 2007) προσεγγίζει το εμβαδό τριγώνου με τη βοήθεια των σχημάτων που φαίνονται στην Εικόνα 3. Ο κανόνας που προκύπτει είναι ο ακόλουθος:

> Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.



Εικόνα 3: Από το βιβλίο Μαθηματικών, Β΄ Γυμνασίου, (Βλάμος κ.α., 2007, σελ. 120)

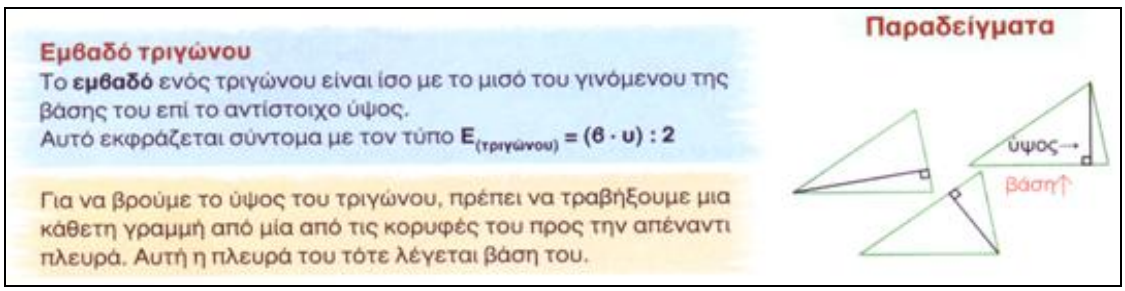
Στην παραπάνω προσέγγιση εμφανίζεται η έννοια της βάσης τριγώνου. Η «αναγκαιότητα» της βάσης για τον προσδιορισμό του τρόπου υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου, παρουσιάζεται και στις παλαιότερες εκδόσεις σχολικών βιβλίων Μαθηματικών (βλ. Α Γυμνασίου, Αλιμπινίσης κ.α., 1987, Β Γυμνασίου, Παπαμιχαήλ κ.α., 1984). Στο σχολικό βιβλίο Μαθηματικών των Αλιμπινίση κ.α. (σελ. 284) υπάρχει μια μακροσκελέστατη απόδειξη, που ξεκινάει από το ορθογώνιο και υπολογίζει αρχικά το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου και στη συνέχεια ανεξάρτητα του οξυγωνίου και του αμβλυγωνίου. Η κατάληξη-κανόνας είναι:

> Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου της βάσης του επί το ύψος.

Επίσης, ο κανόνας που καταλήγει το σχολικό βιβλίο Μαθηματικών των Παπαμιχαήλ κ.α. (σελ. 114) είναι:

> Το εμβαδό ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου της βάσης του επί το ύψος του.

Το εμβαδό τριγώνου προσδιορίζεται και στο βιβλίο Μαθηματικών της ΣΤ΄ Δημοτικού των Κασσώτη, Κλιάπη & Οικονόμου, (2009), όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.



Εικόνα 4: Από το βιβλίο Μαθηματικά, Στ Δημοτικού, (Κασσώτη, Κλιάπης & Οικονόμου, 2009, σελ. 152)

Η λέξη βάση χρησιμοποιείται με διαφορετικούς τρόπους κάθε φορά: η βάση του, μια βάση του, όσον αφορά, δε, στο ύψος είναι άλλοτε το ύψος, άλλοτε το ύψος του και άλλοτε το αντίστοιχο ύψος. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 4 στο ελληνικό σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών της ΣΤ΄ Δημοτικού ορίζει εκ των υστέρων την βάση

αναφέροντας: «Αυτή η πλευρά τότε λέγεται βάση του». Παρατηρείται έτσι, μια πλήρης αντιστροφή της πρότασης του Ευκλείδη: δ΄ (4). Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη (Σταμάτης, 1952).

Από την άλλη, το αντίστοιχο γαλλικό εγχειρίδιο αναφέρει το μισό του γινομένου μιας πλευράς με το αντίστοιχο ύψος.

Κατάληξη όλων αυτών των «αποδείξεων» και λεκτικών περιγραφών είναι ο τύπος Ε = (β·υ):2, εργαλείο επίλυσης ασκήσεων και εφαρμογών, σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης. Αυτός ο διαφορετικός προσδιορισμός του εμβαδού τριγώνου που παρατηρείται στα σχολικά βιβλία της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, υπήρξε το έναυσμα για να τεθούν και να διερευνηθούν ερωτήματα που σχετίζονται με το ζήτημα. Στην επόμενη παράγραφο καταγράφονται τα ερωτήματα και στη συνέχεια παρουσιάζεται η έρευνα και τα ευρήματα της μελέτης. Στόχος της εργασίας δεν είναι σε αυτή την φάση να προτείνει τρόπους διδασκαλίας του υπολογισμού εμβαδού τριγώνου. Ωστόσο, αποτελεί στόχο η συνεισφορά σε μία σχετική συζήτηση που μπορεί να βοηθήσει και να προτείνει τρόπους διδασκαλίας του θέματος.

2. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ-ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Από την μελέτη που πραγματοποιήθηκε προέκυψαν τα εξής ερωτήματα:

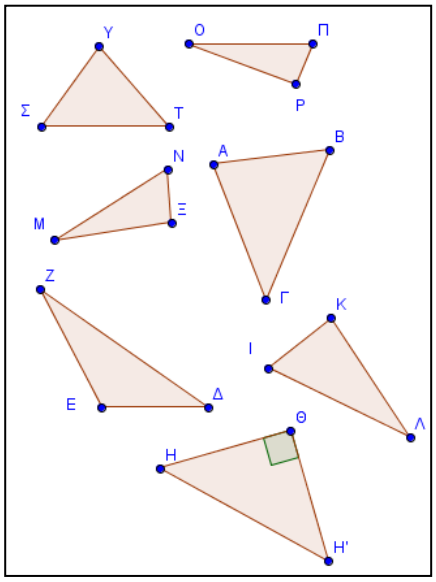
1. Η γεωμετρική «απόδειξη» βοηθάει στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του εμβαδού τριγώνου ή απλώς εισάγει, έστω και διαισθητικά, την έννοια της απόδειξης και εξασφαλίζει, κατά κάποιο τρόπο, την μαθηματική εγκυρότητα του τύπου Ε=(β·υ):2;
2. Ποιες παρανοήσεις ή λανθασμένες αντιλήψεις και πρακτικές μπορεί να δημιουργήσει η έννοια της βάσης του τριγώνου, είτε ορίζεται σαφώς, είτε χρησιμοποιείται γενικώς και αορίστως, εμφανίζεται πάντως στον τύπο;

Με στόχο την διερεύνηση των παραπάνω ερωτημάτων δόθηκε σε μαθητές και μαθήτριες της Β Γυμνασίου, η δραστηριότητα (βλ. Εικόνα 5), με την οποία σε ένα μεταγνωστικό επίπεδο, επιχειρείται η ανίχνευση της κατανόησης των μαθητών του τρόπου αποτύπωσης των υψών σε διάφορα τρίγωνα και του τρόπου υπολογισμού του εμβαδού τριγώνων. Επιπλέον στόχος ήταν ο προβληματισμός των μαθητών γύρω από κάποια ζητήματα που σπανίως ή ποτέ δεν συζητούνται στην τάξη.

Ως μεθοδολογία έρευνας επιλέχθηκε το ερμηνευτικό παράδειγμα, ώστε να αναδειχτούν οι προσεγγίσεις των μαθητών και να επιχειρηθεί ο προσδιορισμός των εμποδίων που συναντούν κατά την αποτύπωση των υψών και τον υπολογισμό του εμβαδού τριγώνου. Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε τέσσερα ερωτήματα. Με βάση τα γραπτά κείμενα των μαθητών πραγματοποιήθηκε η ανάλυση των δεδομένων.

Κυκλώστε το γράμμα Α αν είστε αγόρι ή το γράμμα Κ αν είστε κορίτσι

Δόθηκαν σε τρεις μαθήτριες τα παρακάτω τρίγωνα και τους ζητήθηκε να συνεργαστούν με σκοπό να προσδιορίσουν τον τρόπο με τον οποίο θα υπολογίσουν το εμβαδό του.



Οι τρεις μαθήτριες συζητώντας υποστήριξαν ότι το εμβαδό τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E_{τριγ} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$.

Ωστόσο η κάθε μαθήτρια ερμήνευσε τον τύπο ως εξής:

Π1 Η πρώτη μαθήτρια είπε: «*Σε κάθε τρίγωνο το εμβαδόν του θα είναι το γινόμενο της βάσης του τριγώνου επί το ύψος του δια δύο.*»

Π2 Η δεύτερη μαθήτρια ανέφερε: «*Σε κάθε τρίγωνο το εμβαδόν του θα είναι το γινόμενο μίας πλευράς του τριγώνου επί το αντίστοιχο ύψος του δια δύο.*»

Π3 Η τρίτη μαθήτρια είπε: «*Σε κάθε τρίγωνο το εμβαδόν του θα είναι το γινόμενο της βάσης του τριγώνου επί το αντίστοιχο ύψος του δια δύο.*»

Ερωτήσεις

1. Ποιες διαφορές παρατηρείτε σε αυτά που είπαν οι τρεις μαθήτριες;
2. Ποια ή ποιες από τις τρεις προτάσεις των μαθητριών θα αξιοποιούσατε για να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε τριγώνου;
3. Να αιτιολογήσετε για κάθε πρόταση γιατί θα την αξιοποιούσατε ή δεν θα την αξιοποιούσατε.
4. Για κάθε πρόταση που θα αξιοποιούσατε να σχεδιάσετε και να δείξετε το β και υ (του τύπου) σε κάθε ένα από τα τρίγωνα της εικόνας.

Εικόνα 5: Δραστηριότητα που δόθηκε στις μαθήτριες και τους μαθητές

3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην έρευνα συμμετείχαν 53 μαθητές και μαθήτριες και πιο συγκεκριμένα 28 κορίτσια και 22 αγόρια της β γυμνασίου (υπάρχει έλλειψη ορισμένων δεδομένων). Η εργασία δόθηκε στους ερευνώμενους χωρίς προειδοποίηση και χωρίς να πραγματοποιηθεί επαναπροσδιορισμός των εννοιών του εμβαδού και του ύψους σχημάτων, τις οποίες είχαν διαπραγματευτεί σε προηγούμενες τάξεις. Οι

μαθητές/τριες εργάστηκαν ατομικά για μία διδακτική περίοδο (45 λεπτά) στα ζητήματα της δραστηριότητας.

Στη συνέχεια συγκεντρώθηκαν τα φύλλα εργασίας και επιχειρήθηκε η κατηγοριοποίησή τους βάσει των κειμένων τους. Από τα 53 φύλλα εργασίας, τα 13 δεν ελήφθησαν υπόψη στο στάδιο της ποιοτικής ανάλυσης, αφού οι μαθητές/τριες δεν τεκμηρίωναν τις επιλογές τους. Σύμφωνα με την ανάλυση των δεδομένων των υπόλοιπων 40 φύλλων εργασίας προέκυψαν οι ακόλουθες κατηγορίες ερευνώμενων:

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ερευνώμενοι που υποστήριξαν ότι είναι λανθασμένη η χρήση της λέξης πλευρά στην δεύτερη (Π2) πρόταση (πλευρά επί αντίστοιχο ύψος δια δύο) κατά τον προσδιορισμό του τρόπου υπολογισμού του εμβαδού τριγώνου.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα από τους 16 ερευνώμενους/ες:

Μ(αθητής/τρια) 1: Δεν θα αξιοποιούσα την δεύτερη πρόταση διότι για να είναι σωστή θα έπρεπε αντί για πλευρά να λέει βάση.

Μ 2: Η δεύτερη είναι λάθος γιατί μιλάει γενικά για μία πλευρά του τριγώνου, ενώ για να βρούμε το εμβαδό πρέπει να κάνουμε βάση · ύψος δια δύο.

Μ 3: Για μένα η δεύτερη είναι λάθος διότι λέει πως ο ορισμός του τριγώνου είναι πλευρά·ύψος/2, ενώ είναι β·υ/2.

Μ 4: Η μαθήτρια στην δεύτερη πρόταση δεν μας το εξηγεί σωστά, αφού μας λέει να πάρουμε όποια πλευρά θέλουμε για βάση επί το αντίστοιχο ύψος.

Μ 5: Είναι λάθος. Θα την αξιοποιούσα μόνο άμα έλεγε πώς κάθε πλευρά είναι και βάση.

Μ 6: δεν μας λέει με ποια πλευρά να πολλαπλασιάσουμε το ύψος.

Οι ερευνώμενοι αυτής της ομάδας, φαίνεται ότι δεν έχουν συνδέσει την πλευρά με την βάση και υποστηρίζουν είτε ότι η βάση είναι κάτι διαφορετικό από την πλευρά, είτε ότι δεν μπορεί κάθε πλευρά να αποτελεί βάση του τριγώνου.

Στην δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι 8 ερευνώμενοι που υποστήριξαν ότι όλες οι προτάσεις είναι σωστές.

Μ 7: Θα αξιοποιούσα και τις τρεις προτάσεις, γιατί είτε πούμε βάση είτε πούμε μία πλευρά του τριγώνου είναι το ίδιο, αρκεί να την πολλαπλασιάσουμε με το αντίστοιχο ύψος και να διαιρέσουμε το γινόμενο με το δύο.

Μ 8: Θα αξιοποιούσα την πρόταση 1 γιατί για να πολλαπλασιάσουμε το εμβαδόν του τριγώνου θα πολλαπλασιάσουμε τη βάση επί το ύψος του και θα διαιρέσουμε με το 2. Θα αξιοποιούσα και τη δεύτερη, διότι βάση του τριγώνου θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε πλευρά. Τέλος, θα αξιοποιούσα και την τελευταία γιατί εκφράζει με τον ίδιο τρόπο τον τύπο.

Οι ερευνώμενοι αυτής της ομάδας, φαίνεται ότι έχουν κατανοήσει ότι κάθε πλευρά μπορεί να αποτελεί βάση του τριγώνου. Ωστόσο, δεν είναι εμφανές αν έχουν λάβει υπόψη τους την έννοια του αντίστοιχου ύψους, όπως φαίνεται από το δεύτερο χωρίο.

Στην τρίτη κατηγορία ανήκουν οι 6 ερευνώμενοι που υποστηρίζουν ότι τους μπερδεύει η δεύτερη και τρίτη πρόταση και έχουν συνηθίσει την πρώτη πρόταση.

Μ 9: Δεν θα επέλεγα την δεύτερη και την τρίτη [πρόταση] γιατί με μπερδεύουν.

Μ 10: Θα αξιοποιούσα την πρώτη πρόταση γιατί αυτή έχω συνηθίσει.

Μ 11: Θα αξιοποιούσα την πρώτη πρόταση γιατί είναι σαφέστερη σε σχέση με τις άλλες.

Μ 12: Η πρώτη [πρόταση] είναι περισσότερη συνηθισμένη, όταν μιλάμε για το εμβαδόν. Τις άλλες δεν τις χρησιμοποιούμε.

Ο τρόπος προσέγγισης του εμβαδού τόσο από τα σχολικά εγχειρίδια όσο και στο πλαίσιο της σχολικής τάξης, φαίνεται ότι έχει οδηγήσει κάποιους μαθητές να έχουν αναπτύξει εγκαθιδρυμένες αναπαραστάσεις για το εμβαδό τριγώνου, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να αναστοχαστούν και να τις τροποποιήσουν.

Στην τέταρτη κατηγορία ανήκουν οι 5 ερευνώμενοι που υποστηρίζουν ότι μόνο η τρίτη πρόταση είναι σωστή, αναφέροντας χαρακτηριστικά:

Μ 13: Δεν θα αξιοποιούσα την πρώτη πρόταση, διότι δεν διευκρινίζει ποιο ύψος. Ούτε την δεύτερη γιατί μιλάει για μία πλευρά και όχι για την βάση. Θα αξιοποιούσα την τρίτη που είναι σωστή.

Μ 14: Θα αξιοποιούσα την πρόταση 3 διότι το σωστότερο είναι να πολλαπλασιάσουμε την βάση του τριγώνου με το αντίστοιχο ύψος και όχι με οποιοδήποτε ύψος όπως λέει η πρώτη. Δεν θα αξιοποιούσα την δεύτερη πρόταση γιατί θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την μικρότερη πλευρά με το αντίστοιχο ύψος.

Μ 15: Θα αξιοποιούσα την πρώτη πρόταση γιατί είναι σαφέστερη σε σχέση με τις άλλες.

Οι ερευνώμενοι φαίνεται να έχουν συνδέσει το εμβαδό με την βάση επί το αντίστοιχο ύψος, αλλά φαίνεται ότι δεν έχουν προσδιορίσει την σχέση της βάσης ενός τριγώνου με την πλευρά του.

Στην πέμπτη κατηγορία ανήκουν οι 2 ερευνώμενοι που υποστηρίζουν ότι η πρώτη πρόταση είναι λάθος και οι άλλες δύο σωστές αναφέροντας χαρακτηριστικά:

Μ 16: Η πρώτη πρόταση δεν είναι σωστή, επειδή δεν λέει αντίστοιχο ύψος. Οι άλλες δύο είναι ok.

Μ 17: Δεν θα την επέλεγα την πρώτη διότι δεν μας προσδιορίζει ποιο ύψος πρέπει να πάρουμε.

Οι ερευνώμενοι φαίνεται να έχουν συνδέσει τις έννοιες του εμβαδού με το ύψος, τις βάσεις και τις πλευρές, ενώ βλέπουν την έλλειψη που παρουσιάζει η πρόταση 1,

όπου η περιγραφή του τρόπου υπολογισμού του εμβαδού δεν περιλαμβάνει την φράση αντίστοιχο ύψος.

Στην έκτη κατηγορία ανήκουν οι 3 ερευνώμενοι που προσδιορίζουν ζητήματα στις 3 προτάσεις με την έννοια του ύψους. Πιο συγκεκριμένα αναφέρουν:

Μ 18: Η δεύτερη πρόταση έχει λάθος, αφού αναφέρει μιας πλευράς του τριγώνου, ενώ έπρεπε να λέει ενός ύψους του τριγώνου.

Μ 19: Η δεύτερη και τρίτη πρόταση είναι λάθος, αφού θα έπρεπε να αναφέρει επί το ύψος και όχι επί το αντίστοιχο ύψος.

Οι μαθητές φαίνεται να έχουν παρανοήσει την έννοια του ύψους τριγώνου και προσδιορίζουν ελλιπώς το εμβαδό του τριγώνου σε σχέση με το ύψος, με αποτέλεσμα να θεωρούν σωστή την πρώτη πρόταση.

4.ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το εμβαδόν του ορθογωνίου υπολογίζεται στην υποχρεωτική εκπαίδευση ως γινόμενο του μήκους του επί το πλάτος του. Αυτό το ίδιο εμβαδόν εκφράζεται ως γινόμενο της βάσης του επί το ύψος του, ως αναγκαιότητα για την εισαγωγή του γνωστού τύπου Ε = (β·υ):2 για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου.

Η απόδειξη του τύπου του εμβαδού του τριγώνου, η οποία όπως φάνηκε, προκύπτει με διάφορους τρόπους ως σύγκριση εμβαδών, δεν συνδέεται με κανέναν τρόπο με την «χρηστική» εφαρμογή αυτού του τύπου. Η έμφαση στην απομνημόνευση του κανόνα-τύπου παρά στην κατανόηση της έννοιας (Huang & Witz, 2011) είναι, κατά την άποψή μας, η αιτία για τις δυσκολίες των μαθητών όσον αφορά στην ανάπτυξη συλλογισμών και αναπαραστάσεων που θα τους βοηθούσαν να απαντήσουν στις ερωτήσεις της δραστηριότητας.

Η βάση του τριγώνου είναι η βάση του ή μία βάση του ή πολύ απλά μία πλευρά του; Η έλλειψη προσδιορισμού της έννοιας «βάση τριγώνου», αποτελεί σημαντικό ζήτημα που χρειάζεται επαναπροσδιορισμό στο πλαίσιο της σχολικής εκπαίδευσης. Από την ποιοτική ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνάς μας αναδεικνύεται η απόλυτη σύγχυση των μαθητών. Είναι πολύ χαρακτηριστική η απορία μιας μαθήτριας που υποστήριξε:

Μ 20: μπορεί η μια από τις ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου να θεωρηθεί ως βάση του για τον υπολογισμό του εμβαδού του [2];

Μία ολοκληρωμένη προσέγγιση του εμβαδού τριγώνου συναντούν οι μαθητές/τριες όταν φοιτήσουν στην Β΄ Λυκείου, όπου θα έχουν απάντηση στα ερωτήματα της δραστηριότητας, μέσω του Θεωρήματος-ορισμού (Αργυρόπουλος κ.α., 2007) που αναφέρει:

Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

Σύμφωνα με την έρευνα των Kordaki και Balomenou (2006), η προσέγγιση του εμβαδού τριγώνου με λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας πιθανώς να αποτελεί μία εναλλακτική πρόταση με προστιθέμενη αξία, που θα συνεισέφερε στην εξάλειψη των εμποδίων που παρουσιάζουν οι μαθητές, και στην ανάπτυξη μιας διαφορετικής οπτικής της έννοιας του εμβαδού.

Συνολικά, με την παρούσα εργασία αναδείχτηκε το ζήτημα της προσέγγισης του τρόπου υπολογισμού του εμβαδού τριγώνου και της προβληματικής που προκύπτει από την απομνημόνευση του τύπου. Το ζήτημα αυτό πιθανώς να εμφανίζεται και σε άλλα εκπαιδευτικά πλαίσια και περιβάλλοντα. Φαίνεται ότι η πρακτική των σχολικών εγχειρίδιων απέχει από την ακαδημαϊκή επάρκεια του θέματος, αλλά και την διδακτική προσέγγιση του ζητήματος. Ωστόσο, επειδή τα σχολικά εγχειρίδια αποτελούν βασική πηγή υλικού για τους εκπαιδευτικούς και ταυτόχρονα διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στις διδακτικές προσεγγίσεις τους, είναι σημαντικός ο επαναπροσδιορισμός του θέματος, μέσω εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων και κατάλληλων δραστηριοτήτων.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Η σχέση περιμέτρου και εμβαδού είναι ένα πολύ μεγάλο κεφάλαιο που δεν περιλαμβάνεται στα όρια της συγκεκριμένης εργασίας.
2. ε΄.[5] Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται (Σταμάτης, 1952).

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε την Αν. Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αιγαίου κα Μοσκοφόγλου-Χιονίδου Μαρία για την ιδέα της έρευνας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Castelnuovo, E., Gori Giorgi, C., & Valenti, D. (1992). *Matematica oggi. Per il biennio,* La Nuova Italia.

Huang, H.E., & Witz, K.G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment. *Learning and Instruction*, 21, 1-13.

Kordaki, M., & Balomenou, A. (2006). Challenging students to view the concept of area in triangles in a broad context: exploiting the features of Cabri-II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11, 99-135.

Pouts-Lajus, S. (1986). *Connaître et pratiquer les mathématiques*. 6e, Fernand Nathan, France.

Αλιμπινίσης, Α., Αντύπας, Ζ., Ευσταθόπουλος, Ε., Κλαουδάτος, Ν., & Παπασταυρίδης, Σ. (1987). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σιδέρης, Π. (2007). *Ευκλείδεια γεωμετρία Α΄ και Β΄ Λυκείου*. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2007). *Μαθηματικά Β Γυμνασίου*. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Κασσώτη, Ό., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2009). *Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού*. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Παπαμιχαήλ, Δ., Μπαλής, Σ., Γιαννίκος, Χρ., Νοταράς, Δ., & Σολδάτος, Κ. (1978). *Μαθηματικά Β Γυμνασίου*. ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Σταμάτης, Ε. (1952). *Ευκλείδου Γεωμετρία*, Εκδόσεις Σάκουλα, Αθήνα.

«ΛΕΩΦΟΡΕΙΟ»: ΕΝΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Παρασκευή Κοτσακιαχίδου[1], Αργυρώ Νεοφύτου[2], Ιωάννης Παπαδόπουλος[3]

[1]Πανεπιστήμιο Λευκωσίας, [2]Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, [3]ΠΤΔΕ, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

[1]paraskevi.kotsa@gmail.com, [2]aiatridou@hotmail.com, [3]ypapadop@eled.auth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η πειραματική εφαρμογή του διδακτικού περιβάλλοντος «Λεωφορείο» -μεταφορά από μια πρακτική στη διδασκαλία των Μαθηματικών στην Τσεχία- σε μαθητές της Α Δημοτικού κατά τον πρώτο μόλις μήνα της σχολικής τους ζωής. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές παρακινούνται από το περιβάλλον να εμπλακούν σε μια διαδικασία ανάπτυξης μιας πρώιμης αίσθησης των αριθμών καθώς και στην ανάπτυξη προσωπικών εργαλείων καταγραφής και οργάνωσης δεδομένων που υπόκεινται σε βαθμιαία βελτίωση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο προηγούμενο συνέδριο της ΕΝΕΔΙΜ, στα Ιωάννινα, το 2011, μεταξύ των κεντρικών καλεσμένων ήταν και οι M. Hejny και D. Jirotkova που παρουσίασαν δυο διδακτικά περιβάλλοντα που χρησιμοποιούνται ευρέως στη χώρα τους, την Τσεχία: Το Λεωφορείο(Bus) και Τα Βήματα (Steps). Οι δυο αυτοί ερευνητές της διδακτικής των Μαθηματικών, εκτός από την κεντρική ομιλία, πραγματοποίησαν και ένα workshop με θέμα ακριβώς τα περιβάλλοντα αυτά. Αυτό υπήρξε η αφορμή για μια επικοινωνία στη συνέχεια με τους δυο ερευνητές που είναι και οι συγγραφείς των νέων σχολικών εγχειριδίων για τα Μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Τσεχία και στα οποία τα δυο αυτά περιβάλλοντα έχουν σημαντική παρουσία, ειδικά στις πρώτες τάξεις. Η επικοινωνία αυτή οδήγησε στο να αποφασίσουμε να δοκιμάσουμε το περιβάλλον «Λεωφορείο» σε μια σχολική τάξη έχοντας υπόψιν μας ότι πρόκειται για διαφορετικές εκπαιδευτικές κουλτούρες και πρακτικές μέσα στην τάξη. Η προσπάθειά μας στόχευε στο να διερευνήσουμε κατά πόσο θα μπορούσαμε να καταγράψουμε επιρροές του διδακτικού αυτού περιβάλλοντος στις μαθηματικές δεξιότητες παιδιών της Α΄ Δημοτικού δεδομένου τόσο του γεγονότος ότι οι μαθητές δεν είναι από πριν εξοικειωμένοι με το περιβάλλον αυτό όσο και του ότι διανύουν μόλις τον πρώτο ουσιαστικά μήνα της σχολικής τους ζωής.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ – ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Το συγκεκριμένο διδακτικό περιβάλλον βασίζεται στην έννοια της scheme oriented εκπαίδευσης (Hejny, 2012) που τις βασικές της αρχές μετέφερε ο Hejny και η ομάδα του στη διδακτική πράξη μέσα από τη σειρά μαθηματικών εγχειριδίων για τις πρώτες

πέντε τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Τσεχία (Hejny, Jirotkova & Slezakova, 2007-2011). Πρωταρχικό ρόλο στην προσέγγισή τους παίζει η έννοια του σχήματος (schema) και μια απόδοση της έννοιας αυτής θα μπορούσε να είναι ότι στη μνήμη μας δεν βρίσκονται απομονωμένα γεγονότα αλλά η πληροφορία συγκεντρώνεται σε ομάδες λειτουργικών μονάδων με συγκεκριμένο νόημα. Κάπως απλουστευμένα αυτό θα μπορούσε να κατανοηθεί ως εξής (Hejny, Jirotkova & Slezakova, 2007): Το σχήμα του διαμερίσματός μου είναι αποθηκευμένο στο μυαλό μου. Όταν κάποιος με ρωτήσει πόσα παράθυρα υπάρχουν σε αυτό, δεν απαντώ αμέσως. Παράγω την απαιτούμενη πληροφορία μετά από λίγο, με απόλυτη βεβαιότητα. Στο μυαλό μου, περνώ από όλα τα δωμάτια και μετρώ τα αντικείμενα. Το σχήμα που χρησιμοποίησα δεν ήταν το αποτέλεσμα προηγούμενης εκπαίδευσης, αλλά προέκυψε αυθόρμητα ως το αποτέλεσμα επαναλαμβανόμενων δραστηριοτήτων που ήταν αποθηκευμένες στο μυαλό μου. Αυτές οι εγγραφές των δραστηριοτήτων είχαν δομηθεί αυθόρμητα στο μυαλό μου δημιουργώντας ένα σχήμα. Η ταχύτητα με τη οποία δομείται ένα σχήμα και η αξιοπιστία του εξαρτάται από τη συχνότητα των δραστηριοτήτων και την ένταση με την οποία καταγράφονται. Είναι πιθανότερο να εγγραφούν αν υπάρχει μεγαλύτερη ανάγκη δημιουργίας ενός σχήματος. Σκεφτείτε για παράδειγμα ότι κάποιος με οδηγεί από το σταθμό του τραίνου στο σχολείο, σε ένα σκηνικό που μου είναι άγνωστο και γνωρίζω ότι πρέπει να γυρίσω πίσω μόνος μου. Εδώ η ένταση εγγραφής παίζει σημαντικό ρόλο λόγω της αναγκαιότητας δημιουργίας του σχήματος. Προσπαθώ λοιπόν να θυμηθώ τη διαδρομή, κάποια κρίσιμα σήματα και τη γενική κατεύθυνση.

Έχουμε δυο είδη σχημάτων στα οποία βασίζεται η scheme oriented εκπαίδευση: Τα λεγόμενα semantic schemes που εδράζουν στις εμπειρίες της καθημερινής ζωής του μαθητή και που μας απασχολούν στην παρούσα εργασία και τα structural schemes που είναι καθαρά μαθηματικά σχήματα και δεν έχουν άμεσο δεσμό με τις εμπειρίες της ζωής του μαθητή.

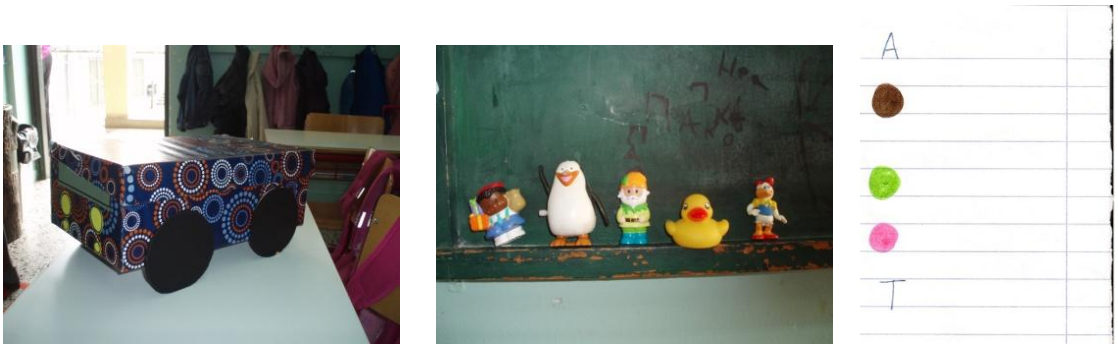
Τέλος, προκειμένου να δομήσουμε μαθηματικά σχήματα, είναι απαραίτητο να εργαστούμε σε ποικίλα μαθηματικά περιβάλλοντα και η μάθηση να λάβει χώρα κατά τον τρόπο που περιγράφει ο εποικοδομητισμός, δηλαδή, ο δάσκαλος δεν εξηγεί τίποτε στους μαθητές, αλλά μάλλον διευκολύνει τη συζήτηση στην τάξη. Μέσα από την επίλυση προβλημάτων οι μαθητές βαθμιαία ανακαλύπτουν και διαμορφώνουν, επιχειρηματολογούν, ξεκαθαρίζουν και τεκμηριώνουν.

Το συγκεκριμένο διδακτικό μαθηματικό περιβάλλον που ονομάζεται «Λεωφορείο» βασίζεται στην εμπειρία που έχουν οι μαθητές με τα μέσα μαζικής μεταφοράς. Μπορεί να εφαρμοστεί ήδη από την πρώτη τάξη του δημοτικού σχολείου. Η διαδικασία ανθρώπων που ανεβαίνουν και κατεβαίνουν και η αποτύπωση του πλήθους τους σε έναν πίνακα παρέχει ένα πλούσιο σύνολο δεδομένων και αριθμητικών σχέσεων που με τη σειρά τους μπορεί να αποτελέσουν την πηγή για τη δημιουργία μιας σειρά από προβλήματα (Jirotkova & Slezakova, 2013). Έτσι ουσιαστικά το παιχνίδι προσομοιώνει την μετακίνηση ενός λεωφορείου σε κάποια γραμμή που συνδέει μια σειρά από στάσεις. Έχουμε στη διάθεσή μας ένα λεωφορείο

(χαρτοκούτι), επιβάτες (επιλέγουμε εμείς την αναπαράστασή τους) και στάσεις (καθορισμένα σημεία στην τάξη). Το λεωφορείο ξεκινά από την αφετηρία με προορισμό το τέρμα. Στις στάσεις ενδιάμεσα αφήνει και παίρνει επιβάτες. Οι μαθητές μπορούν να δουν έναν-έναν τους επιβάτες να ανεβαίνουν ή να κατεβαίνουν, δεν έχουν όμως οπτική πρόσβαση στο περιεχόμενο του λεωφορείου. Πρωταρχικό τους μέλημα είναι να παρακολουθούν και να συγκρατούν ή να αποτυπώνουν κάπως την όλη διαδικασία ώστε να είναι σε θέση να απαντήσουν σε σχετικά ερωτήματα του δασκάλου τους μετά τον τερματισμό της διαδρομής. Γενικά το παιχνίδι απαρτίζεται από πέντε στάδια. Στις ηλικίες που μας ενδιαφέρουν στην εργασία αυτή (μαθητές Α Δημοτικού) θα περιοριστούμε στα δυο πρώτα σταδία: (α) Εξοικείωση με το παιχνίδι και (β) αποτύπωση της εξέλιξης με τη μορφή πίνακα.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Δεκαπέντε μαθητές της Α Δημοτικού (9 κορίτσια και 6 αγόρια) σε σχολείο της Θεσσαλονίκης συμμετείχαν στην έρευνα αυτή περίπου για τον πρώτο μήνα της σχολικής τους ζωής (τέλη Σεπτεμβρίου-τέλη Οκτωβρίου). Η τάξη έπαιζε το παιχνίδι του λεωφορείου παράλληλα με τη διδασκαλία των μαθηματικών περίπου κάθε 2-3 ημέρες. Το σκηνικό στην τάξη αποτελούνταν από την αφετηρία, το τέρμα και τρεις ενδιάμεσες στάσεις όλες με ονόματα χρωμάτων (καφέ, πράσινη και ροζ στάση) και το υλικό (λεωφορείο, επιβάτες) ήταν από τα άμεσα προσβάσιμα αποθέματα της τάξης (Εικ. 1α,β). Κατά τη διάρκεια του πρώτου σταδίου το ζητούμενο ήταν μόνο ένα: Ο συνολικός αριθμός επιβατών που θα αποβιβαστεί στο τέρμα της διαδρομής. Στη φάση αυτή οι αριθμοί που καλούνται να διαχειριστούν οι μαθητές κινούνται μέσα στην πεντάδα, με επιβάτες αρχικά μόνο να επιβιβάζονται. Λίγο αργότερα, όταν επέδειξαν μια αυτοπεποίθηση με τη λειτουργία του παιχνιδιού, άρχισαν επιπλέον να παίρνουν μέρος και επιβάτες που αποβιβάζονται, πάντα όμως μέσα στην πεντάδα.



Εικόνα 1: Λεωφορείο και επιβάτες (α,β). Καρτέλα αποτύπωσης δεδομένων (γ)

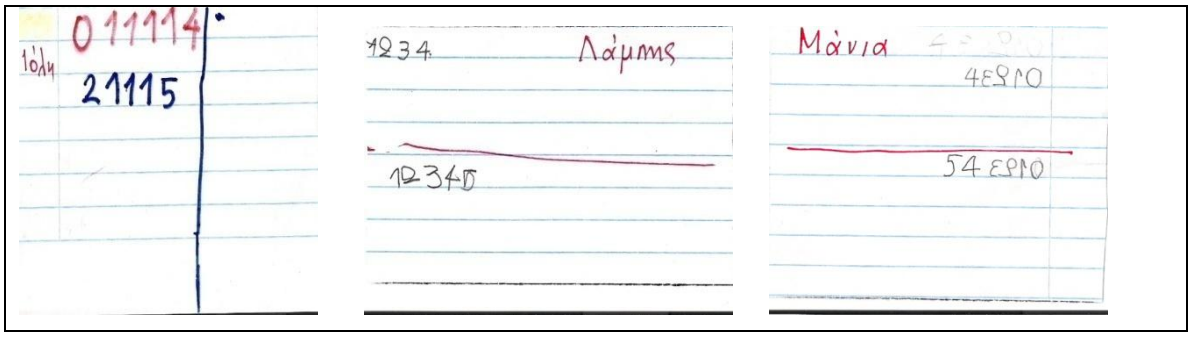
Η δεύτερη φάση παρουσιάζει αυξημένο βαθμό δυσκολίας λόγω του ότι κινούμαστε πλέον μέσα στη δεκάδα αλλά κυρίως επειδή οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήματα που προϋποθέτουν μια συνεχή καταγραφή της εξέλιξης των αριθμών των επιβατών κατά μήκος όλης της διαδρομής, όπως: «Πόσοι επιβάτες ταξίδεψαν από την καφέ ως την πράσινη στάση;», «Σε ποιο κομμάτι της διαδρομής το λεωφορείο είχε τους περισσότερους επιβάτες;», «Σε ποια στάση κατέβηκαν οι λιγότεροι επιβάτες;»

κλπ. Για να υποστηριχθούν οι μαθητές στην καταγραφή δεδομένων, τους δίνονταν κάθε φορά μια καρτέλα με τις στάσεις και τα χρώματά τους (Εικ. 1γ). Μετά το τέλος κάθε διαδρομής η δασκάλα συνέλεγε τις καρτέλες προκειμένου να εντοπίσει στοιχεία που θα προσδιόριζαν το σχεδιασμό των επόμενων διαδρομών. Η υλοποίηση των δυο τελευταίων διαδρομών ηχογραφήθηκε και το ηχητικό υλικό μεταγράφηκε σε κείμενο για τις ανάγκες της έρευνας. Τα πρωτόκολλα που προέκυψαν, οι συμπληρωμένες καρτέλες όπως και οι παρατηρήσεις της δασκάλας και των άλλων δύο ερευνητών αποτέλεσαν τα δεδομένα της μελέτης αυτής. Το υλικό αυτό μελετήθηκε προκειμένου να προσδιοριστούν ένα σύνολο από προσεγγίσεις σχετικών με την πρώιμη αίσθηση και διαχείριση των αριθμών από μέρους των μαθητών και στη συνέχεια τα δεδομένα κωδικοποιήθηκαν στη βάση αυτών των προσεγγίσεων.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

Η παρακολούθηση και αποτύπωση των ευρημάτων έγινε έχοντας πάντα κατά νου τι περιγράφει ως προσδοκώμενες δεξιότητες και γνώσεις το αναλυτικό πρόγραμμα για την τάξη αυτή και τις αντίστοιχες ενότητες του σχολικού βιβλίου. Την τελευταία φορά που παίχτηκε το παιχνίδι η τάξη βρίσκεται στην ενότητα 13 του σχολικού βιβλίου. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα και μέχρι το σημείο εκείνο περιμένουμε οι μαθητές να είναι σε θέση σταδιακά να συγκρίνουν και εκτιμούν ποσότητες μέχρι το 5, να καταμετρούν αντίστοιχου πλήθους συλλογές, να γράφουν τα αντίστοιχα ψηφία, σταδιακά να αριθμούν προφορικά μέχρι το 10 και να κατεβαίνουν αντίστροφα και μόλις στο τελευταίο τους μάθημα μπήκαν στην πρόσθεση μέσα στην πεντάδα. Για τις ποσότητες από το 6 μέχρι το 10 το ζητούμενο σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα είναι «μια πρώτη αντίληψη για τις ποσότητες» αυτές.

Η πρώτη φάση ξεκίνησε με διαδρομές στις οποίες μόνο ανέβαιναν επιβάτες. Αρχικά ένας επιβάτης σε κάθε στάση, αργότερα σε κάποια στάση δύο και σε κάποια κανένας. Πολύ γρήγορα οι μαθητές ένιωσαν άνετα με το παιχνίδι και τις απαιτήσεις του και έτσι το επόμενο βήμα ήταν να αρχίσουν σε κάποιες στάσεις να κατεβαίνουν επιβάτες. Προς το παρόν δεν υπάρχει σε κάποια στάση ταυτόχρονη επιβίβαση και αποβίβαση. Οι μαθητές είναι στη φάση αυτή εφοδιασμένοι με κενές καρτέλες για την περίπτωση που δυσκολεύονται να επιτελέσουν τις απαραίτητες πράξεις στο σύνολό τους νοερά. Έτσι άλλοι έγραφαν στην καρτέλα απλά τον αριθμό που είχαν νοερά υπολογίσει ενώ άλλοι «κρατούσαν σημειώσεις» που τους βοηθούσαν στον υπολογισμό αυτό (Εικ. 2).



Εικόνα 2: Πρώτες προσπάθειες των μαθητών

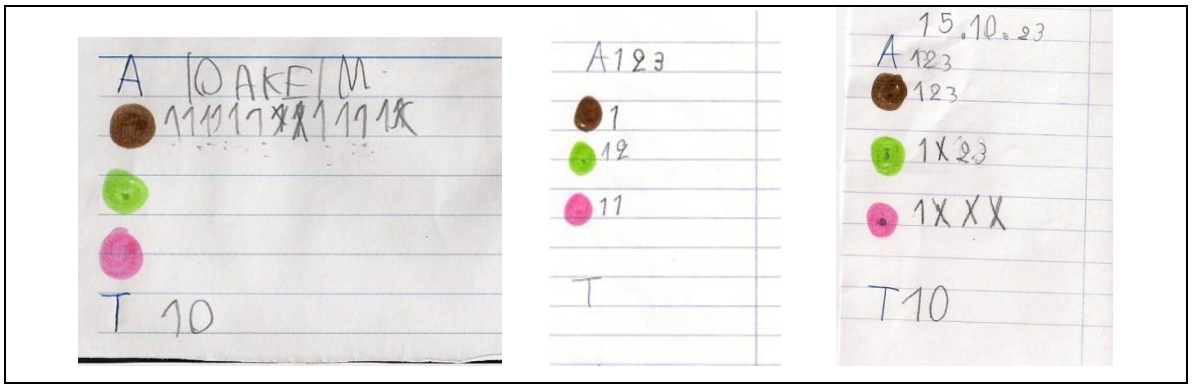
Και οι τρεις καρτέλες της Εικόνας 2 αναφέρονται σε δυο διαδρομές όπου στην μεν πρώτη ανεβαίνει ένας επιβάτης σε κάθε στάση, ενώ στη δεύτερη ξεκινά με 2 επιβάτες από την αφετηρία και στη συνέχεια ανεβαίνει ένας σε κάθε στάση. Έχει ενδιαφέρον να ερμηνεύσουμε αυτές τις πρώιμες προσπάθειες. Το μηδέν στην πρώτη καρτέλα αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή που η δασκάλα δείχνει στους μαθητές ότι το λεωφορείο πριν ξεκινήσει είναι άδειο. Η μονάδα αμέσως μετά αναφέρεται στον επιβάτη που ανεβαίνει στην αφετηρία. Στη συνέχεια οι τρεις επόμενες μονάδες αντιστοιχούν στους τρεις επιβάτες που επιβιβάζονται συνολικά στις τρεις στάσεις, και το τέσσερα στο τέλος αντιστοιχεί στον συνολικό αριθμό επιβατών που θα αποβιβαστούν στο τέρμα. Η διαδικασία αυτή συντομεύεται στη δεύτερη διαδρομή (πρώτη καρτέλα) όπου δεν υπάρχει το μηδέν και η ακολουθία ξεκινά με το συνολικό αριθμό επιβατών που επιβιβάζονται στην αφετηρία. Στη δεύτερη καρτέλα ο μαθητής μετρά και γράφει το συνολικό αριθμό μετά από κάθε επιβίβαση ξεκινώντας από τον πρώτο επιβάτη που ανεβαίνει στην αφετηρία. Το ίδιο γίνεται και στην τρίτη καρτέλα με δυο διαφορές όμως: (α) Η μαθήτρια καταγράφει το γεγονός ότι το λεωφορείο είναι άδειο όταν τους το δείχνει η δασκάλα τους και (β) Γράφει με αντίστροφη φορά από τα δεξιά προς τα αριστερά. Μια πιθανή εξήγηση για το τελευταίο θα μπορούσε να είναι η πραγματική διάταξη των στάσεων χωροταξικά μέσα στην αίθουσα. Όπως ήταν τοποθετημένοι οι μαθητές στην αίθουσα έβλεπαν το λεωφορείο να ξεκινά από τα δεξιά τους και να κινείται προς τα αριστερά τους και γι αυτό η γραφή ακολουθεί «κυριολεκτικά» την πορεία του λεωφορείου.

Το επόμενο βήμα όπως είπαμε ήταν να εμπλακούν και αποβιβάσεις. Και εδώ σύντομα οι μαθητές κινούνταν με άνεση και έφταναν στο ζητούμενο υπολογισμό είτε νοερά είτε σβήνοντας τον προηγούμενο αριθμό, κάνοντας την απαραίτητη πράξη και σημειώνοντας τον νέο.

Το σκηνικό όμως άλλαξε για τους μαθητές όταν άρχισαν στην τάξη οι διαδρομές της δεύτερης φάσης. Η πρώτη δυσκολία ήταν ότι ο συνολικός αριθμός επιβατών στο λεωφορείο κινούνταν μέσα στη δεκάδα. Η δεύτερη και σημαντικότερη δυσκολία προέκυψε όταν η δασκάλα άρχισε σταδιακά τις ερωτήσεις που απαιτούσαν συνεχή καταγραφή της όλης εξέλιξης της διαδρομής. Την έκδηλη αμηχανία των μαθητών προσπάθησε να ξεπεράσει η δασκάλα δίνοντας στους μαθητές καρτέλες όπου ήταν σημειωμένες με χρώμα οι στάσεις (όπως και η αφετηρία και το τέρμα, βλ. Εικ.1γ) και ενθαρρύνοντάς τους να σημειώνουν εκεί ότι νόμιζαν πως θα τους βοηθήσει στους

ενδιάμεσους υπολογισμούς και στον έλεγχο του τι συμβαίνει κάθε στιγμή. Προφανώς πρόκειται για μια πολύ δύσκολη υπόθεση σε τόσο μικρούς μαθητές και γι αυτό το ενδιαφέρον μας εστιάστηκε περισσότερο στη διαδικασία παρά στο αποτέλεσμα. Προσπαθήσαμε να εντοπίσουμε τη στρατηγική αποτύπωσης από μέρους των μαθητών της τρέχουσας πληροφορίας και την ταυτόχρονη σύνδεσή της με προηγούμενες προσπάθειες της πρώτης φάσης προκειμένου να διακρίνουμε κατά πόσο εξακολουθούν να χρησιμοποιούν την ίδια με πριν τακτική ή προχωρούν σε μια περεταίρω βελτίωσή της. Προφανώς οι μαθητές που κατάφερναν πια να φτάνουν στο σωστό αποτέλεσμα ήταν λιγότεροι και δεν θα μπορούσε να είναι αλλιώς. Όλοι όμως προσπάθησαν να βρουν έναν τρόπο οργάνωσης της πληροφορίας με σκοπό να αποβεί χρήσιμος για τις ερωτήσεις της δασκάλας. Ο τρόπος αυτός θα έπρεπε να σχετίζεται με το τι συμβαίνει ξεχωριστά σε κάθε στάση. Πώς όμως ένα παιδικό μυαλό, τον πρώτο μήνα της σχολικής του ζωής θα μπορούσε να ανταποκριθεί σε μια τόσο απαιτητική δραστηριότητα;

Αρχικά λοιπόν επηρεασμένοι από την πρώτη φάση κάποιοι εξακολουθούν να σημειώνουν τις επιβιβάσεις και αποβιβάσεις οριζόντια κατά μήκος μιας γραμμής αγνοώντας τις διαφορετικά χρωματισμένες γραμμές του «πίνακα». Η σημειογραφία που υιοθετούν είναι η χρήση της μονάδας για κάθε επιβάτη που ανεβαίνει στο λεωφορείο και το Χ για κάθε έναν που κατεβαίνει και το οποίο τοποθετείται άλλοτε δίπλα στις μονάδες και άλλοτε πάνω τους. Στην πρώτη περίπτωση καταγράφονται ανεξάρτητα οι επιβιβάσεις και αποβιβάσεις και μετρώνται επίσης ανεξάρτητα. Η δεύτερη όμως είναι ενδεικτική μιας πιο προχωρημένης μαθηματικής σκέψης αφού κάθε ζευγάρι (μονάδα με Χ πάνω της) ουσιαστικά αποτελεί ένα ζεύγος αντίθετων αριθμών (+1, -1) που αλληλοεξουδετερώνονται (έχουν άθροισμα μηδέν). Αυτό πρακτικά σημαίνει για τον μαθητή ότι το ζευγάρι αυτό δεν συμβάλει στον τελικό αριθμό επιβατών και κάνει πιο εύκολο τον συνολικό υπολογισμό αφού αυτό που έχει να κάνει είναι να μετρήσει τις εναπομείνασες μονάδες (βλ. Εικ. 3α). Η μέθοδος αυτή αν και αποτελεσματική για τον συνολικό αριθμό εν τούτοις αδυνατεί να υποστηρίξει το μαθητή στις ενδιάμεσες ερωτήσεις.



Εικόνα 3: (α,β,γ) Προσπάθειες των μαθητών στη δεύτερη φάση

Έτσι η ίδια η φύση των ερωτήσεων σταδιακά οδηγεί προς μια στροφή προς την καταγραφή των δεδομένων ξεχωριστά σε κάθε στάση. Το να αποφασίσουν με ποιον

τρόπο θα γίνει αυτό ήταν δύσκολο και γι αυτό οι προσπάθειες που καταβάλλουν δεν τους διευκολύνουν πάντα στο να φτάνουν σε κάποιο αποτέλεσμα. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου σωστά σε κάθε στάση γράφονται δυο αριθμοί που δηλώνουν τον αριθμό επιβατών που ανέβηκαν και κατέβηκαν όμως το να διαχειριστούν στη συνέχεια αυτή τη συγκεντρωμένη πληροφορία ήταν κάτι πέρα από τις δυνάμεις τους (Εικ.3β). Υπήρξαν όμως και περιπτώσεις μαθητών που από τη μια προσάρμοσαν τον οριζόντιο τρόπο γραφής που ακολουθούσαν σε κατακόρυφο για κάθε στάση και ταυτόχρονα έκαναν τη χρήση του Χ ως συμβόλου αποβίβασης σε κάθε στάση (Εικ. 3γ).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Όσον αφορά την πρώτη φάση του παιχνιδιού θα μπορούσαμε να σταθούμε σε δυο όψεις της συμβολής του στην τάξη. Από τη μια ανταποκρίνεται στην ανάγκη ποσοτικοποίησης από μέρους των παιδιών γεγονότων της καθημερινής τους ζωής, τα εξασκεί στο να διατηρούν την προσοχή τους κατά τη διάρκεια εξέλιξης ενός φαινομένου, αναπτύσσει την ικανότητά τους να μαθηματικοποιούν μια κατάσταση, και εξασκεί τη βραχυπρόθεσμη μνήμη τους. Από την άλλη, στο καθαρά διδακτικό κομμάτι, είναι πολύ σημαντικό να βλέπουμε μαθητές στον πρώτο μήνα της σχολικής τους ζωής να διαχειρίζονται αριθμούς και βασικά μαθηματικά γεγονότα (αύξηση και μείωση του αριθμού των επιβατών) νοερά, τη στιγμή που το σύστημα τους θέλει ακόμη να ανταποκρίνονται σε απλούστερες δραστηριότητες με την προϋπόθεση ότι βλέπουν μπροστά τους (είτε στατικά στο βιβλίο είτε χειραπτικά με εποπτικό υλικό) τα υπό διαχείριση αντικείμενα. Οι μαθητές σταδιακά έφτασαν στο σημείο να υπολογίζουν με ευκολία τον τελικό αριθμό επιβατών μέσα από μια σειρά νοερών ενδιάμεσων υπολογισμών. Σε αυτούς τους ενδιάμεσους υπολογισμούς οι μαθητές είχαν οπτική πρόσβαση μόνο στο τι μπαίνει και τι βγαίνει από το λεωφορείο. Έπρεπε λοιπόν να μεταφράσουν αυτήν την οπτική πληροφορία σε αριθμούς κάτι που δυσκόλευε τα πράγματα περισσότερο αν αναλογιστούμε ότι η πράξη της αφαίρεσης δεν είχε διδαχθεί (εξ άλλου και η πρόσθεση μόλις είχε διαπραγματευτεί ως έννοια). Είναι άλλο πράγμα να κατεβαίνει κανείς ένα-ένα από το πέντε ή από το δέκα και εντελώς άλλο να κατεβαίνουν δυο ή τρεις επιβάτες και συ να πρέπει να μεταφράσεις αυτήν την πληροφορία σε όρους συνολικού αριθμού εναπομεινάντων επιβατών. Αυτό αποκτά ακόμη μεγαλύτερη αξία αν λάβουμε υπόψη μας πόσο πιο δύσκολη πράξη θεωρείται η αφαίρεση από την πρόσθεση.

Προφανώς η δεύτερη φάση δημιουργεί αμηχανία στους μαθητές και αδυναμία να ανταποκριθούν. Γίνεται προφανές ότι αυτό που έκαναν μέχρι στιγμής δεν είναι αρκετό. Γι αυτό ενθαρρύνονται όλοι πια να κάνουν χρήση -με όποιο τρόπο νομίζουν ότι θα τους βοηθήσει- της καρτέλας με τις στάσεις. Οι μαθητές αποκτούν επίγνωση του ότι αν η μνήμη μου αποτυγχάνει να καταγράφει την όλη διαδικασία πρέπει να βρω έναν τρόπο να την υποστηρίξω και αυτό σημαίνει να βρω ένα εργαλείο κατάλληλο για την συγκεκριμένη καταγραφή. Σιωπηρά βέβαια η καρτέλα υποδεικνύει τη χρήση ενός πίνακα με δυο εισόδους όπου η μία είσοδος αναφέρεται

στις στάσεις και η άλλη στον αριθμό των επιβατών που ανεβαίνουν ή κατεβαίνουν. Μάλιστα, το εργαλείο αυτό φαίνεται ότι υπόκειται σε βαθμιαία βελτίωση. Βλέπουμε στην αρχή οι μαθητές να οργανώνουν τα δεδομένα τους σε μια συνεχή σειρά, όμως η αδυναμία να αξιοποιήσουν τα δεδομένα αυτά για τις ενδιάμεσες ερωτήσεις τους οδηγεί σταδιακά στη χρήση ακριβώς της λογικής των δυο εισόδων και έτσι αρχίζουν και γράφουν σε ξεχωριστή (την αντίστοιχη) κάθε φορά σειρά τα δεδομένα που αφορούν διαφορετικές στάσεις. Ακόμη και ο συμβολισμός που χρησιμοποιούν είναι προσαρμοσμένος έτσι ώστε να νοηματοδοτεί (για το συγκεκριμένο μαθητή) ακριβώς το ζητούμενο που είναι ο έλεγχος των ενδιάμεσων βημάτων. Η ιδέα αυτή του πίνακα, ενδεικτική της οργάνωσης δεδομένων σε μια συγκεντρωτική μορφή που να αποκτά νόημα για τον «αναγνώστη», αποτελεί μια σημαντική δεξιότητα που θα χρειαστεί πολλές φορές στη διάρκεια της σχολικής ζωής του μαθητή. Στο σημείο αυτό ας ανακαλέσουμε την ιδέα του procept όπως την ορίζουν οι Gray και Tall (1994). Ο όρος προέκυψε από την σύνθεση των όρων process (διαδικασία) και concept (έννοια) και μπορεί να εκληφθεί ως μια διαδικασία που παράγει ένα μαθηματικό αντικείμενο και ένα σύμβολο που αναπαριστά είτε τη διαδικασία είτε το αντικείμενο, δηλαδή ως ένα αμάλγαμα και της διαδικασίας και της έννοιας. Με την έννοια αυτή μπορούμε πχ να μιλήσουμε για το procept του 6. Περιλαμβάνει τη διαδικασία (process) του να μετρώ 6 και τη συλλογή άλλων αναπαραστάσεων όπως τα 3+3, 4+2, 2x3, κλπ. Έτσι η χρήση των συμβόλων 4+2 υπονοεί είτε τη διαδικασία της πρόσθεσης των δύο αριθμών είτε την έννοια (concept) του αθροίσματος. Στην περίπτωσή μας, η διαδρομή του λεωφορείου μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το process και ο πίνακας καταγραφής ότι είναι το concept. Οι Hejny και Jirotkova (2009) υποστηρίζουν ότι όταν ο μαθητής καταγράφει την όλη εξέλιξη μαθαίνει πώς να αποτυπώνει μια διαδικασία (process) χρησιμοποιώντας μια έννοια (concept). Αν αντίστροφα ένας συμπληρωμένος πίνακας τον βοηθά να επαναλάβει μια διαδρομή τότε αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής μαθαίνει από μία έννοια να συνάγει μια διαδικασία. Αυτή λοιπόν η αμφισημία του συμβολισμού επιτρέπει σε έναν μαθητή την ευελιξία να κινείται με τη σκέψη του μεταξύ της διαδικασίας (διεκπεραίωσης μιας μαθηματικής δραστηριότητας) και της έννοιας (που ο μαθητής διαχειρίζεται (νοερά) στα πλαίσια ενός ευρύτερου νοητικού σχήματος). Αυτός ο συμβολισμός λοιπόν δεν κάνει τίποτε άλλο από το να αναπαριστά το αμάλγαμα της αμφισημίας μεταξύ process-concept, δηλαδή να αναπαριστά το procept το οποίο φαίνεται να ενισχύει, να εμπλουτίζει την κατανόηση του φαινομένου από μέρους των μαθητών.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή περιγράψαμε τα ευρήματα από μια πειραματική εφαρμογή του διδακτικού περιβάλλοντος «Λεωφορείο» σε μαθητές της Α Δημοτικού τον πρώτο μήνα της σχολικής τους ζωής. Τα ευρήματα φαίνεται να υποστηρίζουν την άποψη ότι το περιβάλλον είναι ιδιαίτερα ελκυστικό για τους μαθητές. Από τη μια, εύκολα τους εμπλέκει σε μια διαδικασία πρώιμης ενασχόλησης με την αίσθηση των αριθμών σε ένα επίπεδο που ξεφεύγει από όσα προβλέπει το Αναλυτικό Πρόγραμμα για αυτές

ακριβώς τις ηλικίες. Από την άλλη αναπτύσσει τη δεξιότητά τους στο να δημιουργούν και να βελτιώνουν ένα σύστημα καταγραφής και οργάνωσης δεδομένων, δεξιότητα πολύ σημαντική για τη μαθηματική σχολική τους ζωή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-140.

Hejny, M. (2012). Exploring the cognitive dimension of teaching mathematics through scheme-oriented approach to education. *Orbis Scholae, 2*(6), 41-55.

Hejny, M., & Jirotkova, D. (2009). Didactic environment Bus. In E. Swoboda, & J. Guncaga (Eds.), *Child and Mathematics* (pp. 129-155). Rzeszow: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Hejny, M., Jirotkova, D., & Slezakova, J. (2007). Procept-Schema-Structure. In J. Novotna & H. Moraova (Eds.), *SEMT-07-International Symposium, Elementary Maths Teaching* (134-141). Prague.

Hejny, M., Jirotkova, D., & Slezakova, J. (2007-2011). *Matematika pro 1.-5. ročník ZŠ* . Textbooks and Teachers' guides. Plzen: Fraus.

Jirotkova, D., & Slezakova, J. (2013). Didactic Environment Bus as a tool for development of early mathematical thinking. In J. Novotna & H. Moraova (Eds.), *SEMT-13- International Symposium, Elementary Maths Teaching* (pp. 147-154). Prague.

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΝΤΑΣ ΤΗΝ «ΨΕΥΔΑΙΣΘΗΣΗ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ» - ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Ιωάννης Παπαδόπουλος[1], Josip Slisko[2], Zalkida Hadzibegovic[3]

[1]Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, [2]Benemérita Universidad Autónoma da Puebla, México, [3]University of Sarajevo, Bosnia and Herzegovin

[1]ypapadop@eled.auth.gr [2]jslisko@fcfm.buap.mx [3]zalkidah@yahoo.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή ερευνά το πρόβλημα του διπλασιασμού του εμβαδού του τετραγώνου μέσα σε ένα πλαίσιο που φιλοδοξεί να αντιμετωπίσει τη λανθασμένη πεποίθηση των μαθητών για την ύπαρξη γραμμικής σχέσης στη μεταβολή των διαστάσεων του τετραγώνου και του εμβαδού του. Τα ευρήματα της πιλοτικής μελέτης σε Ελλάδα και Βοσνία-Ερζεγοβίνη έχουν διπλή ανάγνωση. Από τη μια φαίνεται ότι οι μαθητές στο πλαίσιο αυτό δεν επηρεάζονται από την ψευδαίσθηση της γραμμικότητας. Από την άλλη αν και λύνουν με επιτυχία το πρόβλημα δεν φαίνεται να είναι σε θέση να κάνουν τη σύνδεση ανάμεσα σε αυτό και στο μαθηματικό του περιεχόμενο.

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με τον όρο «ψευδαίσθηση της γραμμικότητας» οι De Bock, Van Dooren, Janssens και Verschaffel (2007) αναφέρονται στην λανθασμένη πεποίθηση ότι αν οι πλευρές ενός σχήματος διπλασιαστούν προκειμένου να παραχθεί ένα όμοιο σχήμα, τότε και το εμβαδόν του (ή ο όγκος του) θα διπλασιαστεί επίσης. Δεν πρόκειται για κάτι νέο αφού τη συναντάμε ήδη από την αρχαιότητα στο περίφημο παράδειγμα του νεαρού δούλου στον *Μένωνα,* το διάλογο του Πλάτωνα (διπλασιασμός τετραγώνου) ή στο γνωστό *Δήλιο πρόβλημα (*διπλασιασμός του κύβου). Αυτή η λανθασμένη πεποίθηση μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι ο λύτης συνδέεται άμεσα με ένα συγκεκριμένο μαθηματικό πλαίσιο (πχ ένα συγκεκριμένο επίπεδο σχήμα, το εμβαδόν του, οι διαστάσεις του). Όμως, τι θα συμβεί αν ο λύτης εμπλακεί στην ίδια μαθηματική ιδέα χωρίς τη σαφή, άμεσα αναγνωρίσιμη παρουσία του πλαισίου αυτού; Θα είναι σε θέση να πετύχει αποτελέσματα χωρίς να εμποδιστεί από την πεποίθηση αυτή; Και αν ναι, θα είναι σε θέση να κάνει τη σύνδεση ανάμεσα στην κατάσταση επίλυσης προβλήματος και στη συγκεκριμένη μαθηματική ιδέα που αυτή εμπεριέχει; Επιπλέον, πως αυτές οι παραπάνω όψεις επηρεάζονται όταν οι λύτες είναι μαθητές διαφορετικών χωρών (στην περίπτωσή μας Ελλάδα και Βοσνία-Ερζεγοβίνη) γεγονός που σημαίνει διαφορετικές εκπαιδευτικές παραδόσεις; Αυτά είναι και τα ερωτήματα που η εργασία αυτή θα προσπαθήσει να ερευνήσει.

2. Η ΚΥΡΙΑΡΧΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Η ερευνητική βιβλιογραφία επιβεβαιώνει την ύπαρξη αυτής της πολύ ισχυρής τάσης των μαθητών να εφαρμόζουν το γραμμικό μοντέλο σε μη-γραμμικά προβλήματα που σχετίζονται με μεγεθύνσεις δισδιάστατων σχημάτων. Οι De Bock κ.α.(2007) στο βιβλίο τους «The Illusion of Linearity» παρουσιάζουν και συζητούν μια σειρά από σχετικές μελέτες πάνω στις λύσεις των μαθητών σε παρόμοια προβλήματα. Η βασική αρχή στα προβλήματα αυτά είναι ότι αν έχουμε μια μεγέθυνση κατά έναν παράγοντα κ, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να πολλαπλασιάσω τα μήκη των πλευρών κατά κ και το εμβαδόν κατά $κ^2$. Αυτό έχει να κάνει αποκλειστικά με τα εμπλεκόμενα μεγέθη (μήκος, εμβαδόν, όγκος) και όχι με το είδος του σχήματος. Οι μελέτες αυτές επιβεβαίωσαν την κυριαρχία του γραμμικού μοντέλου στις λύσεις των μαθητών. Οι ίδιοι ερευνητές (Van Dooren et al., 2004) επιχειρώντας να θεραπεύσουν αυτήν την παρανόηση σε μαθητές της Β Γυμνασίου, ανέπτυξαν μια σειρά από πειραματικά μαθήματα προκειμένου να πετύχουν μια εννοιολογική αλλαγή στους μαθητές. Η ψευδαίσθηση της γραμμικότητας φάνηκε να υποχωρεί στους περισσότερους μαθητές, όμως αυτό δε φάνηκε να καταλήγει σε μια βαθιά εννοιολογική αλλαγή. Οι Modestou, Gagatsis και Pitta-Pantazi (2004) ερεύνησαν την κυριαρχία του γραμμικού μοντέλου σε Κύπριους μαθητές ηλικίας 12-13 ετών κατά την επίλυση προβλημάτων που δεν βασίζονταν στη χρήση αναλογιών σχετικών με το εμβαδόν και τον όγκο ορθογώνιων στερεών. Επιβεβαίωσαν και αυτοί την τάση των μαθητών να εφαρμόζουν αναλογική επιχειρηματολογία σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος που όμως δεν προσφέρονταν για μια τέτοια προσέγγιση. Όμως αυτό που επίσης εντόπισαν ήταν ότι όταν αλλάζει το πλαίσιο του προβλήματος τότε αυτή η τάση φαίνεται να υποχωρεί. Η αλλαγή πλαισίου έχει να κάνει με τον τρόπο που παρουσιάζεται το πρόβλημα (πχ αντί της χρήσης λέξεων όπως διπλασιάζεται ή τριπλασιάζεται, δίνονται απλά τα μήκη των πλευρών). Εμείς στην εργασία αυτή θα κάνουμε χρήση μη τετριμμένων προβλημάτων σε ένα πλαίσιο όχι απλά διαφορετικό στον τρόπο παρουσίασης αλλά που φαινομενικά δεν θα έχει κάποια σχέση με αναλογίες και εμβαδά όμοιων σχημάτων. Προφανώς η μαθηματική ιδέα παραμένει η ίδια (σχέση εμβαδών όμοιων σχημάτων), δεν υπάρχει όμως κάποια ρητή αναφορά σε αυτό στην εκφώνηση του προβλήματος όπως θα φανεί πιο κάτω.

3. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην έρευνα αυτή πήραν μέρος τρεις μαθητές (2 αγόρια και 1 κορίτσι) της Στ τάξης από την Ελλάδα (ας τους ονομάσουμε Νικόδημο, Θανάση και Μυρτώ αντίστοιχα) και τρεις μαθητές της Α Γυμνασίου ($7^η$ τάξη, 2 αγόρια και 1 κορίτσι) από τη Βοσνία-Ερζεγοβίνη (ας τους ονομάσουμε Ali, Sven και Mira αντίστοιχα). Κατά τη διάρκεια των σχολικών μαθηματικών τους οι Έλληνες μαθητές είχαν διδαχθεί βασικές έννοιες της γεωμετρίας περιλαμβανομένων των βασικών γεωμετρικών σχημάτων (κυρίως τρίγωνα, τετράπλευρα και κύκλους), κάποιες ιδιότητές τους όπως επίσης και τους τύπους για τον υπολογισμό της περιμέτρου και του εμβαδού τους. Το επίπεδό τους

χαρακτηρίστηκε από το δάσκαλό τους πάνω από το μέσο όρο της τάξης. Τα ίδια ισχύουν και για τους μαθητές από τη Βοσνία-Ερζεγοβίνη. Το περιεχόμενο των μαθημάτων τους στη γεωμετρία είναι ανάλογο και οι μαθητές παρουσιάζουν πολύ ψηλή βαθμολογία στα μαθηματικά. Επιπλέον, έχουν διδαχθεί έννοιες όπως η τετραγωνική ρίζα, οι αρνητικοί αριθμοί και το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Η εκφώνηση των προβλημάτων είχε ως εξής:

Πρόβλημα 1: Χρησιμοποίησε αυτό το μεγάλο τετράγωνο, χάρακα, ψαλίδι και κολλητική ταινία με όποιον τρόπο νομίζεις προκειμένου να δημιουργήσεις δυο μικρότερα ίσα τετράγωνα χωρίς να σου περισσέψει τίποτε.

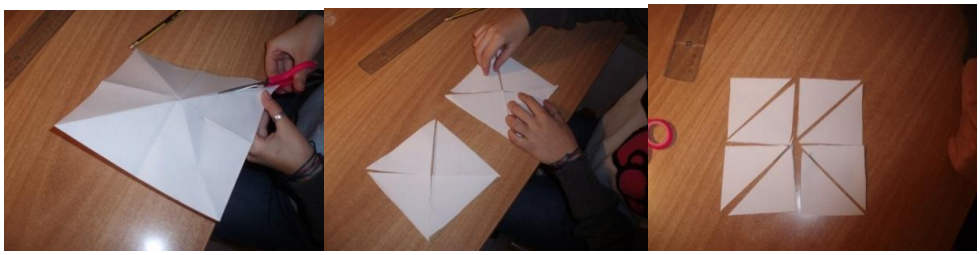
Πρόβλημα 2: Χρησιμοποίησε αυτά τα δυο μικρά ίσα τετράγωνα, χάρακα, ψαλίδι και κολλητική ταινία, με όποιον τρόπο νομίζεις προκειμένου να δημιουργήσεις ένα μεγάλο τετράγωνο χωρίς να σου περισσέψει τίποτε.

Τα προβλήματα επιλέχθηκαν κυρίως γιατί διαπραγματεύονται την έννοια του διπλασιασμού του εμβαδού σε όμοια τετράγωνα χωρίς όμως να κάνουν καμιά ρητή αναφορά στην έννοια του εμβαδού και του διπλασιασμού του και χωρίς να δίνουν αριθμητικά στοιχεία (μήκη πλευρών με σχέση 1:2) κάτι που και πάλι θα μπορούσε να λειτουργήσει ως μια νύξη προς την κατεύθυνση του γραμμικού μοντέλου. Στους μαθητές ζητήθηκε να σκέφτονται μεγαλοφώνως (Thinking Aloud protocol) στη βάση της ανάλυσης πρωτοκόλλου (Schoenfeld, 1985). Οι συνεδρίες ηχογραφήθηκαν, μεταγράφηκαν σε κείμενο και στη συνέχεια, τα πρωτόκολλα αναλύθηκαν σε επεισόδια. Στο τέλος κάθε συνεδρίας ακολούθησε μια μικρή συζήτηση με κάθε μαθητή επικεντρωμένη ουσιαστικά στο ερώτημα: «Νομίζεις πως έμαθες κάτι σχετικά με τα μαθηματικά μέσα από τις δραστηριότητες αυτές;». Το ερώτημα τέθηκε για να δούμε κατά πόσο οι μαθητές ήταν σε θέση να συσχετίσουν τις δραστηριότητες με το μαθηματικό τους περιεχόμενο.

Τέλος τα δεδομένα κωδικοποιήθηκαν με βάση τα εξής επίπεδα: (1)Να καταγράψουμε το κατά πόσο η αλλαγή πλαισίου εμπόδισε την επίδραση του γραμμικού μοντέλου, (2) Να καταγράψουμε τη μαθηματική διάσταση των δραστηριοτήτων όπως την αντιλήφθηκαν οι μαθητές, και (3) Να καταγράψουμε ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στις δυο εκπαιδευτικές κουλτούρες.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

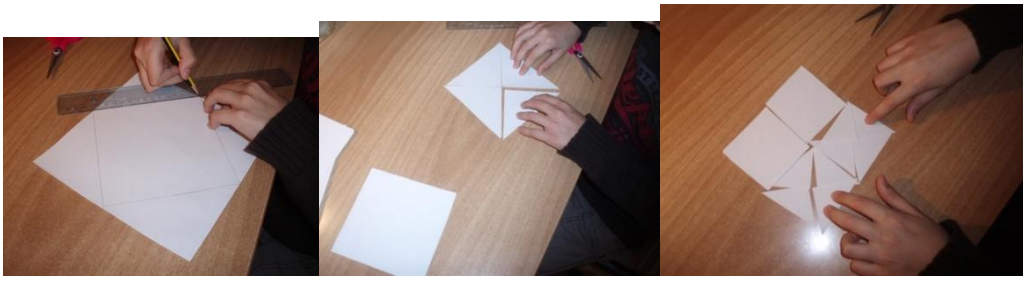
Το κύριο γνώρισμα των μαθητών από την Ελλάδα ήταν ότι η προσέγγισή τους ήταν καθαρά γεωμετρική, χωρίς σχεδόν καθόλου χρήση αριθμών. Η Μυρτώ μετά από μια αποτυχημένη προσπάθεια που βασίστηκε στη διαίρεση του αρχικού τετραγώνου σε δυο ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα αποφάσισε να διπλώσει το τετράγωνο κατά μήκος όλων των αξόνων συμμετρίας του. Αυτό της επέτρεψε να δημιουργήσει 8 ίσα τρίγωνα που μπόρεσε να τα οργανώσει σε δυο ομάδες των τεσσάρων σχηματίζοντας ένα τετράγωνο με κάθε μια. Προφανώς επρόκειτο για ίσα τετράγωνα αφού αποτελούνταν από τέσσερα ίσα τρίγωνα το καθένα (Εικ.1α,β).



Εικόνα 1: Μυρτώ-α, β, γ

Για τη δεύτερη δραστηριότητα η μαθήτρια είπε πως θα βασιστεί στην εμπειρία της προηγούμενης δραστηριότητας και ότι θα εργαστεί κατά τρόπο αντίστροφο. Χώρισε καθένα από τα δυο μικρά τετράγωνα σε τέσσερα επιμέρους και δημιούργησε τα 8 τρίγωνα που της ήταν απαραίτητα, οπότε ήταν πια εύκολο να οδηγηθεί στο μεγάλο τετράγωνο (Εικ.1γ). Εύκολο ήταν επίσης να δεχτεί ότι το σχήμα αυτό ήταν τετράγωνο λόγω των ίσων ισοσκελών τριγώνων που το συνέθεταν.

Ο Θανάσης ένωσε τα μέσα των πλευρών του μεγάλου τετραγώνου σχηματίζοντας ήδη το πρώτο τετράγωνο στο εσωτερικό του. Το έκοψε και με τα τέσσερα ίσα τρίγωνα που απέμειναν σχημάτισε το δεύτερο ίσο τετράγωνο (Εικ.2α,β). Στη συνέχεια, για τη δεύτερη δραστηριότητα, ακολούθησε και αυτός αντίστροφα την ίδια πορεία προκειμένου να δημιουργήσει το μεγάλο τετράγωνο. Παρόλο που ο βαθμός πολυπλοκότητας ήταν αυξημένος λόγω του μεγάλου αριθμού μερών που δημιουργούσε η προσέγγιση αυτή (5 κομμάτια για κάθε τετράγωνο) εν τούτοις η προσήλωση στην πορεία που ακολούθησε στην πρώτη τον βοήθησε να συνθέσει το μεγάλο τετράγωνο στη δεύτερη (Εικ.2γ).



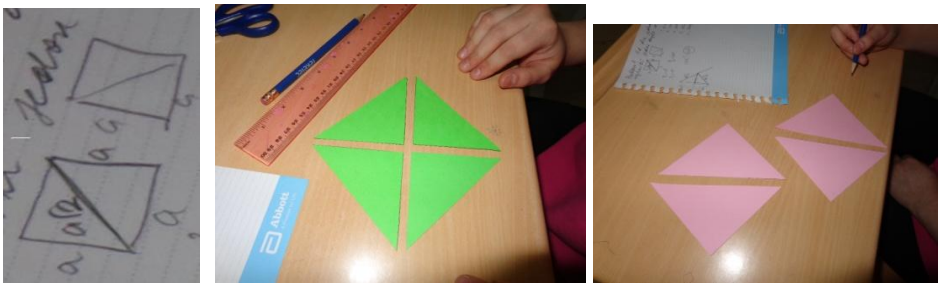
Εικόνα 2: Θανάσης-α, β, γ

Τέλος, ο Νικόδημος επέλεξε σε ένα πρώτο βήμα να διαιρέσει το αρχικό τετράγωνο κατά μήκος της μιας διαγωνίου του δημιουργώντας δυο ισοσκελή τρίγωνα και στη συνέχεια διαίρεσε κάθε τρίγωνο σε δυο άλλα επιμέρους τρίγωνα, όλα ίσα μεταξύ τους. Με τέσσερα ίσα τρίγωνα στη διάθεσή του διαπίστωσε πως κάθε ζευγάρι τέτοιων τριγώνων δημιουργούσε ένα τετράγωνο και προφανώς τα δυο τετράγωνα ήταν ίσα (Εικ.3α,β). Αμέσως αναγνώρισε και αυτός την εφαρμοσιμότητα της στρατηγικής του στο πρώτο μέρος προκειμένου να λύσει το δεύτερο. Έκοψε καθένα από τα μικρά τετράγωνα κατά μήκος μιας διαγωνίου τους και συνέθεσε το μεγάλο τετράγωνο με τη χρήση των τεσσάρων τριγώνων (Εικ.3γ)

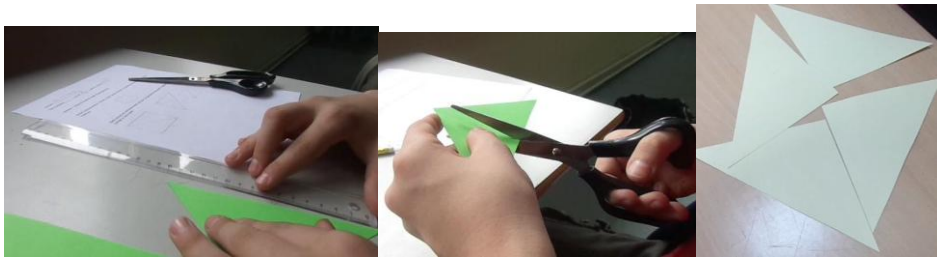


Εικόνα 3: Νικόδημος-α, β, γ

Ας δούμε στη συνέχεια τις προσεγγίσεις των μαθητών από τη Βοσνία-Ερζεγοβίνη. Βασικό γνώρισμα και των τριών προσεγγίσεων που εφάρμοσαν οι μαθητές ήταν η έντονη χρήση μετρήσεων, πράξεων, σχέσεων και υπολογισμών. Η Mira, η καλύτερη στην τάξη της και πολύ δυνατή στα μαθηματικά, προτίμησε να ξεκινήσει λύνοντας πρώτα το δεύτερο πρόβλημα. Θεωρεί ως α^2 το εμβαδόν κάθε μικρού τετραγώνου και ψάχνει για την πλευρά του μεγάλου τετραγώνου που θα έχει εμβαδόν όσο και τα δυο μαζί , δηλαδή $2\alpha^2$. Αυτό την οδηγεί στο να υπολογίσει την πλευρά του τετραγώνου αυτού ως $\sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Πολύ σύντομα διαπιστώνει – με τη χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος- ότι $a\sqrt{2}$ είναι η υποτείνουσα του τριγώνου που δημιουργεί σε καθένα από τα μικρά τετράγωνα η χάραξη μιας διαγωνίου τους (Εικ.4α). Στη συνέχεια δημιουργεί αυτό το μήκος -που θα χρησιμοποιήσει ως πλευρά για το μεγάλο τετράγωνο- κόβοντας κάθε μικρό τετράγωνο κατά μήκος της διαγωνίου του και συνθέτοντας τα τέσσερα επί μέρους τρίγωνα (Εικ.4β). Για το επόμενο πρόβλημα ακολουθεί και πάλι την ίδια ιδέα πάντα βασισμένη σε υπολογισμούς και στην εμπειρία που προηγήθηκε. Η διαγώνιος του μεγάλου τετραγώνου πλευράς α είναι $a\sqrt{2}$, το μισό της είναι $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ και πρόκειται για τις ίσες πλευρές των τεσσάρων τριγώνων που δημιουργούν οι διαγώνιες και που ενωμένα ανά δύο θα μου δώσουν τα ζητούμενα τετράγωνα (Εικ.4γ)



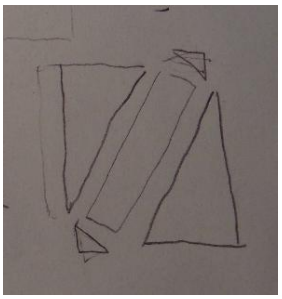
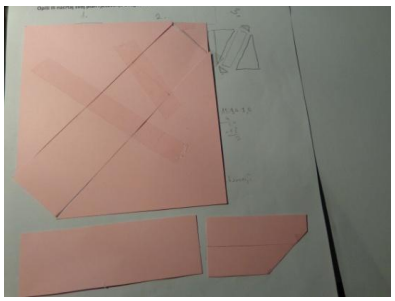
Εικόνα 4: Mira-α, β, γ



Εικόνα 5: Ali -α, β, γ

Ο Ali κόβει το μεγάλο τετράγωνο κατά μήκος της διαγωνίου του, συγκρίνει με επίθεση τα δυο τρίγωνα που δημιουργούνται, φέρει τα ύψη στα δυο τρίγωνα και μετρά τα μήκη τους όπως και τα μήκη των δύο κάθετων πλευρών και της υποτείνουσας. Κόβει το ένα τρίγωνο κατά μήκος του ύψους του και ενώνει τα δυο μικρότερα τρίγωνα κατά μήκος των υποτεινουσών τους (Εικ. 5α,β). Εκτελεί και πάλι μια σειρά από μετρήσεις με το χάρακα για να επιβεβαιώσει τα ίσα μεγέθη των διαστάσεων των τετραγώνων. Και αυτός μεταφέρει εύκολα την ίδια ιδέα στο επόμενο πρόβλημα διαιρώντας τα δυο τετράγωνα κατά μήκος μια διαγωνίου τους και ενώνοντας τα 4 επιμέρους τρίγωνα σε ένα μεγάλο τετράγωνο (Εικ,5γ)

Ο Sven τέλος δεν καταφέρνει να λύσει κανένα από τα δυο προβλήματα. Σχεδιάζει τα επιμέρους βήματά του στο χαρτί, κόβει σε κάποιες περιπτώσεις κατά μήκος μιας διαγωνίου του τετραγώνου, μετρά μήκη πλευρών, προσπαθεί κόβοντας κομμάτια να υλοποιήσει το σχέδιο που έχει συλλάβει στο χαρτί (Εικ. 6α, β), όμως πάντα του περισσεύουν κομμάτια όπως χαρακτηριστικά αναφέρει: «Δεν ξέρω γιατί μου περισσεύει πάντα τόσο αχρησιμοποίητο υλικό». Εντυπωσιακά συχνά χρησιμοποιεί το ρήμα «μετρώ». Στο τέλος παραιτείται εκφράζοντας την απορία του σχετικά με το πως δεν κατέστη δυνατόν να δημιουργηθεί το μεγάλο τετράγωνο είτε τα δυο μικρά με τον τρόπο που τα σχεδίασε. Παραιτήθηκε από την προσπάθεια όχι όμως και από την πεποίθηση ότι η προσέγγισή του ήταν σωστή.

Εικόνα 6: Sven -α, β

Μετά το πέρας κάθε μαθητής κλήθηκε να συμμετάσχει σε μια συζήτηση επικεντρωμένη στο τι νομίζει πως του πρόσφερε σε μαθηματική γνώση η ενασχόλησή του με τις συγκεκριμένες δραστηριότητες. Έχει σημασία λοιπόν ότι παρόλο που σχεδόν όλοι τους μπόρεσαν να λύσουν με επιτυχία τα προβλήματα και ουσιαστικά να διαπραγματευτούν το θέμα των εμβαδών όμοιων σχημάτων (διπλασιασμός και υποδιπλασιασμός τετραγώνου) χωρίς να αφήσουν περιθώρια στην παρανόηση του γραμμικού μοντέλου να επηρεάσει τη δουλειά τους, εν τούτοις κανένας τους δεν ήταν σε θέση να δει αυτήν τη γεωμετρική ιδέα που ενυπήρχε στα δυο προβλήματα. Οι απαντήσεις τους αποτυπώνονται στα παρακάτω αποσπάσματα:

«Πιθανόν θα με βοηθήσει να λύσω αργότερα παρόμοια προβλήματα….Στην περίπτωση για παράδειγμα που πρέπει να διαιρέσω ένα σχήμα σε μικρότερα» (Μυρτώ). «Είχα δυο προβλήματα που το ένα ήταν αντίστροφο του άλλου και έμαθα

ότι μπορείς να χρησιμοποιείς κάποια σχήματα για να φτιάξεις άλλα» (Θανάσης). «Δεν είχε μαθηματικά με πράξεις. Είναι ένα είδος μαθηματικών που πρέπει να σκέφτεσαι διαφορετικά. Αν μπορείς να καταλάβεις το ένα πρόβλημα τότε είναι ευκολότερο να λύσεις το άλλο. Έμαθα ότι από ένα τετράγωνο μπορείς να κάνεις δυο μικρότερα και το αντίστροφο (Νικόδημος). «Δεν κάνουμε κάτι παρόμοιο στην τάξη. Μου άρεσε που ήταν σαν παζλ. Μου αρέσει γενικά να κάνω πράγματα που φαίνονται κάπως πολύπλοκα (Mira). «Τα μαθηματικά μπορεί να γίνουν πιο ενδιαφέροντα όταν παίρνουν έναν πρακτικό χαρακτήρα. Έμαθα ότι μπορούμε να το κάνουμε αυτό και στα μαθηματικά όπως στη φυσική» (Ali). «Τα προβλήματα παραμένουν για μένα ένα αίνιγμα» (Sven).

5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 «Ψευδαίσθηση της γραμμικότητας» - Εργασία σε διαφορετικό πλαίσιο

Το γεγονός ότι δεν υπήρχε στην εκφώνηση του προβλήματος καμιά αναφορά σε έννοιες που πιθανόν να πυροδοτήσουν την παρανόηση του γραμμικού μοντέλου (πχ φτιάξτε ένα τετράγωνο με διπλάσιο ή μισό εμβαδόν) όπως και το ότι δεν δόθηκαν μήκη πλευρών ή εμβαδά έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές να λύσουν το πρόβλημα χωρίς την άμεση αρνητική επίδραση αυτής της λανθασμένης πεποίθησης αξιοποιώντας το εύρος των μαθηματικών γνώσεων που κατείχαν. Η Μυρτώ δείχνει μια γνώση των σχημάτων και των ιδιοτήτων τους. Εύκολα αποδέχεται το γεγονός ότι η διαγώνιος του τετραγώνου το διαιρεί σε δυο ίσα τρίγωνα βασισμένη στη γνώση των ιδιοτήτων των αξόνων συμμετρίας κάτι που αξιοποιεί με το να διαιρέσει το αρχικό τετράγωνο σε 8 μέρη όλα βασισμένα στη χρήση της αξονικής συμμετρίας. Αυτό σήμαινε αυτόματα ότι τα τετράγωνα που δημιουργούνταν από τέτοια τρίγωνα θα ήταν επίσης μεταξύ τους ίσα. Παρόμοια γνώση γεωμετρίας (αν και περισσότερο διαισθητική παρά φορμαλιστική) δείχνει η κίνηση του Θανάση να ενώσει τα μέσα των πλευρών του αρχικού τετραγώνου που σχηματίζουν ένα τετράγωνο. Φυσικά, για τη συνέχεια είναι εύκολο να δει ότι τα 4 τρίγωνα που περισσεύουν είναι ίσα μεταξύ τους αφού οι κάθετες πλευρές τους είναι το μισό των πλευρών του τετραγώνου. Για αυτό και όταν δημιουργεί το δεύτερο τετράγωνο με βάση τα τρίγωνα προχωρά σε μια σύγκριση μέσω επίθεσης προκειμένου να επαληθεύσει την ισότητα των 2 τετραγώνων. Ο Νικόδημος αξιοποιεί επίσης της γνώση ότι οι διαγώνιες ως άξονες συμμετρίας δημιουργούν τέσσερα ίσα τρίγωνα που συνδυασμένα ανά δύο δίνουν δυο ίσα τετράγωνα. Η Mira ακολουθεί μια κυρίως φορμαλιστική προσέγγιση κάνοντας χρήση εννοιών όπως η τετραγωνική ρίζα και το πυθαγόρειο θεώρημα, βασισμένη σε επί μέρους υπολογισμούς μηκών και εμβαδών. Ο Ali εργάζεται με τρόπο που δείχνει μάλλον αδύναμη γεωμετρική σκέψη. Για παράδειγμα, κόβοντας ένα τετράγωνο κατά

μήκος μιας διαγωνίου ελέγχει το κατά πόσο τα δυο τρίγωνα είναι ίσα κάνοντας μετρήσεις (αγνοώντας τη βασική ιδιότητα της αξονικής συμμετρίας). Το ίδιο παρατηρούμε όταν εκφράζει την ανάγκη να χαράξει ύψη στα ισοσκελή τρίγωνα για να τα διαιρέσει σε δυο μικρότερα τρίγωνα. Κάνει πολύ εντατική χρήση μετρήσεων με το χάρακα σε όλη τη διάρκεια της συνεδρίας. Το ίδιο ισχύει και με τον Sven. Ενώ μια γεωμετρική προσέγγιση θα ευνοούσε την εύρεση λύσης (αφού φέρνει τις δυο διαγωνίους του τετραγώνου) η έμφαση που δίνει στις μετρήσεις τον οδηγεί στο να απορρίψει την ιδέα του, η οποία κάτω από το πρίσμα της συμμετρίας ή των ιδιοτήτων ενός τετραγώνου θα διευκόλυνε τη λύση. Αν εξαιρέσουμε λοιπόν τον τελευταίο μαθητή όλοι οι υπόλοιποι διαπραγματεύτηκαν με επιτυχία το πρόβλημα του διπλασιασμού (και υποδιπλασιασμού) του τετραγώνου χωρίς καμιά (τουλάχιστον εμφανώς διακριτή) παρουσία μιας επίδρασης του λανθασμένου γραμμικού μοντέλου. Αυτό οφείλεται κατά την άποψή μας στο ότι το πρόβλημα τέθηκε μέσα σε ένα εντελώς διαφορετικό πλαίσιο που δεν διατηρούσε κανέναν φανερό μαθηματικό δεσμό με όσα θα μπορούσαν να ενεργοποιήσουν τη συγκεκριμένη παρανόηση στη σκέψη των μαθητών.

5.2 Σύνδεση με τη μαθηματική ιδέα του προβλήματος

Γενικά η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών θεωρεί ότι η επίλυση μη τετριμμένων προβλημάτων έχει θετική επίπτωση στη χρήση στρατηγικών από μέρους των μαθητών όπως και στην σε βάθος επίγνωση του πώς έλυσαν το πρόβλημα. Αυτό φάνηκε καθαρά στην περίπτωση των πέντε από τους έξι μαθητές που όλοι τους ήταν σε θέση να έχουν επίγνωση της στρατηγικής που εφάρμοσαν στο αρχικό πρόβλημα σε σημείο που να παρουσιάζουν ένα είδος μεταγνώσης από τη στιγμή που αντιλαμβάνονται την εφαρμοσιμότητά της και υλοποιούν τη μεταφορά της σε μια νέα κατάσταση επίλυσης προβλήματος (δεύτερο πρόβλημα). Αυτό όμως που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι παρά τα παραπάνω, κανένας μαθητής δεν ήταν σε θέση να κάνει τη σύνδεση ανάμεσα στο πρόβλημα που έλυσε και στις μαθηματικές ιδέες που κρυβόταν από πίσω (διατήρηση του εμβαδού, μη αναλογική σχέση ανάμεσα στα εμβαδά όμοιων σχημάτων και στις διαστάσεις τους). Ακόμη και η Mira που με τους υπολογισμούς της ήρθε σε επαφή με στοιχεία που καταδεικνύουν τέτοια συμπεράσματα (υπολόγισε αλγεβρικά μήκη και εμβαδά) επιδεικνύοντας ένα μεγάλο εύρος δεξιοτήτων και γνώσεων δεν κατάφερε να κάνει την πιο πάνω σύνδεση. Αρχικά ευρήματα σε μια άλλη έρευνα που εμπλέκει φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος επιβεβαιώνει την ιδέα ότι οι λύτες μπορεί να είναι επιτυχείς στην επίλυση προβλήματος χωρίς όμως απαραίτητα να κατανοούν τη μαθηματική υπόσταση του προβλήματος που λύνουν.

5.3 Σύγκριση μεταξύ των δυο ομάδων

Στην σύντομη αυτή ενότητα γίνεται μια προσπάθεια να καταγραφούν ομοιότητες ή διαφορές στους τρόπους προσέγγισης του προβλήματος από τις δυο ομάδες, της

απόδοσής τους, επιλογών, συμπεριφοράς στην επίλυση προβλήματος, κλπ. (η ίδια αρίθμηση σχετίζει στις δυο ομάδες το ίδιο θέμα)

Μαθητές από Ελλάδα: (1) *Γεωμετρική προσέγγιση*, (2) *Απουσία μετρήσεων με χάρακα*, (3) *Δεν αισθάνθηκαν την ανάγκη για επιμέρους επαληθεύσεις. Η γεωμετρική πραγματικότητα (πχ ο άξονας συμμετρίας διαιρεί σε δυο συμπτώσιμα σχήματα) δεν αφήνει περιθώρια για αμφιβολίες*, (4) *Εμφανίζουν περιορισμένη φορμαλιστική γνώση* και (5) *Στο τελικό ερώτημα επισημαίνουν την μέθοδο της επίλυσης προβλήματος και την μεταφορά της σε άλλες καταστάσεις όπως και το γεγονός της σύνθεσης ενός σχήματος από άλλα επιμέρους σχήματα* (αυτό αν και φαίνεται να συνδέεται με την ιδέα της διατήρησης του εμβαδού δεν υπάρχει μια ρητή διατύπωση που να το δείχνει)

Μαθητές από Βοσνία-Ερζεγοβίνη: (1) *Αλγεβρική-Αριθμητική προσέγγιση*, (2) *Βασισμένοι κυρίως σε μετρήσεις, υπολογισμούς και τύπους*, (3) *Ο αριθμητικός τρόπος εργασίας τους «ανάγκασε» πολλές φορές να ζητούν την επαλήθευση μερικών υπολογισμών και συμπερασμάτων*, (4) *Λίγη ή περισσότερη φορμαλιστική γνώση (τύποι, θεωρήματα)*, και (5) *Οι μαθητές δεν επισημαίνουν τίποτε που να σχετίζεται με τη μαθηματική γνώση (αίνιγμα, πρακτική εργασία)*.

Μιας που η έρευνα είναι ακόμη σε εξέλιξη αυτά εξακολουθούν να είναι θέματα προς έρευνα για τα οποία μπορεί προσεχώς να δοθεί κάποια εξήγηση. Μια πρώτη πάντως απάντηση που διαφαίνεται είναι ότι σημαντικό ρόλο παίζει ο διαφορετικός προσανατολισμός των αναλυτικών προγραμμάτων. Έτσι, ο πρακτικός χαρακτήρας μαθημάτων στη φυσική της Α Γυμνασίου στη Βοσνία, με έμφαση στις βασικές μετρήσεις και μονάδες φυσικών ποσοτήτων θα μπορούσε να αποτελεί μια πιθανή εξήγηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity. From Analysis to Improvement.* Springer:NY

Modestou, M., Gagatsis, A., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Students' improper proportional reasoning: The case of area and volume of rectangular figures. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of PME* (vol3, pp. 345-352). Bergen, Norway.

Schoenfeld, H. A. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Orlando, FL: Academic Press Inc.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction, 14*(5), 485-501.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟΝ ΕΡΓΑΣΙΑΚΟ ΧΩΡΟ: ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ ΕΝΟΣ ΟΔΗΓΟΥ ΤΑΞΙ ΚΑΙ ΕΝΟΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Αντωνόπουλος Ματθαίος, Δάλλας Μάρκος, Κούβελα Ειρήνη**

Μεταπτυχιακοί φοιτητές Π.Μ.Σ. «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών», Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α.

**«Η ολοκλήρωση της εργασίας αυτής έγινε στο πλαίσιο της υλοποίησης του μεταπτυχιακού προγράμματος το οποίο συγχρηματοδοτήθηκε μέσω της Πράξης «Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών ΙΚΥ με διαδικασία εξατομικευμένης αξιολόγησης ακαδ. έτους 2012-2013» από τους πόρους του Ε.Π. «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Ευρωπαϊκού Ταμείου (ΕΚΤ) και του ΕΣΠΑ (2007-2013)».

m.antonopoulos@outlook.com, mdallas@outlook.com.gr, eirinikouv@hotmail.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το άρθρο αφορά στη μελέτη περίπτωσης ενός οδηγού ταξί και ενός μηχανολόγου μηχανικού και καλύπτει μια χρονική περίοδο διάρκειας τεσσάρων μηνών. Διερευνώνται οι μαθηματικές πρακτικές και τα εργαλεία που χρησιμοποιούν οι επαγγελματίες συσχετίζοντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν με την ανάδειξη της μαθηματικής τους γνώσης. Τα αποτελέσματα φανερώνουν τη διαφορετικότητα των πρακτικών, μέσω των οποίων όμως αντανακλάται η κοινή φύση της μαθηματικής γνώσης που ωστόσο, διαφοροποιείται ως προς τη διαδικασία εφαρμογής της σε κάθε επάγγελμα. Σε αρκετές περιπτώσεις, η μαθηματική διαδικασία δεν καθίσταται φανερή με αποτέλεσμα να αποκρύπτεται η μαθηματική γνώση.

Λέξεις – Κλειδιά: Μαθηματικά, χώρος εργασίας, μαθηματικές πρακτικές, εργαλεία.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας η έννοια της μαθηματικοποίησης και του μαθηματικού γραμματισμού διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στον τρόπο διαχείρισης της μαθηματικής γνώσης όπως αυτή αξιοποιείται στον εργασιακό χώρο (Hoyles et al, 2002). Αρκετοί ερευνητές όπως οι Millroy (1991), Masingila et al (1996), Hoyles et al (2002) και Gahamanyi et al (2009) υποστηρίζουν ότι τα μαθηματικά που αναπτύσσονται στο χώρο εργασίας, αποτυπώνονται μέσα από τις πρακτικές των επαγγελματιών και διαφοροποιούνται ανάλογα με το πλαίσιο εφαρμογής. Ωστόσο, σύμφωνα με τους Williams & Wake (2007) πολλές φορές οι μαθηματικές πρακτικές δεν γίνονται άμεσα αντιληπτές, αποκρύπτοντας τη μαθηματικής γνώση, γεγονός που υποδεικνύει την έννοια του «μαύρου κουτιού».

Προέκυψε, λοιπόν, το ενδιαφέρον να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο εμφανίζεται η μαθηματική γνώση στο χώρο εργασίας μιας και όπως φάνηκε από την

ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, η ερευνητική δραστηριότητα για το συγκεκριμένο θέμα είναι περιορισμένη στο ελλαδικό χώρο. Μελετήθηκαν δύο επαγγελματίες ένας οδηγός ταξί και ένας μηχανολόγος μηχανικός αναμένοντας ότι η συσχέτιση των διαφορετικών επαγγελμάτων θα αποτυπώσει συγκριτικά το διαφορετικό είδος των μαθηματικών που καταγράφεται μέσα από τις πρακτικές και τα εργαλεία που χρησιμοποιούν.

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ: «ΜΑΥΡΟ ΚΟΥΤΙ»

Από τη μελέτη της βιβλιογραφίας σχετικά με τον τρόπο ανάλυσης της μαθηματικής γνώσης που ενσωματώνεται στον εργασιακό χώρο, προκειμένου να επιτευχτεί σύνδεση των μαθηματικών με τις πρακτικές που ακολουθούνται, σημαντικό ρόλο διαδραματίζουν η έννοια της μαθηματικοποίησης και του μαθηματικού γραμματισμού που αντανακλούν την έννοια του «μαύρου κουτιού».

Φαίνεται να μην υπάρχει δόκιμος όρος για τη δραστηριότητα του «κάνω μαθηματικά» όπως τονίζει η Millroy (1991). Ο μόνος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να αναφερθούμε σε αυτό το πολύπλευρο ανθρώπινο φαινόμενο είναι μέσω του ουσιαστικού «μαθηματικά», το οποίο αναφέρεται σε ένα στατικό σώμα γνώσης που υπάρχει ήδη στον κόσμο. Μια λέξη που εκφράζει την έννοια της ενεργούς διαδικασίας της δημιουργίας με τη χρήση μαθηματικών ιδεών ή εργαλείων είναι το ρήμα «μαθηματικοποιώ», που ενσωματώνει δράση και αναφέρεται στην εμπειρία της δημιουργίας, χρησιμοποιώντας μαθηματικές ιδέες.

Όσον αφορά στον όρο μαθηματικός γραμματισμός, οι Hoyles et al (2002) αναφέρονται στην εφαρμογή ενός εύρους υπονοούμενων μαθηματικών πτυχών μέσω της λεπτομερούς κατανόησης ενός συγκεκριμένου εργασιακού πλαισίου. Σημαντικές πτυχές των μαθηματικών που αναδεικνύονται από την έρευνα σχετικά με το μαθηματικό γραμματισμό είναι οι εξής: ενσώματα μαθηματικά και ικανότητες τεχνολογίας πληροφοριών, ικανότητα κατασκευής τύπου, υπολογισμοί και εκτιμήσεις, αναλογική συλλογιστική, υπολογισμός και σωστή κατανόηση ποσοστών, επίλυση προβλήματος σε πολλά βήματα, μοντελοποίηση, ικανότητα υπολογισμών με χαρτί και μολύβι, επικοινωνία των μαθηματικών σε άλλους και ικανότητα αντιμετώπισης του απροσδόκητου. Αυτού του είδους οι μαθηματικές πτυχές αντανακλούν την έννοια του μαύρου κουτιού, όπου κατά τον Latour (1999) το «μαύρο κουτί» περιγράφεται ως: «Μια μηχανή που λειτουργεί αποτελεσματικά όπου κανείς μπορεί να επικεντρώνεται μόνο στις εισόδους και στις εξόδους και όχι στην εσωτερική πολυπλοκότητα της. Έτσι, όσο η επιστήμη και η τεχνολογία εξελίσσονται τόσο πιο πολύ επισκιάζονται οι μαθηματικές διαδικασίες». Το «Black Boxing» αφορά στην αυτοματοποίηση των μαθηματικών όταν αυτή γίνεται φανερή με τη χρήση εργαλείων, μέσων και καθημερινών πρακτικών που τείνουν να κρύψουν μαθηματικές διαδικασίες. Οι ενέργειες τείνουν να γίνουν αυτοματοποιημένες και με υποσυνείδητο τρόπο (Williams & Wake, 2007).

3. ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΟΤΗΤΑ

3.1. Τα μαθηματικά εντός και εκτός σχολείου

Αρκετοί ερευνητές (π.χ. Lave 1988, Masingila 1992, Millroy 1992, Scribner 1985) όπως τονίζει ο Saxe (1988) τα τελευταία τριάντα χρόνια έχουν περιγράψει τον τρόπο με τον οποίο οι άνθρωποι χρησιμοποιούν τα μαθηματικά εκτός σχολικού πλαισίου για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων και την επίτευξη των στόχων τους (Masingila et al, 1996).

Συμφώνα με τη Lave (1985) αρκετοί ερευνητές έχουν μελετήσει με ποιον τρόπο τα άτομα επιλύουν καταστάσεις προβλημάτων στο σχολείο και πώς λύνουν παρόμοια μαθηματικά προβλήματα στην καθημερινότητά τους. Σημειώνεται ότι υπάρχουν και άτυποι τρόποι να κάνει κανείς μαθηματικούς υπολογισμούς που δε σχετίζονται με διαδικασίες που διδάσκονται στο σχολείο (Carraher et al 1985, Jurdak & Shahin 1999).

3.2. Τα μαθηματικά στον εργασιακό χώρο

Σε έρευνα των Gahamanyi et al (2009) σε οδηγούς ταξί στη Ρουάντα παρατηρήθηκε ότι λόγω απουσίας νομοθετικού πλαισίου, που καθορίζει τον τρόπο λειτουργίας των ταξί, το κόστος μιας διαδρομής αποτελεί αντικείμενο διαπραγμάτευσης μεταξύ του οδηγού και του πελάτη συμπεριλαμβανομένων των ακολούθων παραμέτρων: την κατάσταση του δρόμου, τη διανυόμενη απόσταση, την ποσότητα της βενζίνης που καταναλώνει το αυτοκίνητο, το χρόνο αναμονής και τη χρονική περίοδο της ημέρας (διαφορετικό τιμολόγιο μέρας-νύχτας). Η εκτίμηση του κόστους μιας διαδρομής φαίνεται να προκύπτει μέσα από την ακόλουθη μαθηματική εξίσωση $W = F(x, y, z, t) + P$, όπου το W είναι το εκτιμώμενο κόστος. Το κόστος αυτό αποτελείται από ένα μη σταθερό κέρδος P και ένα κόστος για τον οδηγό F, το οποίο εκτιμάται από όλες τις παραμέτρους ή από μερικές ((x) κατάσταση του δρόμου, (y) απόσταση που καλύπτεται, (z) κατανάλωση βενζίνης και (t) χρόνου). Οι παρατηρούμενες τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν στηρίχτηκαν στη βασική αριθμητική και σχετίζονταν με την πρόσθεση και την αφαίρεση. Ο τρόπος με τον οποίο η στοιχειώδης αριθμητική εφαρμόζεται πρέπει να γίνει κατανοητός στο πλαίσιο μιας συνεχούς αλλαγής των πολιτισμικών παραγόντων.

Τέλος, από πρόσφατα ερευνητικά δεδομένα των Hoyles et al (2002) για τον κλάδο των μηχανικών στην Αγγλία φαίνεται να χρησιμοποιούν μετρήσεις, υπολογισμούς, μετατροπή μονάδων μέτρησης, μετακίνηση από δυσδιάστατες σε τρισδιάστατες αναπαραστάσεις και αντικείμενα, στατιστικά δεδομένων κανονικών κατανομών, γεωμετρία – τριγωνομετρία, επικοινωνία των δεδομένων και των μαθηματικών πληροφοριών και μοντελοποίηση. Το σημαντικό, όμως, για έναν μηχανικό είναι να καταλαβαίνει τι είναι αυτό που κάνει και να παίρνει αποφάσεις βάσει αυτού και όχι απλά να γνωρίζει μια θεωρία.

Συμπερασματικά, κατά τους Gahamanyi et al (2009), οι στρατηγικές των επαγγελματιών εξαρτώνται από το αν ή όχι η δραστηριότητα είναι ρουτίνα. Ωστόσο, όπως, επισημαίνουν οι Bosch & Gascon (2006) στις προαναφερθείσες μελέτες οι μαθηματικές στρατηγικές περιγράφονται σαν να εφαρμόζονται από τους εργαζομένους απουσία μαθηματικής αιτιολόγησης. Τα μαθηματικά θεωρούνται ως ένα εργαλείο διαμεσολάβησης της ανθρώπινης δραστηριότητας μέσα από το φακό της επίτευξης των στόχων των εργαζομένων (Gahamanyi et al, 2009).

4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1. Ερευνητικό πρόβλημα

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διερευνηθούν οι μαθηματικές πρακτικές που ακολουθούν δύο επαγγελματίες, ένας οδηγός ταξί και ένας μηχανολόγος μηχανικός προκειμένου να αναδειχθεί το είδος της μαθηματικής γνώσης. Πρώτον μελετώνται οι μαθηματικές πρακτικές και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για τη διαχείριση των μαθηματικών στον εργασιακό χώρο και δεύτερον οι γνωστικές περιοχές των μαθηματικών που αναδεικνύονται μέσω αυτών των μαθηματικών πρακτικών.

4.2. Ερευνητικά εργαλεία

Για την πραγματοποίηση της έρευνας χρησιμοποιήθηκε η παρατήρηση και η συνέντευξη. Η παρατήρηση εστιάζει στην καταγραφή των πρακτικών και των εργαλείων που χρησιμοποιεί ο κάθε επαγγελματίας ενώ η συνέντευξη είναι ημι-δομημένη κι οι ερωτήσεις χωρίζονται σε τρεις άξονες: ο πρώτος αφορά στη μαθηματική βιογραφία του επαγγελματία, ο δεύτερος στον τρόπο διαχείρισης των πρακτικών και των εργαλείων και ο τρίτος στις γνώσεις που αναδεικνύονται μέσω αυτών.

4.3. Συμμετέχοντες

Οι επαγγελματίες που έλαβαν μέρος στην έρευνα ήταν ένας οδηγός ταξί και ένας μηχανολόγος μηχανικός. Οι συμμετέχοντες επιλέχθηκαν με βάση την προσβασιμότητα που είχαμε στους αντίστοιχους επαγγελματικούς χώρους. Οι κύριοι λόγοι που επιλέχθηκαν τα παραπάνω επαγγέλματα είναι: πρώτον η διαφορετική φύση των επαγγελμάτων, καθώς το γνωστικό υπόβαθρο που απαιτείται σε κάθε ένα από αυτά ποικίλοι και δεύτερον ο τρόπος με τον οποίο εμφανίζεται η μαθηματική γνώση σε διαφορετικές επαγγελματικές κοινότητες.

Ο Αλέξανδρος είναι 55 ετών, ιδιοκτήτης-οδηγός ταξί και έχει 28 χρόνια υπηρεσίας. Μεγάλωσε και εργάζεται στην Ημαθία. Τελείωσε το εξατάξιο γυμνάσιο και στη συνέχεια φοίτησε στη μέση τεχνική επαγγελματική σχολή που σπούδασε

ηλεκτρολόγος, από το 1985 έως σήμερα είναι ιδιοκτήτης ταξί. Δήλωσε ότι τα μαθηματικά ήταν ένα από τα αγαπημένα του μαθήματα τόσο στο σχολείο καθώς και στις μετα-λυκειακές του σπουδές. Ο Ανδρέας είναι μηχανολόγος μηχανικός ηλικίας 37 ετών και εργάζεται δώδεκα χρόνια, τα τελευταία 8 ως ελεύθερος επαγγελματίας σε ιδιόκτητο τεχνικό γραφείο. Μεγάλωσε στην Αττική. Σπούδασε μηχανολόγος μηχανικός παραγωγής και διοίκησης και είναι κάτοχος μεταπτυχιακού διπλώματος στα οικονομοτεχνικά συστήματα του ΕΜΠ. Τα μαθηματικά υπήρξαν ένα από τα αγαπημένα του μαθήματα όπου διακρίθηκε για τις επιδόσεις του.

4.4. Μέθοδος και τρόπος ανάλυσης δεδομένων

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά τους μήνες Μάρτιο, Απρίλιο και Μάιο του 2013. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε είναι ποιοτική και ειδικότερα μελέτη περίπτωσης. Πραγματοποιήθηκε μη συμμετοχική παρατήρηση που διήρκησε το μέγιστο τρεις ώρες κατά τη διάρκεια της οποίας κρατήθηκαν σημειώσεις πεδίου. Επιπλέον, λήφθηκε φωτογραφικό υλικό και όπου κρίθηκε σκόπιμο πραγματοποιήθηκε μαγνητοφώνηση. Οι συνεντεύξεις έλαβαν χώρα κάποιες μέρες μετά την παρατήρηση σε ουδέτερο περιβάλλον και διήρκησαν από είκοσι μέχρι τριάντα λεπτά για κάθε επαγγελματία.

Για την κατασκευή του πρωτοκόλλου της συνέντευξης, οι ερωτήσεις που κατανεμήθηκαν στους τρεις άξονες για κάθε επαγγελματία, προήλθαν κατά κύριο λόγο από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας και πραγματοποιήθηκε πιλοτική εφαρμογή.

Για την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν κάποιες πτυχές της μεθόδου της μικροανάλυσης και της ανοιχτής κωδικοποίησης (Strauss & Corbin, 1998). Σε πρώτο επίπεδο ανάλυσης έγινε κατηγοριοποίηση των επεισοδίων αναλύοντας τις σημειώσεις πεδίου και τις συνεντεύξεις, εστιάζοντας σε συγκεκριμένα αποσπάσματα που φανερώνονταν ή υπονοούνταν μαθηματικές πρακτικές και σε δεύτερο επίπεδο αυτές κατηγοριοποιήθηκαν ανάλογα με τη γνωστική περιοχή των μαθηματικών που διακρίνονταν.

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της έρευνας συνοψίζονται σε δύο ενότητες. Στην πρώτη ενότητα παρατίθενται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων της παρατήρησης και της συνέντευξης του κάθε επαγγελματία σχετικά με τις πρακτικές και τα εργαλεία που χρησιμοποιεί και στη δεύτερη ενότητα καταγράφονται οι γνωστικές περιοχές που αναδεικνύονται.

5.1. Μαθηματικές πρακτικές και εργαλεία

Οδηγός ταξί

Οι σημαντικότερες πρακτικές του οδηγού ταξί, που εμπεριέχουν μια μορφή μαθηματικής πρακτικής, σχετίζονται με τον υπολογισμό του κόστους διαδρομής, τη συναλλαγή των χρημάτων, τον υπολογισμό της απόστασης καθώς και την εύρεση της τροχιάς της διαδρομής. Τα εργαλεία που φαίνεται να χρησιμοποιεί είναι το ταξίμετρο, το μηχάνημα έκδοσης αποδείξεων, η αριθμομηχανή, ο οδικός χάρτης και ο πίνακας τιμολογίων.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η συναλλαγή των χρημάτων μεταξύ των πελατών και του οδηγού ταξί, όπου φανερώνεται η μαθηματική τεχνική που αξιοποιεί ο Αλέξανδρος μέσα από το ακόλουθο απόσπασμα:

Αλέξανδρος: 10ρικο έτσι; Μισό λεπτό να σας δώσω τα ρέστα... είναι 3,40.... πάρε 5 και 1,40 έτοιμος ε και 1,60 όχι 1,40

Πελάτης: εντάξει δεν πειράζει

Αλέξανδρος: Όχι πώς...

Στην παραπάνω συνομιλία παρατηρείται ότι η διαδρομή κοστίζει 3,40 ευρώ και ο Αλέξανδρος καλείται να δώσει ρέστα από δέκα ευρώ. Στην ουσία χρειάζεται να κάνει την πράξη 10-3,40=…. Η τεχνική που χρησιμοποιεί για να κάνει την αφαίρεση είναι να προσθέσει στο μειωτέο για να «φτάσει» στον αφαιρετέο. Φαίνεται να σκέφτεται: «πόσο πρέπει να προσθέσω στο 3,40 ώστε να έχω αποτέλεσμα 10;». Ο Αλέξανδρος δίνει, λοιπόν, πρώτα 5 ευρώ άρα έχει 8,40 και τώρα έχει να κάνει την αφαίρεση 10-8,40=……όπου και πάλι χρησιμοποιεί την τεχνική της πρόσθεσης. Ωστόσο, φαίνεται να αντιμετωπίζει κάποια δυσκολία στον υπολογισμό των δεκαδικών ψηφίων (των λεπτών του ευρώ) αφού αρχικά μπερδεύεται και δίνει 1,40 και μετά το διορθώνει και δίνει 1,60 ευρώ.

Από την ανάλυση των δεδομένων της συνέντευξης σχολιάζονται μέσα από τα απομαγνητοφωνημένα αποσπάσματα κάποιες πρακτικές που φανερώνουν μαθηματική γνώση.

Μια σημαντική πρακτική του Αλέξανδρου είναι ο υπολογισμός του κόστους μιας διαδρομής που προβλέπεται από σχετική νομοθετική ρύθμιση του αρμόδιου υπουργείου. Ο Αλέξανδρος αναφέρει χαρακτηριστικά: «…μας δίνουν αξία για τις βαλίτσες, αξία διαδρομής, αξία για καθυστέρηση, όλα είναι μέσα στο ταξίμετρο...και μπαίνει ο πελάτης και όταν σταματάει στο φανάρι αυτό γράφει καθυστέρηση π.χ. την ώρα είναι 9 ευρώ η καθυστέρηση στο φανάρι ανάλογα τη διάρκεια 8, 10, 12 σεντς». Όσον αφορά στον υπολογισμό των χρημάτων που δίνει σε ρέστα κατά τη χρηματική συναλλαγή ανέφερε ότι συνηθίζει να δίνει πρώτα το ακέραιο μέρος και μετά το δεκαδικό μέρος του ποσού «…Δηλαδή 4,80 πάρε 0,20 πάρε 0,10...4,70. Πρώτα δίνουμε τα χοντρά και μετά τα ψιλά…». Ένα βασικό εργαλείο που χρησιμοποιεί είναι το ταξίμετρο. Πιο συγκεκριμένα ο ίδιος περιγράφει τον τρόπο λειτουργίας του

ταξιμέτρου ως εξής: «….μονή ταρίφα μέσα στην πόλη και όταν βγεις εκτός πόλης βάζεις τη διπλή ταρίφα. ….η διαδρομή υπολογίζεται με το χιλιόμετρο, αν κάνεις 50 km με 0,80 το χιλιόμετρο η μονή ταρίφα, 1,19 η διπλή ταρίφα…..». Τέλος, αναφέρει ότι για συγκεκριμένα δρομολόγια υπάρχει δυνατότητα χρήσης τιμολογίου και αριθμομηχανής.

Μηχανολόγος Μηχανικός Παραγωγής & Διοίκησης

Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψαν μαθηματικές πρακτικές όπως η διαδικασία κατηγοριοποίησης των κτιρίων σε ενεργειακές κλάσεις, η μελέτη εγκατάστασης φυσικού αερίου, η ηλεκτρολογική μελέτη του κτιρίου και η μελέτη κλιματισμού -θέρμανσης. Τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν είναι ο ηλεκτρονικός υπολογιστής (υπολογιστικό και σχεδιαστικό πρόγραμμα), τα αρχιτεκτονικά σχέδια, οι πίνακες και τα διαγράμματα.

Από την ανάλυση των δεδομένων της παρατήρησης αναδεικνύονται οι εξής πρακτικές: Ένα από τα καθήκοντα που αναλαμβάνει ένας μηχανολόγος μηχανικός είναι οι ενεργειακές επιθεωρήσεις. Μελετάει ποια είναι η ενέργεια που καταναλώνει κάθε κτίριο χρησιμοποιώντας ειδικό λογισμικό και βάσει του αποτελέσματος που προκύπτει το κτίριο κατατάσσεται σε συγκεκριμένη ενεργειακή κατηγορία. Ο Ανδρέας προκειμένου να κάνει την ενεργειακή επιθεώρηση συγκεντρώνει κάποιες πληροφορίες από το εξεταζόμενο κτίριο τις οποίες μετατρέπει ουσιαστικά σε τιμές και τις καταχωρεί στο ειδικό λογισμικό το οποίο κάνει την αξιολόγηση του κτιρίου. Οι τιμές αυτές αφορούν σε διάφορα χαρακτηριστικά του κτιρίου. Μια άλλη παράμετρος που λαμβάνεται υπόψη είναι οι σκιάσεις του κτιρίου. Υπολογίζοντας τη γωνία σκίασης συμβουλεύεται τους πίνακες του Τεχνικού Επιμελητηρίου οι οποίοι σύμφωνα με τον προσανατολισμό του κτιρίου δίνουν συγκεκριμένες τιμές που χαρακτηρίζουν τους συντελεστές θέρμανσης και ψύξης του κάθε δομικού στοιχείου. Στη συνέχεια αυτές οι τιμές καταχωρούνται σε σχετικό υπολογιστικό πρόγραμμα.

Επιπλέον, χρησιμοποιεί το σχεδιαστικό πρόγραμμα G CAD το οποίο «συνεργάζεται» με το υπολογιστικό. Σε αυτό περνάει έτοιμα τα αρχιτεκτονικά σχέδια και δουλεύει πάνω σε αυτά όπως φαίνεται και από το παρακάτω απόσπασμα:

Ερευνητής: …στην αρχή όταν θα σου έρθουν τα σχέδια, κάποιους υπολογισμούς κι ένα κομμάτι πράξεων το κάνεις μόνος σου, αυτό π.χ. που μου είπες για τους σωλήνες για τη διατομή των σωλήνων… το σκέφτεσαι κατευθείαν;

Ανδρέας: …βλέπεις τα μήκη, τα μετράς τα μήκη των σωληνώσεων ή των καλωδιώσεων ή οτιδήποτε πάνω στο σχέδιο με τα εργαλεία που σου δίνονται, από το AUTOCAD ας πούμε, και από εκεί αφού έχεις μετρήσει τις αποστάσεις τα βάζεις σε κάποιο άλλο πρόγραμμα, υπολογιστικό που λέμε, κι εκεί πέρα σου κάνει τους υπολογισμούς.

Επίσης, προκειμένου να πετύχει καλύτερη ενεργειακή απόδοση ανέφερε ότι μπορεί να προσθέσει ένα σκίαστρο στο κτίριο. Το πρόγραμμα υπολογίζει αυτόματα πόσων μοιρών είναι γωνία που θα δημιουργήσει ο ήλιος με το σκίαστρο και

υπολογίζει το συντελεστή σκίασης. Αυτό που τονίζει πως πρέπει να γίνεται κάθε φορά που κάνει μια ενεργειακή επιθεώρηση και χρησιμοποιεί τα συγκεκριμένα προγράμματα είναι να είναι σε θέση να ελέγχει τα αποτελέσματα που του δίνει το πρόγραμμα βάσει των δεδομένων που εισάγει. Δηλαδή να μη δέχεται χωρίς κρίση τα εξαγόμενα.

Τα στοιχεία που συγκεντρώθηκαν από την ανάλυση των δεδομένων της συνέντευξης φαίνεται να αναδεικνύουν κάποιες μαθηματικές πρακτικές. Μία πρακτική που χρησιμοποιεί ο Ανδρέας είναι η ηλεκτρολογική εγκατάσταση όπου όπως περιγράφει ο ίδιος: «…μετράς τα μήκη των σωληνώσεων ή των καλωδιώσεων πάνω στο σχέδιο με τα εργαλεία που σου δίνονται, από το AUTOCAD ας πούμε, και από εκεί αφού έχεις μετρήσει τις αποστάσεις τα βάζεις σε κάποιο άλλο πρόγραμμα, υπολογιστικό που λέμε, κι εκεί πέρα σου κάνει τους υπολογισμούς».

5.2. Γνωστικές περιοχές

Οδηγός ταξί

Στην προσπάθεια του ο Αλέξανδρος να υπολογίσει την απόσταση της διαδρομής με τη χρήση οδικού χάρτη, τον υπολογισμό κόστους διαδρομής με τη χρήση αριθμομηχανής και τιμολογιακού πίνακα και κατά την χρηματική συναλλαγή φάνηκε να χρησιμοποιεί τις τέσσερις πράξεις, κάτι που αναδεικνύει τον τομέα της αριθμητικής. Κατά τη διάρκεια της χρήσης του εργαλείου του ταξίμετρου για τον υπολογισμό του κόστους της διαδρομής παρατηρήθηκε η εισαγωγή και εξαγωγή δεδομένων κάτι το οποίο υπονοεί τη χρήση συνάρτησης και οδηγεί στο πεδίο της Άλγεβρας. Μία από τις βασικές διαδικασίες που φαίνεται να χρησιμοποιεί ο οδηγός ταξί είναι η εκτίμηση που θα μπορούσε να ενταχθεί στην ίδια γνωστική περιοχή. Κατά την διάρκεια της χρηματικής συναλλαγής παρατηρήθηκε η χρήση εξισώσεων με το εργαλείο της αριθμομηχανής, του οδικού χάρτη και της μηχανής έκδοσης αποδείξεων το οποίο, επίσης, εντάσσεται στην ίδια περιοχή. Προκειμένου ο Αλέξανδρος να υπολογίσει την απόσταση μιας διαδρομής με τη βοήθεια του οδικού χάρτη χρησιμοποίησε τη μέτρηση μήκους η οποία εντάσσεται στη γνωστική περιοχή της Γεωμετρίας.

Μηχανολόγος Μηχανικός

Ο Ανδρέας σε όλες του τις πρακτικές χρησιμοποιεί τις τέσσερις πράξεις οι οποίες ανήκουν στο πεδίο της Αριθμητικής. Αξιοποιεί γνώσεις στερεομετρίας, μέτρησης γωνιών, μελέτης επίπεδων σχημάτων χρησιμοποιώντας ηλεκτρονικό υπολογιστή και αρχιτεκτονικά σχέδια. Επίσης, κατά τη διάρκεια μελέτης εγκατάστασης φυσικού αερίου χρησιμοποιεί μέτρηση μήκους. Όλα τα παραπάνω εντάσσονται στη γνωστική περιοχή της Γεωμετρίας. Επίσης, χρησιμοποιώντας τον ηλεκτρονικό υπολογιστή εισάγει τιμές και εξάγει αποτελέσματα, το οποίο συνιστά συνάρτηση. Εμφανής σε όλες τις πρακτικές του ήταν η λύση προβλήματος και η εκτίμηση. Στη μελέτη εγκατάστασης φυσικού αερίου και στην ηλεκτρολογική μελέτη

με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή και πινάκων κατασκευάζει εξισώσεις. Όλα τα παραπάνω ανήκουν στο πεδίο της Άλγεβρας. Τέλος, η χρήση των διαγραμμάτων κατά την ηλεκτρολογική μελέτη και τη μελέτη κλιματισμού θέρμανσης με υπολογιστή εντάσσονται στο πεδίο της Στατιστικής.

6. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σχετικά με τις μαθηματικές πρακτικές και τα εργαλεία που χρησιμοποιούν οι επαγγελματίες προκύπτει ότι ενώ στην παρούσα έρευνα η σημαντικότερη μαθηματική πρακτική για τον οδηγό ταξί είναι η χρηματική συναλλαγή, σε αντίστοιχη έρευνα των Gahamanyi et al (2009) σε οδηγούς ταξί στη Ρουάντα η σημαντικότερη πρακτική είναι ο υπολογισμός του κόστους της διαδρομής. Αυτή η διαφορά φαίνεται να οφείλεται στο γεγονός ότι στην Ελλάδα, εν αντιθέσει με τη Ρούαντα που το κόστος της διαδρομής είναι υπο-διαπραγμάτευση, υπάρχει νομοθετικό πλαίσιο το οποίο καθορίζει το τιμολόγιο, καθιστώντας τη χρηματική συναλλαγή ως την κυρίαρχη πρακτική. Επιπλέον, παρατηρείται πιθανή διάκριση ανάμεσα σε τυπικά και άτυπα μαθηματικά όπως υποστηρίζουν οι Carraher et al (1985) και Jurdak & Shahin (1999) που φαίνεται μέσα από το διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης των πράξεων από τον οδηγό ταξί. Ακόμη, σε επαγγέλματα που απαιτούν ιδιαίτερη εξειδίκευση η εμπλοκή του υπολογιστή στις υπολογιστικές διαδικασίες είναι έντονη όπως προκύπτει από έρευνα των Hoyles et al (2002) κάτι που επιβεβαιώνεται και στην περίπτωση του μηχανολόγου μηχανικού. Τέλος, σχετικά με την έννοια του μαύρου κουτιού φαίνεται να επισκιάζονται οι μαθηματικές διαδικασίες και στις δύο περιπτώσεις των επαγγελματιών κάτι το οποίο επιβεβαιώνεται από αντίστοιχα βιβλιογραφικά δεδομένα (Williams & Wake 2007). Ωστόσο, αυτή η ένδειξη είναι πιο ισχυρή στην περίπτωση του μηχανολόγου μηχανικού όπου ενώ έχει υψηλότερο μαθηματικό γνωστικό επίπεδο, λόγω της εκτεταμένης χρήσης του ηλεκτρονικού υπολογιστή που αποκρύπτει τις μαθηματικές διαδικασίες (μαύρο κουτί), η μαθηματική του δραστηριότητα είναι πιο περιορισμένη σε σχέση με αυτήν του οδηγού ταξί.

Αναφορικά με τις γενικές γνωστικές περιοχές, η Αριθμητική (τέσσερις πράξεις), η Άλγεβρα (λύση προβλήματος, εκτίμηση, εξίσωση) και η Γεωμετρία (μέτρηση) είναι κοινές και στους δύο επαγγελματίες με εξαίρεση τη Στατιστική (διαγράμματα) που εμφανίζεται μόνο στο μηχανολόγο μηχανικό. Συσχετίζοντας τα παραπάνω με την βιβλιογραφία, τα αποτελέσματα της έρευνας των Gahamanyi et al (2009) σε οδηγούς ταξί στη Ρουάντα επιβεβαιώνονται από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας καθώς οι τεχνικές που χρησιμοποιεί ο οδηγός ταξί στηρίζονται στη βασική αριθμητική και σχετίζονται κυρίως με την πρόσθεση, την αφαίρεση και με τις εξισώσεις. Ωστόσο, στη μια περίπτωση η εξίσωση σχηματίζεται από τους οδηγούς ταξί για τον υπολογισμό του κόστους της διαδρομής, ενώ στην παρούσα έρευνα η εξίσωση προκύπτει κατά τη χρηματική συναλλαγή μαρτυρώντας μία διαφοροποίηση που πιθανότατα οφείλεται στις διαφορετικές πολιτικές και

κοινωνικο-πολιτισμικές συνθήκες των δύο χωρών. Τέλος, οι μαθηματικές διαδικασίες που χρησιμοποιεί ένας μηχανικός όπως καταγράφονται από τους Hoyles et al (2002) επιβεβαιώνονται σε μεγάλο βαθμό από τις μαθηματικές διαδικασίες που ακολουθεί ο μηχανολόγος μηχανικός στη συγκεκριμένη έρευνα, που είναι οι μετρήσεις, οι υπολογισμοί, η μετατροπή μονάδων μέτρησης, η μετακίνηση από δυσδιάστατες σε τρισδιάστατες αναπαραστάσεις, η ερμηνεία στατιστικών διαγραμμάτων και η γεωμετρία – τριγωνομετρία. Συμπληρωματικά στη μελέτη των Hoyles et al (2002), προστίθεται η έννοια της εκτίμησης ως μια σημαντική διαδικασία που συμβάλλει στην κρίση των αποτελεσμάτων που εξάγονται από το υπολογιστικό πρόγραμμα.

Συνοψίζοντας, γίνεται φανερή η εμπλοκή και των δύο επαγγελματιών σε μαθηματικές διαδικασίες μέσα από τις πρακτικές και τη χρήση των εργαλείων αναδεικνύοντας συγκεκριμένες γνωστικές περιοχές των μαθηματικών. Ανάλογα, με το επαγγελματικό περιβάλλον διαμορφώνεται και καθορίζεται το είδος της μαθηματικοποίησης που χαρακτηρίζει τον κάθε επαγγελματία επιτρέποντας την ανάπτυξη συγκεκριμένων μαθηματικών διαδικασιών που άλλες φορές καθιστούν φανερή τη μαθηματική γνώση και άλλες την αποκρύπτουν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Carraher, T. N., Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*. Vol.3, pp. 21–29.

Gahamanyi M., Andersson I. & Bergsten C. (2009). Using Mathematics as a tool in Rwandan workplace settings: *The case of taxi drivers*. Proceedings of CERME 6, Lyon, France.

Hoyles C., Wolf A., Molyneux-Hodgson S. & Kent P. (2002). Mathematical Skills in the Workplace. *Final Report to the Science, Technology and Mathematics Council*. Institute of Education, University of London.

Jurdak, M., & Shahin, I. (1999). An ethnographic study of the computational strategies of a group of young street vendors in Beirut. *Educational Studies in Mathematics*, Vol.40, pp.155–172.

Masingila, J. O., Davidenko, S., & Prus-Wisniowska, E. (1996). Mathematics learning and practice in and out of school: *A framework for connecting these experiences*. Educational Studies in Mathematics, Vol.31, pp.175–200.

Millroy, W. L. (1991). An ethnographic study of the mathematical ideas of a group of carpenters. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol.3, pp.1–25.

Strauss, A. & Corbin, J. (1998). Basics Qualitative Research. *Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. United States of America, California.

Williams, J. & Wake, G. (2007). Black boxes in workplace mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Vol.64, pp.317–343.

ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΕΣ ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟΤΗΤΑ

Ρίτα Παναούρα

Τμήμα Δασκάλων, Πανεπιστήμιο Frederick, Κύπρος

pre.pm@frederick.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι επιστημολογικές πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά συνδέονται άμεσα με τις διδακτικές τους επιλογές. Η παρούσα έρευνα διερεύνησε τις επιστημολογικές πεποιθήσεις μελλοντικών εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά και τη δυνατότητα τροποποίησής τους με την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών. Σε ένα διεπιστημονικό πλαίσιο στόχος ήταν η ταυτόχρονη επίτευξη στόχων της διαπολιτισμικής εκπαίδευσης που αφορούν κυρίως στη συμβολή διαφορετικών πολιτισμών και λαών στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Τα αποτελέσματα δείχνουν την ανάγκη «εξανθρωπισμού» της αντίληψης των εκπαιδευτικών όσον αφορά στη φύση και διαμόρφωση της μαθηματικής γνώσης.

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι επιστημολογικές πεποιθήσεις για τα μαθηματικά αφορούν στις αντιλήψεις ή πεποιθήσεις για τη φύση του αντικειμένου των μαθηματικών ως επιστήμης και τη φύση της μάθησης του αντικειμένου. Εδώ και αρκετά χρόνια πολλά διαφορετικά μοντέλα παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν ως προς το συγκεκριμένο θέμα. Ο Ernest (1991) διέκρινε τις πεποιθήσεις αυτές σε τρεις κατηγορίες: (α) στις πλατωνικές όπου η μαθηματική γνώση ως στατική προϋπάρχει και αναμένεται η ανακάλυψή της, (β) στις φορμαλιστικές όπου έμφαση δίνεται στη δομή των μαθηματικών, τη χρήση κανόνων, αλγορίθμων και τυπικού συμβολισμού και (γ) στις διερευνητικές-πειραματικές όπου προσδίδεται ένας πιο δυναμικός και ανθρωποκεντρικός χαρακτήρας στα μαθηματικά και οι μαθηματικές ιδέες εφευρίσκονται για να ικανοποιούν ανθρώπινες και επιστημονικές ανάγκες.

Διάφορες ερευνητικές προσπάθειες έδειξαν ότι οι επιστημολογικές πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών επηρεάζουν άμεσα τις διδακτικές τους επιλογές (e.g. Buehl, Alexander & Murphy, 2002). Για παράδειγμα οι εκπαιδευτικοί που υιοθετούν πλατωνικές ή φορμαλιστικές πεποιθήσεις επικεντρώνουν τη διδακτικής τους προσέγγιση στην παρουσίαση αλγοριθμικών διαδικασιών και την εξάσκηση σε αυτές (Hofer & Pintrich, 1997), ενώ οι εκπαιδευτικοί με τις διερευνητικές, πειραματικές πεποιθήσεις οργανώνουν εξερευνήσεις και διερευνήσεις στα μαθήματά τους, προκρίνουν τη χρήση υλικών και οργανώνουν ομαδικά “project” για μία από κοινού με τους μαθητές τους οικοδόμηση της γνώσης. Η επισήμανση αυτή καθιστά

αναγκαία τη διερεύνηση των επιστημολογικών πεποιθήσεων εκπαιδευτικών και ειδικότερα φοιτητών παιδαγωγικών τμημάτων, με απώτερο στόχο την οργάνωση κατάλληλων παρεμβάσεων για τροποποίησή της. Έρευνα των Gill, Ashton και Algina (2004) έδειξε ότι μόνο καλά σχεδιασμένα προγράμματα επιτρέπουν τη δυνατότητα ουσιαστικής παρέμβασης σε θέματα στάσεων και πεποιθήσεων.

Η συζήτηση για την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη μαθηματική παιδεία στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν είναι καινούρια (Fasanelli et al., 2000), είναι όμως πάντοτε επίκαιρη (Jankvist & Kjeldsen, 2011). Πιστεύεται ότι η ενσωμάτωση με κατάλληλο τρόπο της ιστορίας των μαθηματικών ενισχύει τα κίνητρα και την αυτοπεποίθηση των μαθητών για ενασχόληση με τα μαθηματικά εφόσον συνειδητοποιούν ότι η αντιμετώπιση δυσκολιών και γνωστικών εμποδίων από τους ίδιους συνάδει με τη δυσκολία διαμόρφωσης των μαθηματικών εννοιών (Barbin et al., 2000). Υπάρχουν ερευνητικές προσπάθειες που αφορούν στην αξιοποίηση της ιστορίας γενικά στα μαθηματικά (e.g. Swetz, 1995) και άλλες που αφορούν σε ειδικότερες μαθηματικές έννοιες όπως για παράδειγμα οι λογάριθμοι (Panagiotou, 2011) και οι αρνητικοί αριθμοί (Thomaidis, 1993).

Σε διάφορα παρεμβατικά προγράμματα με εν υπηρεσία εκπαιδευτικούς ή φοιτητές επιχειρήθηκε η παρέμβαση στις πεποιθήσεις τους με την ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων σε μαθήματα μαθηματικών που παρακολουθούν (Schubring et al., 2000). Τα αποτελέσματα έχουν δείξει μία θετική διάσταση στο θέμα (Furinghetti, 2007) και την ανάγκη ταυτόχρονα για περαιτέρω διερεύνηση. Έρευνα των Charalambous, Panaoura και Philippou (2009) σε φοιτητές του παιδαγωγικού τμήματος του Πανεπιστημίου Κύπρου έδειξε μετά από τέσσερις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις ότι κάποιες πεποιθήσεις των φοιτητών είναι πολύ παγιωμένες και παρά την παραδοχή για ανάγκη τροποποίησής τους, οι προηγούμενες τους εμπειρίες στο εκπαιδευτικό σύστημα λειτουργούν ως εμπόδιο στην προσπάθεια αυτή.

Σκοπός της παρούσας ερευνητικής προσπάθειας ήταν η διερεύνηση της δυνατότητας τροποποίησης των επιστημολογικών πεποιθήσεων φοιτητών παιδαγωγικού τμήματος για τα μαθηματικά με την αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών, δίδοντας έμφαση στη συμβολή διαφορετικών πολιτισμών στη διαμόρφωση των μαθηματικών ιδεών. Βασική μας υπόθεση ήταν ότι η συνειδητοποίηση του πολιτισμικού περιβάλλοντος διαμόρφωσης των μαθηματικών ιδεών τονίζει τη συμβολή του ανθρώπινου παράγοντα στην εξέλιξη και οικοδόμησή τους, προσδίδει ένα δυναμικό και ταυτόχρονα διαπολιτισμικό χαρακτήρα στην επιστήμη των μαθηματικών.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν οι δευτεροετείς φοιτητές παιδαγωγικού τμήματος δημοτικής εκπαίδευσης πανεπιστημίου οι οποίοι είχαν εγγραφεί στο πρώτο υποχρεωτικό μάθημα του προγράμματος σπουδών τους στις «Βασικές μαθηματικές έννοιες». Το σύνολο των φοιτητών ήταν 58 (19 αγόρια και 39 κορίτσια).

Ζητήθηκε αρχικά από τους συμμετέχοντες, στην πρώτη συνάντηση του μαθήματος να συμπληρώσουν ανώνυμα ένα ερωτηματολόγιο για τις επιστημολογικές τους αντιλήψεις σε σχέση με τη φύση των μαθηματικών, το οποίο είχε χρησιμοποιηθεί σε σχετική έρευνα με φοιτητές από τους Charalambous, κ.α. (2009). Οι δηλώσεις που περιλήφθηκαν στο πρώτο μέρους του συγκεκριμένου ερωτηματολογίου παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου τους ζητήθηκε να απαντήσουν σε τρία πρόσθετα ερωτήματα: (1) το πρώτο αφορούσε στην καταγραφή των γνώσεών τους για την ιστορική διάσταση της έναρξης ενασχόλησης των ανθρώπων με οτιδήποτε αφορούσε στα μαθηματικά, (2) ζητήθηκε η αναφορά τριών ονομάτων που έχουν συμβάλει στη διαμόρφωση των μαθηματικών ιδεών και τέλος (3) ζητήθηκε η αναφορά τριών λαών ή ομάδων που είχαν κάποια συμβολή στη διαμόρφωση των μαθηματικών.

Το μάθημα του εξαμήνου υλοποιήθηκε σε 13 εβδομάδες. Σε 8 από τις εβδομάδες αυτές οι φοιτητές ασχολήθηκαν με θέματα που περιλάμβαναν στοιχεία της ιστορίας των μαθηματικών. Συγκεκριμένα ασχοληθήκαμε με: (1) Αριθμητικά συστήματα Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων σε σύγκριση με το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και την εξέλιξή του, (2) Αριθμητικές πράξεις σε συστήματα αρίθμησης (π.χ. πολλαπλασιασμός αρχαίων Αιγυπτίων και Ινδών) σε σχέση με μαθηματικές σχέσεις και ιδιότητες που χρησιμοποιούμε (π.χ. επιμεριστική, προσεταιριστική), (3) Το τρίγωνο του Πασκάλ, τις αριθμητικές σχέσεις και τη σύνδεσή του με προβλήματα συνδυαστικής και τέλος (4) τη Γεωμετρία και τη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Τα τέσσερα αυτά θέματα δεν παρουσιάστηκαν στους φοιτητές με φορμαλιστικό τρόπο ή ως ιστορική διαδρομή εξέλιξης των μαθηματικών, αλλά πήρε τη μορφή διερευνήσεων από τους ίδιους είτε σε ατομικές είτε σε ομαδικές δραστηριότητες. Συγκεκριμένα:

(1) Για τα αριθμητικά συστήματα τους δόθηκαν πληροφορίες για τα σύμβολα και τη δομή των συστημάτων αυτών και ζητήθηκε από τους ίδιους εργαζόμενοι ομαδικά να καταγράψουν τις αδυναμίες που θεωρούσαν ότι παρουσίαζαν τα συγκεκριμένα συστήματα (π.χ απουσία του μηδενός, πολυπλοκότητα συμβόλων κλπ). Όσον αφορά στο βαβυλωνιακό σύστημα (το οποίο είναι εξηνταδικό) τους δόθηκαν κείμενα με ιστορικά στοιχεία της εποχής (π.χ. λαός με ανεπτυγμένο εμπόριο) και διατύπωσαν υποθέσεις για το γιατί δεν αποτελούσε εμπόδιο για τη συγκεκριμένη εποχή η διαφορετική αξία που μπορούσε να έχει το σύμβολο της σφήνας. Στόχος ήταν να αντιληφθούν την ανάγκη αντικατάστασης ή εξέλιξης μη λειτουργικών στοιχείων στα

μαθηματικά εντάσσοντάς τα πάντοτε στο πολιτισμικό συγκείμενο της εποχής όπου διαμορφώνονται και χρησιμοποιούνται.

(2) Για τις διάφορες αριθμητικές πράξεις και τους αλγόριθμους που ακολουθούνταν ζητήθηκε από τους φοιτητές και πάλι στο πλαίσιο ομαδικής εργασίας να μελετήσουν τον τρόπο που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι και οι αρχαίοι Ινδοί, να εντοπίσουν τις μαθηματικές ιδιότητες που χρησιμοποιούνταν (προσεταιριστική, επιμεριστική) και να αντιληφθούν λάθη ή γνωστικά εμπόδια που αντιμετωπίζουν σήμερα τα παιδιά εξαιτίας των «κρατούμενων» στις πράξεις αυτές. Στο ίδιο πλαίσιο παρουσιάστηκαν αλγόριθμοι που χρησιμοποιούσαν «παιδιά του δρόμου» στη Βραζιλία για να μπορούν να εξασφαλίσουν εισόδημα στις οικογένειές τους (Nunes et al., 1993).

(3) Το τρίγωνο του Pascal ήταν τελείως άγνωστο στους φοιτητές και κλήθηκαν μετά από διεξοδική ατομική μελέτη να εντοπίσουν πολλές σχέσεις και μοτίβα που παρατηρούνται σε αυτό και να επιλύσουν προβλήματα συνδυαστικής χρησιμοποιώντας το. Στο τέλος η συζήτηση επικεντρώθηκε στη μη υιοθέτησή του σε γενικό βαθμό για την επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής.

(4) Τέλος η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία συζητήθηκε μετά από τη διδασκαλία στοιχείων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, μέσα από τη μελέτη δύο λογοτεχνικών κειμένων. Υπήρξε δηλαδή μια προσπάθεια σύνδεσης της παιδικής λογοτεχνίας με τα μαθηματικά, εφόσον θεωρείται ένα πολύ πετυχημένο εργαλείο εξανθρωπισμού τους (Κολέζα, 2007): (α) Η Αλίκη στη Χώρα των Θαυμάτων του Lewis Carroll και (β) Flatland, η Επιπεδοχώρα του Edwin Abbott. Σε αυτό το πλαίσιο παρουσιάστηκε στη συνέχεια η σχετικά πρόσφατη διαμόρφωση της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τη συμβολή άγνωστων για τους φοιτητές μαθηματικούς και οι εφαρμογές της. Μέσα από τα κείμενα δόθηκε η δυνατότητα συζήτησης του κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου που επέτρεψε και ενίσχυσε την αμφισβήτηση και τη διαμόρφωση των συγκεκριμένων μαθηματικών ιδεών.

Στην τελευταία συνάντηση του μαθήματος (τη 13^{η} εβδομάδα) τους ζητήθηκε να συμπληρώσουν και πάλι ανώνυμα το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου που τους είχε δοθεί στη πρώτη μας συνάντησης και αφορούσε στις επιστημολογικές τους πεποιθήσεις για τα μαθηματικά. Τέλος στο πλαίσιο των τελικών γραπτών εξετάσεων του μαθήματος τους ζητήθηκε, ως επιπλέον προαιρετική άσκηση (extra bonus) να γράψουν σύντομα σχόλια για τη μαθηματική διερεύνηση που ακολουθεί και αφορά στην εξέλιξη των αριθμών και του αριθμητικού συστήματος, με τη χρήση δύο σύντομων κειμένων (παρμένα από το καινούριο βιβλίο για το μαθητή της Α΄ τάξης γυμνασίου).

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ιδιότητες Δυνάμεων (Ι)

Εξερεύνηση



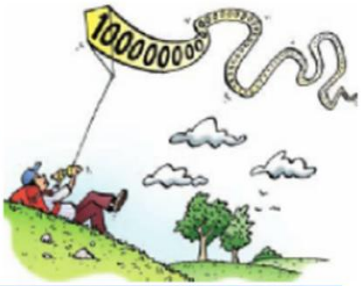
Ο Αρχιμήδης ($3^{ος}$ αι. π.Χ.) θεωρείται ο μεγαλύτερος φυσικομαθηματικός της αρχαιότητας. Στο βιβλίο του «Ψαμμίτης» (Άμμου καταμέτρης), ο Αρχιμήδης υποστηρίζει ότι ο αριθμός των κόκκων της άμμου δεν είναι άπειρος, όπως πίστευαν πολλοί, αλλά πεπερασμένος αριθμός.
Προκειμένου να υπολογίσει τους κόκκους της άμμου, έπρεπε πρώτα να επινοήσει ένα σύστημα ονομασίας μεγάλων αριθμών. Ξεκίνησε λοιπόν από το μεγαλύτερο αριθμό εκείνης της εποχής, τη μυριάδα μυριάδων. Η **μυριάδα** ισούται με 10 000, συνεπώς η **μυριάδα μυριάδων**, ήταν η μυριάδα στο τετράγωνο. Ο Αρχιμήδης συνειδητοποίησε ότι με απλούς υπολογισμούς δεν μπορούσε να φθάσει εύκολα στο αποτέλεσμα που ήθελε. Χρησιμοποιώντας τη μυριάδα μυριάδων ως βάση δημιούργησε μεγαλύτερους αριθμούς, **υψώνοντας δύναμη σε δύναμη**, αφού με αυτό τον τρόπο οι αριθμοί αυξάνονται εντυπωσιακά.

Τελικά σταμάτησε στον αριθμό: $\left((10^8)^{(10^8)}\right)^{10^8} = 10^{8\cdot10^{16}}$ ο οποίος είναι μία μυριάδα μυριάδων στη μυριοστή μυριάδα και όλο στη μυριοστή μυριάδα. Ο αριθμός αυτός είναι ασύλληπτα μεγάλος και αποτελείται από το 1 ακολουθούμενο από $8\cdot10^{16}$ μηδενικά. Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη αστρονομικές μετρήσεις υπολόγισε το μέγεθος του Σύμπαντος και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι δεν χρειάζονται πάνω από 10^{63} κόκκοι άμμου για να γεμίσει ολόκληρο το Σύμπαν.

Πρόσφατα, τον $20^{ο}$ αιώνα, ο Αμερικανός μαθηματικός Edward Kasner, δημιούργησε τον αριθμό *googol* για να εκφράσει πολύ μεγάλους αριθμούς. Το όνομα του αριθμού ήταν ιδέα του εννιάχρονου ανιψιού του Milton Sirotta και δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά το 1940 στο βιβλίο του Μαθηματικά και Φαντασία. Ο αριθμός *googol* ισούται με 10^{100}.

✓ Να συγκρίνετε τον αριθμό του Αρχιμήδη με τον αριθμό του Kasner.

Αργότερα, ο Kasner δημιούργησε και τον αριθμό googloplex, τον οποίο περίγραψε ως τον αριθμό με πρώτο ψηφίο τη μονάδα και μετά τόσα μηδενικά που βαριέσαι να τα γράψεις.



3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αρχικά παρουσιάζεται ανάλυση των δεδομένων του ερωτηματολογίου για την πρώτη μέτρηση που έγινε. Στο πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου έγινε παραγοντική ανάλυση των απαντήσεων των φοιτητών στις δηλώσεις που περιλαμβάνονταν (KMO=0.813, $p<0.05$). Οι 11 δηλώσεις του ερωτηματολογίου φόρτισαν σε τρείς παράγοντες που εξηγούν το 67% της συνολικής διασποράς. Οι φορτίσεις των παραγόντων στους τρεις παράγοντες παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Δήλωση	Π1	Π2	Π3

Τα μαθηματικά είναι ένα σύνολο από αλγόριθμους.	.78		
Τα μαθηματικά είναι ένα σύνολο από κανόνες και θεωρήματα.			
Οι μαθηματικές ιδέες πρέπει να γράφονται με ένα τυπικό τρόπο.	.74		
	.68		
Τα μαθηματικά απαιτούν ακριβή αποτελέσματα και διαδικασίες.		.86	
		.82	
Τα μαθηματικά περιλαμβάνουν ακριβείς ορισμούς.			
Τα μαθηματικά είναι ένα σύστημα αναπαράστασης εννοιών του φυσικού κόσμου.		.76	
Οι μαθηματικές προτάσεις είναι πάντα αληθείς.		.64	
Τα μαθηματικά υπηρετούν ανθρώπινες ανάγκες.			.81
Τα μαθηματικά είναι σημαντικά επειδή είναι χρήσιμα στους ανθρώπους.			.77
Η εξέλιξη των μαθηματικών σχετίζεται με τις ανθρώπινες ανάγκες και προβλήματα.			.69
Τα μαθηματικά είναι ένα σύνολο γνώσεων που είναι απαραίτητα στην καθημερινότητα.			.64

Πίνακας 1: Οι φορτίσεις των δηλώσεων στους παράγοντες για τις επιστημολογικές πεποιθήσεις των φοιτητών για τα μαθηματικά

Ο πρώτος παράγοντας αφορά σε μια φορμαλιστική προσέγγιση των μαθηματικών η οποία περιλαμβάνει κανόνες, διαδικασίες, τυπικά σύμβολα. Ο δεύτερος παράγοντας εκφράζει μία πιο πλατωνική προσέγγιση των μαθηματικών με έμφαση στην ακρίβεια ακόμα και των όσων είναι το αποτέλεσμα της σύνδεσης με τη φυσική πραγματικότητα. Τέλος ο τρίτος παράγοντας αφορά στην πειραματική, διερευνητική προσέγγιση των μαθηματικών και τη σύνδεσή τους με τον κόσμο της φυσικής πραγματικότητας. Η διαφορά του μέσου όρου του τρίτου παράγοντα (0.54) ήταν στατιστικά σημαντική σε σχέση με τον πρώτο (0.83) και δεύτερο παράγοντα (0.77). Φάνηκε ότι οι φοιτητές είχαν πολύ πιο ισχυρές απόψεις όσον αφορά στον τυπικό, φορμαλιστικό χαρακτήρα των μαθηματικών, ο οποίος απαιτεί να ακολουθούνται συγκεκριμένες προκαθορισμένες διαδικασίες παρά στη δυνατότητα αξιοποίησής τους και εξέλιξής τους.

Μετά το τέλος των δεκατριών συναντήσεων και ουσιαστικά την υλοποίηση του παρεμβατικού προγράμματος, η συμπλήρωση του πρώτου μέρους του ερωτηματολογίου έδειξε ότι ο μέσος όρος των φορμαλιστικών τοποθετήσεων των φοιτητών παρέμεινε σχεδόν αμετάβλητος (0.81), μειώθηκε κάπως η πλατωνική τους αντίληψη για τη φύση των μαθηματικών (0.71), ενώ αυξήθηκε η πειραματική – διερευνητική τους πεποίθηση (0.73). Αποτελεί μία πρώτη ένδειξη ότι το παρεμβατικό πρόγραμμα συνέβαλε στο να ενισχυθεί ο πειραματικός και διερευνητικός χαρακτήρας των μαθηματικών, ως ανθρώπινη επινόηση με δυναμικό χαρακτήρα, αλλά το πρόγραμμα δεν μπόρεσε να συμβάλει ουσιαστικά στις παγιωμένες πεποιθήσεις που αφορούν στο φορμαλιστικό τρόπο δόμησης των μαθηματικών ιδεών.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον προκάλεσαν τα αποτελέσματα στο δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου όπου είχε ζητηθεί από τα άτομα να αναφέρουν τι θεωρούσαν ως απαρχή της ενασχόλησης των ανθρώπων με τα μαθηματικά, λαούς που ξέρουν ότι συνέβαλαν στην εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών και τρεις μαθηματικούς επιστήμονες. Δύο φοιτητές υποστήριξαν ότι η ενασχόληση με τα μαθηματικά άρχισε με τη δημιουργία του ανθρώπου από το Θεό και την αναφορά στο ένα μήλο, ενώ τρεις άλλοι φοιτητές θυμήθηκαν ότι σύμφωνα με τη μυθολογία ο Οδυσσέας ξεγέλασε κατά το μέτρηση των προβάτων. Η συντριπτική πλειοψηφία των φοιτητών δήλωσε ότι μάλλον η αιτία να αρχίσουν οι άνθρωποι να ασχολούνται με τα μαθηματικά ήταν οι αρχαίοι Έλληνες (34 συμμετέχοντες). Λίγοι φοιτητές (5) σημείωσαν και τους Άραβες, εφόσον ίσως ήξεραν την προέλευση του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος. Τέλος αναφέρθηκαν μόνο άνδρες οι οποίοι θεωρούνται από τους φοιτητές ότι είχαν κάποιοι ιστορική συνδρομή στα μαθηματικά και τη δόμησή τους ως επιστήμη και αυτοί που πλειοψήφησαν ήταν: Ευκλείδης, Θαλής, Αρχιμήδης, Αριστοτέλης, Πλάτωνας, Σωκράτης και Leibniz. Ο τελευταίος αναφέρθηκε από τρεις συμμετέχοντες οι οποίοι προφανώς τον γνώριζαν από τη διδασκαλία των ολοκληρωμάτων στη μέση εκπαίδευση. Το γεγονός ότι οι φοιτητές αναφέρθηκαν μονοδιάστατα στη συμβολή των αρχαίων Ελλήνων στην ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών δείχνει ότι έχουν περιορισμένη γνώση του θέματος, δεν έχουν συνειδητοποιήσει τη δυναμικότητα της μαθηματικής επιστήμης και την εξέλιξή της σε συνδυασμό πάντοτε με το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο και σε συνάρτηση με το διεπιστημονικό και διαπολιτισμικό γίγνεσθαι.

Τέλος, στη σύντομη και συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων αξίζει να σχολιαστούν κάποιες απαντήσεις φοιτητών στην επιπλέον εργασία που τους χορηγήθηκε στο πλαίσιο των τελικών τους εξετάσεων. Μία φοιτήτρια ανέφερε: «Ποτέ δεν είχα σκεφτεί ότι βλέποντας την άμμο ή τα αστέρια μπορεί να σκεφτείς να τα μετρήσεις και αυτό να οδηγήσει στη δημιουργία αριθμών. Μου θυμίζει το μυθιστόρημα *Ένα παιδί μετράει τα άστρα.* Τώρα με τρομάζει μέχρι πού μπορεί να φτάνει ο πιο μεγάλος αριθμός. Μπερδεύτηκα τώρα και με το άπειρο. Υπάρχει τελικά;» Μια άλλη φοιτήτρια ανέφερε: «Αναρωτιέμαι αν πρέπει να αλλάξουμε

αριθμητικό σύστημα κάποια στιγμή, εάν μας χρειάζονται τόσο μεγάλοι αριθμοί». Ένας φοιτητής έγραψε: «Μακάρι να είχαν και εμάς τέτοια τα βιβλία μας όταν κάναμε μαθηματικά. Νόμιζα ότι ήταν μόνο σύμβολα για να μας βασανίζουν και ότι ήταν το ίδιο άχρηστα με τα αρχαία. Αυτό μου άρεσε γιατί μάλλον εάν χρησιμοποιήσουμε και υπολογιστή μπορούμε να δούμε και άλλα πράγματα». Τέλος μία άλλη φοιτήτρια παρέθεσε ένα σχόλιο που αφορούσε το διαπολιτισμικό χαρακτήρα των μαθηματικών: «Στη σχολική εμπειρία είχα στην τάξη παιδιά από άλλες χώρες. Νομίζω ότι αν τους δίναμε τέτοια κείμενα με το τι έκαναν διαφορετικοί άνθρωποι θα τους κάναμε καλό και θα κάναμε καλό και στα δικά μας παιδιά, να μην τους βλέπουν με υπεροψία». Φαίνεται ουσιαστικά ότι οι φοιτητές βρίσκουν ελκυστική ιδέα την αξιοποίηση διερευνήσεων στα μαθηματικά. Όσον αφορά στο συγκεκριμένο παράδειγμα αποτέλεσε αιτία προβληματισμού για τη δημιουργία των αριθμών, τη δυνατότητα εξέλιξής τους, ενώ προσδίδεται και ένας πιο «χρησιμοθηρικός» χαρακτήρας στην ύπαρξή τους, ο οποίος πρέπει να σημειωθεί ότι εγκυμονεί κινδύνους.

4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της παρούσας ερευνητικής προσπάθειας δείχνουν ότι χρειάζεται να αναπτυχθεί ουσιαστική έρευνα για τη διαμόρφωση και οικοδόμηση των πεποιθήσεων των ατόμων για τα μαθηματικά κατά τη σχολική τους ηλικία. Τα παρεμβατικά προγράμματα σε φοιτητές παιδαγωγικών τμημάτων, μπορούν να έχουν θετικά αποτελέσματα, όμως κάποιες πεποιθήσεις είναι τόσο παγιωμένες μέσα από τη μακρόχρονη εμπειρία που είτε δεν τροποποιούνται είτε η τροποποίηση μπορεί να είναι πολύ προσωρινή και επιφανειακή. Οι αντιλήψεις αυτές των εκπαιδευτικών επηρεάζουν τη διδακτική πράξη, τις πεποιθήσεις που διαμορφώνουν οι δικοί τους μαθητές, και το πρόβλημα διαιωνίζεται. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι παρά την αύξηση των πεποιθήσεων των φοιτητών για την πειραματική, διερευνητική φύση των μαθηματικών, η παρούσα έρευνα δεν μπορεί να υποστηρίζει το κατά πόσο αυτή η τροποποίηση δεν είναι επιφανειακή ή προσωρινή. Μια μελλοντική έρευνα θα πρέπει να διερευνήσει σε βάθος χρόνου το θέμα, και ειδικότερα μετά τις εμπειρίες που αποκομίζουν οι φοιτητές κατά τα τελευταία έτη σπουδών τους με τη διδασκαλία των μαθηματικών σε δημοτικά σχολεία.

Φάνηκε ότι η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών σε μαθήματα μαθηματικού περιεχομένου σε παιδαγωγικά τμήματα μπορεί να έχει πολύ θετικά αποτελέσματα. Δίνεται η δυνατότητα διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών μέσω της εξερεύνησης και της διερεύνησης, δύο διαδικασιών πολύ σημαντικών με βάση το νέο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών (2011) το οποίο εφαρμόζεται. Έχει σημασία σύμφωνα με τη Prediger (2004) να υπάρξει ευαισθητοποίηση σε σχέση με το ρόλο των μαθηματικών ως αντικείμενο διαμορφωμένο στο ευρύτερο επιστημονικό και πολιτισμικό πλαίσιο για να αποκτήσει χαρακτήρα, αξία, πολιτισμικό και

διαπολιτισμικό περιεχόμενο. Πεποίθησή μας είναι ότι οι στόχοι της διαπολιτισμικότητας, ενός πολύ επίκαιρου εκπαιδευτικού θέματος, πετυχαίνονται ουσιαστικότερα μέσω μίας διεπιστημονικής σύνδεσης θεμάτων και η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να έχει ουσιαστική συμβολή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κολέζα, Ε. (2007). Τα μαθηματικά μέσα από τον καθρέφτη της λογοτεχνίας. Ένα ταξίδι στη χώρα των θαυμάτων. Επ. Δ. Χασάπης. *Πρακτικά 6ου διήμερου διαλόγου για τη διδασκαλία των μαθηματικών: Μαθηματικά και Λογοτεχνία* (σσ. 27-47). Θσσαλονίκη.

Barbin, E., Bagni, G., Grugnetli, L., Kronfellner, M., (2000). Integrating history: research perspectives. In J. Fauvel, & J. Maanen (Eds.), *History in mathematics education – The ICMI study* (pp. 63-90). Dordrecht: Kluwer.

Buehl, M., Alexander, A., & Murphy, P. (2002). Beliefs about schooled knowledge: Domain general or domain specific? *Contemporary Educational Psychology, 27*, 415-449.

Charalambous, C., Panaoura, A., & Philippou, G. (2009).Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 161-180.

Ernest, P. (1991). *Philosophy of mathematics education*. New York: Falmer Press.

Fasanelli, F., Arcavi, A., Bekken, O., Dynnikov, C., Furinghetti, F. Grugnetii, L. et al., (2000). The political context. In J. Fauvel, & J. Maanen (Eds.), *History in mathematics education – The ICMI study* (pp. 1-38). Dordrecht: Kluwer.

Gill, M., Ashton, P. & Angina, S. (2004). Changing preservice teachers' epistemological beliefs about teaching and learning in mathematics: An intervention study. *Contemporary Educational Psychology, 29*(2), 164-185.

Hofer, B. K., & Pintrich, P. R. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. *Review of Educational Research, 67*, 88-140.

Jankvist, U. & Kjeldsen, T. (2011). New avenues for history in mathematics education: Mathematical competencies and anchoring. *Science and Education, 20*, 831-862.

Nunes, T., Schliemann, A. & Carraher, D. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. London: Cambridge University Press.

Panagiotou, E. (2011). Using history to teach mathematics: The case of Logarithms. *Science and Education, 20,* 1-35.

Prediger, S. (2004). Intercultural perspectives on mathematics learning – developing a theoretical framework. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2,* 377-406.

Schubring, G. Cousquer, E., Fung, C., El-Idrissi, A., Gispert, H., Heiede, T., et al. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In J. Fauvel, & J. Maanen (Eds.), *History in mathematics education – The ICMI study* (pp. 91-142). Boston, MA: Kluwer.

Swetz, F. (1995). Using problems from the history of mathematics in classroom instruction. In F. Swetz et al. (Eds.), *Learn from the Msters* (pp. 25-38). Washington: The Mathematical Association of America.

Thomaidis, Y. (1993). Aspects of negative numbers in the early 17th century: A approach for didactic reasons. *Science and Education, 2,* 69-86.

ΑΝΤΙΘΕΣΕΙΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Κωνσταντίνος Στουραΐτης και Δέσποινα Πόταρη

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

kstouraitis@math.uoa.gr, dpotari@math.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα μελέτη παρουσιάζονται οι αντιθέσεις που αναδύονται κατά την προσπάθεια σχεδιασμού και αποτίμησης της διδασκαλίας των μαθηματικών σε γυμνάσια που εφαρμόζουν πιλοτικά το νέο πρόγραμμα σπουδών. Οι αντιθέσεις μελετώνται με την οπτική της θεωρίας δραστηριότητας και αναλύεται ο ρόλος τους στο μετασχηματισμό της διδασκαλίας. Παρουσιάζεται μια ταξινόμηση των αντιθέσεων που αναδεικνύει το εύρος τους και τη μεγάλη τους συχνότητα. Τέλος αναδεικνύεται ο ρόλος τους στην επαγγελματική μάθηση των εκπαιδευτικών.

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εισαγωγή στη μαθηματική εκπαίδευση νέων προγραμμάτων σπουδών και η επίδρασή τους στην τάξη προκαλεί το ενδιαφέρον της διεθνούς έρευνας τα τελευταία χρόνια. Ένα μέρος της σχετικής έρευνας αναφέρεται στο πώς οι εκπαιδευτικοί ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν τα νέα προγράμματα σπουδών στην τάξη των μαθηματικών (Remilard, 2005). Η υποδοχή από τους εκπαιδευτικούς ενός νέου προγράμματος σπουδών (ΠΣ), όπως εξάλλου και άλλων καινοτομιών, συνοδεύεται από ποικίλους τρόπους ενσωμάτωσής του στη διδασκαλία τους. Οι Remilard και Bryans (2004) περιγράφουν πως κάποιοι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τα υλικά του ΠΣ ως πηγή έργων για τους μαθητές, χωρίς όμως να αλλάζουν τη διδακτική πρακτική τους. Κάποιοι εκπαιδευτικοί διερευνούν τις ιδέες και τα υλικά του ΠΣ στη διδασκαλία, ενώ κάποιοι άλλοι ακολουθούν με μεγαλύτερη πίστη τη λογική και τις προτάσεις των κειμένων του ΠΣ. Όταν εισάγεται μια καινοτομία, η διδασκαλία των μαθηματικών βρίσκεται αντιμέτωπη με αντιθέσεις που αναδύονται από τη σύγκρουση των νέων στοιχείων με την υπάρχουσα πρακτική. Σε αυτές τις συνθήκες, η πολυπλοκότητα της διδασκαλίας μπορεί να μελετηθεί μέσα από τη Θεωρία της Δραστηριότητας (ΘΔ) και να εντοπισθούν οι συγκρούσεις που μπορούν να οδηγήσουν στην αλλαγή της διδασκαλίας (Engeström 2001).

Η παρούσα μελέτη είναι μέρος μιας ευρύτερης έρευνας σχετικά με τις διδακτικές επιλογές που κάνουν οι εκπαιδευτικοί κατά το σχεδιασμό της διδασκαλίας τους με βάση το νέο ΠΣ που εφαρμόζεται πιλοτικά από το 2011-2012 σε έναν αριθμό σχολείων. Εστιάζουμε στις αντιθέσεις που αναδύονται σε ένα πλαίσιο συνεργασίας εκπαιδευτικών (μαθηματικών) δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που σχεδιάζουν τη

διδασκαλία τους και συζητούν για αυτήν. Ειδικότερα, μελετάμε το είδος των αντιθέσεων καθώς και το ρόλο τους στο μετασχηματισμό της διδασκαλίας των μαθηματικών και της διδακτικής πρακτικής των εκπαιδευτικών.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Διδακτικές επιλογές και πρόγραμμα σπουδών

Η έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών δεν παρέχει στον εκπαιδευτικό "άμεσα" εργαλεία για τη διδασκαλία στην τάξη του. Αυτό αντανακλάται στα ΠΣ που κινούνται σε μεταρρυθμιστική κατεύθυνση και τα οποία προϋποθέτουν την αυτονομία του εκπαιδευτικού να επιλέγει και να αποφασίζει σχετικά με τη διδασκαλία του. Η επιδίωξη είναι να συμβαδίζουν οι αποφάσεις και οι διδακτικές ενέργειες του εκπαιδευτικού στις συνθήκες της συγκεκριμένης τάξης με τους στόχους και τη φιλοσοφία του ΠΣ σχετικά με τη διδασκαλία. Επειδή η αυτονομία του εκπαιδευτικού είναι απαίτηση των ΠΣ, ο Skott (2004) μιλά για "εξαναγκασμένη αυτονομία". Αυτή η αυτονομία θέτει τον εκπαιδευτικό στο επίκεντρο της διαμόρφωσης του ΠΣ στην τάξη από τον ίδιο και τους μαθητές του (curriculum enactment) κι έτσι ο διδακτικός σχεδιασμός γίνεται βασικό συστατικό του επαγγελματικού του ρόλου (Davis & Krajcik, 2005).

Για τη διερεύνηση της σχέσης του εκπαιδευτικού με το ΠΣ υιοθετούμε τη συμμετοχική προσέγγιση (participatory approach) κατά την οποία εκπαιδευτικός και κείμενα του ΠΣ βρίσκονται σε μια σχέση συνεργασίας μέσα από την οποία επηρεάζονται και αλλάζουν και οι δύο. Ο εκπαιδευτικός προσαρμόζει την πρακτική του κάτω από την επίδραση του ΠΣ το οποίο σχηματοποιείται, παίρνει σάρκα και οστά από τον εκπαιδευτικό (και τους μαθητές) στην τάξη (Remilard, 2005). Έτσι, τα κείμενα του ΠΣ θεωρούνται εργαλεία (τεχνουργήματα, artifacts) που συνδιαμορφώνουν τη διδασκαλία των μαθηματικών ευρισκόμενα τα ίδια σε διαμόρφωση. Με αυτή την οπτική ο Choppin (2011) συμπεραίνει ότι η ευελιξία των εκπαιδευτικών στην προσαρμογή του ΠΣ στην τάξη τους σχετίζεται με δύο παράγοντες. Ο ένας είναι η γνώση της λογικής σχεδιασμού του ΠΣ και ο άλλος η γνώση που προέρχεται από την παρατήρηση των μαθητών κατά την αλληλεπίδρασή τους με τα υλικά του ΠΣ.

2.2 Η διδασκαλία των Μαθηματικών μέσα από τη Θεωρία Δραστηριότητας

Την πολυπλοκότητα της διδασκαλίας επιχειρεί να διαχειριστεί η θεωρία δραστηριότητας (ΘΔ), ενσωματώνοντας διαλεκτικά το ατομικό και το κοινωνικό–συλλογικό και βάζοντας στο επίκεντρο τη δραστηριότητα του υποκειμένου. Η δραστηριότητα κινείται από κάποια *κίνητρα* και κατευθύνεται προς ένα αντικείμενο με συνειδητούς *στόχους* για το μετασχηματισμό του. Η δραστηριότητα αποτελείται

από συνειδητές *δράσεις* οι οποίες μετασχηματίζουν το *αντικείμενο* και με τη σειρά τους αποτελούνται από ακολουθίες *λειτουργιών* οι οποίες μπορεί να είναι μηχανικές ή ασυνείδητες (Leont'ev, 1978). Η μονάδα ανάλυσης στο πλαίσιο της ΘΔ είναι το σύστημα δραστηριότητας (ΣΔ) στο οποίο ενσωματώνονται οι κοινωνικοί παράγοντες που καθορίζουν τη δράση του υποκειμένου πάνω στο αντικείμενο μέσω των *εργαλείων*. Οι παράγοντες αυτοί σύμφωνα με τον Engeström (2001) είναι η *κοινότητα* στην οποία το υποκείμενο δρα, οι *κανόνες* αυτής της κοινότητας καθώς και ο *καταμερισμός εργασίας*.

Χρησιμοποιώντας τη ΘΔ στην παρούσα έρευνα, βλέπουμε: ως *δραστηριότητα* τη διδασκαλία των μαθηματικών στο πλαίσιο εισαγωγής ενός νέου ΠΣ, ως *υποκείμενο* τους συμμετέχοντες ως άτομα και ως ομάδα, και ως *κίνητρο* τη μάθηση των μαθητών, την επαγγελματική μάθηση των εκπαιδευτικών, την εκπλήρωση των υποχρεώσεών τους. Στη δραστηριότητα αυτή ως *δράσεις* θεωρούμε τις διδασκαλίες που σχεδιάζει και πραγματοποιεί ο εκπαιδευτικός με *στόχους* τους διδακτικούς στόχους που θέτει για τη κάθε διδασκαλία που σχεδιάζει. Το *αντικείμενο* της δραστηριότητας είναι ο σχεδιασμός και η αποτίμηση της διδασκαλίας των μαθηματικών ενώ ανάμεσα στα *εργαλεία* διακρίνουμε τα υλικά (χειραπτικά και ψηφιακά) διδασκαλίας, το ΠΣ και τα σχολικά βιβλία, τη γλώσσα και τη γνώση του εκπαιδευτικού. Ως *κοινότητα* θεωρούμε την κοινότητα του σχολείου (που συμπεριλαμβάνει εκπαιδευτικούς, μαθητές και γονείς), την κοινότητα των μαθηματικών καθώς και άλλες κοινότητες στις οποίες συμμετέχουν οι εκπαιδευτικοί. Οι *κανόνες* αφορούν στις θεσμικές δεσμεύσεις (πχ χρονικοί περιορισμοί, εξετάσεις, ωρολόγια προγράμματα, δεσμεύσεις υλοποίησης του ΠΣ) ενώ ο *καταμερισμός εργασίας* αφορά στη δράση του εκπαιδευτικού στην τάξη, στην ερευνητική ομάδα ή στο σχολείο.

Ένα από τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά στο ΣΔ αποτελούν οι αντιθέσεις. Σύμφωνα με τον Engeström (2001) αντιθέσεις αναδύονται όταν νέα στοιχεία (όπως μια νέα τεχνολογία ή ένα νέο αντικείμενο) εισέρχονται στο ΣΔ προκαλώντας μια σύγκρουση με τα παλιά (όπως τους κανόνες ή τον καταμερισμό εργασίας). Οι Roth και Radford (2011) αναφέρονται σε εγγενείς αντιφάσεις (inner contradictions). Πρόκειται για διαφορετικές, συχνά αλληλοαποκλειόμενες όψεις του ίδιου φαινομένου που συνυπάρχουν διαλεκτικά, για εγγενείς αντιφάσεις που δεν μπορούν να αρθούν. Αυτές οι αντιθέσεις, αντιφάσεις και συγκρούσεις δημιουργούν ευκαιρίες μάθησης στο υποκείμενο, προσανατολίζοντας τη δραστηριότητα προς ένα ευρύτερο ορίζοντα δυνατοτήτων (Engeström, 2001, Potari, 2013).

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της πιλοτικής εφαρμογής του νέου ΠΣ σε τρία Γυμνάσια. Το νέο ΠΣ δίνει έμφαση στη μαθηματική δραστηριότητα των ίδιων των μαθητών με στόχο την εμπλοκή τους στις διεργασίες του μαθηματικού συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας, της δημιουργίας συνδέσεων εντός και

εκτός των μαθηματικών, της επικοινωνίας μέσω της χρήσης εργαλείων και της μεταγνωστικής ενημερότητας (ΠΣ σελ. 8–9). Συγχρόνως, υιοθετεί και προϋποθέτει τον κεντρικό ρόλο του εκπαιδευτικού για το σχεδιασμό της διδασκαλίας. Οι καθηγητές μαθηματικών στο κάθε σχολείο συνεργάστηκαν μεταξύ τους για την υλοποίηση του ΠΣ με την υποστήριξη του πρώτου συγγραφέα που ήταν μέλος της ομάδας σύνταξης του ΠΣ. Η συνεργασία αφορούσε στο σχεδιασμό και στην αποτίμηση της διδασκαλίας κάποιων ενοτήτων του ΠΣ που οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί επέλεγαν.

Τα δεδομένα αποτελούνται από τις μαγνητοφωνημένες συζητήσεις στο πλαίσιο της ομάδας συνεργασίας σε κάθε σχολείο, τα γραπτά τεκμήρια (φύλλα εργασίας, σχέδια μαθήματος), τις σημειώσεις του ερευνητή, συνεντεύξεις και την ηλεκτρονική αλληλογραφία. Για την παρούσα μελέτη τα δεδομένα αποτελούνται από τις ηχογραφήσεις και τις απομαγνητοφωνήσεις 6 συναντήσεων από δύο σχολεία (Α και Β) (τρεις ανά σχολείο) και τα σχετικά γραπτά τεκμήρια. Οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί στο σχολείο Α είναι πέντε ενώ στο σχολείο Β είναι 2 και όλοι έχουν μεγάλη διδακτική εμπειρία. Ειδικότερα στο σχολείο Α (που είναι πειραματικό) η εμπειρία τους περιλαμβάνει υλοποίηση καινοτομιών.

Τα δεδομένα αναλύθηκαν με μεθόδους θεμελιωμένης θεωρίας (Strauss & Corbin, 1998). Η αρχική ανάλυση είχε ως αποτέλεσμα τη διατύπωση των θεματικών ενοτήτων οι οποίες απασχόλησαν την κάθε συνάντηση. Για καθεμία από τις θεματικές ενότητες εντοπίστηκαν οι επιλογές των εκπαιδευτικών όπως διατυπώθηκαν από τους ίδιους και αναζητήθηκαν αντιθέσεις. Κάθε αντίθεση που αναγνωρίστηκε, διατυπώθηκε με τη μορφή δίπολου (π.χ. «έργα με στόχο την εννοιολογική κατανόηση της διαιρετότητας ή με στόχο τη διαδικαστική ευχέρεια στον υπολογισμό του ΕΚΠ»). Κατόπιν οι αντιθέσεις κωδικοποιήθηκαν και ταξινομήθηκαν και αναζητήθηκαν πιθανές επιδράσεις τους στη διδασκαλία.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Το είδος των αντιθέσεων

Στην παρούσα έρευνα οι αντιθέσεις αναδύονται σε τρία διαφορετικά επίπεδα: Πρώτο, υπάρχουν αντιθέσεις και συγκρούσεις ανάμεσα στα αντικείμενα διαφορετικών ΣΔ, δηλαδή ανάμεσα στους σχεδιασμούς της διδασκαλίας διαφορετικών εκπαιδευτικών. Δεύτερο, υπάρχουν αντιθέσεις μεταξύ των στοιχείων του ίδιου ΣΔ, για παράδειγμα ανάμεσα στα εργαλεία και το αντικείμενο. Τέτοιου είδους είναι η αντίθεση ανάμεσα σε ένα σχεδιασμό και το ΠΣ. Και τρίτο, εμφανίζονται αντιθέσεις μέσα σε κάποιο από τα στοιχεία του ΣΔ. Για παράδειγμα, η χρήση διαφορετικών εργαλείων σχεδίασης μπορεί να αναδεικνύει διαφορετικές, συχνά αντίθετες, πλευρές και ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων. Τέλος, υπάρχουν εγγενείς αντιθέσεις σε έννοιες, διαδικασίες ή διδακτικές επιλογές. Για

παράδειγμα, η χρήση γεωμετρικών αναπαραστάσεων (εμβαδών) στη διδασκαλία των ταυτοτήτων είναι αντιφατική, αφού παρέχει ένα ειδικό πλαίσιο για τη δικαιολόγηση μιας πρότασης καθολικής ισχύος.

Η ταξινόμηση των αντιθέσεων ανέδειξε τις παρακάτω κατηγορίες που αναφέρονται σε ποιους υπάρχει η αντίθεση και τι αφορά. Σχετικά με το πρώτο διακρίνουμε αντιθέσεις α) μεταξύ των μελών της ομάδας, β) εξωτερικές (αν ένας τουλάχιστον πόλος της αντίθεσης αφορά κάποιον παράγοντα εξωτερικό ως προς την ομάδα πχ μαθητές, το ΠΣ κλπ) και γ) ατομικές (αν ο λόγος ενός συμμετέχοντα ήταν αντιφατικός). Σχετικά με το περιεχόμενο της αντίθεσης αναγνωρίζονται επτά άξονες: α) σχεδιασμός διδασκαλίας (μακροσχεδιασμός, μικροσχεδιασμός, σχέδιο μαθήματος, επιλογή έργων, επιλογή εργαλείων) β) συνεργασία εκπαιδευτικών γ) θεσμικοί περιορισμοί (π.χ χρόνος, εξετάσεις) δ) διαχείριση τάξης και αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού – μαθητών, ε) μαθητές (δυσκολίες, ενδιαφέροντα, επίδοση), στ) φύση της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών (π.χ τι μαθηματικά πρέπει οι μαθητές να μάθουν και πως θα τα μάθουν, χρήση αναπαραστάσεων, μοντελοποίηση, επίλυση προβλήματος) και ζ) φύση και τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού αντικειμένου.

Ιδιαίτερα συχνή είναι η εμφάνιση αντιθέσεων με τη μορφή των αντιφάσεων στα λεγόμενα των συμμετεχόντων. Για παράδειγμα, οι εκπαιδευτικοί Πέτρος και Μανώλης του σχολείου Β σε συμφωνία με το ΠΣ, υιοθετούν ως ένα στόχο της διδασκαλίας των μετασχηματισμών τη σύνδεσή τους με την ισότητα και την ομοιότητα. Ο στόχος αυτός απαιτεί την εστίαση της δράσης του μαθητή στο μετασχηματισμό του σχήματος ως ενιαίου όλου. Ωστόσο, οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν έργα και εργαλεία (χαρτί και μολύβι) που εστιάζουν στο μετασχηματισμό του σημείου κι έτσι οι επιλογές τους αντιτίθενται στους στόχους τους Η παραπάνω αντίθεση είναι ατομική, και αφορά στο σχεδιασμό και συγκεκριμένα στην επιλογή έργων και εργαλείων.

Αρκετά συχνή είναι και η εμφάνιση εξωτερικών αντιθέσεων, όταν νέα στοιχεία συγκρούονται με καθιερωμένες πρακτικές ή αντιλήψεις. Για παράδειγμα σε συζήτηση για την ενότητα της διαιρετότητας στην Α γυμνασίου οι εκπαιδευτικοί του σχολείου Α σχολιάζουν τη χρήση στην τάξη μιας προτεινόμενης δραστηριότητας του ΠΣ. Αποτιμούν θετικά ότι η δραστηριότητα έχει περισσότερες από μία λύσεις, σε αντίθεση με την πεποίθηση των μαθητών ότι στα μαθηματικά προβλήματα υπάρχει πάντα μοναδική λύση. Αναφέρουν ότι αυτό το χαρακτηριστικό της είναι χρήσιμο για την αντιμετώπιση της παραπάνω πεποίθησης και ότι αυτός ήταν ένας λόγος που την επέλεξαν. Η αντίθεση κωδικοποιήθηκε ως εξωτερική (μεταξύ του ΠΣ και των μαθητών) και ως αναφερόμενη στο σχεδιασμό (επιλογή έργων) και στους μαθητές (δυσκολίες των μαθητών).

4.2 Ο ρόλος των αντιθέσεων στο μετασχηματισμό της διδασκαλίας

Μέσα από την ανάλυση των δεδομένων φάνηκε ότι σε κάποιες περιπτώσεις οι αντιθέσεις μπορεί να οδηγήσουν σε μια αμφισβήτηση της υπάρχουσας πρακτικής και στο μετασχηματισμό της. Αναλύουμε παρακάτω δύο επεισόδια τα οποία υποστηρίζουν τον παραπάνω ισχυρισμό μας.

Επεισόδιο 1 (σχολείο Α, συνάντηση 3η, απόσπασμα 313–343)

Στη προηγούμενη συνάντηση η Μαρίνα έχει περιγράψει το σχεδιασμό της για τη διδασκαλία του αλγεβρικού λογισμού στη Γ΄ γυμνασίου (πράξεις πολυωνύμων, ταυτότητες και παραγοντοποίηση). Στο σχεδιασμό αυτό δίνει μεγάλη έμφαση στη δομή της αλγεβρικής παράστασης γιατί όπως υποστηρίζει "τα παιδιά [στην παράσταση 3·(α+β+γ)] βλέπουν τελείως διαφορετικά πράγματα απ' ότι βλέπουμε εμείς… βλέπουν πρόσθεση και πολλαπλασιασμό [ενώ] εμείς βλέπουμε πολλαπλασιασμό". Επιδιώκοντας να αποκτήσει με τα παιδιά "μια κοινή γλώσσα" σχετικά με τη δομή των παραστάσεων, σχεδίασε τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού μονωνύμου με πολυώνυμο ταυτόχρονα με την παραγοντοποίηση με κοινό παράγοντα. Και "στο επόμενο μάθημα … διπλή επιμεριστική, να την πούμε έτσι, δύο παρενθέσεων και παραγοντοποίηση με ομάδες". Στην επόμενη συνάντηση η Μαρίνα ανέφερε ότι ακολούθησε αυτή την τακτική και στη διδασκαλία των ταυτοτήτων ("χρησιμοποιήθηκαν ταυτόχρονα για παραγοντοποίηση") και ρωτήθηκε αν βλέπει διαφορά με αυτή την επιλογή.

> Μαρίνα: νομίζω ότι έχει περάσει πάρα πολύ … έχουν καταλάβει καλύτερα ότι πρόκειται για πράξεις πολυωνύμων στην πραγματικότητα και το ένα και το άλλο. Μέχρι τώρα παρουσιαζόταν οι ταυτότητες σαν κάτι που το μάθαιναν απ' έξω, κι ήταν ένα ξεχωριστό πράγμα, τελείως έξω από τις υπόλοιπες πράξεις, όπως επίσης και η παραγοντοποίηση ήταν … δε συνδεόνταν δηλαδή αυτά τα πράγματα. Και νομίζω το να συνδεθούν βοήθησε πάρα πολύ στην κατανόηση και στην ευχέρεια να τα χρησιμοποιούν. Αυτό ήταν.

Μέσα από το παραπάνω επεισόδιο αναδεικνύεται μια εγγενής αντίθεση στο ίδιο το μαθηματικό αντικείμενο: η χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας (στις πράξεις πολυωνύμων και στις ταυτότητες) από τη μια για μετασχηματισμό ενός γινομένου σε άθροισμα και από την άλλη για παραγοντοποίηση ενός αθροίσματος. Η αναγνώριση της αντίθεσης αυτής από την Μαρίνα (έστω κι αν δεν ονομάζεται ως αντίθεση από την ίδια) σχετίζεται με την προηγούμενη εμπειρία της αλλά και με το νέο ΠΣ, στο οποίο διατυπώνεται ως στόχος η αναγνώριση της δομής της αλγεβρικής παράστασης. Μια "παραδοσιακή" οπτική βλέπει τις δύο αναγνώσεις της επιμεριστικής ιδιότητας διαχωρισμένες, επιχειρώντας να δομήσει τη διδασκαλία κάποτε πάνω στη μία (πράξεις για μετάβαση σε άθροισμα) και κάποτε πάνω στην άλλη (παραγοντοποίηση για μετάβαση σε γινόμενο). Η οπτική που φαίνεται να υιοθετεί η Μαρίνα βλέπει τις δύο αναγνώσεις όχι ως μια αντίθεση που πρέπει να λυθεί με επικράτηση (έστω προσωρινή) της μιας πάνω στην άλλη, αλλά ως μια διαλεκτική αντίθεση που πρέπει να συνειδητοποιηθεί και να αναδειχθεί. Έτσι, η Μαρίνα φαίνεται να επεκτείνει τον

ορίζοντα της δραστηριότητάς της αναγνωρίζοντας τη δυσκολία των μαθητών να δούν τη δομή της αλγεβρικής παράστασης καθώς και τους περιορισμούς της συνήθους πρακτικής. Επιπλέον σχεδιάζει τη διδασκαλία της γύρω από αυτή τη διαλεκτική αντίθεση με στόχο την κατανόηση σχέσεων και ιδιοτήτων αλλά και διαδικασιών από τους μαθητές.

Επεισόδιο 2 (σχολείο Β, συνάντηση 3η, απόσπασμα 35–117)

Ο Πέτρος περιγράφει το σχεδιασμό του και την πραγματοποιημένη διδασκαλία του για την εισαγωγή στην έννοια της αλγεβρικής παράστασης και των μονωνύμων στη Γ' γυμνασίου. Με στόχο οι μαθητές να αναγνωρίζουν μια αλγεβρική παράσταση κι ένα μονώνυμο, συζητά τους ορισμούς και κάποιες "ερωτήσεις κατανόησης" του βιβλίου. Ο ερευνητής τον προκαλεί με μια υποθετική ερώτηση μαθητή σχετικά με τη χρησιμότητα των μονωνύμων. Ο Πέτρος αναφέρει ότι πράγματι ρωτήθηκε από μαθητή αλλά στην απάντησή του δεν ανέφερε την μοντελοποίηση. Στην τάξη συζήτησε μια άσκηση μοντελοποίησης σχετικά με τους βαθμούς μιας ομάδας μπάσκετ που έδωσε 9 αγώνες παίρνοντας 2 βαθμούς σε κάθε νίκη και 1 βαθμό σε κάθε ήττα. Αλλά αυτό έγινε μετά την εισαγωγή:

> Πέτρος: Ξέρεις τι; Εγώ ξεκινάω με τα θέματα των ορισμών, δηλαδή ξεκινάω, κάνω την εισαγωγή, προχωράμε λίγο και μετά μπαίνουμε στο που τα χρησιμοποιούμε. Δηλαδή πρώτα βλέπουμε τι κάνουμε, τα κάνουμε και μετά βρίσκουμε τις χρήσεις. Γι αυτό και τις έχει το βιβλίο φαντάζομαι σ' αυτή τη θέση [εννοεί τελευταίες ασκήσεις]. Αυτό βέβαια θέλει προσοχή. Να βάλουμε ένα αστεράκι εδώ και να βγάλουμε την πρακτική χρήση των μονωνύμων.

Ο Πέτρος δεν είναι ικανοποιημένος από τον τρόπο που χειρίστηκε το θέμα και γι αυτό "βάζει ένα αστεράκι" στο σχέδιο μαθήματος, για να το ξανασκεφτεί. Στη συνέχεια της συζήτησης, ο Μανώλης αναφέρεται στην έκφραση γεωμετρικών μεγεθών (εμβαδών) με αλγεβρική παράσταση και ο ερευνητής μιλάει για τη χρήση της άλγεβρας στη μοντελοποίηση καταστάσεων. Μέσα από αυτή τη συζήτηση ο Πέτρος φαίνεται να οδηγείται στην αναγνώριση του ρόλου της μοντελοποίησης για την κατασκευή νοήματος από τους μαθητές σχετικά με τις αλγεβρικές παραστάσεις.

> Πέτρος: [Η μοντελοποίηση] δείχνει αυτό που κάνουμε ξεκάθαρα. Δηλαδή μετατρέπουμε μία κατάσταση η οποία μας δίνεται σαν κατάσταση πραγματικότητας ή που δίνεται μέσα από ένα πρόβλημα, τη μετατρέπουμε σε κάτι μαθηματικό … κι αυτό νομίζω ταιριάζει και σ' όλα. Ας πούμε, ακόμα και στη φυσική, στην ουσία τι είναι; Μια μοντελοποίηση είναι. Δηλαδή έχουμε μία κατάσταση της … ένα αυτοκίνητο που κινείται κλπ κλπ και το κάνεις ένα μοντέλο μαθηματικό. Δηλαδή μετατρέπεις τις εκφράσεις του λόγου … σε εκφράσεις μαθηματικές. Και ίσως αυτό τους δίνει κι ένα κίνητρο, ένα στόχο, δηλαδή να τους πεις, για να δούμε, θα μπορέσουμε αυτό να το μαθηματικοποιήσουμε; Μ΄ αρέσει αυτή η έκφραση… εντάξει, ουσιαστικά

> πρέπει πρώτα να βάλεις τη δραστηριότητα για να τους δημιουργήσεις απορίες, …

Στο παραπάνω επεισόδιο αναδεικνύεται μια εγγενής αντίθεση στην ιδέα της μοντελοποίησης: από τη μια συμβάλει στην απόδοση νοήματος στις αλγεβρικές εκφράσεις, άρα είναι καλό να χρησιμοποιείται για την εισαγωγή στις αλγεβρικές παραστάσεις και για τη δημιουργία τους. Από την άλλη, η επίλυση προβλημάτων μέσω αλγεβρικής μοντελοποίησης απαιτεί ένα βαθμό εξοικείωσης με την άλγεβρα κι έτσι τέτοια προβλήματα τίθενται πιο συχνά ως εφαρμογές, δηλαδή μετά τη διδασκαλία στοιχείων αλγεβρικού λογισμού. Ο Πέτρος στην αρχή κατανοεί τη μοντελοποίηση με τη δεύτερη μόνο οπτική. Αλλά αντιμετωπίζοντας τις ανάγκες της τάξης, τις προτάσεις του νέου ΠΣ και μέσα στη συνεργασία με τους συναδέλφους του, αρχίζει να βλέπει την άλλη πλευρά και να υιοθετεί τη "μοντελοποίηση" ως την έννοια που νοηματοδοτεί τη διδασκαλία των πολυωνύμων. Έτσι, η εγγενής αντίθεση της ιδέας της μοντελοποίησης, η οποία αναγνωρίζεται από το ΠΣ, δημιουργεί μια εξωτερική αντίθεση ανάμεσα στον Πέτρο και στις προτάσεις του ΠΣ και μια ατομική αντίθεση (αντίφαση) στο λόγο του. Η στροφή του Πέτρου αν και φαίνεται ειλικρινής μπορεί να είναι προσωρινή ή επιφανειακή. Όμως, το σημαντικό με αυτή τη μετατόπιση ίσως είναι ότι συνδέεται με την αναγνώριση της αντιφατικής πτυχής της έννοιας της μοντελοποίησης. Με αυτήν ο Πέτρος αρχίζει να διευρύνει τον ορίζοντα της δραστηριότητάς του, συμπεριλαμβάνοντας τόσο τη χρήση των λέξεων "μοντελοποίηση" και "μαθηματικοποίηση" για να περιγράψει "τι κάνουμε", όσο και προβλήματα που "πρέπει πρώτα να βάλεις" ως εισαγωγή στα πολυώνυμα.

5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η ανάλυση των συζητήσεων για το σχεδιασμό και την αποτίμηση της διδασκαλίας ανέδειξαν ένα εύρος αντιθέσεων που φαίνεται να είναι ενδεικτικό της δραστηριότητας της διδασκαλίας. Ένα σημαντικό μέρος των αντιθέσεων αυτών είναι ατομικές αντιφάσεις στο λόγο των συμμετεχόντων. Οι περισσότερες από αυτές δεν είναι συνειδητές, δηλαδή δεν αναγνωρίζονται ως τέτοιες από τους ίδιους τους συμμετέχοντες που τις εκφράζουν. Η έκταση στην οποία ανιχνεύθηκαν αναδεικνύει την πολυπλοκότητα της διδασκαλίας και δείχνει ότι δεν υπάρχει ένα συνεκτικό μοντέλο παραδοσιακής – μη παραδοσιακής διδασκαλίας απαλαγμένο από αντιφάσεις. Πολλές αντιθέσεις είναι εγγενείς που εκφράζουν τη διαλεκτική ενότητα αντιφατικών όψεων του ίδιου φαινομένου ή στοιχείου. Ίσως λοιπόν δεν αναμένεται η υπέρβαση, αλλά η συνειδητοποίησή τους και η συμπερίληψη των αντιφατικών πλευρών ως νέες δυνατότητες της δραστηριότητας της διδασκαλίας.

Σύμφωνα με τη τη ΘΔ οι αντιθέσεις συνιστούν μια αναγκαία προϋπόθεση για ανάπτυξη της επαγγελματικής γνώσης ως επέκτασης της δραστηριότητας και του αντικειμένου της σε ευρύτερους ορίζοντες (Engeström, 2001). Αυτό φαίνεται να επιβεβαιώνεται από μια πρώτη ανάλυση των δεδομένων μας. Στις περιπτώσεις που

περιγράφηκαν παραπάνω, η συνειδητοποίηση των αντιθέσεων από τους συμμετέχοντες συνοδεύεται από μια μετατόπιση της δραστηριότητάς τους.

Τα αποτελέσματα αντλήθηκαν από ένα μικρό μέρος των δεδομένων έρευνας που έχουν συλλεχθεί στη διάρκεια ενός έτους. Θα ήταν ίσως ενδιαφέρον να αναζητηθεί μεγαλύτερη τεκμηρίωση για το ρόλο των αντιθέσεων στην αλλαγή της πρακτικής των εκπαιδευτικών και στην υιοθέτηση καινοτόμων πρακτικών που σχετίζονται με το νέο ΠΣ.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Choppin, J. (2011) Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum resources. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(5), 331-353.

Davis, E., & Krajcik, J. (2005) Designing Educative Curriculum Materials to Promote Teacher Learning. *Educational Researcher*, 34(3), 3-14

Engeström, Y. (2001) Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133-156.

Hirsch, C. & Reys, B. (2009) Mathematics curriculum: a vehicle for school improvement. *ZDM*, 41, 749-761.

Leont'ev, A.N. (1978). *Activity, Consciousness and Personality*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Potari, D. (2013) The relationship of theory and practice in mathematics teacher professional development: an activity theory perspective ZDM, 45(4), 507–519.

Remillard, J. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211-246

Remilard, J. & Bryans M. (2004). Teachers' orientations toward mathematics curriculum materials: Implications for teacher learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 352–388

Roth, W.-M. & Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning.* Rotterdam: Sense Publishers

Skott, J. (2004) The forced autonomy of mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 227-257.

Strauss, A. & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research. Techniques and procedures for developing grounded theory*. London: SAGE publications

Πρόγραμμα Σπουδών μαθηματικά στην υποχρεωτική εκπαίδευση. digitalschool.minedu.gov.gr/info/newps

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΤΩΝ ΝΗΠΙΩΝ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΥΝΟΛΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ: ΤΙ ΑΛΛΑΖΕΙ, ΟΤΑΝ ΑΛΛΑΖΕΙ ΤΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ;

Ξένια Βαμβακούση και Μαρία Καλδρυμίδου
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
xvamvak@cc.uoi.gr mkaldrim@uoi.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε μια εμπειρική μελέτη συγκρίναμε δύο ομάδες νηπίων στο τέλος της φοίτησής τους, υπό διαφορετικά αναλυτικά προγράμματα. Επικεντρωθήκαμε στον τρόπο με τον οποίο τα νήπια αντιμετωπίζουν τη σύγκριση συνόλων ως προς το πλήθος. Συγκεκριμένα, εξετάσαμε τις διαδικασίες που επιλέγουν, καθώς και το πότε αποφασίζουν να τις χρησιμοποιήσουν. Βρήκαμε ομοιότητες ως προς την πρώτη παράμετρο, αλλά σημαντικές διαφορές ως προς τη δεύτερη.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο πληθικός αριθμός έχει διπλή λειτουργία: αφενός μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου και αφετέρου να συγκρίνουμε το πλήθος δύο συνόλων και να αποφανθούμε αν αυτά είναι ισοδύναμα ή όχι. Η σύγκριση λοιπόν συνόλων ως προς το πλήθος των στοιχείων τους αποτελεί ένα βασικό στοιχείο στην οικοδόμηση της έννοιας του αριθμού (Muldoon, Lewis, & Freeman, 2009).

Η σύγκριση συνόλων με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων μπορεί να γίνει χωρίς ή με τη χρήση του αριθμού ως εργαλείο. Στην πρώτη περίπτωση, η μέθοδος είναι η 1-1 αντιστοίχιση των στοιχείων τους και είναι η κατ' εξοχήν μέθοδος σύγκρισης συνόλων, δεδομένου ότι επεκτείνεται και στην περίπτωση των απειροσυνόλων. Η δεύτερη μέθοδος (και επικρατούσα στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής) συνίσταται στην καταμέτρηση των στοιχείων τους και στη σύγκριση των αποτελεσμάτων της καταμέτρησης.

Στο Νηπιαγωγείο γίνεται η πρώτη συστηματική προσπάθεια υποστήριξης των παιδιών να δομήσουν την έννοια του αριθμού. Τα έργα σύγκρισης συνόλων ως προς το πλήθος τους είναι μια σημαντική συνιστώσα της προσπάθειας αυτής. Η απάντηση στο ερώτημα ποια μέθοδος είναι καταλληλότερη για την εισαγωγή των νηπίων στη σύγκριση συνόλων είναι, φυσικά, συνυφασμένη με τις εκάστοτε επικρατούσες απόψεις για την ψυχολογική βάση της ανάπτυξης της έννοιας του αριθμού.

Υπάρχουν δύο ισχυρές απόψεις για το ζήτημα αυτό, οι οποίες έχουν επηρεάσει σημαντικά την ανάπτυξη των αναλυτικών προγραμμάτων των

μαθηματικών για το νηπιαγωγείο παγκοσμίως. Η πρώτη οφείλεται στον J. Piaget, ο οποίος μελέτησε τη γενική γνωστική ανάπτυξη. Τη δεύτερη υποστηρίζουν ψυχολόγοι οι οποίοι εστιάζουν την εξειδικευμένη κατά πεδίο (domain-specific) ανάπτυξη (για μια εκτενή συζήτηση, βλ. Bideaud, Meljac, & Fischer, 1991).

Σύμφωνα με την Πιαζετιανή άποψη, τα παιδιά που ξεκινούν το νηπιαγωγείο δεν είναι σε στάδιο γνωστικής ανάπτυξης τέτοιο που να τους επιτρέπει να αντιληφθούν τη διατήρηση του πλήθους. Επομένως, η εισαγωγή της καταμέτρησης στο νηπιαγωγείο δεν έχει αξία, αν δεν έχει προηγηθεί εκτεταμένη χρήση της 1-1 αντιστοιχίας, η οποία μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση της έννοιας του πλήθους μιας συλλογής αντικειμένων και τις ιδιότητές της (π.χ. ότι το πλήθος παραμένει αμετάβλητο όταν αλλάζει η διάταξη των αντικειμένων στο χώρο).

Αντίθετα, οι ψυχολόγοι που μελετούν ειδικά την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού υποστηρίζουν ότι τα μικρά παιδιά, όταν πρόκειται για σύνολα με μικρό πλήθος στοιχείων, έχουν πολύ μεγαλύτερη και πολύ πιο πρώιμη ικανότητα διαχείρισης του πλήθους απ' όσο προβλέπει η πιαζετιανή θεωρία. Επιπλέον, η ικανότητα αυτή μπορεί να υποστηριχθεί σημαντικά από εργαλεία, όπως η αριθμητική ακολουθία, που συνδέονται στενά με τη γλώσσα (Carey, 2009). Επομένως, η κατάκτηση της αριθμητικής ακολουθίας και η χρήση της σε διαδικασίες καταμέτρησης είναι πρωτεύων στόχος για τα Μαθηματικά του Νηπιαγωγείου.

Στο ελληνικό πλαίσιο, δύο διαδοχικά Αναλυτικά Προγράμματα απηχούν, σε μεγαλύτερη ή μικρότερη ένταση, τις διαφορετικές αυτές απόψεις για τα Μαθηματικά του Νηπιαγωγείου και, συγκεκριμένα, όσον αφορά τις προκρινόμενες μεθόδους σύγκρισης συνόλων ως προς το πλήθος.

Το πρώτο, το ΑΠΠΑ (Αναλυτικό Πρόγραμμα Προσχολικής Αγωγής), δημοσιεύθηκε το 1989. Στο πλαίσιο του προγράμματος αυτού επιχειρήθηκε για πρώτη φορά η συγγραφή ενός βιβλίου νηπιαγωγού με συγκεκριμένο περιεχόμενο ανά γνωστικό πεδίο και κατευθύνσεις για την εφαρμογή του προγράμματος (Βενιζέλου κ.ά., 1990). Όσον αφορά τα μαθηματικά (σελ. 239-277), γίνεται καταρχήν ρητή αναφορά στην Πιαζετιανή προσέγγιση στη γνωστική ανάπτυξη και, συνακόλουθα, το περιεχόμενο είναι δομημένο στη βάση των *προμαθηματικών* εννοιών. Η κεντρική ιδέα είναι να προσεγγίσουν τα νήπια βασικές έννοιες και διαδικασίες αρχικά, αλλά και για το σημαντικά μεγαλύτερο μέρος του προγράμματος, χωρίς την εισαγωγή συμβολικών μαθηματικών εργαλείων. Συνεπής με αυτή την προσέγγιση είναι η αντιμετώπιση της σύγκρισης συνόλων ως προς το πλήθος: δίνεται προτεραιότητα και μεγάλη έμφαση στην 1-1 αντιστοίχιση των στοιχείων τους, η αριθμητική ακολουθία (1-10) εισάγεται πολύ αργότερα για την απαρίθμηση, ενώ βαθύτερη επεξεργασία της σχέσης αριθμού-πλήθους και εισαγωγή αριθμητικών συμβόλων γίνεται για τους αριθμούς 1-5.

Στο τρέχον αναλυτικό πρόγραμμα (ΔΕΠΣ-ΑΠΣ, σελ. 597-600), το οποίο δημοσιεύθηκε το 2001, η 1-1 αντιστοίχιση και η καταμέτρηση συνυπάρχουν ως

επιθυμητοί στόχοι περιεχομένου. Το αντίστοιχο βιβλίο νηπιαγωγού (Δαφέρμου, Κουλούρη, & Μπασαγιάννη, 2006) αναφέρεται ρητά στην αξία της 1-1 προς ένα αντιστοίχισης για την κατάκτηση της διατήρησης του πλήθους (σελ. 164). Ταυτόχρονα, ωστόσο, αναγνωρίζεται η άτυπη γνώση για τον αριθμό που φέρουν τα νήπια και η αξία της αριθμητικής ακολουθίας και της χρήση της από νωρίς για την ανάπτυξη της κατανόησής τους για τον αριθμό. Δε φαίνεται να δίνεται περισσότερη έμφαση στη μία, σε σχέση με την άλλη, μέθοδο, ούτε υπάρχει ρητή αναφορά στο εύρος της αριθμητικής ακολουθίας που θα προσεγγιστεί στο Νηπιαγωγείο. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι ρητός στόχος του αναλυτικού αυτού είναι τα παιδιά να ενθαρρύνονται να αναπτύξουν «διαδικασίες δοκιμής, επαλήθευσης, και ελέγχου» (σελ. 597), ως παράδειγμα των οποίων προσφέρεται η διαδικασία της 1-1 αντιστοίχισης. Επιπλέον, ρητός στόχος είναι και η ανάπτυξη δεξιοτήτων επικοινωνίας στο πλαίσιο των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, αναφέρεται ότι τα παιδιά θα πρέπει να ενθαρρύνονται να «δίνουν εξηγήσεις για τις επιλογές τους» και να «επιχειρηματολογούν στο πλαίσιο των δυνατοτήτων τους» (σελ. 599).

Συνοψίζοντας, και τα δύο Αναλυτικά Προγράμματα περιλαμβάνουν τόσο τη χρήση της 1-1 αντιστοιχίας, όσο και της απαρίθμησης/καταμέτρησης, αν και με πολύ διαφορετική έμφαση το καθένα. Έτσι, τα νήπια προβλέπεται να έχουν δύο διαφορετικά εργαλεία για τη σύγκριση συνόλων ως προς το πλήθος τους. Επιπλέον, και για τα δύο Αναλυτικά είναι σημαντική η κατάκτηση της ιδέας ότι το πλήθος ενός συνόλου δεν εξαρτάται από τη διάταξη των στοιχείων του στο χώρο. Με αυτό το δεδομένο, τα ερευνητικά μας ερωτήματα αφορούν τη μαθηματική συμπεριφορά των νηπίων στο τέλος της φοίτησής τους στο Νηπιαγωγείο, όταν καλούνται να συγκρίνουν σύνολα ως προς το πλήθος. Συγκεκριμένα, τα νήπια:

- Εφαρμόζουν πράγματι κάποια διαδικασία (π.χ. αντιστοίχιση, μέτρηση) ή αποφασίζουν με συνολική εκτίμηση;
- Η συμπεριφορά τους ως την εφαρμογή διαδικασίας διαφοροποιείται ανάλογα με την κατάσταση που έχουν να αντιμετωπίσουν; Είναι, δηλαδή, ευέλικτα ως προς την απόφαση για την εφαρμογή ή όχι κάποιας διαδικασίας;
- Το διαφορετικό Αναλυτικό Πρόγραμμα του Νηπιαγωγείου έχει ως αποτέλεσμα διαφορετική συμπεριφορά ως προς την απόφαση για εφαρμογή διαδικασίας, καθώς και ως προς τη διαδικασία που τελικά εφαρμόζεται; Ως προς την κατάκτηση της ιδέας ότι το πλήθος ενός συνόλου δεν σχετίζεται τη διάταξη των στοιχείων του στο χώρο ;

Διερευνήσαμε τα ερωτήματα αυτά με μια συγκριτική μελέτη δύο ομάδων νηπίων στο τέλος της φοίτησής στο Νηπιαγωγείο. Η πρώτη ομάδα είχε φοιτήσει στη διάρκεια εφαρμογής του ΑΠΠΑ., ενώ η δεύτερη στη διάρκεια εφαρμογής του ΔΕΠΣ-ΑΠΣ. Συγκεκριμένα, η συλλογή των δεδομένων έγινε και το Μάιο του 1995 και το Μάιο του 2013 αντίστοιχα[1].

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δημογραφικά χαρακτηριστικά του δείγματος

Το δείγμα αποτελείται από 87 νήπια (43 αγόρια, 44 κορίτσια) για την ομάδα του 1995 (στο εξής, Ομάδα 1) και 47 νήπια (24 αγόρια, 23 κορίτσια) για την ομάδα του 2013 (στο εξής, Ομάδα 2).

Η ηλικία των παιδιών στην Ομάδα 1 κυμαίνεται από 56 μέχρι 72 μήνες με μέσο όρο 67,06 και τυπική απόκλιση 3,978. Στην Ομάδα 2 η ηλικία κυμαίνεται από 42 ως 76 μήνες, με μέσο όρο 68,53 και τυπική απόκλιση 6,554. Τα δύο δείγματα δεν διαφέρουν στη σύνθεσή τους ως προς την ηλικία, $t(132)=-1,620$, $p>0,05$.

Έργα

Χρησιμοποιήσαμε δύο τύπους έργων. Στα έργα του πρώτου τύπου παρουσιάστηκαν δύο μικρά καλάθια, τα οποία περιείχαν τουρμπίνια (ανακατεμένα μέσα στο καλάθι) στους εξής συνδυασμούς: 5 και 15 (Έργο 1), 14 και 15 (Έργο 2), 5 και 5 (Έργο 3). Στο Έργο 1, η μεγάλη διαφορά στο πλήθος καθιστά την αυθόρμητη εφαρμογή διαδικασίας σύγκρισης μη απαραίτητη. Το αντίθετο ισχύει για το Έργο 2, στο οποίο το πλήθος των στοιχείων των δύο συνόλων είναι μεγάλο και, επιπλέον, η διαφορά τους είναι μόνο ένα στοιχείο. Στο Έργο 3, η αυθόρμητη εφαρμογή διαδικασίας δεν είναι ενδεχομένως απαραίτητη για τα παιδιά που έχουν ανεπτυγμένη την ικανότητα για άμεση αναγνώριση (subitizing) και ταυτόχρονα το πλήθος των στοιχείων είναι της τάξης μεγέθους που συναντούν τα νήπια στην πλειονότητα των περιπτώσεων στην τάξη. Από αυτή την άποψη, το Έργο 3 αντιστοιχεί στην πιο οικεία στα παιδιά κατάσταση.

Τα έργα του δεύτερου τύπου (συνολικά 6) είναι εμπνευσμένα από τα παιχνιδιάνα έργα διατήρησης του αριθμού. Συγκεκριμένα, παρουσιάστηκαν δύο συλλογές αντικειμένων 4 στοιχείων η κάθε μία, διατεταγμένες σε σειρά, η μία πάνω από την άλλη. Η διάταξη των στοιχείων των δύο συνόλων δεν ήταν σε 1-1 αντιστοιχία, έτσι ώστε οι σειρές να διαφέρουν ως προς το πόσο «αραιές» ή «πυκνές» ήταν, ή ως προς το ποιο σημείο άρχιζαν ή τελείωναν. Ο ρόλος αυτών των έργων ήταν να εξετάσουν κατά πόσο η διαφορετική διάταξη στο χώρο των στοιχείων των συλλογών από κυβάκια θα επηρέαζε τις απαντήσεις των νηπίων ως προς το πλήθος τους.

Διαδικασία

Τα δεδομένα συλλέχτηκαν με ατομική συνέντευξη των νηπίων, στο χώρο του νηπιαγωγείου τους, αλλά όχι μέσα στην κύρια αίθουσα. Σε κάθε έργο, καταγράφτηκε αρχικά η αυθόρμητη αντίδραση του κάθε νηπίου. Αν το νήπιο απαντούσε χωρίς να εφαρμόσει κάποια διαδικασία, οι ερευνήτριες[2] το καλούσαν να εξηγήσει την απάντησή του. Συγκεκριμένα, ρωτούσαν «πώς το ξέρεις;» ή ισχυρίζονταν ότι ισχύει το αντίθετο.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Επιλογή Διαδικασίας

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται το είδος της διαδικασίας που εφάρμοσαν τα παιδιά και των δύο ομάδων, είτε αυθόρμητα, είτε μετά από παρέμβαση της ερευνήτριας, ανά έργο. Από τον πίνακα φαίνεται ότι όταν τα παιδιά εφαρμόζουν κάποια διαδικασία, αυτή είναι η καταμέτρηση.

	Έργο 1 (5-15)	Έργο 2 (14-15)	Έργο 3 (5-5)
Χωρίς διαδικασία	87 64,9%	52 38,8%	31 23,1%
Καταμέτρηση	46 34,3%	77 57,5%	98 73,1%
Σχηματισμός &1-1 αντιστοιχία	1 0,74%	3 2,2%	5 3,7%
Σχηματισμός & Καταμέτρηση	0 0,0%	2 1,5%	0 0,0%
Σύνολο	134 100%	134 100%	134 100%

Πίνακας 1: Διαδικασίες που χρησιμοποιήθηκαν στα Έργα 1, 2, 3.

Αντίθετα, η 1-1 αντιστοιχία χρησιμοποιείται ελάχιστες φορές, ακόμα και από τα νήπια της Ομάδας 1, αν και το Α.Π. τους έδινε μεγάλη έμφαση στη χρήση αυτής της διαδικασίας για τη σύγκριση πλήθους.

Στο Έργο 1, ένας μεγάλος αριθμός νηπίων δικαίως δε χρησιμοποιεί καμία διαδικασία. Ωστόσο, το 38,8% του δείγματος κάνει το ίδιο και στο Έργο 2, όπου η χρήση διαδικασίας είναι απαραίτητη, όταν μάλιστα στο Έργο 3, πολύ μικρότερο ποσοστό του δείγματος (23%) δεν εφαρμόζει διαδικασία.

Απόφαση για εφαρμογή διαδικασίας

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζεται η απόφαση για εφαρμογή διαδικασίας από τα νήπια της Ομάδας 1, συνδυαστικά στα τρία έργα.

			Έργο 2 (14-15)			**Σύνολο**
Έργο 1 (5-15)			Καμία διαδικασία	Αυθόρμητα	Μετά από παρ-έμβαση	
Καμία διαδικασία	Έργο 3 (5-5)	Καμία διαδικασία	23 26,4 %	0	1 1,1%	24 27,6%
		Αυθόρμητη διαδικασία	12 13,8%	3 3,4%	3 3,4%	18 20,7%
		Διαδικασία μετά από παρέμβαση	14 16,1%	0	3 3,4%	17 19,5%

	Σύνολο		49 56,3%	3 3,4%	7 8%	59 67,8%
Αυθόρμητα	Έργο 3 (5-5)	Καμία διαδικασία	0	0	0	0
		Αυθόρμητα	1 1,1%	5 5,7%	0	6 6,9%
		Μετά από παρέμβαση	0	0	2 2,2%	2 2,2%
	Σύνολο		1 1,1%	5 5,7%	2 2,2%	8 9,1%
Μετά από παρέμβαση	Έργο 3 (5-5)	Καμία διαδικασία	0	0	0	0
		Αυθόρμητα	1 1,1%	5 5,7%	8 9,1%	14 16,1%
		Μετά από παρέμβαση	1 1,1%	2 2,2%	3 3,4%	6 6,9%
	Σύνολο		2 2,2%	7 8%	11 12,6%	20 23%

Πίνακας 2: Εφαρμογή διαδικασίας στα έργα από την Ομάδα 1 (1995)

Με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 2, από τα νήπια της Ομάδας 1 δεν εφαρμόζει καμιά διαδικασία το 67,8% στο Έργο 1, το 59,6% στο Έργο 2 και το 27,6% στο Έργο 3. Αξίζει να σημειωθεί ότι το 24% της Ομάδας 1 δεν αποφασίζει να εφαρμόσει διαδικασία σε κανένα από τα 3 έργα.

Το μεγάλο ποσοστό που δεν εφαρμόζει καμία διαδικασία στο Έργο 1 δικαιολογείται. Ωστόσο, το 56,3% των νηπίων αυτών (και το 59,6% της Ομάδας 1) δεν εφαρμόζει καμία διαδικασία ούτε στο Έργο 2, όπου αυτό είναι απαραίτητο. Επιπλέον, μόνο το 17,2% της Ομάδας 1 αποφάσισε αυθόρμητα την εφαρμογή διαδικασίας στο Έργο 2 και ακόμα 12,6% των νηπίων εφαρμόζει διαδικασία μετά από παρέμβαση του ερευνητή. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι το πλήθος είναι πολύ μεγάλο για να μετρηθεί από αυτά τα νήπια, που δεν έχουν γνώσεις σε αριθμούς πάνω από το 10 –(εντούτοις η μη εφαρμογή ούτε της 1-1 αντιστοιχίας, στη χρήση της οποίας τα νήπια αυτής της ομάδας αυτής είναι πολύ εξοικειωμένα δημιουργεί ένα σημαντικό ερώτημα).

Επισημαίνουμε ότι το 43,7% και το 28,6% των νηπίων εφαρμόζει διαδικασία αυθόρμητα και μετά από παρέμβαση, αντίστοιχα, στο Έργο 3, το οποίο αντιστοιχεί σε μια οικεία κατάσταση για τα παιδιά. Από τα νήπια αυτά, το 55,6% δεν εφάρμοσε διαδικασία σε κανένα από τα δύο άλλα έργα, ενώ το 54% εφάρμοσε διαδικασία στο Έργο 2.

Με το κριτήριο χ^2 εξετάσαμε τη σχέση ανάμεσα στα έργα και την απόφαση για εφαρμογή διαδικασίας. Προέκυψε ότι υπάρχει σημαντική συσχέτιση για όλους τους συνδυασμούς έργων [Έργα 1-2: $\chi^2(2)= 49{,}954$, $p<0{,}001$, Έργα 1-3: $\chi^2(2)=$

18,752, $p<0,001$, Έργα 2-3: $\chi^2(2)= 25,456$, $p<0,001$]. Δηλαδή, στην Ομάδα 1 η απόφαση για εφαρμογή διαδικασίας δε διαφοροποιείται ανάλογα με το έργο

Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την απόφαση εφαρμογής διαδικασίας για την Ομάδα 2, συνδυαστικά ανά έργο:

				Έργο 2 (14-15)		**Σύνολο**
Έργο 1 (5-15)			Καμία διαδικασία	Αυθόρμητα	Μετά από παρ-έμβαση	
Καμία διαδικασία	**Έργο 3 (5-5)**	Καμία διαδικασία	0	4 8,5%	1 2,1%	5 10,6%
		Αυθόρμητα	0	7 14,9%	6 12,8%	13 27,7%
		Μετά από παρέμβαση	0	3 6,4%	7 14,9%	10 21,3%
		Σύνολο	0	14 29,8%	14 29,8%	28 59,6%
Αυθόρμητα	**Έργο 3 (5-5)**	Καμία διαδικασία	0	0	0	0
		Αυθόρμητα	0	3 6,4%	0	3 6,4%
		Μετά από παρέμβαση	0	0	0	0
		Σύνολο	0	3 6,4%	0	3 6,4%
Μετά από παρέμβαση	**Έργο 3 (5-5)**	Καμία διαδικασία	0	1 2,1%	1 2,1%	2 4,3%
		Αυθόρμητα	0	5 10,6%	5 10,6%	10 21,3%
		Μετά από παρέμβαση	0	2 4,3%	2 4,3%	4 8,7%
		Σύνολο	0	8 17%	8 17%	16 34%

Πίνακας 3: Απόφαση για εφαρμογή διαδικασίας από την Ομάδα 2 (2013)

Με βάση τα δεδομένα που εμφανίζονται στον Πίνακα 3, παρατηρούμε ότι στην Ομάδα 2, αντίθετα με την Ομάδα 1, όλα τα νήπια εφάρμοσαν διαδικασία σε τουλάχιστον ένα από τα έργα. Μάλιστα, το 36,2% εφάρμοσε διαδικασία σε όλα τα έργα.

Το 59,6% δεν εφάρμοσε καμία διαδικασία στο Έργο 1, ενώ το 34% το έκανε μετά από παρέμβαση, ενδεχομένως ως προσαρμογή στην επιθυμία της ερευνήτριας. Στο Έργο 2, όλα τα νήπια της Ομάδας 2 εφαρμόζουν διαδικασία, είτε αυθόρμητα (53,2%), είτε μετά από παρέμβαση (46,8%). Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι

το 10,6% της Ομάδας 2 εφάρμοσε διαδικασία μόνο στο Έργο 2, όπου αυτό ήταν απολύτως απαραίτητο. Τέλος, στο Έργο 3, το 84,4% της Ομάδας 2 εφάρμοσε διαδικασία, είτε αυθόρμητα (55,4%), είτε μετά από παρέμβαση (29%).

Με το κριτήριο χ^2 εξετάσαμε τη σχέση ανάμεσα στα έργα και την απόφαση για εφαρμογή διαδικασίας. Προέκυψε ότι δεν υπάρχει σημαντική συσχέτιση για κανέναν από τους συνδυασμούς έργων [Έργα 1-2: $\chi^2(2)= 2,820$, $p>0,05$, Έργα 1-3: $\chi^2(2)=3,652$, $p>0,05$, Έργα 2-3: $\chi^2(2)= 2.864$, $p>0,05$]. Δηλαδή, η απόφαση για εφαρμογή διαδικασίας των νηπίων της Ομάδας 2 διαφοροποιείται ανάλογα με το έργο.

Απόφαση για εφαρμογή διαδικασίας: Σύγκριση των δύο ομάδων

Με το κριτήριο χ^2 εξετάσαμε τη σχέση ανάμεσα στην Ομάδα (1, 2) και την απόφαση για εφαρμογή διαδικασίας σε κάθε έργο χωριστά. Προέκυψε στατιστικά σημαντική συσχέτιση μόνο για το Έργο 2 [Έργο 1: $\chi^2(2)= 2,001$, $p>0,05$, Έργο 2: $\chi^2(2)= 46,828$, $p<0,001$, Έργο 3: $\chi^2(2)=3,002$, $p>0,05$]. Δηλαδή, οι δύο ομάδες διαφοροποιούνται στην περίπτωση του Έργου 2, όπου είναι απαραίτητη η εφαρμογή διαδικασίας. Στο Έργο 1, όπου η διαφορά πλήθους είναι πολύ μεγάλη η πλειοψηφία των νηπίων δεν χρησιμοποιεί καμία διαδικασία. Στο δε Έργο 3, όπου έχουμε μικρό πλήθος και η κατάσταση είναι πιο οικεία και παρόμοια με τη μεγάλη πλειοψηφία των αντίστοιχων δραστηριοτήτων που γίνονται συνήθως στο Νηπιαγωγείο, έχουμε μια παρόμοια συμπεριφορά, όπου το 43,7% των παιδιών της Ομάδας 1 και το 52,4% των παιδιών της Ομάδας 2 εφαρμόζουν αυθόρμητα διαδικασία σύγκρισης.

Σχηματισμοί

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζεται η συχνότητα και το ποσοστό των σωστών και των λανθασμένων απαντήσεων στα 6 έργα του δεύτερου τύπου, δηλαδή στους σχηματισμούς, συνολικά (για λόγους οικονομίας χώρου). Αναφερόμαστε στις απαντήσεις των παιδιών πριν οποιαδήποτε παρέμβαση από τις ερευνήτριες.

Ομάδα	Λάθος	Σωστό	Καμία Απάντηση	Σύνολο
1	147	369	6	522
(N=87)	28,2%	70,7%	1,1%	100%
2	26	256	0	282
(N=47)	9,2%	90,8%	0%	100%

Πίνακας 4: Συχνότητα και ποσοστό των απαντήσεων στο σύνολο των 6 έργων για τους σχηματισμούς,

Η Ομάδα 2 απάντησε σωστά στα έργα με μεγαλύτερη συχνότητα από την Ομάδα 1. Η συσχέτιση απάντησης (σωστή/ λανθασμένη) με την ομάδα (1,2) ήταν στατιστικά σημαντική, $\chi^2(2)= 39.8724$, $p<0,001$. Αξίζει να σημειωθεί ότι το 70,2%

της Ομάδας 2 απάντησε συστηματικά σωστά και στα 6 έργα, έναντι του 58,6% της Ομάδας 1. Επιπλέον, το 23% της Ομάδας 1 έδωσε λανθασμένη απάντηση και στα 6 έργα, ενώ αυτό δεν παρατηρήθηκε για κανένα παιδί της Ομάδας 2.

Επισημαίνουμε επίσης ότι όλα τα παιδιά της Ομάδας 2 αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους είτε αναφερόμενα στο πλήθος (ενδεχομένως, αναγνωρίζοντάς το άμεσα), είτε καταμετρώντας. Η 1-1 αντιστοίχιση χρησιμοποιήθηκε 26 φορές (5% των αιτιολογήσεων σε όλα τα έργα) από την Ομάδα 1. Το 39,8% των απαντήσεων της Ομάδας 1 δόθηκαν χωρίς εξήγηση, με άσχετη εξήγηση, ή με συνολική εκτίμηση (π.χ. «Το είδα»). Όπως και στα έργα του πρώτου τύπου, όταν τα παιδιά της Ομάδας 1 εφάρμοσαν κάποια διαδικασία, αυτή ήταν κατά κύριο λόγο η καταμέτρηση.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Συγκρίναμε δύο ομάδες νηπίων, στο τέλος της φοίτησής τους στο νηπιαγωγείο, υπό δύο διαφορετικά αναλυτικά, καταρχήν ως προς τη διαδικασία που επιλέγουν προκειμένου να συγκρίνουν δύο σύνολα ως προς το πλήθος. Τα αποτελέσματά μας έδειξαν ότι η 1-1 αντιστοίχιση χρησιμοποιήθηκε ελάχιστα, παρά το γεγονός ότι η σημασία της τονίζεται και στα δύο αναλυτικά, με πολύ μεγαλύτερη έμφαση στο παλιότερο. Όταν τα νήπια επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν κάποια διαδικασία, εφάρμοσαν την καταμέτρηση. Αυτό ίσχυσε και για την Ομάδα 1, ακόμα και στα έργα που ο πληθικός αριθμός των συνόλων υπερέβαινε το αριθμητικό εύρος στο οποίο κινήθηκαν στη διάρκεια της φοίτησής τους. Φαίνεται ότι τα νήπια δεν οικειοποιήθηκαν την 1-1 αντιστοίχιση ως διαδικασία σύγκρισης συνόλων ως προς το πλήθος. Ενδεχομένως, η εισαγωγή της καταμέτρησης προκάλεσε την εγκατάλειψη της 1-1 αντιστοίχισης. Μια διαφορετική ερμηνεία είναι ότι τα νήπια ήταν ήδη εξοικειωμένα με την καταμέτρηση στο πλαίσιο του εξωσχολικού τους περιβάλλοντος και η 1-1 αντιστοίχιση ήταν μια διαδικασία με ενδοσχολική μόνο αξία.

Τα νήπια της Ομάδας 2 επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν διαδικασία σύγκρισης συχνότερα από την Ομάδα 1. Επιπλέον, επέδειξαν μεγαλύτερη ευελιξία ανάλογα με την κατάσταση που είχαν να αντιμετωπίσουν, όπως φάνηκε τόσο από τη σύγκριση των έργων για κάθε ομάδα, όσο και από τη σύγκριση των ομάδων ανά έργο. Τα νήπια της Ομάδας 1 επέλεξαν τη χρήση διαδικασίας όχι στο Έργο 2, όπου αυτό ήταν απαραίτητο, αλλά στο Έργο 3, όπου το πλήθος των συνόλων ήταν στο αριθμητικό εύρος που προέβλεπε το αναλυτικό τους πρόγραμμα.

Μια πιθανή ερμηνεία των αποτελεσμάτων αυτών είναι ότι η έμφαση που δίνει το τρέχον αναλυτικό (ΔΕΠΣ-ΑΠΣ) στην ανάπτυξη δεξιοτήτων επικοινωνίας στο πλαίσιο των μαθηματικών, καθώς και στην ανάπτυξη διαδικασιών ελέγχου ή επαλήθευσης, συμβάλλει στην εκλέπτυνση της μαθηματικής συμπεριφοράς των νηπίων. Πράγματι, τα έργα του πρώτου τύπου θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως καταστάσεις οι οποίες απαιτούν τη χρήση μιας διαδικασίας είτε αυθόρμητα, για έλεγχο, είτε μετά από παρέμβαση, ως εξήγηση της απάντησης. Ασφαλώς, δεν μπορεί να αποκλείσει κανείς και την ενδεχόμενη επιρροή ευρύτερων κοινωνικο-

πολιτισμικών αλλαγών που συνέβησαν στο χρονικό διάστημα που μεσολάβησε ανάμεσα σε αυτές τις γενιές νηπίων.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το εύρημα ότι τα παιδιά της Ομάδας 2 τα πήγαν καλύτερα και στα έργα του δεύτερου τύπου, τα οποία αποτελούν βασικό στοιχείο του παλιότερου αναλυτικού προγράμματος. Επιπλέον, τα νήπια της Ομάδας 1 δε χρησιμοποίησαν ούτε σε αυτή την περίπτωση την 1-1 αντιστοίχιση, ενώ δε χρησιμοποίησαν συστηματικά ούτε την καταμέτρηση, παρά το γεγονός ότι το πλήθος των στοιχείων (4) ήταν στο πλαίσιο των δυνατοτήτων τους.

Θα θέλαμε να επισημάνουμε, ωστόσο, ότι παρά την καλύτερη επίδοση της Ομάδας 2, το 30% των νηπίων αυτών δίνει τουλάχιστον μία λανθασμένη απάντηση στα έργα του δεύτερου τύπου. Το γεγονός αυτό δηλώνει ότι το ζήτημα της αναγνώρισης ότι η διάταξη των στοιχείων ενός συνόλου στο χώρο δε σχετίζεται με το πλήθος των στοιχείων παραμένει ένα ζητούμενο για αρκετά παιδιά αυτής της ηλικίας, ανεξάρτητα από την ικανότητά τους στην καταμέτρηση.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Από το 2012-2013 άρχισε η πιλοτική εφαρμογή νέου Αναλυτικού Προγράμματος. Τα νηπιαγωγεία που συμμετείχαν στην έρευνα ακολουθούσαν το ΔΕΠΣ-ΑΠΣ2.

2. Οι συγγραφείς θα ήθελαν να ευχαριστήσουν την Ελένη Μουλά, Νηπιαγωγό, και την Ευμορφία Παλιανοπούλου, φοιτήτρια του Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για τη βοήθειά τους στη συλλογή δεδομένων για την παρούσα έρευνα, στις δύο χρονικές περιόδους αντίστοιχα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bideaud, J., Meljac, C., & Fischer, J.P. (1991). *Les chemins du nombre*. Lille, France: *Presses Universitaires du Septentrion*.

Carey, S. (2009). *The origin of concepts*, Oxford: Oxford University Press

Muldoon, K., Lewis, C. & Freeman, N. (2009). Why set-comparison is vital in early number learning. *Trends in Cognitive Sciences*, *13*(5), 203-208.

ΑΠΠΑ (Αναλυτικό Πρόγραμμα Προσχολικής Αγωγής), Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΦΕΚ 208/26-9-1989, τχ Α

ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ (Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών), Παιδαγωγικό Ινστιτούτο,ΦΕΚ 1366/18-10-2001, τχ. Β.

Βενιζέλου, Γ., Καλαμπαλίκη, Ε., Καλοστύπη, Α., Κονταξάκης, Γ., Λαυρεντάκη, Φ., Μαυροειδής, Γ., Πατρίκη, Α. (1990). *Βιβλίο δραστηριοτήτων για το νηπιαγωγείο – βιβλίο νηπιαγωγού*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Δαφέρμου, Χ., Κουλούρη, Π., Μπασαγιάννη, Ε. (2006). *Οδηγός Νηπιαγωγού: Εκπαιδευτικοί σχεδιασμοί-Δημιουργικά περιβάλλοντα μάθησης*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ

Κυριακούλλα Ευαγγέλου[1] & Ιλιάδα Ηλία[2]

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

kevang01@ucy.ac.cy[1], iliada@ucy.ac.cy[2]

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα έρευνα διερευνά τις ικανότητες των παιδιών προσχολικής ηλικίας στην αντιληπτική και λειτουργική σύλληψη γεωμετρικών σχημάτων, καθώς και τη διαφοροποίηση που μπορεί να παρουσιάζει η επιτυχία των παιδιών στους δύο αυτούς τύπους σύλληψης. Αναπτύχθηκε και χορηγήθηκε ένα δοκίμιο με ποικίλα έργα αντιληπτικής και λειτουργικής σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων σε 41 παιδιά προσχολικής ηλικίας. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η αναδιοργάνωση σχήματος είναι μια σύνθετη πτυχή της λειτουργικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος για τα παιδιά, ενώ η αντιληπτική ικανότητα εμφανίζεται να διακρίνεται σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες, με μικρότερο, παρόμοιο ή και μεγαλύτερο βαθμό δυσκολίας από πτυχές της λειτουργικής κατανόησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος είναι μια βασική περιοχή της γεωμετρίας η οποία αποτελεί σημαντικό συστατικό στοιχείο της γνωστικής ανάπτυξης (π.χ.Duval, 1995, 1999).

Παρά την έμφαση που δίνεται στη βιβλιογραφία για τις γεωμετρικές ικανότητες των μικρών παιδιών (π.χ., Sarama & Clements, 2009), ελάχιστες είναι οι έρευνες που έχουν αξιολογήσει τις ικανότητες των παιδιών στην κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος. Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος της ερευνητικής μας προσπάθειας για την εξέταση της δομής της κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος στα παιδιά προσχολικής ηλικίας. Συγκεκριμένα, σε αυτό το κείμενο παρουσιάζεται η πιλοτική εφαρμογή του ερευνητικού εργαλείου που έχει αναπτυχθεί για αυτό το σκοπό στη βάση της γνωστικής θεωρίας του Duval (1995, 1999) για τη γεωμετρική σκέψη.

Ο Duval (1995, 1999) διέκρινε τέσσερις τύπους σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος: την αντιληπτική, τη λειτουργική, τη διαδικαστική και τη λεκτική. Η αντιληπτική σύλληψη αναφέρεται στην αναγνώριση του σχήματος στο χώρο ή στο βάθος. Στην πραγματικότητα, η αντίληψη του καθενός για το τι δείχνει το σχήμα καθορίζεται από τους σχηματικούς νόμους οργάνωσης και τις εικονικές νύξεις. Η αντιληπτική σύλληψη δείχνει την ικανότητα του ατόμου να ονομάζει το σχήμα και την ικανότητα αναγνώρισης των υπο-σχημάτων του. Οι Sarama και Clements (2009) κάνουν αναφορά για μία ακόμη πτυχή της αντιληπτικής σύλληψης, η οποία σχετίζεται με την ικανότητα του ατόμου να εντοπίζει σχήματα σε γεωμετρικές

συνθέσεις. Η ικανότητα αυτή διακρίνεται σε δύο άλλες υποκατηγορίες, τις οποίες οι ίδιοι ερευνητές διαχωρίζουν ως προς το βαθμό δυσκολίας. Συγκεκριμένα, η μία υποκατηγορία αναφέρεται στην αναγνώριση σχήματος σε γεωμετρική σύνθεση στην οποία η επιφάνεια του σχήματος δεν διαπερνάται από άλλα ευθύγραμμα τμήματα και η άλλη στην αναγνώριση σχήματος που η επιφάνειά του διαπερνάται από ευθύγραμμα τμήματα κάποιας άλλης δομής της σύνθεσης.

Η λειτουργική σύλληψη γεωμετρικού σχήματος εξαρτάται από τους διάφορους τύπους τροποποίησης του σχήματος: τη μερεολογική (mereologic) τροποποίηση, την οπτική και την αλλαγή θέσης.

Η διαδικαστική σύλληψη γεωμετρικών σχημάτων (Duval, 1995, 1999) απαιτείται κατά την κατασκευή του σχήματος ή κατά την περιγραφή του τρόπου κατασκευής του σχήματος. Η λεκτική σύλληψη σχετίζεται με το γεγονός ότι οι μαθηματικές σχέσεις ενός σχήματος δεν μπορούν να προσδιοριστούν μόνο από την αντιληπτική σύλληψή του, αλλά απαιτείται και η λεκτική κατανόηση. Από τα πιο πάνω, είναι εμφανές ότι τα παιδιά στην προσχολική ηλικία τείνουν να έχουν ευκολότερα πρόσβαση στην αντιληπτική και λειτουργική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος παρά στη λεκτική και διαδικαστική σύλληψη οι οποίες προϋποθέτουν μια πιο θεωρητική και αφηρημένη προσέγγιση για την έννοια του σχήματος.

Παρόλα αυτά, συχνά η λειτουργική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος συχνά αποκλείεται από τις εμπειρίες που προσφέρει στα παιδιά η νηπιοσχολική εκπαίδευση. Όμοια και στον ερευνητικό χώρο, υπάρχει περιορισμένος αριθμός ερευνών που έχουν ασχοληθεί με διαδικασίες που εμπίπτουν στη λειτουργική κατανόηση.

Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα έρευνα έχει σκοπό να διερευνήσει τις ικανότητες των παιδιών νηπιοσχολικής ηλικίας στην αντιληπτική και λειτουργική σύλληψη γεωμετρικών σχημάτων, καθώς και τη διαφοροποίηση που μπορεί να παρουσιάζει η επιτυχία των παιδιών στους δύο αυτούς τύπους σύλληψης σχημάτων. Ειδικότερα, η έρευνα αυτή καλείται να απαντήσει τα πιο κάτω ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποια είναι η επίδοση των παιδιών στην αντιληπτική σύλληψη γεωμετρικού σχήματος και στις επιμέρους πτυχές της;
2. Ποιες είναι οι παράμετροι που διαφοροποιούν το βαθμό δυσκολίας των έργων αντιληπτικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος;
3. Ποια είναι η επίδοση των παιδιών στη λειτουργική σύλληψη γεωμετρικού σχήματος και στις επιμέρους πτυχές της;
4. Ποιες είναι οι παράμετροι που διαφοροποιούν το βαθμό δυσκολίας των έργων λειτουργικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος;

5. Ποιες διαφορές παρουσιάζουν οι επιδόσεις των παιδιών ανάμεσα στην αντιληπτική σύλληψη και στη λειτουργική σύλληψη γεωμετρικών σχημάτων και στις επιμέρους πτυχές τους;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

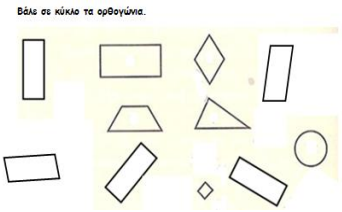
Ερευνητικό εργαλείο

Στη βάση των θεωρητικών προσεγγίσεων του Duval (1995, 1999) και των Sarama και Clements (2009) αλλά και των έργων που οι ίδιοι πρότειναν ή χρησιμοποίησαν στις έρευνές τους, αναπτύχθηκε ένα δοκίμιο όπου πέρα από την αντιληπτική σύλληψη δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων, εξετάζει τη λειτουργική αντίληψη σχημάτων, μέσα από τη νοερή τροποποίηση των σχημάτων, από τα μικρά παιδιά, όπως είναι η σύνθεση, η αποσύνθεση και η αναδιαμόρφωση σχημάτων. Αυτές οι λειτουργίες στηρίζονται στην παρουσία γεωμετρικών μετασχηματισμών, δηλαδή στη μετατόπιση και περιστροφή του σχήματος, για τους οποίους τα παιδιά είναι σε θέση να αναπτύξουν αρχικές ιδέες (Sarama & Clements, 2009). Επιπλέον, τα έργα διαφοροποιούνται και ως προς την ύπαρξη εσωτερικών διαχωριστικών γραμμών, που αποτελούν οπτικές νύξεις για τα παιδιά και ενισχύουν τις αντιληπτικές τους ικανότητες (Sarama & Clements, 2009). Συνεπώς, η παρουσία και η απουσία τους διαφοροποιεί το βαθμό δυσκολίας.

Τα έργα του δοκιμίου διακρίνονται σε τέσσερα μέρη: (α) έργα αναγνώρισης σχημάτων σε συλλογές διακριτών σχημάτων(βλ. Πίνακα 1,α), (β) έργα αναγνώρισης «εμφανών» σχημάτων σε γεωμετρικές συνθέσεις, όπως σχήματα των οποίων η επιφάνεια περικλείεται από δικά τους ευθύγραμμα τμήματα τα οποία δεν διαχωρίζονται και δεν συμπίπτουν με πλευρές άλλων σχημάτων, κυρτά ή συμμετρικά σχήματα, καθώς και σχήματα σε πρωτοτυπικές θέσεις (Sarama & Clements, 2009)(βλ. Πίνακα 1,β) και (γ) έργα αντιληπτικής διάκρισης «μη εμφανών» γεωμετρικών σχημάτων σε γεωμετρικές συνθέσεις, όπως είναι σχήματα με πλευρές που συμπίπτουν ή αποτελούν μέρη ευθύγραμμων τμημάτων «εμφανών» σχημάτων στη σύνθεση ή μη κυρτά ή/και μη συμμετρικά σχήματα, καθώς και σχήματα σε μη πρωτοτυπικές θέσεις (Sarama & Clements, 2009)(βλ. Πίνακα 1,γ), (δ) έργα λειτουργικής σύλληψης του σχήματος και ειδικότερα μερεολογικής τροποποίησης, τα οποία περιλαμβάνουν έργα νοερής σύνθεσης, αποσύνθεσης και αναδιοργάνωσης των σχημάτων καθώς και έργα συμπλήρωσης μέρους της επιφάνειας γνωστού και άγνωστου γεωμετρικού σχήματος (βλ. Πίνακα 1,δ-ζ).

Έργα αντιληπτικής σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων

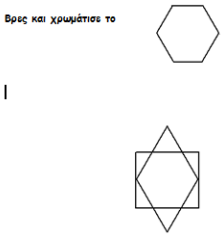
α.



β.

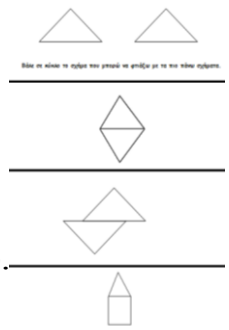


γ.

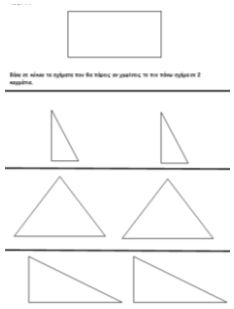


Έργα λειτουργικής σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων

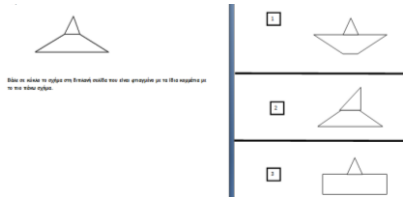
δ.



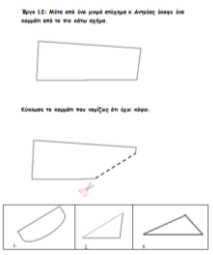
ε.



στ.



ζ.



Πίνακας 1. Έργα αναγνώρισης (α) σχήματος σε συλλογή διακριτών σχημάτων, (β) «εμφανούς» σχήματος σε γεωμετρικές συνθέσεις, (γ) «μη εμφανούς» σχήματος σε γεωμετρική σύνθεση και Έργα (δ) σύνθεσης με διαχωριστικές γραμμές και περιστροφή, (ε) αποσύνθεσης χωρίς διαχωριστικές γραμμές και περιστροφή, (στ) αναδιοργάνωσης με περιστροφή, (ζ) συμπλήρωσης αγνώστου σχήματος.

Δείγμα και διαδικασία συλλογής δεδομένων

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από 41 παιδιά προσχολικής ηλικίας (4 -5 χρονών) τα οποία φοιτούν σε Δημόσια και Ιδιωτικά νηπιαγωγεία της Κύπρου. Η χορήγηση του δοκιμίου έγινε σε δύο φάσεις από δύο ερευνητές σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων. Η συμπλήρωση του δοκιμίου γινόταν ατομικά.

Κριτήρια βαθμολόγησης των έργων και στατιστική ανάλυση

Σε όλα τα έργα, κάθε ορθή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 ενώ κάθε λανθασμένη απάντηση με 0. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι κωδικοποιήθηκαν όλες οι λανθασμένες απαντήσεις των παιδιών, οι οποίες όμως δεν παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία λόγω του περιορισμού στην έκταση του κειμένου. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με το στατιστικό πακέτο SPSS. Χρησιμοποιήθηκε η περιγραφική ανάλυση των δεδομένων, όπως επίσης και η σύγκριση των μέσων όρων με t-test.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αντιληπτική σύλληψη γεωμετρικού σχήματος

Η συνολική μέση επίδοση των παιδιών στα έργα αντιληπτικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος ήταν .54(SD=.10,min =.31,max =.72). Η μέση επίδοση των παιδιών στις επιμέρους πτυχές της αντιληπτικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος,

δηλαδή στην αναγνώριση σχήματος σε συλλογές διακριτών σχημάτων, καθώς και στην αναγνώριση εμφανούς και μη εμφανούς σχήματος σε γεωμετρικές συνθέσεις, παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.Ψηλότερη είναι η επίδοση των παιδιών στα έργα αναγνώρισης γεωμετρικού σχήματος σε συλλογές διακριτών σχημάτων (μέση τιμή=.72, SD=.08, min =.55, max =.86). Στα έργα αναγνώρισης εμφανών σχημάτων σε γεωμετρικές συνθέσεις τα παιδιά παρουσιάζουν χαμηλότερη επίδοση (μέση τιμή=.61,SD=.15,min =.00,max =1.00), ενώ αρκετά χαμηλότερη είναι η επίδοση των παιδιών στα έργα αναγνώρισης μη εμφανών σχημάτων σε γεωμετρικές συνθέσεις (μέση τιμή=.30, SD=.17, min =.00, max =.75).

	Έργα	N	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	t	p.
Ζεύγος 1	Αναγνώριση σχήματος : Σε συλλογή διακριτών σχημάτων-Μη εμφανούς σε γεωμετρική σύνθεση	41	.72 .30	.08 .17	15.28	.00*
Ζεύγος 2	Σε συλλογή διακριτών σχημάτων-Εμφανούς σε γεωμετρική σύνθεση	41	.72 .62	.08 .15	4.59	.00*
Ζεύγος 3	Μη εμφανούς σε γεωμετρική σύνθεση-Εμφανούς σε γεωμετρική σύνθεση	41	.30 .61	.17 .15	-10.42	.00*

Πίνακας 2. Διαφορές στις επιδόσεις των παιδιών ανάμεσα στις ομάδες έργων αντιληπτικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2, όλες οι επιμέρους πτυχές της αντιληπτικής σύλληψης σχήματος παρουσιάζουν μεταξύ τους στατιστικά σημαντικές διαφορές ($p<.05$). Διαπιστώνεται επομένως ότι η αναγνώριση ενός σχήματος σε γεωμετρική σύνθεση (βλ. Πίνακα 1,β-γ) έχει αυξημένο βαθμό δυσκολίας σε σχέση με την αναγνώριση ενός σχήματος σε συλλογή διακριτών σχημάτων. Επιπλέον, η δυσκολία αυξάνεται πολύ περισσότερο όταν το σχήμα προς αναγνώριση σε μια γεωμετρική σύνθεση δεν είναι εμφανές (βλ. Πίνακα 1,γ).

Λειτουργική σύλληψη γεωμετρικού σχήματος

Όσον αφορά τη λειτουργική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, η συνολική μέση επίδοση των παιδιών ήταν .54 (SD=.15, min = .14, max = .79). Αναλυτικότερα, τα παιδιά παρουσίασαν την υψηλότερη επίδοση σε έργα αποσύνθεσης (μέση τιμή=.59, SD=.22, min = .13, max = .94) (βλ. Πίνακα 1,ε), ενώ η χαμηλότερη επίδοση παρουσιάστηκε σε έργα αναδιοργάνωσης (βλ. Πίνακα 1,στ) με τη μέση επίδοση να είναι ίση με .43 (SD=.18, min = .00, max = .75). Ψηλή παρουσιάστηκε να είναι η

μέση επίδοση των παιδιών σε έργα συμπλήρωσης σχήματος (βλ. Πίνακα 1,ζ) (μέση τιμή=.57, SD=.24, min = .00, max = 1.00) καθώς και στα έργα σύνθεσης (βλ. Πίνακα 1,δ) (μέση τιμή = .56, SD=.16, min = .25 max = .88). Οι διαφορές μεταξύ των τεσσάρων πτυχών της λειτουργικής σύλληψης δεν ήταν στατιστικά σημαντικές, με εξαίρεση τις διαφορές των έργων αναδιοργάνωσης σχήματος σε σχέση με τα έργα των υπόλοιπων πτυχών που παρουσιάστηκαν να είναι όλες τους στατιστικά σημαντικές ($p<0.05$)

	Έργα	N	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	t	p.
Ζεύγος 1	Σύνθεσης με: Γ και Π – Π και ΧΓ	41	.49 .45	.25 .40	.51	.61
Ζεύγος 2	Γ και Π – Γ και ΧΠ	41	.49 .67	.25 .25	-3.73	.00*
Ζεύγος 3	Γ και Π- ΧΓ και ΧΠ	41	.49 .62	.25 .30	-2.21	.03*
Ζεύγος 4	Π και ΧΓ – Γ και ΧΠ	41	.45 .67	.40 .25	-3.07	.00*
Ζεύγος 5	Π και ΧΓ – ΧΓ και ΧΠ	41	.45 .62	.40 .30	-2.07	.04*
Ζεύγος 6	Γ και ΧΠ ΧΓ και ΧΠ	41	.67 .62	.25 .30	.88	.38
Ζεύγος 7	Αποσύνθεσης με: Γ και Π- ΧΓ και Π	41	.66 .55	.28 .38	1.70	.09
Ζεύγος 8	Γ και Π- Γ και ΧΠ	41	.66 .63	.28 .28	.65	.52
Ζεύγος 9	Γ και Π- ΧΓ και ΧΠ	41	.66 .52	.28 .28	3.03	.00*
Ζεύγος 10	ΧΓ και Π- Γ και ΧΠ	41	.55 .63	.38 .28	-1.48	.15
Ζεύγος	ΧΓ και Π-	41	.55	.38	.51	.61

11	ΧΓ και ΧΠ		.52	.28		
Ζεύγος 12	Γ και ΧΠ – ΧΓ και ΧΠ	41	.63 .52	.28 .28	2.26	.03*
Ζεύγος 13	Αναδιοργάνωση Γ και Π Γ και ΧΠ	41	.45 .41	.25 .22	.94	.35
Ζεύγος 14	Συμπλήρωση Άγνωστου - Γνωστού σχημ.	41	.46 .68	.34 .25	-3.81	.00*

Πίνακας 3. Διαφορές στις επιδόσεις των παιδιών ανάμεσα στις ομάδες έργων λειτουργικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος. Σημ.: (Γ=Διαχωριστικές Γραμμές, ΧΓ=Χωρίς διαχωριστικές γραμμές, Π=Περιστροφή, ΧΠ=Χωρίς Περιστροφή)

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 3, ο γεωμετρικός μετασχηματισμός της περιστροφής παρουσιάστηκε να προκαλεί δυσκολίες στα παιδιά στα έργα σύνθεσης, σε αντίθεση με τα έργα αποσύνθεσης που δεν αποτέλεσε την κυριότερη πηγή δυσκολίας. Συγκεκριμένα, στη διαδικασία της αποσύνθεσης σχήματος σε υποσχήματα τα παιδιά εμφανίστηκαν να δυσκολεύονται σε κάποια έργα όταν το σχήμα που επρόκειτο να αποσυνδεθεί δεν είχε εσωτερικές διαχωριστικές γραμμές και παρουσιαζόταν ως ένα ενιαίο σχήμα (βλ. Πίνακα 1,ε). Στα έργα συμπλήρωσης η οικειότητα των παιδιών με το σχήμα αποτέλεσε αιτία πρόκλησης δυσκολιών, εφόσον τα παιδιά παρουσιάστηκαν να δυσκολεύονται περισσότερο όταν καλούνταν να συμπληρώσουν ένα άγνωστο σχήμα (βλ. Πίνακα 1,ζ) παρά ένα σχήμα γνωστό σε αυτά.

Διαφορές ανάμεσα στην αντιληπτική και λειτουργική σύλληψη γεωμετρικού σχήματος

Η ανάλυση των δεδομένων παρουσιάζει τα παιδιά να υπερέχουν ελάχιστα στα έργα αντιληπτικής σύλληψης (μέση τιμή= .54, SD= .10) σε σχέση με τα έργα λειτουργικής σύλληψης (μέση τιμή= .54, SD=.15). Εν τούτοις η διαφορά αυτή δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Αντιληπτική σύλληψη / Λειτουργική σύλληψη	Αναγνώριση σχήματος σε συλλογή γεωμετρικών σχημάτων (M.O.= .72, T.A. =0.08)			Αναγνώριση εμφανούς σχήματος σε γεωμετρική σύνθεση (M.O.=0.61,T.A.= 0.15)			Αναγνώριση μη εμφανούς σχήματος σε γεωμετρική σύνθεση (M.O.=0.30,T.A.=0.17)		
	Διαφορά	t	p	Διαφορά	t	p	Διαφορά	t	p
Σύνθεση (M.O.=0.56,T.A.=0.16)	.16	5.70	.00*	.05	1.67	.10	-.26	-9.60	.00*

Αποσύνθεση (M.O.=0.59,T.A.=0.22)	.13	3.77	.00*	.02	.53	.60	-.29	-8.96	.00*
Αναδιοργάνωση (M.O.=.43,T.A.= 0.19)	.29	10.01	.00*	.18	5.01	.00*	-.13	-.466	.00*
Συμπλήρωση (M.O.=0.57,T.A.=0.2)	.15	3.91	.00*	.04	1.10	.29	-.27	-7.02	.00*

Πίνακας 4. Διαφορές ανάμεσα στις επιδόσεις των παιδιών στην αντιληπτική σύλληψη και στη λειτουργική σύλληψη γεωμετρικών σχημάτων

Ο πίνακας 4 παρουσιάζει τις διαφορές ανάμεσα στις επιμέρους πτυχές της αντιληπτικής και λειτουργικής σύλληψης. Η επιτυχία των παιδιών στην αναγνώριση σχημάτων σε συλλογές από διακριτά γεωμετρικά σχήματα φαίνεται να είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την επιτυχία τους σε όλες τις κατηγορίες έργων λειτουργικής σύλληψης. Αυτό δεν φαίνεται να ισχύει για τις άλλες πτυχές της αντιληπτικής σύλληψης. Η επίδοση των παιδιών στην αναγνώριση εμφανών σχημάτων σε γεωμετρική σύνθεση είναι σημαντικά ψηλότερη μόνο σε σχέση με την αναδιοργάνωση σχημάτων, ενώ η επίδοσή τους στην αναγνώριση μη εμφανών σχημάτων σε γεωμετρική σύνθεση είναι σημαντικά χαμηλότερη σε σύγκριση με όλες τις κατηγορίες έργων της λειτουργικής σύλληψης. Τα αποτελέσματα αυτά εγείρουν έντονα ερωτήματα όσον αφορά τη σχέση των διαδικασιών που ενεργοποιούν τα παιδιά στα έργα αυτά.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η έρευνα αυτή ενισχύει απόψεις άλλων ερευνητών (π.χ. Sarama & Clements, 2009) που τονίζουν ότι η κατάκτηση των πτυχών της αντιληπτικής και λειτουργικής σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων είναι μια αναπτυξιακή διαδικασία.

Συγκεκριμένα, στα έργα της αντιληπτικής σύλληψης παρουσιάστηκε μια κλίμακα δυσκολίας κατατάσσοντας τα έργα αναγνώρισης σε γεωμετρική συλλογή ως την ευκολότερη πτυχή, ενώ την αναγνώριση μη εμφανούς σχήματος σε γεωμετρική σύνθεση, ως τη δυσκολότερη πτυχή. Συνεπώς, ο βαθμός διάκρισης ενός σχήματος σε μια γεωμετρική σύνθεση αποτελεί την πιο σημαντική παράμετρο δυσκολίας στα έργα αντιληπτικής κατανόησης. Η δυσκολία αυτή θα μπορούσε να ερμηνευθεί από το γεγονός ότι η ικανότητα να διαβάσει ένα παιδί ένα τέτοιο διάγραμμα δεν περιορίζεται μόνο στις αντιληπτικές του ικανότητες, αλλά απαιτεί τη δημιουργία μίας αλληλοσυσχέτισης ανάμεσα στις αντιληπτικές του ικανότητες και στην αφαιρετική του σκέψη (Yakimanskaya,1970).

Όσον αφορά τις τέσσερις πτυχές της λειτουργικής κατανόησης, η στατιστική ανάλυση παρουσίασε την αναδιοργάνωση σχήματος να είναι μια από τις πιο απαιτητικές πτυχές της λειτουργικής κατανόησης για τα παιδιά. Αυτό, ίσως οφείλεται στο ότι η πτυχή αυτή επιβάλλει την ανάγκη για δημιουργία, διατήρηση και χειρισμό

της νοερής εικόνας ενός σχήματος και δημιουργίας μιας νέας στην οποία θα συνδυάζονται τα υποσχήματα που το συναποτελούν (Sarama & Clements, 2009).

Παρόλα αυτά, στατιστικά σημαντικές διαφορές παρουσιάστηκαν εντός των ομάδων έργων που αφορούσαν την κάθε πτυχή της λειτουργικής κατανόησης. Διαφορετικοί παράμετροι εμφανίστηκαν να διαφοροποιούν το βαθμό δυσκολίας σε κάθε ομάδα έργων της λειτουργικής κατανόησης. Στα έργα σύνθεσης η περιστροφή παρουσιάστηκε να δυσκολεύει τα παιδιά. Όπως αναφέρουν οι Sarama και Clements (2009), για τη σύνθεση σχημάτων η ενστικτωδώς αναγνώριση ενός σχήματος που ανήκει σε μια σύνθεση με την ενεργοποίηση αντιληπτικών διαδικασιών είναι σαφώς μια ευκολότερη στρατηγική και λιγότερο απαιτητική, από ένα έργο σύνθεσης στο οποίο απαιτούνται γεωμετρικοί μετασχηματισμοί. Όμοια, και στα έργα αποσύνθεσης, η αποσύνθεση σχημάτων με εσωτερικές γραμμές φάνηκε να έχει μικρότερο βαθμό δυσκολίας σε σύγκριση με τα αντίστοιχα έργα στα οποία η γεωμετρική σύνθεση που επρόκειτο να διασπαστεί παρουσιαζόταν ενιαία λόγω της απουσίας εσωτερικών διαχωριστικών γραμμών. Σημαντικές δυσκολίες παρουσίασαν και τα έργα συμπλήρωσης σχήματος, ιδιαίτερα τα έργα που αφορούσαν την συμπλήρωση άγνωστου σχήματος. Η δυσκολία αυτή αναδεικνύει τον περιορισμό που προσφέρει η τρέχουσα μορφή διδασκαλίας που δέχονται τα παιδιά, εφόσον προωθεί την παραγωγή γνώσης σε συγκεκριμένα τετράπλευρα σχήματα, χωρίς να αποσκοπεί σε οπτικές δεξιότητες χρήσιμες και μεταφέρσιμες σε διαφορετικά πλαίσια.

Η εξέταση των διαφορών ανάμεσα στους δύο τύπους σύλληψης σχημάτων ανέδειξε τα έργα αναγνώρισης σχήματος σε συλλογή γεωμετρικών σχημάτων ως την ευκολότερη πτυχή της γεωμετρικής κατανόησης. Ωστόσο, η αναγνώριση εμφανούς σχήματος σε γεωμετρική σύνθεση δεν παρουσίασε σημαντικές διαφορές με τα έργα σύνθεσης, αποσύνθεσης και συμπλήρωσης. Το γεγονός αυτό ίσως να οφείλεται στο ότι και οι τέσσερις ομάδες έργων ενεργοποιούν παρόμοιες νοερές διαδικασίες για τη δημιουργία και διατήρηση μιας γεωμετρικής δομής. Δυσκολότερη όμως και από τα έργα λειτουργικής σύλληψης παρουσιάστηκε να είναι για τα παιδιά η αναγνώριση μη εμφανούς σχήματος σε γεωμετρική σύνθεση. Μια πιθανή ερμηνεία που θα μπορούσε να δοθεί είναι ότι, ενώ στα έργα λειτουργικής σύλληψης το παιδί καλείται να μετασχηματίσει νοερά μια γεωμετρική δισδιάστατη δομή σε μια άλλη δισδιάστατη δομή, στην ομάδα αυτή των έργων, η οποία συχνά απαιτεί τη νοερή αποδόμηση του σχήματος (δισδιάστατο) στα ευθύγραμμα τμήματα (μονοδιάστατα) που το αποτελούν, το παιδί δέχεται ισχυρά εμπόδια είτε από την τάση του να διατηρήσει νοερά την αρχική δισδιάστατη γεωμετρική δομή είτε από τα ευθύγραμμα τμήματα που παρεμβαίνουν στη συνέχεια της επιφάνειας του σχήματος (Gestalt theory-continuity).

Είναι φανερό, λοιπόν, ότι τόσο μέσα από έργα λειτουργικής σύλληψης σχημάτων (Duval, 2005) όσο και μέσα από έργα αντιληπτικής σύλληψης σχημάτων, καθώς και μέσα από τη μεταξύ τους συσχέτιση, μπορούμε να πάρουμε πολύτιμες πληροφορίες για τις γεωμετρικές ικανότητες και δυσκολίες των παιδιών προσχολικής ηλικίας. Παρόλα αυτά, το μικρό δείγμα δεν επιτρέπει τη γενίκευση των αποτελεσμάτων,

εντείνοντας με αυτό τον τρόπο την ανάγκη για περαιτέρω εξέταση της γεωμετρικής κατανόησης σχημάτων, αλλά και των υφιστάμενων περιοχών της γεωμετρίας που προσεγγίζονται στην προσχολική εκπαίδευση. Είναι σημαντικό τα μικρά παιδιά να έχουν εξελικτικά κατάλληλες εμπειρίες που θα οδηγήσουν στην ανάπτυξη θετικών πεποιθήσεων για τα μαθηματικά (Bohning, Kosack & Althouse, 1997)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Bohning, G., Kosack, J., & Althouse, I. (1997). Using Tangrams to Teach Geometry to Young Children. *Early Childhood Education Journal,* Vol 24, No. 4: 239-242.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.),*Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142- 157). Berlin: Springer.

Duval, R.(1999).Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. *Basic Issues for learning*. Retrieved from ERIC ED 466 379.

Duval, R.(2005).Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie:développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Sarama, J., & Clements, D. H.(2009).*Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children.* New York: Routledge.

Yakimanskaya, J.S.(1970).Some Features of Mental Activity Revealed in Reading a Diagram. In Kilpatrick, J. & Wirszup, I.(Eds.)*Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. Problem Solving in Geometry*. Vol. 4. Chicago:University of Chicago Press.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΩΙΜΗ ΠΑΙΔΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ

Καπλάνη Ιωάννα, Τζεκάκη Μαριάννα
ΤΕΠΑΕ, Α.Π.Θ.
tzekaki@nured.auth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η έρευνα καταγράφει τις ικανότητες παιδιών προσχολικής ηλικίας στην ανάλυση και σύνθεση επίπεδων σχημάτων και μελετά την πιθανή βελτίωση αυτών των ικανοτήτων μετά από κατάλληλη διδακτική παρέμβαση. 22 παιδιά ηλικίας 5-6 χρόνων εξετάσθηκαν, αρχικά, ως προς το επίπεδο των ικανοτήτων αυτών, σύμφωνα με προτεινόμενο μοντέλο κατάταξης, στη συνέχεια απασχολήθηκαν με κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες ανάλυσης και σύνθεσης γεωμετρικών σχημάτων και τελικά αξιολογήθηκαν ως προς τη βελτίωση των σχετικών τους ικανοτήτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι ικανότητες που διαθέτουν τα παιδιά στις ηλικίες αυτές ως προς την ανάλυση και σύνθεση σχημάτων ταξινομούνται σε τρεις βασικές κατηγορίες (από τις 6 προτεινόμενες στο μοντέλο κατάταξης) και γενικά μπορούν να βελτιωθούν με την κατάλληλη διδακτική υποστήριξη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έρευνα στην προσχολική και πρώτη σχολική εκπαίδευση αναγνωρίζει την σπουδαιότητα ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών από τις μικρότερες ηλικίες, αλλά η εκπαίδευση των νηπίων περιορίζεται ακόμα σε φτωχές ή απλοϊκές δραστηριότητες που δεν υποστηρίζουν την προτεινόμενη από τα προγράμματα ανάπτυξη.

Ο γεωμετρικός συλλογισμός αποτελεί ένα από τα πρώτα και γνώριμα στοιχεία της μαθηματικής εκπαίδευσης για τις μικρές ηλικίες. Τα σχήματα θεωρούνται οικεία και ιδιαίτερα αναγνωρίσιμα από τα μικρά παιδιά, ωστόσο ο τρόπος παρουσίασής τους από τους εκπαιδευτικούς παραμένει μάλλον ανεπαρκής και ως προς την ποικιλία των σχημάτων και ως προς την επεξεργασία που προτείνεται. Οι ελλιπείς προσεγγίσεις έχουν ως αποτέλεσμα την περιορισμένη ανάπτυξη σχετικού γεωμετρικού υπόβαθρου ικανού να υποστηρίξει την μελλοντική γεωμετρική εκπαίδευσης (Levenson, Tirosh, & Tsamir, 2011).

Συστηματικές έρευνες στις διδακτικές προσεγγίσεις των γεωμετρικών σχημάτων έδειξαν ότι με την κατάλληλη εκπαίδευση τα παιδιά κερδίζουν σε γεωμετρικές και χωρικές δεξιότητες (Sarama, & Clements, 2009) με σαφή οφέλη όχι μόνο στην ανάπτυξη γεωμετρικού συλλογισμού, αλλά και εννοιών άλλων περιοχών των Μαθηματικών (όπως για παράδειγμα αριθμητικών) ή άλλων στοιχείων της εκπαίδευσης τους όπως στην ετοιμότητα γραφής (Razel & Eylon, 1990).

Με βάση τις αναφορές αυτές, στην διερεύνηση που ακολουθεί επιδιώξαμε να επιβεβαιώσουμε ότι με κατάλληλες δραστηριότητες τα παιδιά ηλικίας 5-6 χρόνων είναι σε θέση να κατανοήσουν ουσιαστικότερα γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις και να βαθαίνουν τις γνώσεις τους στα γεωμετρικά σχήματα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η μελέτη της αντίληψης των γεωμετρικών σχημάτων, των ιδιοτήτων και των μεταξύ τους σχέσεων ξεκινάει από τις προσεγγίσεις Van Hiele και επεκτείνεται σε μεγάλο εύρος ερευνητικών ευρημάτων. Στην ερευνητική αυτή περιοχή η ανάλυση και σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων αποκτά ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί οι σχετικές δράσεις επιτρέπουν στους μαθητές να συνδυάσουν, να χωρίσουν και να ενώσουν γεωμετρικά σχήματα κι έτσι να έρθουν σε επαφή με σημαντικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες όπως είναι οι συγκρίσεις πλευρών και γωνιών, η αντιστοίχιση μεγεθών, η αλλαγή προσανατολισμού, κ, ά.

Οι Owens και Outhred (1998) μελετούν την ικανότητα των παιδιών στην επικάλυψη σχημάτων με άλλα σχήματα. Στην έρευνα τους παρουσιάζουν τις αρχικές δυσκολίες των παιδιών στις δράσεις αυτές (όπως την αντίληψη των σχημάτων και τις αλλαγές στον προσανατολισμό τους) αλλά υπογραμμίζουν επίσης τις βελτιώσεις που εμφανίζουν οι μαθητές από τα πρώτα ως τις τελευταία τεστ που χρησιμοποιήθηκαν, ακόμα κι όταν αυτά αφορούσαν πιο σύνθετους σχηματισμούς.

Ο αριθμός των ερευνών στο ζήτημα αυτό είναι περιορισμένος όμως τα σχετικά ευρήματα συμφωνούν ότι τα παιδιά σε ανάλογες δράσεις ακολουθούν παραπλήσια πορεία στην επιλογή και τον συνδυασμό των σχημάτων (π.χ. τετράγωνα ή ισόπλευρα τρίγωνα), κάνουν επίσης παρόμοιες εκτιμήσεις και χρησιμοποιούν μεθόδους δοκιμής και λάθους για να γεμίσουν περιγράμματα. Συχνά εμφανίζουν δυσκολίες να ξεπεράσουν ολιστικές αντιλήψεις, να αντιληφθούν τα σχήματα σε άλλες τοποθετήσεις εκτός από τις οριζόντιες ή κατακόρυφες και βρίσκονται σε αδυναμία να αντιληφθούν συμμετρικές τοποθετήσεις ή να κάνουν νοερές περιστροφές (Callingham, 2004; Reynolds & Wheatley, 1996; Clements, et als., 1997; Τζεκάκη, 2010).

Οι Clements, Wilson και Sarama (2004) μελέτησαν την αναπτυξιακή εξέλιξη των παιδιών 3 έως 7 ετών στη ανάλυση και σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων και χαρτογράφησαν τις μαθησιακές τροχιές των ικανοτήτων τους καταλήγοντας σε έξι επίπεδα. Στην οργάνωση αυτή οι ερευνητές συνδυάζουν στοιχεία όπως την επιτυχία στη σύνθεση των σχημάτων, τον τρόπο δράσης των παιδιών, την αντιστοίχιση πλευρών και γωνιών, την αναγνώριση νέου σχήματος από τη σύνθεση μερών, την αναγνώριση σχέσεων και τη δημιουργία νέων σχημάτων. Τα προτεινόμενα επίπεδα σύμφωνα με τα στοιχεία αυτά είναι τα ακόλουθα.

1ο επίπεδο: Προ-Συνθέτης (pre- composer). Το παιδί χειρίζεται τα σχήματα μεμονωμένα, αλλά δεν μπορεί να τα συνδυάσει για να συνθέσει ένα πιο σύνθετο σχήμα.

2ο επίπεδο: Συναρμολογητής Κομματιών (piece assembler). Το παιδί μπορεί να αλληλοσυνδέσει σχήματα για να γεμίσει περιγράμματα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της δοκιμής και του λάθους, αλλά δυσκολεύεται στις περιστροφές, και δεν είναι σε θέση να κάνει συνδυασμούς ή διαφορετικές επιλογές.

Συνοπτικά, τα παιδιά του 1ου και 2ου επιπέδου βλέπουν τα σχήματα μεμονωμένα και ολιστικά χωρίς να συνδυάζουν μέρη, ιδιότητες και σχέσεις, ωστόσο καταλήγουν εν μέρει στην επικάλυψη δεδομένων περιγραμμάτων κυρίως με δοκιμή και λάθος.

3ο επίπεδο: Δημιουργός Εικόνων (picture maker). Το παιδί μπορεί να αλληλοσυνδέσει σχήματα για να σχηματίσει εικόνες. Συχνά διαλέγει σχήματα χρησιμοποιώντας τις στερεοτυπικούς τοποθετήσεις ή ένα μέρος των ιδιοτήτων, όπως το μήκος της πλευράς, αλλά επίσης προσπαθεί να ταιριάξει σχήματα στις γωνίες όταν αντιστοιχούν. Χρησιμοποιεί τη μέθοδο της δοκιμής και του λάθους και περιστροφής αλλά δεν προβλέπει τη δημιουργία νέων γεωμετρικών σχημάτων.

4ο επίπεδο: Συνθέτης Σχημάτων (shape composer). Το παιδί συνδυάζει σχήματα για να κάνει καινούργια σχέδια ή να γεμίσει πλαίσια προβλέποντας τι χρειάζεται να συμπληρώσει. Διαλέγει σχήματα χρησιμοποιώντας τις γωνίες το ίδιο καλά όσο και τα μήκη των πλευρών. Μπορεί να κάνει εναλλακτικούς συνδυασμούς και έχει την άνεση να περιστρέφει ή να προβλέπει μια περιστροφή, για να διαλέξει και να τοποθετήσει σχήμα.

5ο επίπεδο: Συνθέτης με Αντικατάσταση (substitution composer). Το παιδί σχηματίζει σύνθετες μονάδες σχημάτων, αναγνωρίζει και χρησιμοποιεί σχέσεις αντικατάστασης ανάμεσα στα σχήματα (δηλαδή για παράδειγμα αντιλαμβάνεται ότι δύο πρότυπα σχέδια ορθογωνίων μπορούν να σχηματίσουν ένα τετράγωνο).

Συνολικά στο 4ο και 5ο επίπεδο το παιδί κάνει ποικίλους συνδυασμούς σχημάτων και προβλέπει ποιο σχήμα ταιριάζει με βάση κάποιες ιδιότητες και σχέσεις. Φαίνεται να έχει εικόνες από τα μέρη των σχημάτων και να δημιουργεί βαθμιαία ανώτερες συνθέσεις συνδυάζοντας σχήματα.

6ο επίπεδο: Συνθέτης σχημάτων με επανάληψη (shape composite iterator). Το παιδί έχει την άνεση να κατασκευάσει δημιουργώντας σκόπιμα σύνθετες μονάδες. Μπορεί να συνεχίσει ένα σχηματισμό σχημάτων που οδηγεί σε μια πλήρη κάλυψη (Clements et al., 2004: σελ. 2-3).

Χρησιμοποιώντας ως βάση την κατάταξη αυτή, διερευνήσαμε την κατανομή των παιδιών ηλικίας 5- 6 χρόνων στα επίπεδα που περιγράφονται και στη συνέχεια εξετάσαμε τη δυνατότητα βελτίωσης της αρχικής κατάταξης. Συγκεκριμένα επιδιώξαμε να διερευνήσουμε:

1. Ποιες ικανότητες στην ανάλυση και σύνθεση των επιπέδων γεωμετρικών σχημάτων έχουν τα παιδιά του νηπιαγωγείου;

2. Πώς μπορούν τα παιδιά να υποστηριχθούν στη διαδικασία αναγνώρισης και δόμησης εννοιών για την ανάλυση και σύνθεση των επιπέδων γεωμετρικών σχημάτων;
3. Ποιες ικανότητες στην ανάλυση και σύνθεση των επιπέδων γεωμετρικών σχημάτων αναπτύσσουν μετά από κατάλληλη διδακτική παρέμβαση με σχετικές δραστηριότητες;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

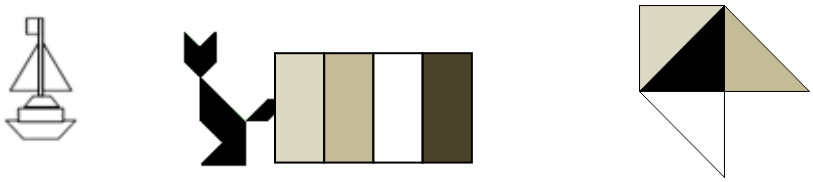
Είκοσι δύο παιδιά, ηλικίας 5-6 ετών, από την περιοχή της πόλης της Θεσσαλονίκης, εξετάστηκαν με ένα ατομικό διαγνωστικό τεστ για την κατηγοριοποίηση τους στο μοντέλο των Clements et als. (2004). Το τεστ πρότεινε την επικάλυψη δύο συνθέσεων με μία ποικιλία προτεινόμενων σχημάτων. Στη μία σύνθεση τα περιγράμματα των σχημάτων ήταν εμφανή ενώ στη δεύτερη υπήρχε μόνο το γενικό περίγραμμα της σύνθεσης (βλ. πίν. 1). Στις συνθέσεις αυτές υπάρχει μια κλιμάκωση της δυσκολίας ως προς (1) τον αριθμό και το είδος των σχημάτων, (2) τον προσανατολισμό τους, (3) τους μετασχηματισμούς (συμμετρίες και περιστροφές) που είναι αναγκαίοι για την κατασκευή.

Μετά την ολοκλήρωση του τεστ, τα ίδια παιδιά συμμετείχαν σε ένα πρόγραμμα διδασκαλίας δύο εβδομάδων, στη διάρκεια του οποίου εργάστηκαν με ειδικά σχεδιασμένες δραστηριότητες που σχετίζονταν με σχηματισμούς σχημάτων, tangrams και μοτίβα ανάλυσης και σύνθεσης. Τα παιδιά αυτά επανεξετάσθηκαν σε ένα αξιολογικό τεστ με υψηλότερο επίπεδο δυσκολίας από το διαγνωστικό (βλ. πιν.5).

Τόσο στο διαγνωστικό όσο και στο αξιολογικό στάδιο χρησιμοποιήθηκε ως μέθοδος εργασίας η ατομική συνέντευξη. Σε κάθε παιδί παρουσιάζονταν, τοποθετημένες μπροστά του, πάνω στο τραπεζάκι, διαδοχικά, οι δύο συνθέσεις και τα σχήματα που μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την επικάλυψη τους (σε στερεοτυπικές τοποθετήσεις). Οι προσπάθειες του κάθε παιδιού καταγράφηκαν σε φύλλα παρατήρησης και το τελικό αποτέλεσμα της δράσης του φωτογραφίστηκε.

Στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης προτάθηκαν δραστηριότητες στο σύνολο των παιδιών μέσα στην τάξη. Πιο συγκεκριμένα, προτάθηκαν δύο ατομικές δραστηριότητες συνθέσεων σχημάτων με στόχο την εξοικείωση των παιδιών στις αντιστοιχίσεις πλευρών και γωνιών και τους απαιτούμενους μετασχηματισμούς. Στη συνέχεια τα νήπια εργάστηκαν σε ομάδες με τάγκραμ, τα οποία βοηθούν τα παιδιά να αναγνωρίσουν μορφές σε πιο σύνθετους σχηματισμούς. Όμοια επίσης σε ομάδες, τα παιδιά εργάστηκαν, αρχικά, σε ανασυνθέσεις σχημάτων, δηλαδή χωρισμό τους σε διαφορετικά σχήματα (πχ. ένα ορθογώνιο σε τρίγωνα, ή τετράγωνα ή άλλα ορθογώνια, κλπ) και σε συνδυασμούς σχημάτων. Στα τελευταία αυτά έργα τα παιδιά καλούνται να κάνουν τους περισσότερους δυνατούς συνδυασμούς με τέσσερα τρίγωνα, τετράγωνα ή άλλα σχήματα. Με τον τρόπο αυτό, εκτός από τις

αντιστοιχίσεις πλευρών και γωνιών τα παιδιά παρακολουθούν επίσης τις αλλαγές στην τοποθέτηση των σχημάτων (βλ. σχ. 1).



Σχ. 1. Σχήματα των δραστηριοτήτων (συνθέσεις, τάγκραμ, αναλύσεις και συνδυασμοί)

Από τη διαδικασία αυτή καταγράφηκαν οι στρατηγικές των παιδιών, τα αποτελέσματα τους και οι διάλογοι που αναπτύχθηκαν στην τάξη, αλλά τα στοιχεία αυτά δεν θα παρουσιασθούν εδώ.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΥΡΗΜΑΤΑ

Τα ερευνητικά ευρήματα που ακολουθούν δίνουν ενδεικτικά στοιχεία για το αν μια σύντομη διδακτική παρέμβαση μπορεί να βοηθήσει τα παιδιά να βελτιώσουν τις ικανότητες στην ανάλυση και σύνθεση σχημάτων. Παρουσιάζονται αποτελέσματα αρχικά από το διαγνωστικό και στη συνέχεια από το αξιολογικό ώστε να είναι δυνατόν να διαπιστωθούν οι αρχικές ικανότητες των παιδιών πριν από κάθε διδακτική παρέμβαση. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται δεδομένα που οδηγούν στην κατηγοριοποίηση των Clements et als. (2004), δηλαδή καταγράφουν τη δράση των παιδιών ως προς (1) την επιλογή των σχημάτων για την επικάλυψη των περιγραμμάτων, (2) τον τρόπο με τον οποίο διαχειρίζονται τα σχήματα που χρησιμοποιούν (με δοκιμή και λάθος ή με νοερές προβλέψεις και τοποθετήσεις) και (3) τα κριτήρια που χρησιμοποιούν για να επιλέξουν τα προτεινόμενα σχήματα ως προς τις πλευρές, τις γωνίες και τις πιθανές περιστροφές.

Τέλος αξιολογείται και η ορθότητα του αποτελέσματος ως προς το αν τα σχήματα εφάπτονται το ένα το άλλο, καλύπτουν το περίγραμμα και δεν αλληλεπικαλύπτονται.

Διαγνωστικό τεστ (πριν τη διδακτική παρέμβαση)

Οκτώ παιδιά για το πρώτο σχήμα και έντεκα για το δεύτερο (από το σύνολο των είκοσι δύο παιδιών) χρειάστηκαν αρκετές δοκιμές με τοποθετήσεις διαφορετικών σχημάτων για να επικαλύψουν τις συνθέσεις του πιν. 1.

Επιλογή σχημάτων	1ο 	2ο 
- ίδια σχήματα	14	3
- διαφορετικά σχήματα	8	19

Πιν. 1. Επιλογή σχημάτων

Η διαφορά αυτή ερμηνεύεται από την μορφή των σχημάτων: το 1ο σχήμα οδηγεί τα παιδιά στην άμεση επιλογή ενώ το 2ο κάνει αναγκαία την αναζήτηση. Οι λόγοι της αποτυχίας στην πρώτη προσπάθεια των παιδιών συνοψίζονται στον ακόλουθο πιν. 2.

Αποτυχία γιατί επιλέγουν:	1ο Σχήμα	2ο Σχήμα
- Διαφορετικά σχήματα	2	3
- Διαφορετικά μεγέθη	5	4
- Μερικώς διαφορετικά σχήματα ή μεγέθη	1	4 ή 6
- Διαφορετικά σχήματα και μεγέθη	-	2

Πιν. 2. Λόγοι αποτυχίας

Ως προς τον τρόπο τοποθέτησης τα περισσότερα παιδιά καταλήγουν στο σχήμα που τους χρειάζεται δοκιμάζοντας. Ωστόσο στα είκοσι δύο παιδιά υπάρχουν τρία για το 1ο και δύο για το 2ο σχήμα που είναι σε θέση να προβλέψουν πιο σχήμα αντιστοιχεί σε κάθε θέση και να το τοποθετήσουν άμεσα.

Ως προς τα κριτήρια επιλογής σχημάτων, τα περισσότερα παιδιά στο 1ο σχήμα αντιστοιχούν πλευρές και γωνίες χωρίς περιστροφή, αυτό άλλωστε υποστηρίζεται κι από τη μορφή του σχήματος, αλλά 13 παιδιά στο 2ο σχήμα είναι σε θέση να αντιστοιχήσουν τελικά περιστρέφοντας το σχήμα που ταιριάζει (πιν.3).

Κριτήρια επιλογής	1ο Σχήμα	2ο Σχήμα
- ασαφή	3	2
- αντιστοίχιση πλευρών	4	3
- αντιστοίχιση γωνιών	5	2
- αντιστοίχιση πλευρών και γωνιών χωρίς περιστροφή	8	2
- αντιστοίχιση πλευρών και γωνιών με περιστροφή	1	13

Πιν. 3. Κριτήρια επιλογής σχημάτων

Σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία γίνεται φανερό ότι όλα τα παιδιά που εξετάστηκαν είναι σε θέση να συνθέσουν τα δύο προτεινόμενα σχέδια με διάφορες προσεγγίσεις σε κάθε περίπτωση, πριν από οποιαδήποτε ενασχόληση με αυτής της μορφής δράσεις. Μόνο δύο (2) από αυτά ενώνουν απλά σχήματα στο 1ο σχήμα και δεν είναι σε θέση να σχηματίσουν το 2ο, άρα ανήκουν στο επίπεδο δύο (2) της κατάταξης των Clements et als. Τα υπόλοιπα είκοσι παιδιά συνδυάζουν σχήματα με βάση πλευρές και γωνίες, χρησιμοποιώντας δοκιμή και λάθος. Από αυτά τα δέκα (10) παιδιά αντιστοιχούν πλευρές και γωνίες κυρίως χωρίς περιστροφές κι έτσι ανήκουν στο επίπεδο 3, του ‘δημιουργού εικόνων’, και τα άλλα δέκα (10)

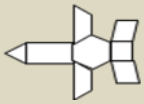
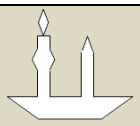
αντιστοιχούν με περιστροφές, ίσως κάνουν και προβλέψεις πριν από την τοποθέτηση, και έτσι αντιστοιχούν στο επίπεδο 4, του 'συνθέτη σχημάτων'.

Η συνολική εικόνα που δίνουν τα παιδιά σε αυτήν την κατηγορία δράσεων επιβεβαιώνει τις σχετικές έρευνες για τις ολιστικές και στερεοτυπικές επιλογές σχημάτων, αλλά παράλληλα καταδεικνύει και μια δυναμική που μπορεί πιθανόν να βελτιωθεί με την κατάλληλη διδακτική παρέμβαση.

Αξιολογικό τεστ (μετά τη διδακτική παρέμβαση)

Όλα τα παιδιά πέτυχαν τη σύνθεση του 1ου σχήματος άμεσα και μόνο έντεκα από τα είκοσι δύο παιδιά χρειάστηκαν για τη σύνθεση του 2ου σχήματος αρκετές δοκιμές. Τα προτεινόμενα σχέδια είναι σαφώς δυσκολότερα από άποψη σχημάτων και προσανατολισμών (βλ. πίν, 4).

Στην επιλογή των σχημάτων, τα περισσότερα παιδιά χρησιμοποιούν μια ποικιλία, ακόμα και αν η παρουσίαση του 1ου σχήματος υποβάλει κάποιες επιλογές. Το αποτέλεσμα αυτό παρουσιάζει μια βελτίωση από το διαγνωστικό τεστ (πιν. 4).

Επιλογή σχημάτων	1ο 	2ο 
- ίδια σχήματα	9	3
- διαφορετικά σχήματα	13	19

Πιν. 4. Επιλογή σχημάτων

Οι λόγοι αποτυχίας στην πρώτη προσπάθεια, σαφώς λιγότεροι από το αρχικό τεστ, συνοψίζονται στον επόμενο πίνακα (πιν. 5).

Λόγοι αποτυχίας	1ο Σχήμα	2ο Σχήμα
- Διαφορετικά σχήματα	4	14
- Διαφορετικά μεγέθη	7	2
- Μερικώς διαφορετικά σχήματα ή μεγέθη	2	3ή 3

Πιν. 5. Λόγοι αποτυχίας

Ως προς τον τρόπο τοποθέτησης, τα περισσότερα παιδιά (είκοσι) προχωρούν ακόμα με δοκιμή και λάθος στην κατασκευή των σύνθετων αυτών μορφών. Τα πιο πολλά όμως παιδιά επιλέγουν σχήματα αντιστοιχώντας και περιστρέφοντας, παρουσιάζοντας μια σημαντική βελτίωση σε σχέση με το αρχικό τεστ (πιν. 6)

Κριτήρια επιλογής	1ο Σχήμα	2ο Σχήμα
- αντιστοίχιση πλευρών ή γωνιών	2 ή 3	-
- αντιστοίχιση πλευρών και γωνιών χωρίς περιστροφή	7	6
- αντιστοίχιση πλευρών και γωνιών με	10	16

περιστροφή		

Πιν. 6. Κριτήρια επιλογής σχημάτων

Σύμφωνα με τα δεδομένα αυτά τα παιδιά, μετά τη διδακτική παρέμβαση, βελτιώνουν τις ικανότητες σύνθεσης γεωμετρικών σχημάτων. Εμφανίζουν σχετικά γρήγορη πρόοδο στην επιλογή σχημάτων και στη δημιουργία νέων, τοποθετούν με αντιστοίχιση μεγεθών και κάνουν άμεσες περιστροφές. Τα στοιχεία αυτά μετατοπίζουν την κατάταξη από τα επίπεδα 3 και 4 στο διαγνωστικό τεστ στα επίπεδα 4 και 5 στο αξιολογικό όπως φαίνεται από τον πιν. 7.

	2ο επίπεδο Συναρμολογητής Κομματιών	3 επίπεδο Δημιουργός εικόνων	4ο επίπεδο Συνθέτης σχημάτων	5ο επίπεδο- Συνθέτης αντικατάστασης
διαγν. 1 σχ. διαγ. 2 σχ.	 2	2 10	20 10	
αξιολ. 1 σχ. αξιολ. 2 σχ.			20 20	2 2

Πιν. 7. Κατάταξη στα επίπεδα Clements et als, πριν και μετά

Η λεπτομερής εξέταση των στοιχείων για την κατάταξη αυτή είναι δύσκολο να παρουσιασθεί τόσο σύντομα, αλλά η γενική εικόνα δείχνει ότι τα παιδιά κατά τη διάρκεια αλλά και μετά τη διδακτική παρέμβαση αντιμετωπίζουν με άνεση τα σύνθετα σχήματα και αναπτύσσουν σημαντικές και έξυπνες στρατηγικές σύνθεσης. Η εξέλιξη αυτή θα μπορούσε να ενισχυθεί με περισσότερες σχετικές δράσεις.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα στοιχεία που παρουσιάσαμε δίνουν κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις στα αρχικά ερωτήματα καθώς αφορούν ένα μικρό αριθμό παιδιών. Γενικά τα νήπια εμφανίζουν κάποιες ικανότητες σύνθεσης σχημάτων, κάνουν σωστές επιλογές, δοκιμάζουν και καταλήγουν να καλύψουν ένα περίγραμμα που σχηματίζεται με πιο απλούς ή πιο σύνθετους συνδυασμούς. Σύμφωνα με την κατάταξη του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε τα περισσότερα ανήκουν στο επίπεδο 3 ή 4.

Η σύντομη διδακτική παρέμβαση βελτίωσε σημαντικά τις σχετικές ικανότητες στην ορθή επιλογή σχημάτων, μείωσε τις δοκιμές, έδωσε ευελιξία στην τοποθέτηση, στις περιστροφές και τις κατευθύνσεις κι ανέπτυξε ένα φάσμα στρατηγικών. Το γεγονός αυτό μετακίνησε τα παιδιά πολύ σύντομα στα επίπεδα 4 και 5.

Ένα γενικό συμπέρασμα που προκύπτει από τη διερεύνηση αυτή είναι ότι δεν υπάρχουν παιδιά αυτής της ηλικίας που ανήκουν στο 1 και 6 επίπεδα του μοντέλου των Clements et als (2004) και ξεπερνούν γρήγορα το επίπεδο 3, οπωσδήποτε όμως η σχετική κατάταξη σχετίζεται με τα προτεινόμενα σχήματα. Η μικρή μετακίνηση από το 4 στο 5 επίπεδο οφείλεται σε αυτά.

Κλείνοντας αξίζει να πούμε ότι η ικανότητα «να βλέπει το παιδί τα γεωμετρικά σχήματα με διαφορετικούς τρόπους» (Samara & Clements, 2009: 267), να αναλύει και να συνθέτει, να διακρίνει ιδιότητες και σχέσεις ενισχύεται από τέτοιας μορφής δραστηριότητες και θα το διευκολύνει στη συνέχεια την αντιμετώπιση πιο σύνθετων γεωμετρικών καταστάσεων. Απαιτεί όμως μια μακροχρόνια και ειδικά σχεδιασμένη εκπαίδευση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Callingham, P. (2004). Primary students' understanding of tessellation: an initial exploration. In M. Johsen Hoines & A.B. Fuglestad (eds.), *Proceedings of the 28th Conference of PME*, Vol 2, 183–190. Bergen University College.

Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., & Swaminathan, S. (1997). Development of students' spatial thinking in a unit on geometric motions and area. *The Elementary School Journal, 98*(2), 171-186.

Clements, D. H., Wilson, D.C., & Sarama, J. (2004). Young Childrens' Composition of Geometric Figures. *Mathematical thinking and learning, 6 (2):* 163-184.

Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2011). *Preschool Geometry. Theory, Research, and Practical Perspectives.* Springer

Owens, K., & Outhred, L. (1998). Covering Shapes with Tiles: Primary Students' Visualisation and Drawing. *Mathematics Education Research Journal, Vol. 10, No. 3*: 28-41.

Razel, M., & Eylon, B.S. (1990). Development of visual cognition: Transfer effects of the Agam program. *Journal of Applied Developmental Psychology, Volume 11, Issue 4*: 459–485.

Reynolds, A., & Wheatley, G. (1996). Elementary students' construction and coordination of units in an area setting. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5): 564-581.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Routledge.

Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική Εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία.* Θεσσαλονίκη: Εκδ. Ζυγός.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΞΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Τσακιρίδου Ελένη[1], Στεργίου Κωνσταντίνος[2], Χατζηπαντελής Θεόδωρος[3]

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

[1]etsakir@uowm.gr, [2]konstergiou@uowm.gr, [3]chadji@uowm.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η καλλιέργεια των μαθηματικών δεξιοτήτων είναι ιδιαίτερα σημαντική για την προσωπική ανάπτυξη των μαθητών. Οι μαθηματικές δεξιότητες μπορούν να συμβάλλουν στη δόμηση της μεθοδικής σκέψης και στην ικανότητα επίλυσης καθημερινών προβλημάτων, στο σύγχρονο και συνεχώς εξελισσόμενο κοινωνικό και εργασιακό περιβάλλον (Eurydice Report, 2012). *Στην παρούσα εργασία μελετώνται οι μαθηματικές δεξιότητες των μαθητών Στ' τάξης 22 Δημοτικών Σχολείων, μέσω της επίδοσης τους σε ένα τεστ διαφόρων θεματικών περιοχών των μαθηματικών, ενώ παράλληλα εξετάζονται οι παράγοντες που πιθανόν να επηρεάζουν την επίδοση αυτή. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, οι μαθητές σημείωσαν αρκετά καλές επιδόσεις στο τεστ, ενώ η ανάλυση έδειξε ότι οι παράγοντες που επηρεάζουν σημαντικά την επίδοση των μαθητών στο τεστ είναι το μορφωτικό επίπεδο των γονέων αλλά και το οικονομικό επίπεδο της οικογένειας του κάθε μαθητή, το μέγεθος του σχολείου και ο βαθμός αστικότητας της περιοχής του σχολείου.*

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Καθώς οι σύγχρονες απαιτήσεις φέρνουν την παγκόσμια κοινότητα αντιμέτωπη με νέες προκλήσεις, κάθε πολίτης χρειάζεται ένα ευρύ φάσμα βασικών δεξιοτήτων για να προσαρμοσθεί με ευελιξία σε ένα γοργά μεταβαλλόμενο κόσμο. Για το λόγο αυτό ο ρόλος της εκπαίδευσης κρίνεται ιδιαίτερα σημαντικός εξασφαλίζοντας ότι οι πολίτες του κόσμου θα αποκτήσουν τις βασικές ικανότητες που χρειάζονται προκειμένου να μπορέσουν να προσαρμοσθούν με ευελιξία στις μεταβολές αυτές. Η αναβάθμιση της ποιότητας και της αποτελεσματικότητας της εκπαίδευσης βρίσκεται στο επίκεντρο του πολιτικού διαλόγου τόσο σε εθνικό όσο και σε κοινοτικό επίπεδο και ένας από τους τομείς συζήτησης είναι η καλλιέργεια των δεξιοτήτων που θα πρέπει κάθε απόφοιτος της βασικής εκπαίδευσης να αποκτήσει, προκειμένου να αντιμετωπίσει το σύγχρονο ανταγωνιστικό περιβάλλον. Η αναβάθμιση αυτή αποσκοπεί στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στην υποχρεωτική εκπαίδευση και κυρίως της χαμηλής επίδοσης των μαθητών στην ανάγνωση, τα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες (Olson, Martin, & Mullis, 2008), (Mullis, Martin, Ruddock,

O'Sullivan, & Preuschoff, 2012), (Parveva, Noorani, Ranguelov, Motiejunaite, & Kerpanova, 2011).

Σύμφωνα με το «Πλαίσιο Αναφοράς» της Ευρωπαϊκής Ένωσης (2006) έχουν οριστεί κάποιες βασικές δεξιότητες που θα πρέπει να αποκτούν οι απόφοιτοι τόσο στο πλαίσιο της βασικής εκπαίδευσης, αλλά και στο πλαίσιο της Δια Βίου Μάθησης. Οι βασικές δεξιότητες είναι εκείνες τις οποίες χρειάζονται όλοι για την προσωπική τους ολοκλήρωση και ανάπτυξη, την κοινωνική ένταξη και την απασχόληση. Το Πλαίσιο Αναφοράς ορίζει οκτώ βασικές ικανότητες: Επικοινωνία στη μητρική γλώσσα, Επικοινωνία σε ξένες γλώσσες, Μαθηματική ικανότητα και βασικές ικανότητες στην επιστήμη και την τεχνολογία, Ψηφιακή ικανότητα, Μεταγνωστικές ικανότητες (Learning to learn), Κοινωνικές ικανότητες και ικανότητες που σχετίζονται με την ιδιότητα του πολίτη, Πρωτοβουλία και επιχειρηματικότητα και Πολιτισμική συνείδηση και έκφραση (Eurydice Report, 2012). Όσον αφορά στη μαθηματική ικανότητα αυτή ορίζεται ως η ικανότητα ανάπτυξης και χρήσης μαθηματικών συλλογισμών για την επίλυση ενός φάσματος προβλημάτων σε καθημερινές καταστάσεις. Η μαθηματική ικανότητα περιλαμβάνει, σε διάφορους βαθμούς, την ικανότητα και την προθυμία χρήσης μαθηματικών τρόπων σκέψης (λογική και χωρική σκέψη) και παρουσίασης (μαθηματικοί τύποι, μοντέλα, κατασκευές, γραφικές παραστάσεις/διαγράμματα) (Eurydice Report, 2012).

Στην βασική εκπαίδευση, η διδασκαλία των μαθηματικών στοχεύει, εκτός από την απόκτηση των βασικών γνώσεων, και στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή και την επιτυχή κοινωνική ένταξή του, καθώς τα μαθηματικά μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη της μεθοδικής σκέψης, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική, στις λογικές διεργασίες και στη διατύπωση των σκέψεων με τάξη, σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια. Τα μαθηματικά μπορούν να αναπτύξουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την ελεύθερη σκέψη, καλλιεργούν την αίσθηση της αρμονίας, της τάξης και του ωραίου και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα (Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, 2003). Οι βασικές γνώσεις που σχετίζονται με την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων είναι η εδραία γνώση στα μαθηματικά η οποία περιλαμβάνει την καλή γνώση των αριθμών, μέτρων και δομών, των βασικών πράξεων και των βασικών μαθηματικών παραστάσεων, την κατανόηση των μαθηματικών όρων και εννοιών και των ερωτημάτων στα οποία τα μαθηματικά μπορούν να παράσχουν απαντήσεις. Η καλλιέργεια των μαθηματικών δεξιοτήτων μέσω της εκπαίδευσης συμβάλλει στην απόκτηση γνώσης που μπορεί να αξιοποιηθεί σε πολλές δραστηριότητες της καθημερινής ζωής (Skovsmose, 2003). Παράλληλα, αποτελεί πραγματικότητα ότι οι δεξιότητες στα μαθηματικά μπορούν να συμβάλλουν καθοριστικά στην οικονομική ανάπτυξη μιας χώρας εξαιτίας του μετασχηματισμού των σύγχρονων κοινωνιών σε περισσότερο κοινωνίες βασισμένες στην τεχνολογία, όπου απαιτούνται υψηλότερα επίπεδα τεχνικού ανταγωνισμού και ευέλικτης σκέψης (Soteriou, Karahanna, Papanastasiou, & Diakourakis, 1998). Η αξιολόγηση των

μαθηματικών δεξιοτήτων σε διεθνές επίπεδο γίνεται μέσω της μελέτης TIMMS (Trends in International Mathematics and Science Study) η οποία διενεργείται από το διεθνή οργανισμό για την αποτίμηση της εκπαιδευτικής επίδοσης IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) και μέσω της μελέτης PISA (Programme for International Student Assessment) η οποία διενεργείται από τον Ο.Ο.Σ.Α. (Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης). Σκοπός των διεθνών αυτών αξιολογήσεων, στις οποίες συμμετέχει και η Ελλάδα, είναι η εξέταση των μαθητών ανά τον κόσμο σε μια σειρά δεξιοτήτων που αφορούν ανάμεσα στα άλλα και τα μαθηματικά. Στην Ελλάδα, σε εθνικό επίπεδο, δεν υπάρχει θεσμοθετημένος κάποιος τρόπος αξιολόγησης των μαθηματικών δεξιοτήτων στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση μέσω εθνικών εξεταστικών δοκιμασιών. Ωστόσο, διάφοροι φορείς προβαίνουν σε διαγωνισμούς, στους οποίους οι μαθητές συμμετέχουν εθελοντικά και εξετάζονται σε θέματα μεγαλύτερων απαιτήσεων συγκριτικά με τα θέματα στα οποία εξετάζονται οι μαθητές στα μαθηματικά του σχολείου. Παράδειγμα τέτοιου διαγωνισμού αποτελεί ο «Διαγωνισμός των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής», που διεξάγεται από το Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας και στον οποίο συμμετέχουν μαθητές από Δημοτικά Σχολεία της Δυτικής Μακεδονίας. Ο ρόλος της οικογένειας στην εκπαίδευση των παιδιών αναγνωρίζεται ως σημαντικότατος παράγοντας στις σχολικές επιδόσεις τους και γενικότερα στην αποτελεσματικότητα του σύγχρονου σχολείου (Epstein & Jansorn, 2004). Οι επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά φαίνεται να επηρεάζονται από το κοινωνικοοικονομικό υπόβαθρο της οικογένειας τους ακόμη και από την προσχολική εκπαίδευση (Λεμονίδης & Χατζηλιαμή, 2005). Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, έρευνες έχουν δείξει ότι οι επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά επηρεάζονται σημαντικά τόσο από το μορφωτικό επίπεδο των γονέων όσο και από το οικονομικό επίπεδο της οικογένειας (Λεμονίδης, Μαρκάδας, & Τσακιρίδου, Ένα μοντέλο για τον προσδιορισμό της γονεϊκής εμπλοκής των Ελλήνων γονέων στην εκπαίδευση των παιδιών τους στα Μαθηματικά, 2011). Επιπλέον, ενδιαφέρον παρουσιάζει και η μελέτη της επίδρασης του μεγέθους του σχολείου, αλλά και της περιοχής στην οποία βρίσκεται το σχολείο, ως παραγόντων οι οποίοι ενδεχομένως να επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά και γενικότερα την αποτελεσματικότητα ενός σχολείου (Kirjavainen, 2009), (Tsakiridou & Stergiou, 2013). Στόχος της παρούσας έρευνας είναι η καταγραφή των μαθηματικών δεξιοτήτων των μαθητών της Στ΄ Δημοτικού, μέσω της επίδοσης τους σε ένα τεστ μαθηματικών. Επιπλέον, μελετάται η επίδραση των χαρακτηριστικών των σχολείων και των οικογενειών των μαθητών στην επίδοση τους στο τεστ των μαθηματικών.

2. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε στην περιφέρεια Δυτικής Μακεδονίας το χρονικό διάστημα Μαΐου-Ιουνίου 2013, περίοδος κατά την οποία οι μαθητές έχουν διδαχθεί την ύλη της ΣΤ΄ Δημοτικού. Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από 22 σχολικές μονάδες της περιφέρειας και η επιλογή των μονάδων αυτών έγινε με τη

μέθοδο της δειγματοληψίας κατά στρώματα, με βάση το μέγεθος και την περιοχή του σχολείου.

3. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

3.1. Ερωτηματολόγιο για τους γονείς

Βασικός στόχος του ερωτηματολογίου που απαντήθηκε από τους γονείς των μαθητών ήταν η συλλογή στοιχείων που αφορούν στο οικογενειακό περιβάλλον του κάθε μαθητή όπως στοιχεία για το μορφωτικό επίπεδο των γονέων και το εισόδημα τους. Τα στοιχεία του ερωτηματολογίου των γονέων αξιοποιήθηκαν στην ανάλυση ελαχίστων τετραγώνων (OLS) αποτελώντας τις ανεξάρτητες μεταβλητές-παράγοντες που πιθανώς να επηρεάζουν την εξαρτημένη μεταβλητή, η οποία είναι η σχολική επίδοση των μαθητών της ΣΤ΄ Δημοτικού στα μαθηματικά.

3.2. Ερωτηματολόγιο για το σχολείο

Το ερωτηματολόγιο το οποίο συμπληρώθηκε από τους Διευθυντές των σχολείων είχε ερωτήματα τα οποία αφορούσαν τον συνολικό αριθμό των μαθητών και των εκπαιδευτικών του σχολείου έτσι ώστε να προσδιοριστεί το μέγεθος της σχολικής μονάδας κατατάσσοντας τα σχολεία σε επίπεδα οργανικότητας τα οποία θα αναλυθούν παρακάτω.

3.3. Ερωτηματολόγιο για το μαθητή

Το ερωτηματολόγιο-τεστ των Μαθηματικών στο οποίο κλήθηκαν να απαντήσουν οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης των σχολικών μονάδων που συμμετείχαν στην έρευνα, δημιουργήθηκε με βάση το Αναλυτικό Πρόγραμμα της Στ΄ Δημοτικού και τη μελέτη TIMSS (2011), η οποία περιγράφεται αναλυτικά στη συνέχεια. Το ερωτηματολόγιο αποτελούνταν από 15 ερωτήσεις, καλύπτοντας όλα τα γνωστικά αντικείμενα και χωρίζεται σε πέντε ενότητες: Αριθμοί και Πράξεις, Γεωμετρία, Αναλογίες, Στατιστική και Επίλυση προβλήματος. Κάθε σωστή απάντηση κωδικοποιείται με τον αριθμό 1 και κάθε λάθος απάντηση με το 0. Για να υπολογιστεί το τελικό σκορ αθροίζονται τα αποτελέσματα όλων των ασκήσεων και άριστα θεωρείται το 15. Ο χρόνος που είχε στην διάθεση του ο κάθε μαθητής ήταν 36 λεπτά και η απαντήσεις δόθηκαν μέσα στην σχολική αίθουσα.

3.4. Συνοπτική περιγραφή της TIMSS

Ο διεθνής οργανισμός για την αποτίμηση της εκπαιδευτικής επίδοσης IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) έχει αναγνωριστεί ως πρωτοποριακός στις διεθνείς αποτιμήσεις, έχοντας διεκπεραιώσει συγκριτικές μελέτες σχετικές με τις επιδόσεις μαθητών για περισσότερα από 50 χρόνια (Olson, Martin, & Mullis, 2008). Η μελέτη αυτή ονομάζεται TIMMS και

σκοπός της είναι η καταγραφή της επίδοσης των μαθητών στα μαθηματικά και στις φυσικές επιστήμες, καθώς και η σύγκριση των επιδόσεων μεταξύ των χωρών που συμμετέχουν σε αυτή. Ο βασικός στόχος της TIMSS είναι να δημιουργήσει διεθνείς οριοθετήσεις όσον αφορά την σχολική επίδοση και είναι σχεδιασμένη ώστε να συμβαδίζει με τα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, των χωρών που συμμετέχουν στη μελέτη έτσι ώστε τα αποτελέσματα να δηλώνουν το βαθμό στον οποίο οι μαθητές έχουν κατανοήσει τις μαθηματικές και φυσικές έννοιες, ενώ ταυτόχρονα καταγράφεται και το επίπεδο των δεξιοτήτων που έχουν αναπτύξει μέσα στο σχολείο.

4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Σε ό, τι αφορά στις επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά η μέση επίδοση των μαθητών του δείγματος ήταν 9,43 βαθμοί με τυπική απόκλιση 2,738 βαθμών. Η μεγαλύτερη επίδοση που σημειώθηκε ήταν 15 βαθμοί και η μικρότερη 4 βαθμοί. Δηλαδή υπήρξε εύρος 11 βαθμών στο δείγμα μας. Τα περισσότερα παιδιά κατάφεραν να συγκεντρώσουν 9 βαθμούς. Το 25% των παιδιών με χαμηλότερη βαθμολογία συγκέντρωσε έως και 7 βαθμούς και το 75% των παιδιών (κατά σειρά βαθμών) συγκέντρωσε το πολύ έως 12 βαθμούς. Σε δεύτερο επίπεδο ανάλυσης ο σκοπός ήταν να εντοπιστούν οι πιθανοί παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν σημαντικά τη σχολική επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά. Οι παράγοντες αυτοί ανήκουν τόσο στο άμεσο σχολικό περιβάλλον όσο και στο ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον μέσα στο οποίο δραστηριοποιείται το κάθε σχολείο. Για την ανάλυση χρησιμοποιήθηκε η τεχνική της ανάλυσης γραμμικής παλινδρόμησης με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (OLS) και ειδικότερα με τη μέθοδο stepwise (βήμα-βήμα). Αναλυτικότερα, η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η μέση επίδοση των μαθητών του κάθε σχολείου στα μαθηματικά και οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η περιοχή και η οργανικότητα του σχολείου, το οικονομικό επίπεδο των οικογενειών και το μορφωτικό επίπεδο του πατέρα και της μητέρας του κάθε μαθητή. Στην ανάλυση παλινδρόμησης όλοι οι παράγοντες συμμετείχαν στο μοντέλο ως «βωβές» μεταβλητές (dummy variables), όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Παράγοντας	Μεταβλητή	Περιγραφή Μεταβλητής
Περιοχή Σχολείου	Αστική	Αστική = 1, Αλλιώς = 0
	Ημιαστική	Ημιαστική = 1, Αλλιώς = 0
	Αγροτική	Αγροτική = 1, Αλλιώς = 0
Οργανικότητα Σχολείου	Πολυθέσιο	Πολυθέσιο = 1, Αλλιώς = 0
	Ολιγοθέσιο	Ολιγοθέσιο = 1, Αλλιώς = 0
Οικογενειακό Οικονομικό Επίπεδο	Χαμηλό Οικονομικό επίπεδο	Χαμηλό = 1, Αλλιώς = 0
	Μέτριο Οικονομικό επίπεδο	Μέτριο = 1, Αλλιώς = 0

Μορφωτικό Επίπεδο Πατέρα	Υψηλό Οικονομικό επίπεδο	Υψηλό = 1, Αλλιώς = 0
	Χαμηλό Μορφωτικό Επίπεδο	Χαμηλό = 1, Αλλιώς = 0
	Μέτριο Μορφωτικό Επίπεδο	Μέτριο = 1, Αλλιώς = 0
	Υψηλό Μορφωτικό Επίπεδο	Υψηλό = 1, Αλλιώς = 0
Μορφωτικό Επίπεδο Μητέρας	Χαμηλό Μορφωτικό Επίπεδο	Χαμηλό = 1, Αλλιώς = 0
	Μέτριο Μορφωτικό Επίπεδο	Μέτριο = 1, Αλλιώς = 0
	Υψηλό Μορφωτικό Επίπεδο	Υψηλό = 1, Αλλιώς = 0

Πίνακας 1 - Περιγραφή των μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν στην ανάλυση.

4.1. Παράγοντας: Περιοχή σχολείου – Βαθμός αστικότητας

Για να εξεταστεί το πως επηρεάζεται η σχολική επίδοση από την περιοχή στην οποία βρίσκεται το σχολείο, έγινε η εξής κατηγοριοποίηση για κάθε περιοχή: Αστική, Ημιαστική και Αγροτική περιοχή. Από την ανάλυση παλινδρόμησης προέκυψε ότι η μεταβλητή που επιδρά στη σχολική επίδοση στα μαθηματικά είναι η Αστική περιοχή και μάλιστα με θετικό τρόπο ($\beta = 0,226$, $t = 2,782$, $p = 0,014 < 0,05$, $c = 0,696$). Αυτό σημαίνει ότι τα σχολεία τα οποία βρίσκονται σε Αστικές περιοχές μπορούν να έχουν καλύτερη επίδοση στα μαθηματικά κατά 22,6%, συγκριτικά με τα σχολεία που βρίσκονται σε Ημιαστικές και Αγροτικές περιοχές. Αντίθετα, στην περίπτωση σύγκρισης των Αγροτικών με τις Ημιαστικές περιοχές όπου το μοντέλο OLS είναι και πάλι σημαντικό ($F_{1,15} = 5,271$, $p = 0,037 < 0,05$) με συντελεστή προσδιορισμού $R^2 = 0,510$, η μεταβλητή η οποία επηρεάζει τη σχολική επίδοση είναι η Αγροτική Περιοχή και η επίδραση είναι αρνητική ($\beta = - 0,183$, $t = - 2,296$, $p = 0,037 < 0,05$, $c = 0,870$). Δηλαδή, τα σχολεία τα οποία βρίσκονται σε Αγροτικές περιοχές είναι πιθανό να έχουν χαμηλότερη σχολική επίδοση στα μαθηματικά κατά 18,3% από τα σχολεία που βρίσκονται σε Ημιαστικές περιοχές. Το βασικό συμπέρασμα από την ανάλυση του παράγοντα της περιοχής στην οποία βρίσκεται το σχολείο, είναι ότι ο βαθμός αστικότητας της περιοχής παίζει σημαντικό ρόλο.

4.2. Παράγοντας: Οικονομικό Επίπεδο Οικογένειας

Για να εξεταστεί το πώς επηρεάζεται η επίδοση των μαθητών της ΣΤ΄ τάξης στα μαθηματικά από το οικονομικό επίπεδο της οικογένειας έγινε η εξής κατηγοριοποίηση: Χαμηλό οικονομικό επίπεδο για μηνιαία οικογενειακά εισοδήματα έως 1100€, Μέτριο οικονομικό επίπεδο από 1100€ έως 2200€ και Υψηλό οικονομικό επίπεδο από 2200€ και πάνω. Στη συνέχεια, δημιουργήθηκαν τρία μοντέλα OLS τα οποία μελετήθηκαν χωριστά. Στο πρώτο μοντέλο OLS συμμετείχαν ως παράγοντες (control variables) οι κατηγορίες Χαμηλό οικονομικό επίπεδο και Μέτριο οικονομικό επίπεδο. Από την ανάλυση παλινδρόμησης προέκυψε ότι από τις δυο αυτές

μεταβλητές, αυτή που επιδρά στη σχολική επίδοση στα μαθηματικά είναι το Χαμηλό οικονομικό επίπεδο και μάλιστα με αρνητικό τρόπο (β = - 0,246, t = -3,650, p = 0,02 < 0,05, c = 0,907) που σημαίνει ότι τα σχολεία με μαθητές οι οποίοι προέρχονται από οικογένειες με χαμηλό οικονομικό επίπεδο επιτυγχάνουν χαμηλότερη επίδοση στα μαθηματικά κατά 24,6% σε σύγκριση με τα σχολεία με μαθητές οικογενειών υψηλού οικονομικού επιπέδου. Στη συνέχεια, το δεύτερο μοντέλο OLS περιελάμβανε τις κατηγορίες Χαμηλό οικονομικό επίπεδο και Υψηλό οικονομικό επίπεδο. Από αυτές τις μεταβλητές αυτή που επιδρά στη σχολική επίδοση στα μαθηματικά είναι και πάλι το Χαμηλό οικονομικό επίπεδο με αρνητικό τρόπο (β = - 0,246, t = - 3,650, p = 0,02 < 0,05, c = 0,907). Δηλαδή, το οικονομικό επίπεδο της οικογένειας επιδρά σημαντικά στη σχολική επίδοση στα μαθηματικά και συγκεκριμένα στα σχολεία με μαθητές οικογενειών Μέτριου οικονομικού επιπέδου καταγράφεται χαμηλότερη επίδοση κατά 24,6% σε σύγκριση με τα σχολεία με μαθητές οικογενειών Υψηλού οικονομικού επιπέδου. Το τρίτο μοντέλο OLS, στο οποίο συμμετέχουν ως μεταβλητές το Υψηλό και το Μέτριο οικονομικό επίπεδο, οδηγεί σε διαφορετικά αποτελέσματα, σε σχέση με το προηγούμενο μοντέλο OLS. Συγκεκριμένα, τα σχολεία με μαθητές υψηλού οικονομικού επιπέδου μπορούν να επιτύχουν κατά 23,2% υψηλότερη επίδοση στα μαθηματικά σε σχέση με τα σχολεία με μαθητές οικογενειών μέτριου οικονομικού επιπέδου. Συνοψίζοντας, από την ανάλυση OLS προέκυψε ότι το οικονομικό επίπεδο των οικογενειών των μαθητών επιδρά σημαντικά στην επίδοση των σχολείων στα μαθηματικά και συγκεκριμένα, το υψηλό οικονομικό επίπεδο μπορεί να συμβάλλει θετικά, αυξάνοντας τη σχολική επίδοση, ενώ το χαμηλό οικονομικό επίπεδο μπορεί να συμβάλλει αρνητικά.

4.3. Παράγοντας: Μορφωτικό Επίπεδο Πατέρα

Για να εξεταστεί το πώς επηρεάζεται η σχολική επίδοση στα μαθηματικά από το μορφωτικό επίπεδο του πατέρα του κάθε μαθητή έγινε η εξής κατηγοριοποίηση: πατέρας Απόφοιτος Βασικής εκπαίδευσης, Απόφοιτος Λυκείου, Απόφοιτος Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και Κάτοχος μεταπτυχιακού τίτλου. Για εκτενέστερη ανάλυση των δεδομένων δημιουργήθηκαν τέσσερεις συνδυασμοί μορφωτικών επιπέδων, οι οποίοι περιγράφονται αναλυτικά παρακάτω. Ο πρώτος συνδυασμός ο οποίος περιελάμβανε τις μεταβλητές πατέρας Απόφοιτος Βασικής εκπαίδευσης, Απόφοιτος Λυκείου και Απόφοιτος Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και από την ανάλυση παλινδρόμησης προέκυψε ότι η μεταβλητή που επιδρά στην επίδοση στα μαθηματικά είναι η περίπτωση του πατέρα Αποφοίτου Βασικής εκπαίδευσης και η επίδραση είναι αρνητική (β = - 0,238, t = - 2,706, p = 0,016 < 0,05, c = 0,818). Αυτό σημαίνει ότι τα σχολεία με μαθητές οι οποίοι προέρχονται από οικογένειες με πατέρα Απόφοιτο βασικής εκπαίδευσης έχουν χαμηλότερη επίδοση κατά 24,6% συγκριτικά με σχολεία των οποίων οι μαθητές προέρχονται από οικογένειες με πατέρες Αποφοίτους Λυκείου και Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Στο δεύτερο συνδυασμό υπάρχει έλεγχος των μεταβλητών πατέρας Απόφοιτος Βασικής εκπαίδευσης, Απόφοιτος Λυκείου και κάτοχος Μεταπτυχιακού υπάρχει διαφοροποίηση. Στην περίπτωση αυτή, από την

ανάλυση παλινδρόμησης προέκυψαν δύο μοντέλα OLS τα οποία είναι σημαντικά. Στο πρώτο κατά σειρά μοντέλο η μεταβλητή η οποία ξεχωρίζει και επιδρά στην σχολική επίδοση είναι η περίπτωση του πατέρα Κατόχου Μεταπτυχιακού τίτλου με επίδραση θετική ($\beta = 0,289$, $t = 3,084$, $p = 0,008 < 0,01$, $c = 0,711$). Στο δεύτερο κατά σειρά μοντέλο OLS, οι μεταβλητές που ξεχωρίζουν είναι η Βασική Εκπαίδευση του πατέρα η οποία επιδρά με αρνητικό τρόπο στην σχολική επίδοση και η περίπτωση που ο πατέρας είναι κάτοχος Μεταπτυχιακού Τίτλου η οποία έχει θετική επίδραση. Η σημαντικότητα του μοντέλου OLS είναι υψηλή με ($F_{1,15} = 9,293$, $p = 0,003 < 0,01$) και συντελεστή προσδιορισμού $R^2 = 0,755$ και ισχύει για τη μεταβλητή πατέρας Κάτοχος Μεταπτυχιακού τίτλου ($\beta = 0,236$, $t = 2,810$, $p = 0,014 < 0,05$, $c = 0,764$) και για τη μεταβλητή πατέρας Απόφοιτος Βασικής εκπαίδευσης ($\beta = - 0,184$, $t = - 2,438$, $p = 0,014 < 0,01$, $c = 0,764$). Όσον αφορά τον τρίτο συνδυασμό η σύγκριση γίνεται μεταξύ των μεταβλητών, πατέρας Απόφοιτος Βασικής εκπαίδευσης, Απόφοιτος Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και Κάτοχος Μεταπτυχιακού τίτλου. Στη σύγκριση αυτή έχουμε και πάλι τη δημιουργία δύο μοντέλων OLS τα οποία είναι σημαντικά. Ξεκινώντας από το πρώτο μοντέλο OLS, το οποίο είναι σημαντικό με ($F_{1,15} = 9,508$, $p = 0,008 < 0,01$) και συντελεστή προσδιορισμού $R^2 = 0,623$, παρατηρείται ότι η μεταβλητή η οποία είναι σημαντική είναι η μεταβλητή πατέρας Κάτοχος Μεταπτυχιακού τίτλου. Η επίδραση της μεταβλητής αυτής στη σχολική επίδοση είναι θετική ($\beta = 0,289$, $t = 3,084$, $p = 0,008 < 0,01$, $c = 0,711$). Στο δεύτερο μοντέλο OLS, το οποίο είναι σημαντικό με ($F_{1,15} = 9,293$, $p = 0,003 < 0,01$) και συντελεστή προσδιορισμού $R^2 = 0,755$, οι μεταβλητές οι οποίες εμφανίζονται ως σημαντικές είναι δύο και η καθεμία από αυτές επηρεάζει την σχολική επίδοση με διαφορετικό τρόπο. Έτσι, το Μεταπτυχιακό του πατέρα επηρεάζει θετικά την επίδοση στα μαθηματικά ($\beta = 0,236$, $t = 2,810$, $p = 0,014 < 0,05$, $c = 0,764$) και η μεταβλητή Βασική εκπαίδευση πατέρα έχει αρνητική επίδραση ($\beta = - 0,184$, $t = - 2,438$, $p = 0,029 < 0,05$, $c = 0,764$). Ο τέταρτος και τελευταίος συνδυασμός, για την ανάλυση του μορφωτικού επιπέδου του πατέρα των μαθητών, περιελάμβανε τις μεταβλητές πατέρας Απόφοιτος Λυκείου, Απόφοιτος Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης και Κάτοχος Μεταπτυχιακού τίτλου. Ο συνδυασμός εμφανίστηκε ως σημαντικός με ($F_{1,15} = 9,508$, $p = 0,008 < 0,01$) και συντελεστή προσδιορισμού $R^2 = 0,623$ και η μεταβλητή η οποία επηρεάζει την σχολική επίδοση είναι η περίπτωση του πατέρα Κατόχου Μεταπτυχιακού τίτλου. Η επίδραση της είναι της τάξεως του 28,9% και είναι θετική ($\beta = 0,289$, $t = 3,084$, $p = 0,008 < 0,01$, $c = 0,711$). Συμπερασματικά, το μορφωτικό επίπεδο του πατέρα είναι ένας παράγοντας που επιδρά σημαντικά στην σχολική επίδοση στα μαθηματικά και συγκεκριμένα, το υψηλό μορφωτικό επίπεδο του πατέρα μπορεί να επιδράσει θετικά την επίδοση του σχολείου, αυξάνοντάς την. Αντίθετα, το χαμηλό μορφωτικό επίπεδο του πατέρα επιδρά αρνητικά στην επίδοση στα μαθηματικά μειώνοντας την σημαντικά.

4.4. Παράγοντας: Μορφωτικό Επίπεδο Μητέρας

Για να εξεταστεί το πώς επηρεάζεται η σχολική επίδοση στα μαθηματικά από το μορφωτικό επίπεδο της μητέρας του κάθε μαθητή έγινε η εξής κατηγοριοποίηση: μητέρα Απόφοιτη Λυκείου, Απόφοιτη Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης και Κάτοχος Μεταπτυχιακού. Από την ανάλυση παλινδρόμησης προέκυψε ότι το μοντέλο OLS είναι σημαντικό ($F_{1,15} = 9,108$, $p = 0,009 < 0,01$) με συντελεστή προσδιορισμού $R^2 = 0,615$. Πιο συγκεκριμένα από αυτές τις μεταβλητές αυτή που επιδρά στη σχολική επίδοση στα μαθηματικά είναι η περίπτωση της μητέρας απόφοιτης Λυκείου και η επίδραση της είναι αρνητική ($\beta = - 0,218$, $t = -3,018$, $p = 0,009 < 0,01$, $c = 0,878$). Αυτό σημαίνει ότι τα σχολεία με μαθητές οι οποίοι προέρχονται από οικογένειες με μητέρα απόφοιτη Λυκείου υπάρχει περίπτωση να έχουν χαμηλότερη επίδοση στα μαθηματικά κατά 21,8%, συγκρινόμενα με σχολεία όπου οι μητέρες των μαθητών είναι απόφοιτες Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης ή κάτοχοι Μεταπτυχιακού τίτλου και έχουν μέγιστη δυνατή αποδοτικότητα περίπου 87%.

4.5. Παράγοντας: Οργανικότητα Σχολείου

Για να μπορέσει να γίνει η ανάλυση της επίδρασης του παράγοντα Οργανικότητα στη σχολική επίδοση στα μαθηματικά, οι σχολικές μονάδες χωρίστηκαν σε δύο κατηγορίες. Στη μία κατηγορία, αυτή με τα σχολεία χαμηλής οργανικότητας, ως ολιγοθέσια ορίστηκαν τα σχολεία τα οποία είχαν οργανικότητα μέχρι και τρεις εκπαιδευτικούς, ενώ στη δεύτερη, ως πολυθέσια ορίστηκαν τα σχολεία με υψηλή οργανικότητα, δηλαδή σχολεία που έχουν τέσσερις έως δώδεκα εκπαιδευτικούς. Έτσι στο πρώτο μοντέλο OLS εξετάζεται η περίπτωση των ολιγοθέσιων σχολείων και το μοντέλο είναι σημαντικό ($F_{1,15} = 5,966$, $p = 0,027 < 0,05$) και με συντελεστή προσδιορισμού $R^2 = 0,533$. Πιο συγκεκριμένα η χαμηλή οργανικότητα του σχολείου έχει αρνητική επίδραση στην επίδοση στα μαθηματικά ($\beta = - 0,222$, $t = - 2,433$, $p = 0,027 < 0,05$, $c = 0,815$). Αυτό σημαίνει ότι τα ολιγοθέσια σχολεία εμφανίζουν χαμηλότερη επίδοση κατά 22,2% συγκριτικά με τα πολυθέσια σχολεία. Το δεύτερο μοντέλο OLS το οποίο εξετάζει τα πολυθέσια σχολεία είναι σημαντικό ($F_{1,15} = 5,966$, $p = 0,027 < 0,05$) με συντελεστή προσδιορισμού $R^2 = 0,533$. Πιο συγκεκριμένα η υψηλή οργανικότητα του σχολείου έχει θετική επίδραση στην σχολική επίδοση ($\beta = 0,222$, $t = 2,443$, $p = 0,027 < 0,05$, $c = 0,593$). Αυτό σημαίνει ότι τα πολυθέσια σχολεία εμφανίζουν υψηλότερη επίδοση στα μαθηματικά κατά 22,2% συγκριτικά με τα ολιγοθέσια σχολεία, πράγμα το οποίο επαληθεύεται ουσιαστικά και στα δύο μοντέλα OLS. Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι η οργανικότητα του σχολείου παίζει σημαντικό ρόλο στην σχολική επίδοση στα μαθηματικά.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα έρευνα μελετήθηκαν οι μαθηματικές δεξιότητες των μαθητών της ΣΤ΄ Δημοτικού, με τη χρήση ενός τεστ βασισμένου στους στόχους του Αναλυτικού Προγράμματος της Στ΄ Δημοτικού και τη μελέτη TIMSS (2011). Στην έρευνα

συμμετείχαν μαθητές από 22 σχολικές μονάδες της Δυτικής Μακεδονίας, οι οποίοι σημείωσαν αρκετά καλές επιδόσεις στο τεστ. Με την τεχνική της ανάλυσης παλινδρόμησης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (OLS) εξετάστηκαν οι τυχόν επιδράσεις διαφόρων παραγόντων στην σχολική επίδοση. Οι παράγοντες αυτοί είναι το μορφωτικό επίπεδο του πατέρα και τα μητέρας ξεχωριστά, το οικονομικό επίπεδο της οικογένειας του κάθε μαθητή, το μέγεθος του σχολείου και ο βαθμός αστικότητας της περιοχής του σχολείου. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης συμφωνούν ουσιαστικά με τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών στην εκπαίδευση, οι οποίες επίσης εντοπίζουν ότι οι βασικοί λόγοι που εμφανίζουν τα σχολεία διαφορές στην τεχνική αποδοτικότητα τους είναι κοινωνικό-οικονομικοί (Gustafsson, Hansen, & Rosén, 2012). Συγκεκριμένα, οι παράγοντες που προέκυψε ότι επιδρούν σημαντικά στην επίδοση ενός σχολείου στα μαθηματικά είναι το μορφωτικό επίπεδο των γονέων, το οικονομικό επίπεδο της οικογένειας, το μέγεθος του σχολείου, καθώς και ο βαθμός αστικότητας της περιοχής στην οποία βρίσκεται το σχολείο. Συγκεκριμένα, το μορφωτικό επίπεδο των γονέων και το οικονομικό επίπεδο της οικογένειας των μαθητών επηρεάζουν θετικά την επίδοση στο τεστ των μαθηματικών. Ειδικότερα, το υψηλό οικονομικό επίπεδο και μορφωτικό επίπεδο μπορούν να συμβάλλουν στην αύξηση της επίδοσης στο τεστ, ενώ το χαμηλό οικονομικό επίπεδο και το χαμηλό μορφωτικό επίπεδο μπορούν να συμβάλλουν αρνητικά, μειώνοντας την, όπως αναφέρεται και σε προηγούμενες έρευνες (Λεμονίδης κ.α. 2011). Επιπλέον, ο έμμεσος παράγοντας επιρροής, η αστικότητα της περιοχής, σχετίζεται θετικά με την επίδοση στα μαθηματικά, καθώς παρατηρήθηκε ότι όταν ένα σχολείο βρίσκεται σε αστική περιοχή έχει υψηλότερη επίδοση συγκριτικά με ένα σχολείο το οποίο βρίσκεται σε ημιαστική ή αγροτική περιοχή, όπως. Όσον αφορά τον παράγοντα μέγεθος σχολείου, αποδείχθηκε ότι τα πολυθέσια σχολεία έχουν την δυνατότητα να εμφανίσουν καλύτερα αποτελέσματα από τα ολιγοθέσια σχολεία καθώς η μεταβλητή, υψηλή οργανικότητα, φάνηκε να έχει θετική επίδραση στα μαθηματικά, όπως έχουν δείξει και προηγούμενες έρευνες (Tsakiridou & Stergiou, 2013).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Epstein, J., & Jansorn, N. (2004). School, Family, and Community Partnerships Link the Plan. *Education Digest*, pp. 19-23.

Eurydice Report. (2012). *Developing Key Competences at School in Europe: Challenges and Opportunities for Policy*. Brussels: Education, Audiovisual and Culture Executive Agency.

Fiske, E. B. (2000). *Education for All: Status and Trends 2000 Assessing Learning Achievement*. Paris: UNESCO.

Gustafsson, J.-E., Hansen, K. Y., & Rosén, M. (2012). Effects of Home Background on Student Achievement in Reading, Mathematics, and Science at the Fourth Grade. *TIMSS AND PIRLS 2011 RELATIONSHIPS REPORT*, pp. 181-287.

Kirjavainen, T. (2009). *Essays on the Efficiency of Schools and Student Achievement.* Government Institute for Economic Research. Helsinki: Vatt Publications.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., & Preuschoff, C. (2012). *TIMSS 2011 Assessment Frameworks.* TIMSS & PIRLS International Study Center.

Olson, J., Martin, M., & Mullis, I. (2008). *TIMSS 2007 Technical Report.* Boston College: Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Parveva, T., De Coster, I., & Noorani, S. (2009). *Εθνικές Εξεταστικές Δοκιμασίες Μαθητών στην Ευρώπη: Σκοποί, Οργάνωση και Αξιοποίηση των Αποτελεσμάτων.* Εκτελεστικό Οργανισμό Εκπαίδευσης, Οπτικοακουστικών Θεμάτων και Πολιτισμού (EACEA P9 Eurydice).

Parveva, T., Noorani, S., Ranguelov, S., Motiejunaite, A., & Kerpanova, V. (2011). *Mathematics Education in Europe: Common Challeneges and National Policies.* Brussels: Education, Audiovisual and Culture Executive Agency.

Skovsmose, O. (2003). Τα Μαθηματικά σε δράση. Είναι τα Μαθηματικά χωρίς κοινωνική σημασία;. *Θέματα στην Εκπαίδευση, 4*, pp. 143-167.

Soteriou, A. C., Karahanna, E., Papanastasiou, C., & Diakourakis, M. S. (1998). Using DEA to evaluate the efficiency of secondary schools: the case of Cyprus. *International Journal of Educational Management*, *12*(2), 65–73.

Tsakiridou, H., & Stergiou, K. (2013). Evaluating the Efficiency of Primary School Education. *Advanced Research in Scientific Areas - International Virtual Conference*.

Δημοκρατίας, Ε. τ. (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών. *Φ.Ε.Κ. 303* (pp. 3733-4068). Αθήνα: Εθνικό Τυπογραφείο.

Επίσημη Εφημερίδα της Ευρωπαϊκής Ένωσης. (2006). ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ — ΕΝΑ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΝΑΦΟΡΑΣ. *2006/962/ΕΚ*, (pp. 10-18). Βρυξέλλες,.

Λεμονίδης, Χ., & Χατζηλιαμή, Μ. (2005). Τα λειτουργικά χαρακτηριστικά της οικογένειας και οι αριθμητικές γνώσεις των νηπίων. *Πρακτικά 4ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Π.Τ.Δ.Ε. Ρεθύμνου*, pp. 83-92.

Λεμονίδης, Χ., Μαρκάδας, Σ., & Τσακιρίδου, Ε. (2011, Νοέμβριος). Ένα μοντέλο για τον προσδιορισμό της γονεϊκής εμπλοκής των Ελλήνων γονέων στην εκπαίδευση των παιδιών τους στα Μαθηματικά. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, ΕΝΕΔΙΜ*(6).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΣΠΟΥΔΕΣ, ΚΑΡΙΕΡΑ: ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΑΣΠΑΙΤΕ

Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος & Κατερίνα Κασιμάτη

Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου & Ανώτατη Σχολή Παιδαγωγικής και Τεχνολογικής Εκπαίδευσης

amoutsiosrentzos@aegean.gr, kkasimati@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη συγκεκριμένη έρευνα μελετώνται οι αντιλήψεις για τα Μαθηματικά τελειόφοιτων φοιτητών όλων των τμημάτων της ΑΣΠΑΙΤΕ, καθώς και για το ρόλο των μαθηματικών τόσο στην καριέρα τους, όσο και σε ενδεχόμενες μελλοντικές σπουδές. Βρέθηκαν θετικές αντιλήψεις των φοιτητών για τη φύση των Μαθηματικών, ενώ για το ρόλο των Μαθηματικών στο μέλλον τους οι θετικές αντιλήψεις είναι γενικού χαρακτήρα και δε φανερώνουν συγκεκριμένη γνώση του ρόλου των Μαθηματικών. Το Τμήμα ειδικότητας φοίτησης δε φαίνεται να επηρεάζει τις αντιλήψεις τους, ενώ παρατηρήθηκαν διαφοροποιήσεις ως προς το φύλο των φοιτητών.

1.ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΕ 'ΜΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ' ΠΛΑΙΣΙΟ

Ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών έχουν επικεντρώσει το ενδιαφέρον τους στη μαθηματική εκπαίδευση σε πλαίσια που δεν χαρακτηρίζονται πρωτίστως ως 'μαθηματικά', όπως τα Μαθηματικά που εμπεριέχονται στην εκπαίδευση άλλων γνωστικών αντικειμένων (φυσική, χημεία κ.ά.), της τριτοβάθμιας μαθηματικής εκπαίδευσης σε μη μαθηματικά πανεπιστημιακά τμήματα διαφόρων κατευθύνσεων (παιδαγωγικών, φυσικών, μηχανολογίας κ.ά.), καθώς και τα Μαθηματικά στους χώρους εργασίας. Το ερευνητικό ενδιαφέρον καλύπτει ένα ευρύ φάσμα συμπεριλαμβανομένων των παιδαγωγικών προσεγγίσεων και του περιεχομένου των διδασκόμενων Μαθηματικών (Engelbrecht, Bergsten & Kågesten, 2012), των στάσεων και των αντιλήψεων των εκπαιδευομένων (διδασκόντων, εκπαιδευτικών στελεχών) για τα Μαθηματικά (Barkatsas, Kasimatis & Gialamas, 2009· Κασιμάτη & Γιαλαμάς, 1998· Μούτσιος-Ρέντζος & Καλαβάσης, 2013· Φερεντίνος & Κασιμάτη, 2001), των στυλ σκέψης των εκπαιδευομένων (Moutsios-Rentzos, 2011) της τμηματικής ή/και πανεπιστημιακής σύνδεσης ('affiliation') των εκπαιδευομένων (Bingolbali, Monaghan & Roper, 2007), της ακαδημαϊκής ή/και επαγγελματικής ταυτότητάς τους (Craig, 2013· Sfard & Prusak, 2005), του ρόλου του εργασιακού χώρου και των εργαλείων (FitzSimons, 2005, 2001· Triantafillou & Potari, 2010).

Σε αυτό το πλαίσιο, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των αντιλήψεων των φοιτητών της Ανώτατης Σχολής Παιδαγωγικής και Τεχνολογικής Εκπαίδευσης (ΑΣΠΑΙΤΕ), καθώς σε αυτή την Σχολή η μαθηματική εκπαίδευση στο πλαίσιο του γνωστικού αντικειμένου φοίτησης (Ηλεκτρολόγοι Μηχανικοί, Μηχανολόγοι

Μηχανικοί, Πολιτικοί Μηχανικοί· σε αντιστοιχία με Ανώτατα Τεχνολογικά Ιδρύματα) συνδυάζεται με την παιδαγωγική προσέγγιση και εκπαίδευση σχετικά με το γνωστικό αντικείμενο. Η αλληλεπίδραση παιδαγωγικής και τεχνολογικής εκπαίδευσης διαμορφώνουν, μια ιδιαίτερη πανεπιστημιακή σύνδεση και ταυτότητα εκπαιδευόμενου ('identity') της οποίας οι σχέσεις με τις αντιλήψεις για τα Μαθηματικά και τον ρόλο τους είναι σημαντικό να διερευνηθούν. Συνεπώς, σε αυτή την ποσοτική μελέτη υιοθετείται το θεωρητικό πλαίσιο και τα μεθοδολογικά εργαλεία των Wood, Petocz και Reid (2012) με σκοπό τη διερεύνηση των αντιλήψεων για τα Μαθηματικά, καθώς και για τον ρόλο τους τόσο στη μελλοντική καριέρα, όσο και σε ενδεχόμενες μελλοντικές σπουδές, όπως αυτές διαμορφώνονται σε τελειόφοιτους φοιτητές των τμημάτων της ΑΣΠΑΙΤΕ.

2. ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΦΥΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΟ ΡΟΛΟ ΤΟΥΣ

Οι αντιλήψεις για τα Μαθηματικά έχουν αποτελέσει αντικείμενο έρευνας πολυάριθμων μελετών, με διάφορες θεωρητικές οπτικές, σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης και πέραν αυτής (Crawford, Gordon, Nicholas & Prosser, 1998· McLeod, 1992· Leder, Pehkonen & Törner, 2003· Lester, Garofalo & Kroll, 1989). Ενδεικτικά, σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών, σύμφωνα με τον Ernest (1991) οι αντιλήψεις για τα Μαθηματικά μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε *απολυτοκρατικές* (absolutism· τα Μαθηματικά είναι αντικειμενικά, απόλυτα, βέβαια, επιτρέποντας τον προσδιορισμό της αλήθειας ή του ψεύδους των όποιων προτάσεων) και σε *διαψευστικές* (fallibilism· τα Μαθηματικά ως κοινωνική κατασκευή, ανθρωπολογικού χαρακτήρα υπόκεινται σε ερμηνείες και εξαρτώνται από το χρόνο και το πλαίσιο). Η Daskalogianni (Daskalogianni & Simpson, 2001· Daskalogianni, 2003) διερεύνησε τις απόψεις για τα Μαθηματικά πρωτοετών φοιτητών μαθηματικού τμήματος αναγνωρίζοντας τρεις κατηγορίες: *συστηματικά* (systematic· τα Μαθηματικά είναι μια επιστήμη ασφαλών απαντήσεων και οι λύσεις προκύπτουν μέσω σίγουρων σαφών διαδικασιών και βημάτων), *χρηστικά* (utilitarian· τα Μαθηματικά είναι μια επιστήμη με άμεσες εφαρμογές στην καθημερινή ζωή), και *διερευνητικά* (exploratory· τα Μαθηματικά σχετίζονται με την επίλυση προβλημάτων, την εύρεση μοτίβων, σχέσεων και συνδέσεων). Επιπρόσθετα, ερευνητές μελετούν τις αντιλήψεις για τα Μαθηματικά μέσω των πολυπλοκότερων *συστημάτων από πιστεύω* (belief systems· Di Martino, 2004· Liljedahl, 2008· Pehkonen & Pietilä, 2003· Törner, Rolka, Rösken & Sriraman· 2010) ή υπό μια γενικότερη *συστημική οπτική* (Beswick, 2006· Μούτσιος-Ρέντζος & Καλαβάσης, 2013).

Σχετικά με το μη πρωτίστως μαθηματικό πλαίσιο και με τις αντιλήψεις του ρόλου των Μαθηματικών στη μελλοντική ζωή, οι Wood κ.ά. (2012) διερεύνησαν τις απόψεις φοιτητών διαφόρων Πανεπιστημιακών Τμημάτων και διαφορετικών Πανεπιστημίων μέσα από μια *φαινομενογραφική* (phenomenographic) οπτική. Αναγνώρισαν τέσσερις κατηγορίες σχετικά με τις απόψεις τους για το ρόλο των

μαθηματικών στο μέλλον τους: *δεν γνωρίζουν* (άγνοια για το ρόλο των Μαθηματικών· τα Μαθηματικά μόνο δομικό κομμάτι του πτυχίου), *διαδικαστικές δεξιότητες* (τα Μαθηματικά έχουν εργαλειακό χαρακτήρα και χρησιμοποιούνται όπου είναι σχετικά), *εννοιολογικές δεξιότητες* (τα Μαθηματικά προάγουν εννοιολογικές δεξιότητες όπως η λογική σκέψη ή η επίλυση προβλήματος), *επαγγελματικές δεξιότητες* (τα Μαθηματικά έχουν ουσιαστικό ρόλο στην καριέρα, χωρίς όμως να μπορεί να συγκεκριμενοποιηθεί). Οι Wood κ.ά. (2012) σημειώνουν την αδυναμία πολλών φοιτητών να διατυπώσουν το ρόλο των Μαθηματικών στο μέλλον τους. Η Craig (2013) υιοθέτησε αυτή την κατηγοριοποίηση σε μια διαμήκη μελέτη σχετικά με τις αντιλήψεις για τα Μαθηματικά φοιτητών μηχανικών φανερώνοντας αντιλήψεις αποτελούμενες από ένα συνδυασμό εννοιολογικών και διαδικαστικών δεξιοτήτων.

Η κατηγοριοποίηση εξελίχθηκε περαιτέρω μέσω ποσοτικής μεθοδολογίας (Wood, Petocz & Reid, 2012). Η ποιοτική έρευνα οδήγησε στη διατύπωση των ερωτημάτων, ενώ η στατιστική ανάλυση επέτρεψε την επιλογή των καταλληλότερων για τη συγκρότηση ενός ερωτηματολογίου το οποίο αποτελείται από τρία μέρη (βλ. Παράρτημα). Στο πρώτο μέρος διερευνώνται οι *Αντιλήψεις για τα Μαθηματικά* (16 ερωτήματα) οι οποίες διακρίνονται σε τρεις βασικούς άξονες: *Αριθμοί/Στοιχεία* (‘Number/Components’), *Μοντελοποίηση/Αφηρημένα* (Modelling/Abstract) και *Ζωή* (‘Life’). Το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου επικεντρώνεται στη *Μελλοντική χρήση των Μαθηματικών στις σπουδές* (14 ερωτήματα), ενώ το τρίτο στη *Μελλοντική χρήση των Μαθηματικών στην καριέρα* (16 ερωτήματα). Για το κάθε ένα από αυτά τα δύο μέρη του ερωτηματολογίου αναγνωρίζονται τρεις κλίμακες: *Πρακτική* (‘practical’· επικεντρωμένη στους υπολογισμούς, στην ανάλυση, στην επίλυση προβλημάτων και στη λογική σκέψη), *Γενική* (‘generic’· συμπεριλαμβάνει έναν γενικότερο μαθηματικό τρόπο σκέψης και την αναγνώριση της ουσιαστικής, αλλά γενικόλογης, σημασίας των Μαθηματικών στις σπουδές και στην καριέρα), και *Γνώση* (έλλειψη) (‘knowledge (lack of)’· σχετίζεται με τη γνώση, ή την έλλειψη γνώσης, του συγκεκριμένου ρόλου των μαθηματικών στις σπουδές και στην καριέρα). Τα ερωτήματα είναι τύπου Likert (5-βάθμια κλίμακα με ουδέτερο) επιτρέποντας την καταγραφή των αντιλήψεων ανεξάρτητα για τον κάθε άξονα και την κάθε κλίμακα του ερωτηματολογίου.

Σε αυτή τη μελέτη, βασιζόμενοι στην έρευνα των Wood, Petocz και Reid (2012) και στο ερωτηματολόγιο που προτείνουν, τίθενται τα ερωτήματα: α) Ποιες είναι οι αντιλήψεις των φοιτητών της ΑΣΠΑΙΤΕ για τα Μαθηματικά και το ρόλο τους στην μελλοντική καριέρα και στις μελλοντικές σπουδές τους; β) Πώς συγκρίνονται οι αντιλήψεις αυτές ανάλογα με το Τμήμα φοίτησης και με το φύλο των φοιτητών;

3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Η έρευνα διεξήχθη τον Ιανουάριο του 2013 με τεταρτοετείς φοιτητές των τριών Τμημάτων της ΑΣΠΑΙΤΕ (N=202· βλ. Πίνακα 1).

	Ηλεκτρολόγοι Μηχ.	Πολιτικοί Μηχ.	Μηχανολόγοι Μηχ.	Σύνολο
Άνδρες	64 (73,6%)	26 (39,4%)	41 (83,7%)	131 (64,9%)
Γυναίκες	23 (26,4%)	40 (60,6%)	8 (16,3%)	71 (35,1%)
Σύνολο	87 (100%)	66 (100%)	49 (100%)	202 (100%)

Πίνακας 1: Οι συμμετέχοντες και οι συμμετέχουσες στην έρευνα.

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με μια μεταφρασμένη στα ελληνικά εκδοχή του προαναφερθέντος ερωτηματολογίου που προτείνεται από τους Wood, Petocz και Reid (2012· βλ. Παράρτημα). Η στατιστική ανάλυση έγινε με το λογισμικό πακέτο SPSS 17 (SPSS Inc., Chicago, IL) συμπεριλαμβάνοντας ανεξάρτητο έλεγχο Student t-test, Ανάλυση Διακύμανσης μονής κατεύθυνσης (One-Way ANOVA) και Ανάλυση Διακύμανσης επαναλαμβανόμενων μετρήσεων (Repeated Measures ANOVA).

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Μια σημείωση για την αξιοπιστία και την εγκυρότητα του ερωτηματολογίου

Η εσωτερική συνέπεια των τριών αξόνων και των έξι κλιμάκων του μεταφρασμένου ερωτηματολογίου κρίνεται ικανοποιητική με μέση τιμή α=0,812±0,06 [0,698-0,870]. Επιπροσθέτως, η παραγοντική ανάλυση ακολουθώντας τη διαδικασία που προτείνεται από τους Wood, Petocz και Reid (2012) φανέρωσε ότι η δομή των τριών μερών του μεταφρασμένου ερωτηματολογίου είναι σε σημασιολογική συμφωνία με το πρωτότυπο ενισχύοντας την εγκυρότητά του (βλ. Παράρτημα).

4.2 Αντιλήψεις για τα Μαθηματικά και για το ρόλο τους

Αρχικά, καταγράφηκαν οι αντιλήψεις των φοιτητών της ΑΣΠΑΙΤΕ συνολικά και ανά Τμήμα (βλ. Πίνακα 2). Σχετικά με τις αντιλήψεις για τα Μαθηματικά, δε βρέθηκε στατιστικώς σημαντική διαφοροποίηση στους τρεις βασικούς άξονες. Οι φοιτητές φαίνεται να έχουν θετικές (περίπου 34 και 35 στην κλίμακα 10-50) αντιλήψεις και στους τρεις τομείς. Αυτό το εύρημα διαφοροποιείται εν μέρει από διεθνείς έρευνες Wood, Petocz και Reid (2012) στις οποίες καταγράφονται θετικές αντιλήψεις και στους τρεις άξονες, αλλά είναι εντονότερα θετικές οι αντιλήψεις των φοιτητών των διεθνών ερευνών (που συμπεριλαμβάνουν φοιτητές μηχανολογίας και Μαθηματικών) από τους φοιτητές της ΑΣΠΑΙΤΕ στους άξονες ‘Αριθμοί/Στοιχεία’ και ‘Μοντελοποίηση/Αφηρημένα’ (περίπου 39 έως 41 στην κλίμακα 10-50). Επιπροσθέτως, εντός των αντιλήψεων των φοιτητών των διεθνών ερευνών υπάρχει συγκριτικά λιγότερο θετική αντίληψη σχετικά με τη σχέση των Μαθηματικών και του κόσμου που βιώνουν (‘Ζωή’) η οποία όμως είναι αντίστοιχη των αντιλήψεων των φοιτητών της ΑΣΠΑΙΤΕ (περίπου 35 έως 37 στην κλίμακα 10-50). Συνεπώς, οι

τελειόφοιτοι της ΑΣΠΑΙΤΕ φαίνεται να έχουν παρόμοιας έντασης θετικές αντιλήψεις για τα Μαθηματικά και στους τρεις άξονες, οι οποίες είναι λιγότερο έντονες από τις διεθνείς έρευνες αναφορικά με τις αντιλήψεις για τα Μαθηματικά ως αριθμούς, σχέσεις ή πιο αφηρημένα μοντέλα ή εργαλεία για άλλες επιστήμες. Ίσως ο πολύπλευρος χαρακτήρας σπουδών στην ΑΣΠΑΙΤΕ που συνδέει τη μάθηση των Μαθηματικών, τόσο με το γνωστικό αντικείμενο ειδικότητας του κάθε Τμήματος, όσο και με την παιδαγωγική κατάρτιση των φοιτητών, να βοηθά στη διαμόρφωση ομοιόμορφα αναπτυγμένων θετικών και λιγότερο έντονων (συγκριτικά με φοιτητές Τμημάτων λιγότερου πολύπλευρου γνωστικού αντικειμένου) αντιλήψεων για τη φύση των Μαθηματικών.

Σχετικά με το ρόλο των Μαθηματικών στην καριέρα, αλλά και στις ενδεχόμενες σπουδές, οι αντιλήψεις των φοιτητών φαίνεται να διαφοροποιούνται ακολουθώντας ένα στατιστικώς σημαντικά μοτίβο, τόσο για τις σπουδές όσο και για την καριέρα. (βλ. Πίνακα 2). Οι φοιτητές φαίνεται να έχουν θετικές απόψεις (περίπου 37 και 35 στην κλίμακα 10-50) για την 'Πρακτική' όψη του ρόλου των Μαθηματικών, ακολουθούμενες από λιγότερο θετικές (θετικές έως ουδέτερες· περίπου 34 και 31 στην κλίμακα 10-50) αντιλήψεις τη 'Γενική' όψη του ρόλου των Μαθηματικών. Από την άλλη, καταγράφονται οι αρνητικές (περίπου 25 στην κλίμακα 10-50) αντιλήψεις των φοιτητών σχετικά με τη 'Γνώση (έλλειψη)' τους για τον πιο συγκεκριμένο ρόλο των Μαθηματικών στις σπουδές και στην καριέρα τους.

	ΑΣΠΑΙΤΕ (Συνολικά)				Τμήμα					
		Rep. Meas. ANOVA (post-hoc συγκρίσεις)						One-Way ANOVA		
					ΗΜ	ΠΜ	ΜΜ	*F*	*df*	*P*
		F(1,6, 310,0)=2,12, *P*=0,134								
		ΑΣ	ΜΑ	ΖΩ						
ΑΣ	34±7		-	-	34±7	33±7	35±8	0,660	(2,199)	0,518
ΜΑ	35±4			-	35±4	35±4	34±4	0,604	(2,199)	0,548
ΖΩ	34±7				34±7	35±7	33±7	1,958	(2,199)	0,144
		***F*(1,5, 299,0)=225,62, *P*<0,001**								
		ΠΡ(Σ)	ΓΕ(Σ)	ΓΝ(Σ)						
ΠΡ(Σ)	37±7		***P*<0,001**	***P*<0,001**	38±6	38±8	36±8	1,561	(2,199)	0,212
ΓΕ(Σ)	33±7			***P*<0,001**	33±7	33±8	32±7	0,641	(2,199)	0,528
ΓΝ(Σ)	25±9				24±8	26±9	26±8	2,532	(2,199)	0,082
		***F*(1,4, 270,6)=158,24, *P*<0,001**								
		ΠΡ(Κ)	ΓΕ(Κ)	ΓΝ(Κ)						
ΠΡ(Κ)	35±7		***P*<0,001**	***P*<0,001**	35±7	36±7	34±7	0,836	(2,199)	0,435
ΓΕ(Κ)	31±7			***P*<0,001**	32±7	32±7	30±8	0,845	(2,199)	0,431

ΓΝ(Κ)	25±9	24±9	27±9	25±9	2,318 (2,199)	0,101

Σημειώσεις. Τμήμα ΗΜ 'Ηλεκτρολόγοι Μηχανικοί', Τμήμα ΠΜ 'Πολιτικοί Μηχανικοί' και Τμήμα ΜΜ 'Μηχανολόγοι Μηχανικοί'. Με 'ΑΣ', 'ΜΑ', 'ΖΩ', 'ΠΡ(Σ)', 'ΓΕ(Σ)', 'ΓΝ(Σ)', 'ΠΡ(Κ)', 'ΓΕ(Κ)', 'ΓΝ(Κ)' δηλώνονται αντιστοίχως 'Αριθμοί/Στοιχεία', 'Μοντελοποίηση/Αφηρημένα', 'Ζωή', 'Πρακτική (Σπουδές)', 'Γενική (Σπουδές)', 'Γνώση (έλλειψη) (Σπουδές)', 'Πρακτική (Καριέρα)', 'Γενική (Καριέρα)', 'Γνώση (έλλειψη) (Καριέρα)'. Οι τιμές κυμαίνονται από 10 έως 50 ('έντονη διαφωνία' έως 'έντονη συμφωνία') και δηλώνονται με Μέση τιμή±Τυπική απόκλιση. Οι στατιστικώς σημαντικές διαφοροποιήσεις με έντονη γραφή.

Πίνακας 2: Οι αντιλήψεις των φοιτητών συνολικά και συγκριτικά ανά Τμήμα.

Συγκρίνοντας αυτά τα ευρήματα με τις διεθνείς έρευνες παρατηρείται ότι υπάρχει συμφωνία σχετικά με το γεγονός ότι οι θετικότερες αντιλήψεις παρουσιάζονται στην 'Πρακτική' όψη της χρησιμότητας των Μαθηματικών τόσο στις σπουδές, όσο και στην καριέρα. Σχετικά με τις άλλες δύο όψεις, παρατηρούνται παρόμοιες χαμηλότερες θετικές αντιλήψεις. Συνεπώς, παρατηρείται σαφής διαφοροποίηση των αντιλήψεων των φοιτητών της ΑΣΠΑΙΤΕ σχετικά με τη 'Γνώση' σε σχέση με τις διεθνείς έρευνες. Φαίνεται ότι οι φοιτητές της ΑΣΠΑΙΤΕ καταγράφουν θετικές αντιλήψεις για τα Μαθηματικά, που όμως παραμένουν στο πεδίο των γενικότερων εντυπώσεων σχετικά με μια πρακτική τους χρησιμότητα ή μιας γενικότερης ωφέλειας στις σπουδές και στην καριέρα. Καταγράφεται μια ουσιαστική αδυναμία να εντοπιστεί σαφής επίγνωση του συγκεκριμένου τρόπου με τον οποίο πραγματώνεται η γενικότερη χρησιμότητα και πρακτική αξία στις σπουδές και στην καριέρα. Ίσως αυτό να είναι αποτέλεσμα του προαναφερθέντος πολύπλευρου χαρακτήρα σπουδών στην ΑΣΠΑΙΤΕ που να αποτρέπει τους φοιτητές από το να αντιληφθούν με συγκεκριμένο τρόπο το ρόλο των Μαθηματικών στις σπουδές τους και στην καριέρα τους. Ενδέχεται η σύνθετη ταυτότητα που διαμορφώνεται μέσα από αυτή τη διαδικασία σπουδών να μην έχει τον καθορισμένο χαρακτήρα που χρειάζεται για την επίγνωση του συγκεκριμένου ρόλου των Μαθηματικών στην καριέρα και στις σπουδές. Επιπρόσθετα, το γεγονός ότι πολλοί φοιτητές επιλέγουν τη δυνατότητα φοίτησης ενός επιπλέον έτους για την απόκτηση του αντίστοιχου με τα ΑΤΕΙ τίτλου σπουδών ειδικότητας ίσως να περιπλέκει περαιτέρω τα ζητήματα ταυτότητας.

Το Τμήμα φοίτησης ('Ηλεκτρολόγοι Μηχανικοί', 'Πολιτικοί Μηχανικοί', 'Μηχανολόγοι Μηχανικοί') δε φαίνεται να επηρεάζει τις αντιλήψεις των φοιτητών για τα Μαθηματικά στους τρεις βασικούς άξονες ('Αριθμοί/Στοιχεία', 'Μοντελοποίηση/Αφηρημένα', 'Ζωή'), ούτε για το ρόλο των Μαθηματικών στην καριέρα τους ή στις ενδεχόμενες μελλοντικές σπουδές τους.

Για τη διερεύνηση αναπτυξιακών παραγόντων που μπορεί να επηρεάζουν τις αντιλήψεις των φοιτητών, συγκρίθηκαν οι αντιλήψεις αναφορικά με το φύλο. Στατιστικώς σημαντικές θετικότερες αντιλήψεις βρέθηκαν στις φοιτήτριες της ΑΣΠΑΙΤΕ σε έναν από τους τρεις άξονες και σε τέσσερις από τις έξι κλίμακες: 'Ζωή' (33±7 vs. 36±5· $t(200)=-2,464$, $p=0,006$), 'Πρακτική (Σπουδές)' (36±7 vs. 39±7· $t(200)=-2,112$, $p=0,036$), 'Γενική (Σπουδές)' (32±7 vs. 34±7· $t(200)=-2,176$, $p=0,031$), 'Πρακτική (Καριέρα)' (33±7 vs. 37±6· $t(200)=-2,157$, $p=0,002$), 'Γενική (Καριέρα)' (30±7 vs. 33±6· $t(200)=-2,619$, $p=0,010$). Φαίνεται οι φοιτήτριες έχουν

θετικότερες αντιλήψεις από τους φοιτητές στις κλίμακες που σχετίζονται με την όψη των Μαθηματικών που συνδέεται με τον πραγματικό κόσμο, καθώς και με τη γενικότερη χρησιμότητα των Μαθηματικών, ενώ δεν υπάρχει διαφοροποίηση στις κλίμακες που σχετίζονται με τη δομική και την αφηρημένη όψη των Μαθηματικών, καθώς και την επίγνωση της συγκεκριμένης χρησιμότητάς τους στις σπουδές και στην καριέρα. Οι σχετικές με το φύλο διαφοροποιήσεις δεν παρατηρήθηκαν στη μελέτη των Wood, Petocz και Reid (2012). Χρειάζεται περαιτέρω έρευνα για τη διερεύνησή τους και ιδιαίτερα των συνεπειών των σπουδών στην ΑΣΠΑΙΤΕ στην εξέλιξή τους. Σε κάθε περίπτωση, γίνεται εμφανές ότι η έλλειψη γνώσης του συγκεκριμένου ρόλου των Μαθηματικών στις σπουδές και στην καριέρα (άξονας 'Γνώση') παρατηρείται σε όλους τους φοιτητές ανεξάρτητα του φύλου τους και του Τμήματος φοίτησης.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα μελέτη βασιζόμενοι στην μελέτη των Wood, Petocz και Reid (2012) διερευνήθηκαν οι αντιλήψεις τελειόφοιτων φοιτητών της ΑΣΠΑΙΤΕ για τη φύση των μαθηματικών και το μελλοντικό ρόλο τους στη καριέρα τους και σε ενδεχόμενες σπουδές. Τα ευρήματα φανερώνουν τις ομοιόμορφα θετικές αντιλήψεις των φοιτητών για τα Μαθηματικά (και στους τρεις άξονες 'Αριθμοί/Στοιχεία', 'Μοντελοποίηση/Αφηρημένα', 'Ζωή'). Ωστόσο, οι θετικές αντιλήψεις των φοιτητών για το ρόλο των Μαθηματικών στο μέλλον τους είναι γενικού χαρακτήρα (κλίμακες 'Πρακτική' και 'Γενική') και δε φανερώνουν γνώση του συγκεκριμένου ρόλου των Μαθηματικών στη μελλοντική καριέρα τους ή στις ενδεχόμενες σπουδές (κλίμακα 'Γνώση (έλλειψη)'). Επιπλέον, βρέθηκε ότι το Τμήμα φοίτησης δε συνιστά στατιστικώς σημαντικό παράγοντα διαφοροποίησης αυτών των αντιλήψεων. Αντίθετα, το φύλο φαίνεται να επηρεάζει τις αντιλήψεις, με τις φοιτήτριες να έχουν θετικότερες αντιλήψεις για το γενικότερο ρόλο των Μαθηματικών στο μέλλον τους, χωρίς όμως αυτό να παρατηρείται και στην επίγνωσή τους για τη συγκεκριμενοποίηση και εντοπισμό των χαρακτηριστικών αυτού του ρόλου. Εντούτοις, δε βρέθηκαν σχετικές με το φύλο διαφοροποιήσεις στις αντιλήψεις των φοιτητών για τη φύση των Μαθηματικών.

Υποθέτουμε ότι αυτές οι αντιλήψεις μπορεί να σχετίζονται με την πολύπλευρη, παιδαγωγική και τεχνολογική, φοιτητική εμπειρία στην ΑΣΠΑΙΤΕ, καθώς και με την ιδιαίτερη ταυτότητα και πανεπιστημιακή σύνδεση που διαμορφώνεται κατά τη διάρκεια φοίτησης. Δεδομένων των ανωτέρω ευρημάτων, γεννιέται η αναγκαιότητα σχεδιασμού και ανάπτυξης ευρύτερων μελετών για την περαιτέρω διερεύνηση τους. Μια μελέτη της εξέλιξης της επίδρασης των σπουδών στην ΑΣΠΑΙΤΕ είτε με μια διαμήκη έρευνα (συγκρίνοντας πρωτοετείς-τελειόφοιτους), είτε με μια διαχρονική μελέτη (από το πρώτο έτος έως την αποφοίτηση) θα επέτρεπε να ανιχνεύσουμε τη διαμόρφωση αυτών των αντιλήψεων, πέραν της σύγκρισης τους. Με τον ίδιο σκοπό, μια συγκριτική μελέτη στους φοιτητές των αντίστοιχων ΑΤΕΙ θα μπορούσε να

βοηθήσει στον εντοπισμό των ευρημάτων στις σπουδές στην ΑΣΠΑΙΤΕ. Λαμβάνοντας υπόψη τη σημασία που έχει η γνώση του εντοπισμού του συγκεκριμένου ρόλου και της σημασίας των Μαθηματικών στο μέλλον των φοιτητών ως παράγοντα μάθησης, καθώς και του κεντρικού ρόλου των Μαθηματικών στην καριέρα των φοιτητών της ΑΣΠΑΙΤΕ και στις ενδεχόμενες σπουδές τους είναι σημαντικό να διερευνηθούν περαιτέρω οι αντιλήψεις τους για τα Μαθηματικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barkatsas, A. T., Kasimatis, K., & Gialamas, V. (2009). Learning secondary mathematics with technology: exploring the complex interrelationship between students' attitudes, engagement, gender and achievement. *Computers & education*, *52*(3), 562-570.

Bingolbali, E., Monaghan, J., & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivative and some implications for their mathematical education. *International journal of mathematical education in science and technology*, *38*(6), 763-777.

Craig, T. S. (2013). Conceptions of mathematics and student identity: implications for engineering education. *International journal of mathematical education in science and technology*, *44*(7), 1020-1029.

Crawford, K., Gordon, S., Nicholas, J., & Prosser, M. (1998). University mathematics students' conceptions of mathematics. *Studies in higher education*, *23*(1), 87-94.

Di Martino, P. (2004). From single beliefs to belief systems: A new observational tool. In Høines M. J. & Fuglestad A. B. (Eds.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 271-278). Bergen: PME.

Engelbrecht, J., Bergsten, C., & Kågesten, O. (2012). Conceptual and procedural approaches to mathematics in the engineering curriculum: student conceptions and performance. *Journal of engineering education*, *101*(1), 138-162.

FitzSimons, G. E. (2005). Numeracy and Australian Workplaces: Findings and Implications. *Australian senior mathematics journal*, *19*(2), 27-40.

FitzSimons, G. E. (2001). Integrating mathematics, statistics, and technology in vocational and workplace education. *International journal of mathematical education in science and technology*, *32*(3), 375-383.

Κασιμάτη, Α., & Γιαλαμάς, Β. (1998). Τα πιστεύω (beliefs) των καθηγητών για τη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών: Μια πρώτη ερευνητική προσέγγιση. *Πρακτικά 15ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας* (σ. 319-334). Χίος: ΕΜΕ.

Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.). (2003). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lester, F. K., Garofalo, J., & Kroll, D. L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem-solving behavior. In *Affect and mathematical problem solving* (pp. 75-88). Springer: New York.

Liljedahl, P. (2008). Teachers' insights into the relationship between beliefs and practice. In J. Maab & W. Schloglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education: New research results* (pp. 33–44). Rotterdam, NL: Sense Publishers.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: MacMillan.

Moutsios-Rentzos, A. (2011). *An investigation of the thinking styles development of university mathematics students.* In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 265-272). Ankara, Turkey: PME.

Μούτσιος-Ρέντζος, Α., & Καλαβάσης, Φ. (2013). Σχολείο, κρίση και συγκριτική τοποθέτηση των μαθημάτων στο σχολικό χωροχρόνο: μια συστημική προσέγγιση ‘εν δυνάμει’ εκπαιδευτικών στελεχών για τα μαθηματικά. Στο Α. Κοντάκος & Φ. Καλαβάσης (Επ.), *Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού 5 «Κρίση και Διακυβέρνηση Εκπαιδευτικών Συστημάτων»* (σελ. 167-187). Αθήνα: Διάδραση.

Pehkonen, E., & Pietilä, A. (2003). *On relationships between beliefs and knowledge in mathematics education*. Paper presented at the CERME 3: Third conference of the European society for research in mathematics education, Bellaria, Italy.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: in search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational researcher*, *34*(4), 14-22.

Törner, G., Rolka, K., Rösken, B., & Sriraman, B. (2010). Understanding a teacher’s actions in the classroom by applying Schoenfeld’s theory teaching-in-context: Reflecting on goals and beliefs. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education* (pp. 401–420). Berlin: Spring

Triantafillou, C., & Potari, D. (2010). Mathematical practices in a technological workplace: the role of tools. *Educational studies in mathematics*, *74*(3), 275-294.

Wood, L. N., Petocz, P., & Reid, A. (2012). *Becoming a mathematician*. Dordrecht: Springer.

Wood, L. N., Mather, G., Petocz, P., Reid, A., Engelbrecht, J., Harding, A., Houston, K., Smith, G., & Perrett, G. (2012). University students’ views of the role of

mathematics in their future. *International journal of science and mathematics Education*, *10*(1), 99-119.

Φερεντίνος, Σ., & Κασιμάτη, Κ. (2001). Διδακτικές πρακτικές μέσα στη σχολική τάξη: απόψεις και στάσεις εκπαιδευτικών ως προς τη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ΄*, 55, 22-36.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Τα μαθηματικά είναι	
ένα σύνολο μοντέλων που χρησιμοποιούνται για να εξηγήσουν τον κόσμο.	ΖΩ
ένας τρόπος ανάλυσης ιδεών και προβλημάτων.	ΜΑ
ένα σύνολο κανόνων και εξισώσεων.	ΑΣ
βασική γνώση για όλα τα επιστημονικά πεδία.	ΜΑ
δεν είναι καθόλου χρήσιμα σε μένα.	ΜΑ
ένας τρόπος να λύνω προβλήματα στη ζωή μου.	ΖΩ
ένα εργαλείο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διάφορα πεδία.	ΜΑ
λύνει προβλήματα χρησιμοποιώντας αριθμούς.	ΑΣ
χρησιμοποιεί τύπους για να λύσει προβλήματα.	ΑΣ
ένας τρόπος που δίνει στους ανθρώπους μια πιο ανεπτυγμένη ζωή.	ΖΩ
η γλώσσα της φύσης.	ΖΩ
υπολογισμοί.	ΑΣ
επεξεργασία αριθμών.	ΑΣ
ένα θεωρητικό πλαίσιο που περιγράφει την πραγματικότητα.	ΖΩ
η μελέτη των αριθμητικών εννοιών.	ΑΣ
ένας τρόπος παραγωγής νέων ιδεών.	ΖΩ
Στις μελλοντικές μου σπουδές τα μαθηματικά	
θα είναι απαραίτητα γιατί είναι υποχρεωτικά για το πτυχίο μου.	ΠΡ (ΓΕ)
θα με βοηθήσουν να αναπτύξω την λογική σκέψη.	ΠΡ
θα μου δώσουν νέες ιδέες για άλλα πράγματα.	ΠΡ
θα με βοηθήσουν να επιλύσω προβλήματα σε άλλα μαθήματα.	ΠΡ
θα με βοηθήσουν στους υπολογισμούς σε άλλα μαθήματα.	ΠΡ
δεν ξέρω πως θα είναι χρήσιμα για το πτυχίο μου.	ΓΝ
θα είναι η βάση των μελλοντικών μου σπουδών.	ΓΕ
δεν θα μου είναι χρήσιμα αφού οι υπολογιστές και τα ‘κομπιουτερακιά’ θα κάνουν όλη τη δουλειά.	ΓΝ
θα χρησιμοποιηθούν σε όλα τα μαθήματά μου.	ΓΕ
θα αποτελούν μέρος (βασικό ή δευτερεύον) των σπουδών μου.	ΓΕ
δεν ξέρω πως θα τα χρησιμοποιήσω στις μελλοντικές μου σπουδές.	ΓΝ

θα είναι η βάση όλων των άλλων μαθημάτων μου.	ΓΕ
θα είναι χρήσιμα στο μεγαλύτερο μέρος του μέλλοντος μου.	ΓΕ
θα μου δώσουν ένα συνολικό τρόπο σκέψης.	ΓΕ
Στην μελλοντική μου καριέρα τα μαθηματικά	
θα μου δώσουν νέες ιδέες.	ΓΕ
θα είναι η μελλοντική μου καριέρα.	ΓΕ
θα είναι ένα δομικό κομμάτι κάθε εργασίας.	ΓΕ
θα με βοηθήσει να βρω εργασία γιατί οι εργοδότες ξέρουν ότι είναι χρήσιμα.	ΓΕ
δεν θα μου είναι χρήσιμα αφού οι υπολογιστές και τα ‘κομπιουτερακιά’ θα κάνουν όλη τη δουλειά.	ΓΝ
δεν ξέρω πως θα τα χρησιμοποιήσω αφού δεν ξέρω τι θα κάνω.	ΓΝ
θα με βοηθήσουν με τους υπολογισμούς.	ΠΡ
θα με βοηθήσουν στην ανάλυση προβλημάτων.	ΠΡ
θα μου παρέχουν τα μαθηματικά μοντέλα τα οποία θα με βοηθήσουν να κατανοήσω τα προβλήματα.	ΠΡ
θα με βοηθήσουν να λύσω καθημερινά προβλήματα στη ζωή μου.	ΓΕ
θα μου δώσουν θεμελιώδεις ικανότητες για την μελλοντική μου καριέρα.	ΓΕ
θα με βοηθήσουν να σκέφτομαι λογικά.	ΠΡ (ΓΕ)
θα με βοηθήσουν στην ανάλυση δεδομένων.	ΠΡ
δεν ξέρω πως θα τα χρησιμοποιήσω αφού δεν γνωρίζω τον κλάδο.	ΓΝ
θα μου παρέχουν εργαλεία για να χρησιμοποιήσω.	ΠΡ
δεν θα μου είναι καθόλου χρήσιμα στην μελλοντική μου καριέρα.	ΓΝ

Σημειώσεις. Στην δεξιά στήλη δηλώνεται ο παράγοντας στον οποίο ανήκει το κάθε ερώτημα για το κάθε μέρος του ερωτηματολογίου (Wood, Petocz & Reid, 2012). Με ‘ΑΣ’, ‘ΜΑ’, ‘ΖΩ’, ‘ΠΡ’, ‘ΓΕ’, ‘ΓΝ’ δηλώνεται αντιστοίχως ‘Αριθμοί/Στοιχεία’, ‘Μοντελοποιήση/Αφηρημένα’, ‘Ζωή’, ‘Πρακτική’, ‘Γενική’, ‘Γνώση (έλλειψη)’. Σε παρένθεση ο παράγοντας στον οποίο ανήκουν σύμφωνα με την ανάλυση στο μεταφρασμένο ερωτηματολόγιο (αν είναι διαφορετικός).

Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ, ΟΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΑ ΛΑΘΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Ε΄ - ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΗ ΧΩΡΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ

Αγγέλα Χρυσοστόμου

Υποψήφια Διδάκτωρ Μαθηματικής Παιδείας Πανεπιστημίου Κύπρου

Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας (Γ΄ Δημοτικό Σχολείο Παραλιμνίου, Κύπρος)

e-mail: chrisostomou_angela@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα ερευνητική εργασία έχει σκοπό να διερευνήσει την επίδοση 175 μαθητών Ε΄ και Στ΄ τάξης δημοτικού, στην έννοια του εμβαδού (μέτρηση, διατήρηση εμβαδού, επίλυση προβλήματος, δημιουργικότητα) αλλά και το βαθμό στον οποίο η χωρική ικανότητα των μαθητών αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσης σε έργα εμβαδού. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης για την έννοια του εμβαδού οδηγεί τους μαθητές στο να χρησιμοποιούν λανθασμένους τύπους, να χωρίζουν λανθασμένα ένα σχήμα σε μικρότερα και να μπερδεύουν το εμβαδόν με την περίμετρο, ενώ η παρουσία πλέγματος στο σχήμα, βελτιώνει την επίδοσή τους. Επίσης, υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση, ανάμεσα σε μαθητές με χαμηλή, μέτρια και υψηλή χωρική ικανότητα (η2=0.16). Η χωρική ικανότητα μπορεί να προβλέψει το 16,5% της διασποράς της επίδοσης των μαθητών.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια του εμβαδού διδάσκεται από τις μικρές τάξεις του δημοτικού, όμως συχνά η κατανόησή της υπολείπεται σε σχέση με άλλες έννοιες (Murphy, 2011). Οι περισσότεροι ερευνητές που ασχολήθηκαν με το εμβαδόν, προσεγγίζουν κάθε φορά μία από τις διάφορες πτυχές του, με την έννοια της διατήρησης να διερευνάται ξεχωριστά από αυτή της μέτρησης (Kordaki, 2003).

Η παρούσα ερευνητική εργασία θα προσεγγίσει την έννοια του εμβαδού από διάφορες πτυχές και θα μετρήσει την επίδοση των μαθητών μέσα από: (α) τη μέτρηση εμβαδού απλών και σύνθετων σχημάτων, (β) τη σύγκριση εμβαδού (αρχή διατήρησης του εμβαδού), (γ) την επίλυση προβλήματος με κατασκευή σχημάτων με συγκεκριμένο εμβαδόν, (δ) τη δημιουργικότητα στην κατασκευή σχημάτων με συγκεκριμένο εμβαδόν. Επίσης, θα διερευνηθεί κατά πόσο η χωρική ικανότητα των μαθητών, αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσής τους σε έργα εμβαδού, σε μια προσπάθεια να καλυφθεί ένα θεωρητικό κενό στη βιβλιογραφία. Η ύπαρξη μιας τέτοιας σχέσης, θα μπορούσε να εισηγηθεί στους εκπαιδευτικούς την καλλιέργεια της χωρικής ικανότητας των μαθητών, με απώτερο στόχο τη βελτίωση της κατανόησης στο εμβαδόν.Η διερεύνηση των στρατηγικών και των λαθών των

μαθητών στη μέτρηση εμβαδού, μπορούν να αναδείξουν σημεία στα οποία οι εκπαιδευτικοί πρέπει να δώσουν έμφαση ή να διαφοροποιήσουν, είτε τις μεθόδους, είτε στα εργαλεία, ώστε να επιτευχθεί η εννοιολογική κατανόηση.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Μέτρηση Εμβαδού

Ως έννοια, η μέτρηση του εμβαδού, είναι πιο αφηρημένη σε σχέση με άλλες μετρήσεις και παρόλο που οι μαθητές έχουν ανεπτυγμένη διαίσθηση γι' αυτήν, συχνά τους λείπει οι εννοιολογική κατανόηση για να την ορίσουν (Murphy, 2011).

Η προσέγγιση του εκπαιδευτικού διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην εννοιολογική κατανόηση του εμβαδού (Murphy, 2011). Η έμφαση στις διαδικασίες μέτρησης, παρά στις έννοιες που κρύβονται πίσω από τη μέτρηση (Kamii&Clark, 1997), η διαδικαστική προσέγγιση της έννοιας με πρόωρη εισαγωγή των τύπων (Clements&Stephan, 2004), η χρήση του χάρακα αντί του πλέγματος που δεν οδηγεί σε άμεση μοντελοποίηση της έννοιας (Dickson, Brown&Gibson, 1984), απομακρύνουν τους μαθητές από την εννοιολογική κατανόηση του εμβαδού. Κατά συνέπεια, οι μαθητές ακολουθούν στρατηγικές που στηρίζονται στη διαδικαστική χρήση τύπων και κάνουν λάθη (Pesek&Kirshner, 2000; Zacharos, 2006; Dickson, 1989), όπως για παράδειγμα μπερδεύουν εμβαδόν και περίμετρο (Dickson, Brown&Gibson, 1984).

Οι Clements και Stephan (2004), αναφέρουν πως για να μάθουν οι μαθητές να μετρούν επιφάνειες εμπλέκονται: (α) ο διαμελισμός (partitioning) μιας επιφάνειας σε μικρότερες, (β) η κάλυψη του σχήματος με τη διάταξη (unititeration) ίσων μικρότερων μονάδων επιφάνειας, (γ) η αρχή διατήρησης του εμβαδού (conservation), όταν ένα σχήμα διαιρεθεί και τα επιμέρους σχήματα αναδιαταχθούν, (δ) η δομή και διάταξη (structuringandarray), η εξαγωγή τύπου μέσω εσωτερίκευσης των προηγούμενων(Battista,Clements, Arnoff, Battista&VanAukenBorrow, 1998).

2.2 Αρχή διατήρησης εμβαδού

Με τον όρο «διατήρηση» οι Piaget, Inhelder και Szeminska (1960) εννοούν τη σταθερή διατήρηση του μέτρου της επιφάνειας ενός σχήματος, όταν το σχήμα ή μέρος του, υποστεί κάποιο μετασχηματισμό.Οι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες στην αναγνώριση της διατήρησης του εμβαδού σε έργα όπου γίνεται αναδιάταξη των επιμέρους σχημάτων (Lehrer, 2003; Kamii&Kysh, 2006). Μάλιστα, η αναγνώριση καθίσταται δυσκολότερη, εάν τα επιμέρους σχήματα είναι τρίγωνα και ευκολότερη εάν είναι παραλληλόγραμμα (Hughes&Rogers, 1979). Όταν οι μαθητές στηρίζονται κυρίως στην οπτική αντίληψή τους σε έργα διατήρησης εμβαδού, κάνουν λάθη(Tierney, Boyd&Davis, 1990).

2.3 Δημιουργικότητα και εμβαδόν

Έχουν δοθεί πολλοί ορισμοί για τη δημιουργικότητα από τους ερευνητές. Άλλοι ορισμοί επικεντρώνονται στις γνωστικές διαδικασίας που εμπλέκονται, λαμβάνοντας υπόψη την ποιότητα της δημιουργικής σκέψης, ενώ άλλοι επικεντρώνονται στο αποτέλεσμα της δημιουργικής σκέψης (Haylock, 1987). Στην παρούσα ερευνητική εργασία η δημιουργικότητα μετρείται μέσα από το αποτέλεσμά της και συγκεκριμένα μέσα από την ευχέρια, την ευελεξία και την πρωτοτυπία (Torrance, 1995) των λύσεων που παρουσιάζουν οι μαθητές.Οι ερευνητές της μαθηματικής δημιουργικότητας δεν έχουν ασχοληθεί συγκεκριμένα με τη δημιουργικότητα στην κατασκευή σχημάτων με συγκεκριμένο εμβαδού, όμως οι περισσότεροι περιλαμβάνουν στα τεστ τους τουλάχιστον έναέργο εμβαδού. Για να μπορεί ένας μαθητής να είναι δημιουργικός σε ένα πεδίο των μαθηματικών, απαιτείται να έχει «βαθιά και ευέλικτη γνώση περιεχομένου» (Silver, 1997).

2.4 Χωρική ικανότητα

Η χωρική ικανότητα ενός ατόμου, ορίζεται ως «η ικανότητά να σχηματίζει νοερές εικόνες και να τις χειρίζεται νοερά» (Lean&Clements, 1981). Ο Lohman (1988) εισηγείται ένα μοντέλο τριών παραγόντων για τη μέτρηση της χωρικής ικανότητας που περιλαμβάνει: (α) την οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου (spatialvisualization), (β) τον προσανατολισμό στο χώρο (spatialorientation) και (γ) τις σχέσεις εννοιών χώρου (spatialrelations). Η μέτρηση της χωρικής ικανότητας στην παρούσα έρευνα στηρίχτηκε σε αυτό το μοντέλο του Lohman (1988).

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα

Για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων διεξήχθη ποσοτική έρευνα με δείγμα 95 μαθητές Ε΄ τάξης και 80 μαθητές Στ΄ τάξης (σύνολο 175 μαθητές), από 4δημόσια δημοτικά σχολεία στην Κύπρο.

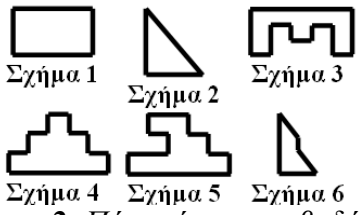
Δοκίμιο Χωρικής Ικανότητας

Για τη μέτρηση της χωρικής ικανότητας των μαθητών χρησιμοποιήθηκε το δοκίμιο των Pittali και Christou (2010), του οποίου η κατασκευή στηρίχτηκε στο μοντέλο τριών παραγόντων του Lohman (1988). Το δοκίμιο περιελάμβανε 31 έργα, εκ των οποίων 12 μετρούσαν την ικανότητα οπτικοποίησης, 12 την κατανόηση των σχέσεων σε έννοιες χώρου και 7 τον ικανότηταπροσανατολισμού. Μετρήθηκαν οι σωστές απαντήσεις και έγινε αναγωγή ώστε ο κάθε παράγοντας να έχει το ίδιο βάρος στη βαθμολόγηση. Βρέθηκε για κάθε μαθητή ένας συνολικός βαθμός χωρικής ικανότητας. Η κλίμακα βαθμολόγησης χωρίστηκε σε τρία ίσα διαστήματα και έτσι οι μαθητές χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες: χαμηλή, μέτρια, υψηλή χωρική ικανότητα.

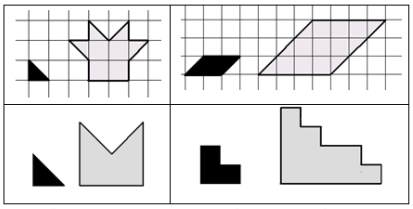
Δοκίμιο Εμβαδού

Το δοκίμιο περιελάμβανε 6 έργα. Το 1ο έργο είχε ως στόχο τη μέτρηση της δημιουργικότητας στην κατασκευή σχημάτων με εμβαδόν 5cm^2. Δόθηκε σελίδα με πλέγμα στους μαθητές. Για τη δημιουργικότητα μετρήθηκε η ευχέρεια, η ευελιξία και η πρωτοτυπία των λύσεων με μέγιστο βαθμό το δέκα και βρέθηκε ο μέσος όρος τους για την εξαγωγή του βαθμού δημιουργικότητας. Για την ευχέρεια, μετρήθηκαν όλα τα γεωμετρικά σχήματα με σωστό εμβαδόν. Για την ευελιξία μετρήθηκαν τα διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα, ενώ για την πρωτοτυπία, υπολογίστηκε το ποσοστό εμφάνισης κάθε σχήματος στον πληθυσμό του δείγματος.

Έργα Μέτρησης Εμβαδού

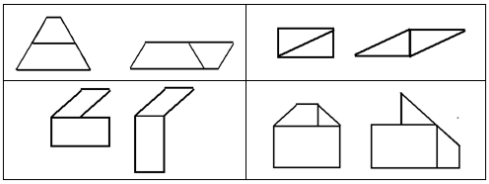


Έργο 2: *Πόσο είναι το εμβαδόν;*

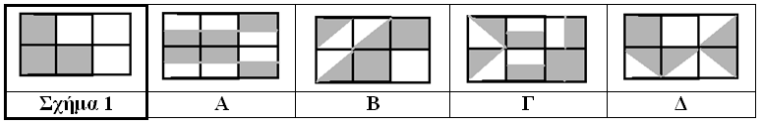


Έργο 5: *Με πόσα μαύρα σχήματα καλύπτεται το γκρίζο σχήμα;*

Έργα σύγκρισης Εμβαδού



Έργο 3: *Σε κάθε ζευγάρι σχημάτων κυκλώνω αυτό με το μεγαλύτερο εμβαδόν. Κυκλώνω και τα δύο αν έχουν ίσο εμβαδόν*



Έργο 4: *Κυκλώνω όσα από τα Α, Β, Γ, Δ έχουν σκιασμένο το ίδιο εμβαδόν με αυτό που είναι σκιασμένο στο Σχήμα 1.*

Πίνακας 1: Παραδείγματα από τα έργα μέτρησης και τα έργα σύγκρισης εμβαδού

Το 2ο και το 5ο έργο αφορούσαν τη μέτρηση εμβαδού. Στο 2ο οι μαθητές καλούνταν να υπολογίσουν το εμβαδόν απλών και σύνθετων σχημάτων. Μελετήθηκαν και ομαδοποιήθηκαν οι σωστές και λανθασμένες στρατηγικές των μαθητών. Στο 5ο έργο, καλούνταν να υπολογίσουν τα εμβαδά σχημάτων, καλύπτοντας την επιφάνειά τους με δοσμένη μονάδα μέτρησης. Το 3ο και 4ο έργο στηρίζονταν στην αρχή διατήρησης του εμβαδού. Οι μαθητές καλούνταν είτε να συγκρίνουν σχήματα που μέρος τους είχε μετασχηματιστεί, είτε να εντοπίσουν ισεμβαδικά σχήματα σε πλέγμα. Το6ο έργο, ήταν ένα πρόβλημα στο οποίο δινόταν η περίμετρος και ζητούνταν η εύρεση όλων των πιθανών εμβαδών των ορθογωνίων με διαστάσεις ακέραιο αριθμό. Η κλίμακα βαθμολόγησης κάθε έργου, χωρίστηκε σε τρία ίσα διαστήματα, ώστε να δημιουργηθούν τρεις ομάδες μαθητών: χαμηλή, μέτρια, ψηλή επίδοση.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1. Επίδοση στα έργα εμβαδού

Γιατην επίτευξη του σκοπού της έρευνας, διεξήχθησαν στατιστικές αναλύσεις στο πακέτο Spss. Ο πίνακας 2 παρουσιάζει αναλυτικά την επίδοση, τους μέσους όρους ανά έργο και τις διαφορές στην επίδοση μαθητών Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού.

	Έργο	Χαμηλή Επίδοση	Μέτρια Επίδοση	Ψηλή Επίδοση	$\overline{\chi}$(SD) Στ΄ τάξη	$\overline{\chi}$(SD) Ε΄ τάξη	P*
1	Δημιουργικότητα στην κατασκευή σχήματος με δοσμένο εμβαδόν (N=170)	46,3%	48,8%	4,9%	4.03 (2.11)	3.51 (2.14)	0.12
2	Μέτρηση εμβαδού απλών και σύνθετων σχημάτων (N=175)	43,8%	24%	32,2%	5.29 (3.35)	4.09 (3.48)	**0.02**
5	Μέτρηση εμβαδού με κάλυψη επιφανειών με δοσμένη μονάδα μέτρησης (N=172)	34,2%	38,8%	27%	5.17 (3.09)	4.43 (2.91)	0.11
3	Διατήρηση εμβαδού – σύγκριση εμβαδών (N=168)	12,4%	65,4%	22,2%	5.43 (2.28)	5.06 (2.03)	0.26
4	Διατήρηση εμβαδού – εύρεση ίσων εμβαδών (N=175)	5,1%	35,4%	59,4%	7.14 (2.18)	6.92 (2.42)	0.53
6	Επίλυση προβλήματος εμβαδού (N=163)	54,6%	22,1%	23,3%	4.68 (3.47)	2.23 (2.77)	**0.00**

**p-value για διαφορές στην επίδοση μεταξύ μαθητών Ε΄ και Στ΄ τάξης*

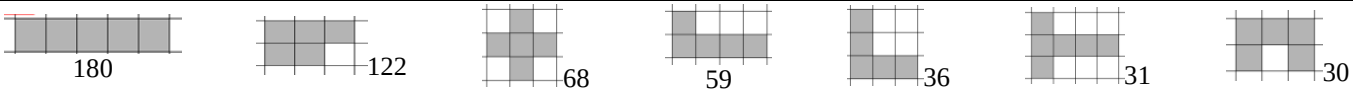
Πίνακας 2: Επίδοση στα έργα εμβαδού (με μέγιστο βαθμό 10 σε κάθε έργο)

Παρατηρώντας τον πίνακα 2, από τους μέσους όρους και των δύο τάξεων φαίνεται πως τα έργα σύγκρισης εμβαδών ήταν αυτά με τις καλύτερες επιδόσεις. Μάλιστα, σε αυτά τα δύο έργα ήταν λιγότεροι οι μαθητές με χαμηλή επίδοση σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα. Στο έργο 4 (πίνακας 1), όπου εντόπιζαν ισεμβαδικά σχήματα μέσα σε πλέγμα, οι μαθητές είχαν ψηλότερη επίδοση από το έργο 3 (πίνακας 1) στο οποία σύγκριναν εμβαδά σχημάτων χωρίς πλέγμα, στηριγμένοι στην οπτική τους αντίληψη. Στο έργο 3, η πλειοψηφία των μαθητών (65,4%) είχε μέτρια επίδοση. Στα δύο αυτά έργα που στηρίζονται στην αρχή διατήρησης του εμβαδού δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ Ε΄ και Στ΄ τάξης σε επίπεδο α=0.05

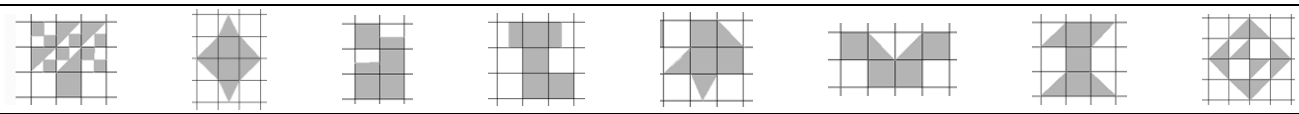
Στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ Ε΄ και Στ΄ τάξης (t= -2.32, df=173, p=0.02) παρουσιάστηκε στο έργο 2, που αφορούσε υπολογισμό εμβαδού απλών και σύνθετων

σχημάτων. Βέβαια, οι μαθητές Στ΄ τάξης είχαν διδαχτεί ξανά για την περίμετρο και το εμβαδόν των ορθογωνίων πριν τη διεξαγωγή της έρευνας. Αντίθετα στο έργο 5, όπου ο υπολογισμός του εμβαδού γινόταν με τη χρήση μη συμβατικών μονάδων μέτρησης με την παρουσία πλέγματος σε κάποιες περιπτώσεις, οι διαφορές των δύο τάξεων δεν ήταν στατιστικά σημαντικές. Αξίζει να σημειωθεί ότι μεγάλα ποσοστά μαθητών (43,8% στο έργο 2 και 34,2% στο έργο 5) είχαν χαμηλή επίδοση στα έργα υπολογισμού του εμβαδού (πίνακας 2), γεγονός που υποδεικνύει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην έννοια του εμβαδού.

Το έργο 6 ζητούσε την επίλυση ενός προβλήματος εμβαδού. Απαιτούσε την εύρεση των εμβαδών όλων των ορθογωνίων με συγκεκριμένη περίμετρο. Αυτό αποτελεί μία σύνθετη εργασία για τους μαθητές και απαιτεί εννοιολογική κατανόηση του εμβαδού και της περιμέτρου, ώστενα βρεθούν οι πιθανές διαστάσεις των ορθογωνίων και στη συνέχεια τα εμβαδά τους. Το 54,6% των μαθητών είχε χαμηλή επίδοση, εκ των οποίων το 34,9% δεν βρήκαν καμία σωστή λύση. Περίπου 22% είχαν μέτρια επίδοση και 23% ψηλή επίδοσηΟι μέσοι όροι στη βαθμολογία ήταν χαμηλοίκαι στις δύο τάξεις. Οι μαθητές της Στ΄ τάξης ($\bar{\chi}$=4.68, SD= 3.47, SE=0.4) είχαν καλύτερη επίδοση από τους μαθητές της Ε΄ τάξης ($\bar{\chi}$=2.23, SD= 2.77, SE=0.3) και οι διαφορές ήταν στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο α=0.001 (t= -4.93, df=145.07, p<0.001).



Πίνακας 3: Συνηθισμένες λύσεις στο έργο δημιουργικότητας-συχνότητα εμφάνισής



Πίνακας 4: Κάποια από τα πρωτότυπα σχήματα που παρουσιάστηκαν μόνο μία φοράΤέλος, στο έργο 1 που είχε σκοπό να διερευνήσει τη δημιουργικότητα των μαθητών στην κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων με συγκεκριμένο εμβαδόν, μόνο το 4,9% είχε ψηλή επίδοση στη δημιουργικότητα ενώ οι υπόλοιποι μαθητές περίπου μοιράστηκαν στις ομάδες με χαμηλή και μέτρια επίδοση. Δεν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο τάξεων. Οι πίνακες 3 και 4 παρουσιάζουν τα πιο συνηθισμένα και κάποια από τα πρωτότυπα σχήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές σε αυτό το έργο.

4.2.1. Σωστές στρατηγικές μέτρησης εμβαδού απλών και σύνθετων σχημάτων

Στο έργο 5, που αφορούσε τον υπολογισμό του εμβαδού σε απλά και σύνθετα σχήματα, μελετήθηκαν αναλυτικά οι ορθές και οι λανθασμένες στρατηγικές που ακολούθησαν οι μαθητές. Οι πίνακες 5 και 6, παρουσιάζουν τις ορθές και τις λανθασμένες στρατηγικές των μαθητών σε αυτό το έργο και τα ποσοστά εμφάνισης της κάθε μίας από αυτές. Τα σχήματα 3, 4 και 5, παρουσιάζονται μαζί και στους δύο

πίνακες, διότι παρατηρήθηκε κατά τη βαθμολόγηση των δοκιμίων ότι οι μαθητές χειρίζονταν και τα τρία σχήματα με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή είτε χρησιμοποιούσαν την ίδια σωστή ή την ίδια λανθασμένη στρατηγική για τη μέτρηση του εμβαδού τους.

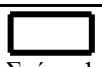
Σωστές Στρατηγικές	 Σχήμα 1	 Σχήμα 2	 Σχήμα 6	 Σχήματα 3, 4, 5
Μετρώ κουτάκια $1cm^2$	23,4%	13,1%	16,6%	41,7%
Τύπος	50,3%	9,7%	-	-
Χωρίζω σε απλούστερα σχήματα	-	-	2,9%	2,9%
Μη εμφανής στρατηγική	-	2,3%	6,9%	7,4%
Σύνολο	**73,7%**	**25,1%**	**26,1%**	**52%**

Πίνακας 5: Σωστές στρατηγικές μέτρησης εμβαδού

Οι σωστές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές ήταν: η χρήση του τύπου, ο χωρισμός σε τετράγωνα $1cm^2$ ή ο χωρισμός σε απλούστερα σχήματα με εμβαδόν διαφορετικό από $1cm^2$.Το υψηλότερο ποσοστό ορθής εύρεσης εμβαδού είχε το ορθογώνιο (73,5%) και το χαμηλότερο το τρίγωνο (25,1%) και σχήμα 6 που περιλαμβάνει τρίγωνο (26,1%). Τον τύπο εμβαδού για το τρίγωνο, ελάχιστα παιδιά τον γνώριζαν (9,7%) και η πλειοψηφία αυτών που βρήκαν σωστά το εμβαδόν, απλά χώρισαν τα σχήματα σε κουτάκια $1cm^2$. Ο χωρισμός σε τετράγωνα $1cm^2$χρησιμοποιήθηκε σε όλα τα σχήματα, αλλά περισσότερο στα τρία σύνθετα σχήματα.

4.2.2. Λανθασμένες στρατηγικές μέτρησης εμβαδού

Παρουσιάστηκαν έξιλανθασμένες στρατηγικές, στην προσπάθεια υπολογισμού του εμβαδού των σχημάτων και παρουσιάζονται αναλυτικά στον πίνακα 6.

Λανθασμένες Στρατηγικές	 Σχήμα 1	 Σχήμα 2	 Σχήμα 6	 Σχήματα 3, 4, 5
Καμία απάντηση	1,1%	4,6%	13,7%	7,4%
Τύπος λάθος	0,6%	16,6%	1,1%	2,3%
Χωρίζω «με το μάτι» σε κουτάκια	9,1%	22,9%	20%	5,1%
Εύρεση περιμέτρου ή πρόσθεση μήκους πλευρών	9,1%	10,9%	11,4%	11,4%
Εύρεση εμβαδού ολόκληρου σχήματος	-	2,9%	4%	2,3%
Σωστός τύπος – λάθος μέτρηση μήκους	-	1,1%	-	-

Χωρίζω σε απλούστερα σχήματα – λάθος τύπος	-	-	3,4%	0,6%
Μη εμφανής στρατηγική	6,3%	16%	20%	18,9%
Σύνολο	**26,2%**	**75%**	**73,6%**	**48%**

Πίνακας 6: Λανθασμένες στρατηγικές μέτρησης εμβαδού

Ένα από τα σημαντικότερα λάθη των μαθητών ήταν η εύρεση της περιμέτρου αντί του εμβαδού ή η πρόσθεση του μήκους κάποιων πλευρών των σχημάτων, στρατηγική που χρησιμοποίησαν περίπου το 9% των μαθητών στο ορθογώνιο και περίπου το 11% των μαθητών στα υπόλοιπα σχήματα. Στην περίπτωση του τριγώνου, χρησιμοποιήθηκε λανθασμένος τύπος από το 16,6% των μαθητών. Οι μαθητές αυτοί, μη γνωρίζοντας τον τύπο εύρεσης του εμβαδού του τριγώνου και πιθανότατα παρασυρόμενοι από τον τύπο του εμβαδού του ορθογωνίου, προχώρησαν στην εύρεση του γινομένου δύο πλευρών του τριγώνου (πότε των δύο κάθετων πλευρών, πότε της μίας κάθετης πλευράς με την υποτείνουσα). Λανθασμένο χωρισμό σε τετράγωνα $1cm^2$, έκανε το 22,9% των μαθητών στο τρίγωνο και το 20% στο σύνθετο σχήμα που περιλαμβάνει τρίγωνο. Λιγότεροι μαθητές έκαναν αυτό το λάθος στα υπόλοιπα σχήματα. Πολλοί από αυτούς δεν έκαναν μέτρηση, αλλά χώρισαν τα σχήματα «με το μάτι», στηριζόμενοι μόνο στην οπτική τους αντίληψη.

4.3. Εμβαδόν και Χωρική Ικανότητα

Η ανάλυση διασποράς μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (One – WayAnova)έδειξε ότι όντως υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις επιδόσεις των μαθητών ανάλογα με τη χωρική τους ικανότητα ($F_{(2,141)}$=13.88, p<0.001). Μάλιστα από πρακτικής άποψης, η διαφορά αυτή είναι μεγάλη, αφού η^2=0.16, επομένως και η επίδραση του παράγοντα χωρική ικανότητα είναι μεγάλη στην επίδοση στο δοκίμιο του εμβαδού.Μεταγενέστεροι έλεγχοι διαφορών (Scheffe), έδειξαν ότι στατιστικά σημαντικές διαφορές σε επίπεδο α=0.05 υπάρχουν ανάμεσα στους μαθητές με χαμηλή ($\bar{\chi}$=3.92, SD=1.51) και μέτρια ($\bar{\chi}$=4.82, SD=1.75) χωρική ικανότητα, ενώ σε επίπεδο α=0.001 ανάμεσα στους μαθητές με μέτρια ($\bar{\chi}$=4.82, SD=1.75) και υψηλή ($\bar{\chi}$=6.6, SD=1.62) χωρική ικανότητα. Ανάλυση παλινδρόμησης που διενεργήθηκε έδειξε ότι η χωρική ικανότητα ερμηνεύει το 16,5% της διασποράς της επίδοσης των μαθητών στο δοκίμιο εμβαδού ($F_{(1,142)}$=27.8,p<0.001,B=0.43, SE=0.08, β=0.41). Μάλιστα, η χωρική ικανότητα ερμηνεύει καλύτερα τη διασπορά της επίδοσης στα έργα μέτρησης ($F_{(1,161)}$=18.98, p<0.001) εμβαδού και λιγότερο τη διασπορά της επίδοσης στα υπόλοιπα έργα του δοκιμίου (δημιουργικότητα $F_{(1,157)}$=6.92, p<0.01, σύγκριση εμβαδού $F_{(1,55)}$=8.69, p<0.01, επίλυση προβλήματος εμβαδού $F_{(1,51)}$=10.26, p<0.01).

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα ερευνητική εργασία είχε σκοπό να προσεγγίσει την έννοια του εμβαδού από τέσσερις πτυχές (μέτρηση, σύγκριση, επίλυση προβλήματος, δημιουργικότητα),

να μετρήσει την επίδοση των μαθητών και να εντοπίσει τις σωστές και λανθασμένες στρατηγικές τους στη μέτρηση εμβαδού. Τέλος, διερευνήθηκε κατά πόσο η χωρική ικανότητα των μαθητών, αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσής τους.

5.1. Η επίδοση των μαθητών σε έργα εμβαδού (μέτρηση εμβαδού, σύγκριση εμβαδού, επίλυση προβλήματος, δημιουργικότητα)

Από τα αποτελέσματα στα δύο έργα σύγκρισης εμβαδών, που στηρίζονταν στην αρχή διατήρησης του εμβαδού, επιβεβαιώθηκαν τα ευρήματα παλαιότερων ερευνών σχετικά με παράγοντες που μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές να έχουν καλύτερη επίδοση ή να οδηγηθούν σε λάθη. Η παρουσία του πλέγματος στο φόντο των σχημάτων (έργο 4) φαίνεται πως βοήθησε στο να πετύχουν μεγαλύτερες επιδόσεις (Dickson, Brown&Gibson, 1984), ενώ η απουσία του (έργο 3), οδήγησε τους μαθητές στο να κάνουν συγκρίσεις στηριζόμενοι στην οπτική αντίληψή τους και να κάνουν περισσότερα λάθη (Tierney, Boyd&Davis, 1990). Η αναδιάταξη των σχημάτων στο χώρο με μετατόπιση, περιστροφή ή ανάκλαση στο έργο 3, φαίνεται να δυσκόλεψε τους μαθητές στην αναγνώριση της διατήρησης του εμβαδού (Lehrer, 2003; Kamii&Kysh, 2006) σε σχέση με το έργο 4.

Από τα αποτελέσματα των δύο έργων μέτρησης εμβαδού, φάνηκε πόσο μεγάλες είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, αφού μεγάλο μέρος τους είχε χαμηλή επίδοση (43,8% στο έργο 2 και 34,2% στο έργο 5). Η χρήση μη συμβατικών μονάδων μέτρησης και η παρουσία πλέγματος (Dickson, Brown&Gibson, 1984) σε κάποια από τα σχήματα του έργου 5, φαίνεται πως βελτίωσε την επίδοση των μαθητών (η πλειοψηφία είχε μέτρια επίδοση) σε σχέση με το έργο 2 που απουσίαζε το πλέγμα και η μονάδα μέτρησης του εμβαδού.

Στην επίλυση του προβλήματος περισσότεροι από τους μισούς μαθητές είχαν χαμηλή επίδοση και από αυτούς το 35% δε βρήκε καμία σωστή λύση. Το συγκεκριμένο πρόβλημα απαιτούσε την εννοιολογική κατανόηση και του εμβαδού και της περιμέτρου, ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση με δεδομένη την περίμετρο να βρουν τις διαστάσεις των ορθογωνίων και επομένως τα εμβαδά. Βέβαια, σε αυτή την περίπτωση εμπλέκεται η χρήση τύπων, που εάν οι μαθητές δεν έχουν οικοδομήσει εννοιολογική κατανόηση και τις απαραίτητες νοερές συνδέσεις μεταξύ των εννοιών της περιμέτρου και του εμβαδού, δεν είναι σε θέση να τους χειριστούν τους τύπους σωστά και να φθάσουν σε ορθά αποτελέσματα. Όπως αναφέρεται και στη βιβλιογραφία, η απουσία εννοιολογικής κατανόησης μπορεί να οφείλεταιστη χρήση του χάρακα για μοντελοποίηση της έννοιας του εμβαδού, αντί του πλέγματος (Dickson, Brown&Gibson, 1984) ή στη διδασκαλία της έννοιας διαδικαστικά και στην πρόωρη εισαγωγή των τύπων (Clements&Stephan, 2004; Kamii&Clark, 1997). Οι στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση μεταξύ Ε΄ και Στ΄ τάξης σε αυτό το έργο, πιθανό να οφείλονται στην εξοικείωση των μαθητών της Στ΄ τάξης με τέτοιου είδους προβλήματα, αφού περιέχονται στην ύλη τους.

Τέλος, από τα αποτελέσματα στο έργο δημιουργικότητας στην κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων με συγκεκριμένο εμβαδόν, μόνο το 4,9% είχε ψηλή επίδοση στη δημιουργικότητα ενώ οι υπόλοιποι μαθητές περίπου μοιράστηκαν στις ομάδες με χαμηλή και μέτρια επίδοση. Από αυτό αναδεικνύεται η ανάγκη καλλιέργειας της μαθηματική δημιουργικότητα μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια (τα οποία θα αντικατασταθούν μέσα στα επόμενα τρία χρόνια).

5.2. Σωστές και λανθασμένες στρατηγικές στη μέτρηση εμβαδού

Οι σωστές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στον υπολογισμό του εμβαδού απλών και σύνθετων σχημάτων ήταν η χρήση του τύπου (structuringandarray), ο χωρισμός σε μικρότερα σχήματα (partitioning) και ο χωρισμός σε τετράγωνα $1cm^2$(unititeration). Οι τρεις αυτές στρατηγικές αναφέρονται και στη βιβλιογραφία από τουςClements και Stephan (2004) και η χρήση τους υποδεικνύει την εννοιολογική κατανόηση της μέτρησης του εμβαδού. Τον τύπο χρησιμοποίησε η πλειοψηφία των μαθητών στο ορθογώνιο, αφού διδάσκεται από τη Γ΄ Δημοτικού και το χωρισμό σε τετράγωνα $1cm^2$στα τρία σύνθετα σχήματα, στρατηγική που κι αυτή διδάσκεται στις μικρές τάξεις. Οι μεγάλες δυσκολίες στον ορθό υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου και του σύνθετου σχήματος που περιελάμβανε τρίγωνο ήταν αναμενόμενες, αφού ο τύπος εύρεσης του εμβαδού του τριγώνου διδάσκεται στο τέλος της Ε΄ τάξης, που λόγω μείωσης των διδακτικών ωρών των μαθηματικών, η διδασκαλία του πολλές φορές παραλείπεται. Όσοι βρήκαν σωστά τα αυτά τα δύο εμβαδά, χώρισαν τα σχήματα σε τετράγωνα $1cm^2$.

Οι σημαντικότερες λανθασμένες στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές και μέτρησαν λάθος το εμβαδόν των σχημάτων ήταν η εύρεση της περιμέτρου ή η πρόσθεση του μήκους κάποιων πλευρών, η χρήση λανθασμένου τύπου και ο λανθασμένος χωρισμός «με το μάτι» σε τετράγωνα $1cm^2$. Το μπέρδεμα της περιμέτρου με το εμβαδόν αναφέρεται και στη βιβλιογραφία από τουςDickson, Brown και Gibson(1984) και πιθανό να οφείλεται στη διαδικαστική διδασκαλία του εμβαδού, πιθανότατα με εργαλείο το χάρακα (αντί το πλέγμα), ο οποίος δε βοηθά στηδημιουργία αντιπροσωπευτικού μοντέλο για τη μέτρηση επιφάνειας. Η χρήση λανθασμένου τύπου στην περίπτωση του τριγώνου (πολλαπλασιασμός δύο πλευρών του τριγώνου), πιθανό να οφείλεταιστην πρόωρη διδασκαλία των τύπων διαδικαστικά, πριν τα παιδιά αποκτήσουν εννοιολογική κατανόηση για τη μέτρηση του εμβαδού (Murphy, 2011; Kamii&Clark, 1997). Η τρίτη λανθασμένη στρατηγική (χώρισμα «με το μάτι») που παρατηρήθηκε στο τρίγωνο και στο σύνθετο σχήμα που μέρος του είναι τρίγωνο, πιθανό να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές δε στηρίχτηκαν σε μέτρηση, αλλά στην οπτική τους αντίληψη, η οποία σύμφωνα με τους Tierney, Boyd και Davis (1990), οδηγεί συχνά σε λάθη.

5.3. Χωρική Ικανότητα και Εμβαδόν

Από τα αποτελέσματα προέκυψε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση στο δοκίμιο του εμβαδού,τωνμαθητών με χαμηλή, μέτρια και υψηλή χωρική ικανότητα.Αυτή η διαφορά μεταξύ των ομάδων είναι μεγάλη και από πρακτικής άποψης, όπως υποδεικνύει το η^2=0.16. Μετά από απλή παλινδρομική ανάλυση, φαίνεται πως η χωρική ικανότητα μπορεί να προβλέψει το 16,5% της διασποράς της επίδοσης στο δοκίμιο του εμβαδού. Το γεγονός ότι το ποσοστό ερμηνείας της διασποράς δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλο, υποδεικνύει ότι υπάρχουν κι άλλοι παράγοντες που δε λήφθηκαν υπόψη, που εάν εισαχθούν στο μοντέλο θα το ποσοστό θα αυξηθεί. Μεταβλητές που θα μπορούσαν να μελετηθούν κατά πόσο αποτελούν παράγοντες πρόβλεψης της επίδοσης στο εμβαδόν είναι οι διδακτικές προσεγγίσειστου εκπαιδευτικού (έμφαση στις διαδικασίες ή στις έννοιες;) στην έννοια του εμβαδού (Murphy, 2011;Kamii&Clark, 1997; Clements&Stephan, 2004) και τα εργαλεία μοντελοποίησης της έννοιας του εμβαδού που χρησιμοποιεί (Dickson, Brown&Gibson, 1984).

5.4. Εκπαιδευτικές προεκτάσεις

Τα ευρήματα της παρούσας αλλά και άλλων ερευνών, μπορεί να αποτελέσουν σημαντικό εργαλείο για τη συγγραφή των νέων εγχειριδίων των Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο, αλλά και για τους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν μαθηματικά. Η ένταξη δραστηριοτήτων που προσεγγίζουν το εμβαδόν και από τις τέσσερις πτυχές (μέτρηση, σύγκριση, επίλυση προβλήματος, δημιουργικότητα), αλλά και στοχεύουν στις παρανοήσεις και στα πιθανά λάθη των μαθητών, με τη σωστή μοντελοποίηση των εννοιών, την έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση πριν την εισαγωγή των τύπων, μπορούν να οδηγήσουν τους επόμενους μαθητές σε καλύτερα αποτελέσματα. Η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες βελτίωσης της χωρικής τους ικανότητας, θα μπορούσε να βελτιώσει την επίδοσή τους σε έργα εμβαδού αλλά και σε άλλα θέματα Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff. J., Battista, K., & Van Auken Borrow, C. (1998).*Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares.Journal of Research in Mathematics Education.* (pp 503-532).

Clements, D. H., & Stephan, M. (2004).Measurement in pre-K to grade 2 mathematics.In D. H. Clements & J. Sarama (Eds.), *Engaging young children in mathematics* (pp. 299–317). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dickson, L. (1989). Area of a rectangle. In D. Johnson (Ed.), Children's mathematical frameworks 8–13: *A study of classroom teaching (pp. 89–125)*. Windsor, Berkshire: NFER-Nelson.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics: A teacher's guide to recent research*. London: Cassell.

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren.*Educational Studies in Mathematics*, 18(1), 59 - 74.

Hughes, E.R. & Rogers, J. (1979). 'The concept of area', In Macmillan Education (Eds.), *Conceptual Powers of Children: an Approach through Mathematics and Science, Schools Council Research Studies,* pp.78-135.

Kamii, C., & Clark, F. (1997).Mearurement of Length: The Need for a Better Approach to Teaching. *School Science and Mathematics*.97, pp116-121.

Kamii, C., &Kysh, J. (2006). The difficulty of "length×width": Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 105–115.

Kordaki, M. (2003).The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area.*Educational Studies in Mathematics*, 52, 177–209.

Lean, G., & Clements, M.A. (1981).Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance.*Educational Studies in Mathematics, 12* (3), 267-299.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. E. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 179–192). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lohman, D. F. (1988).Spatial abilities as traits, processes, and knowledge.In R.J. Sternberg (Ed.) *Advances in the psychology of human intelligence* (pp 181-248). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Murphy, C., (2011). The role of subject knowledge in primary prospective teachers' approaches to teaching the topic of area.*Journal of Mathematics Teacher Education.* DOI 10.1007/s10857-011-9194-8

Pesek, D., &Kirshner, D. (2000).Interference of instrumental instruction in subsequent relational learning.*Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 524–540.

Piaget, J., Inhelder, B., &Szeminska, A. (1960).*Child's conception of geometry.* London: Routledge and Kegan Paul.

Pittalis, M., &Christou, C. (2010).Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability.*Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 191-212.

Silver, E. A. (1997).Fostering creativity though instruction rich mathematical problem solving and problem posing.*International Reviews on Mathematical Education*, *29*(3), 75-80. doi: 10.1007/s11858-997-0003-x

Tierney, C., Boyd, C., & Davis, D. (1990).Prospective primary teachers' conception of area.In G. Booker, P.P. Cobb, & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME international conference* (Vol. 2, pp.307–315).Oaxtepec, Mexico: PME.

Torrance, E. P. (1995). *The beyonders' in why fly? A philosophy of creativity.*Norwood, NJ: Ablex.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas.*Journal of Mathematical Behaviour*, 25, 224–239.

ΜΟΡΦΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Μαρία Χειμωνή*, Δήμητρα Πίττα – Πανταζή**

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

chimoni.maria@ucy.ac.cy*, dpitta@ucy.ac.cy**

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Είναι ευρέως αποδέκτη η ανάγκη για ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης κατά τη διάρκεια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Εντούτοις, η έρευνα δεν έχει δώσει μια σαφή περιγραφή σχετικά με το περιεχόμενο και τη δομή της αλγεβρικής σκέψης στο δημοτικό σχολείο. Σκοπός της εργασίας αυτής ήταν να διερευνήσει τους παράγοντες που συνθέτουν την αλγεβρική σκέψη των νεαρών μαθητών, μέσα από την ανάλυση εμπειρικών δεδομένων. Εκατόν εβδομήντα μαθητές της Ε΄ και της Στ' τάξης εξετάστηκαν σε ένα δοκίμιο που αξιολογούσε τις ικανότητες για επίλυση διαφόρων τύπων αλγεβρικών έργων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η αλγεβρική σκέψη στο δημοτικό σχολείο περιλαμβάνει τέσσερις διακριτές μορφές: τη γενικευμένη αριθμητική, το συλλογισμό με μεταβλητές, τη μοντελοποίηση και τις διαδικασίες απόδειξης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σύγχρονη έρευνα περιγράφει την αλγεβρική σκέψη ως ένα ευρύ εννοιολογικό πεδίο που είναι δυνατόν να κατακτηθεί από όλους τους μαθητές (Mason, Graham & Johnston-Wilder, 2005). Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην αναδόμηση της άποψης ότι η αλγεβρική σκέψη εμφανίζεται μόνο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση μέσα από τα μαθήματα της παραδοσιακής άλγεβρας. Επιπρόσθετα, υποστηρίζεται η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης από τα πρώτα χρόνια του δημοτικού σχολείου (NCTM, 2000). Την άποψη αυτή ενισχύουν τα ερευνητικά αποτελέσματα των τελευταίων δεκαετιών που υποδεικνύουν τη δυνατότητα μαθητών δημοτικού σχολείου για ανάπτυξη αλγεβρικής σκέψης, όταν παρακολουθήσουν κατάλληλα παρεμβατικά προγράμματα διδασκαλίας (π.χ. Irwin & Britt, 2005).

Στο πλαίσιο αυτό, προβάλλεται η ανάγκη για περεταίρω διερεύνηση των στοιχείων που συνθέτουν την αλγεβρική σκέψη, τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Σύμφωνα με τους Carraher και Schliemann (2007), δεν έχει ακόμα διευκρινιστεί κατά πόσο η αλγεβρική σκέψη στο δημοτικό σχολείο αποτελεί ένα διαφορετικό τομέα μελέτης σε σχέση με την αλγεβρική σκέψη στο γυμνάσιο και το λύκειο. Επιπλέον, οι προσπάθειες των ερευνητών για ορισμό της αλγεβρικής σκέψης χαρακτηρίζονται από πολυμορφία, ενώ λίγοι από αυτούς έχουν προσεγγίσει την έννοια

με τρόπο που να διασαφηνίζει τα συστατικά της στοιχεία (Carraher και Schliemann, 2007).

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια εξέτασης της φύσης της αλγεβρικής σκέψης στο δημοτικό σχολείο. Η ανάλυση βασίζεται στο θεωρητικό υπόβαθρο που έχει αναπτυχθεί από τον Kaput (2008) σε σχέση με τα θεμελιώδη στοιχεία που χαρακτηρίζουν την αλγεβρική σκέψη. Παρόλο που η ερευνητική κοινότητα έχει αξιοποιήσει σε μεγάλο βαθμό το συγκεκριμένο πλαίσιο για τη μελέτη της αλγεβρικής σκέψης, το πλαίσιο αυτό δεν έχει επιβεβαιωθεί με εμπειρικά δεδομένα. Επισημαίνοντας το ερευνητικό αυτό κενό, η παρούσα εργασία χρησιμοποιεί ως σημείο αναφοράς τη θεωρητική προσέγγιση του Kaput (2008) για να περιγράψει τους παράγοντες που συνθέτουν την αλγεβρική σκέψη μαθητών δημοτικού σχολείου με τη χρήση ποσοτικών μεθόδων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η πολύπλευρη φύση της άλγεβρας

Η Kieran (1996) ήταν ανάμεσα στους πρώτους ερευνητές που προσπάθησε να αναδείξει τον πολυδιάστατο χαρακτήρα της άλγεβρας. Στο πλαίσιο αυτό, ανέπτυξε ένα θεωρητικό μοντέλο για την περιγραφή της άλγεβρας που αποτελείται από τρεις τύπους μαθηματικών δραστηριοτήτων. Ο πρώτος τύπος αφορά δραστηριότητες γενίκευσης, όπου εξισώσεις και εκφράσεις κατασκευάζονται για να αναπαραστήσουν ποικίλες καταστάσεις. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτού του τύπου δραστηριοτήτων είναι η κατασκευή εξισώσεων που περιλαμβάνουν ένα άγνωστο για την αναπαράσταση ενός προβλήματος και η έκφραση γενικεύσεων που προκύπτουν μέσα από τη διερεύνηση γεωμετρικών ή αριθμητικών μοτίβων. Ο δεύτερος τύπος συμπεριλαμβάνει μετασχηματιστικές δραστηριότητες, όπου οι αλγεβρικές εκφράσεις απλοποιούνται σύμφωνα με κάποιους κανόνες. Στις δραστηριότητες αυτές εμπίπτει η κατανόηση της έννοιας της ισότητας και της χρήσης ιδιοτήτων και αξιωμάτων για την εκτέλεση διαδικασιών. Παραδείγματα μετασχηματιστικών δραστηριοτήτων αποτελούν η παραγοντοποίηση, η λύση εξισώσεων και ανισώσεων, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων.

Στον τρίτο τύπο περιλαμβάνονται οι «παγκόσμιες / μέτα-επιπέδου» δραστηριότητες οι οποίες δεν είναι αποκλειστικά δραστηριότητες άλγεβρας. Ωστόσο, η άλγεβρα συνιστά απαραίτητο εργαλείο για την επεξεργασία, διαχείριση και διεκπεραίωσή τους. Στις δραστηριότητες αυτές λαμβάνουν χώρα γενικές μαθηματικές διαδικασίες, ενώ παράλληλα παρέχουν πλαίσιο και νόημα για τη συμμετοχή στους δύο προηγούμενους τύπους, τις δραστηριότητες γενίκευσης και τις μετασχηματιστικές δραστηριότητες.

Παραδείγματα αυτού του είδους είναι τα προβλήματα, η μοντελοποίηση, η επεξεργασία μοτίβων, η αιτιολόγηση και η απόδειξη, η πρόβλεψη και η υπόθεση, η μελέτη της μεταβολής σε καταστάσεις που περιλαμβάνουν μεταβλητές, η αναζήτηση σχέσεων και δομής. Σημαντικό στοιχείο αυτών των δραστηριοτήτων είναι ότι δεν απαιτούν αυστηρά τη χρήση γραμμάτων και συμβόλων. Σύμφωνα με την Kieran (2007), οι «παγκόσμιες / μέτα-επιπέδου» δραστηριότητες είναι ευρύτερες από την άλγεβρα.

Η αλγεβρική σκέψη στο δημοτικό σχολείο

Το πλαίσιο της Kieran είναι σημαντικό γιατί διαφωτίζει τις πολλαπλές μορφές τη άλγεβρας και την σκιαγραφεί με ένα τρόπο αντίθετο ως προς τις πιο παραδοσιακές προσεγγίσεις που έδιναν έμφαση σε δύο μόνο στοιχεία, τις εξισώσεις και τις μεταβλητές. Εντούτοις, όπως και η ίδια η Kieran αναγνωρίζει, το συγκεκριμένο πλαίσιο προσανατολίζεται κυρίως στην άλγεβρα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και αφήνει απροσδιόριστους τους τρόπους με τους οποίους οι τρεις τύποι δραστηριοτήτων θα μπορούσαν να προσαρμοστούν στην άλγεβρα του δημοτικού σχολείου (Kieran, 2011). Σε ένα μετέπειτα αναστοχασμό, η Kieran (2004) υποστήριξε ότι, οι *«παγκόσμιες / μέτα-επιπέδου»* δραστηριότητες είναι κατάλληλες για την εισαγωγή των νεαρών μαθητών στην άλγεβρα αφού δεν είναι απαραίτητο να συνδυαστούν με το συμβολικό χαρακτήρα της άλγεβρας. Την ίδια άποψη υποστηρίζει και ο Radford (2000). Σύμφωνα με τη δική του προσέγγιση, η αλγεβρική σκέψη εμφανίζεται όταν το άτομο προσπαθεί να αναπαραστήσει τη γενίκευση με διάφορους τρόπους, όπου δεν χρησιμοποιούνται υποχρεωτικά τα σύμβολα της μαθηματικής γλώσσας. Πιο συγκεκριμένα, ο Radford διεύρυνε την έννοια της αλγεβρικής σκέψης, αναλύοντας τη σημαντικότητα των «σημειωτικών μαθηματικών και μη μαθηματικών συστημάτων» τα οποία αξιοποιούνται από τους μαθητές έτσι ώστε να αποδοθεί νόημα κατά την επίλυση αλγεβρικών έργων.

Ο Kaput (2008) προσφέρει ένα ελαφρώς διαφοροποιημένο πλαίσιο για την οργάνωση και την κατανόηση της άλγεβρας, τόσο στο δημοτικό όσο και στο γυμνάσιο και το λύκειο. Συγκεκριμένα, οι Blanton και Kaput (2005), επισημαίνουν ότι το κύριο χαρακτηριστικό της αλγεβρικής σκέψης, είναι η διαδικασία της αναγνώρισης, της συστηματικής έκφρασης και της αιτιολόγησης γενικεύσεων με τρόπους που προοδευτικά γίνονται πιο τυπικοί και επίσημοι. Αυτή η διαδικασία είναι διάχυτη σε τρεις μορφές άλγεβρας: (α) στη *γενικευμένη αριθμητική*, όπου εξετάζονται δομές και συστήματα που εξάγονται από υπολογισμούς και σχέσεις, συμπεριλαμβανομένων της αριθμητικής και της ποσοτικής σκέψης, (β) στο *συλλογισμό με μεταβλητές*, όπου εξετάζονται σχέσεις με μεταβλητές, έννοιες ρυθμού και μεταβολής και (γ) στη *μοντελοποίηση* όπου η άλγεβρα συνιστά εργαλείο και γλώσσα για την έκφραση και την υποστήριξη του συλλογισμού σε καταστάσεις που μοντελοποιούνται (Kaput, 2008).

Το ερευνητικό έργο των Blanton και Kaput (2005) παρουσιάζει αποτελέσματα μακροχρόνιων ερευνών που στόχευαν στη διερεύνηση των τρόπων και του βαθμού με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί μπορούν να υποστηρίξουν την ανάπτυξη της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης. Από παρατηρήσεις που έγιναν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας σε μαθητές Γ΄ Δημοτικού, διαφάνηκε ότι με την κατάλληλη αξιοποίηση διαφόρων τύπων μαθηματικών δραστηριοτήτων, ο εκπαιδευτικός μπορεί να μεταφέρει την προσοχή των μαθητών από την αριθμητική στην άλγεβρα (Blanton & Kaput, 2005). Στη συγκεκριμένη έρευνα, έγινε καταγραφή διαφόρων κατηγοριών αλγεβρικής σκέψης οι οποίες ταξινομήθηκαν στις πιο πάνω τρεις βασικές μορφές άλγεβρας. Επιπρόσθετα, παρατηρηθήκαν κατηγορίες αλγεβρικής σκέψης οι οποίες δεν μπορούσαν να συμπεριληφθούν σε καμιά από τις πιο πάνω μορφές. Πιο συγκεκριμένα, οι κατηγορίες αυτές αφορούσαν τη γενίκευση και την αιτιολόγηση. Σύμφωνα με τους ερευνητές, οι κατηγορίες αυτές αντικατοπτρίζουν μια ανώτερου επιπέδου αλγεβρική σκέψη, εξαιτίας της περιπλοκότητάς τους. Οι δραστηριότητες στις οποίες έγιναν εμφανείς αυτές οι κατηγορίες συμπεριελάμβαναν έργα χρήσης γενικεύσεων για την οικοδόμηση άλλων γενικεύσεων, αιτιολόγησης, απόδειξης και επιβεβαίωσης υποθέσεων και γενίκευσης μαθηματικών διαδικασιών. Το αποτέλεσμα αυτό είναι συναφές με επισημάνσεις της σύγχρονης έρευνας για τη σχέση της άλγεβρας με τις διαδικασίες απόδειξης, όπου η αλγεβρική σκέψη αξιοποιείται ως εργαλείο ή ως μια «συνήθεια του μυαλού» για τη διαχείριση και εκτέλεση μαθηματικών αποδείξεων (πχ Kieran, 2011· Pedemonte, 2008· Stylianides & Stylianides, 2008).

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στη διερεύνηση των παραγόντων που συνθέτουν την αλγεβρική σκέψη στο δημοτικό σχολείο. Συγκεκριμένα, υποθέτοντας ότι η αλγεβρική σκέψη αποτελεί μια γενική έννοια που μπορεί να αναλυθεί σε τέσσερα ξεχωριστά αλλά αλληλοσχετιζόμενα στοιχεία, η εργασία επιχειρεί να διατυπώσει και να επιβεβαιώσει εμπειρικά ένα γενικό θεωρητικό πλαίσιο που αποτελείται από (α) τη *γενικευμένη αριθμητική*, (β) το *συλλογισμό με μεταβλητές*, (γ) τη *μοντελοποίηση* και (δ) τις *διαδικασίες απόδειξης*. Οι τρεις πρώτοι παράγοντες αντιπροσωπεύουν τις τρεις μορφές αλγεβρικής σκέψης που περιγράφονται από τον Kaput (2008). Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη τις εισηγήσεις της βιβλιογραφίας που προαναφέρθηκε, το μοντέλο επεκτάθηκε για να συμπεριλάβει ως τέταρτη μορφή αλγεβρικής σκέψης τις διαδικασίες γενίκευσης που εμφανίζονται σε δραστηριότητες μαθηματικής απόδειξης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες και διαδικασία

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν συνολικά 170 μαθητές δημοτικού σχολείου (100 από τη Στ΄ τάξη και 70 από την Ε΄ τάξη), από τρία δημοτικά σχολεία της επαρχίας Λευκωσίας. Οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν ένα δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης. Για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου δόθηκε χρόνος 40 λεπτών.

Δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης

Η ανάπτυξη του δοκιμίου για τη μέτρηση της αλγεβρικής σκέψης βασίστηκε στην προσαρμογή έργων που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες (π.χ. Blanton & Kaput, 2005· Kieran, 2004· Mason et al, 2005· Stylianides & Stylianides, 2008) και σε έργα που συμπεριλήφθηκαν σε συγκριτικές μελέτες που αξιολογούν την επίδοση στα μαθηματικά σε παγκόσμιο ή εθνικό επίπεδο όπως TIMSS (2011), NAEP (2011) και MCAS (2012). Στο δοκίμιο συμπεριλήφθηκαν συνολικά 18 έργα τα οποία καλύπτουν τις τέσσερις μορφές αλγεβρικής σκέψης του προτεινόμενου μοντέλου.

Ο παράγοντας *Γενικευμένη αριθμητική* μετρήθηκε μέσα από τρεις κατηγορίες έργων: (α) εφαρμογή ιδιοτήτων των ακέραιων αριθμών, (β) προσέγγιση της δομής των πράξεων και αποφυγή υπολογισμών, (γ) έννοια της ισότητας και της ανισότητας.

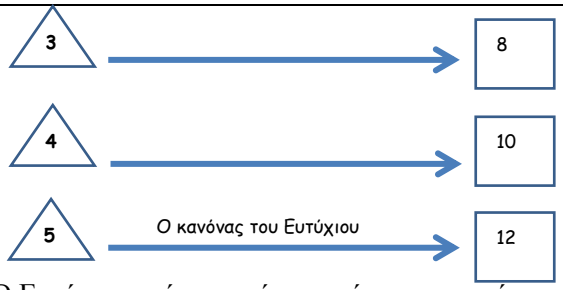
Ο παράγοντας *Συλλογισμός με μεταβλητές* μετρήθηκε μέσα από τρεις κατηγορίες έργων: (α) γραφική αναπαράσταση δεδομένων, (β) εντοπισμός σχέσεων μεταξύ μεταβλητών (γ) εντοπισμός και περιγραφή αριθμητικών και γεωμετρικών μοτίβων.

Ο παράγοντας *Μοντελοποίηση* μετρήθηκε με έργα που έδιναν έμφαση στη γενίκευση κανονικοτήτων μέσα από την επεξεργασία φαινομένων και καταστάσεων.

Ο τέταρτος παράγοντας *Διαδικασίες απόδειξης* μετρήθηκε μέσα από τρεις κατηγορίες έργων: (α) χρήση γενικεύσεων για την οικοδόμηση άλλων γενικεύσεων, (β) αιτιολόγηση, απόδειξη και διερεύνηση υποθέσεων και (γ) γενίκευση μιας μαθηματικής διαδικασίας.

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει παραδείγματα των έργων που χρησιμοποιήθηκαν.

Γενικευμένη αριθμητική (προσέγγιση της δομής των πράξεων / αποφυγή υπολογισμών).	Το άθροισμα της πράξης 1***245676 + 4535731*** είναι ζυγός ή μονός αριθμός; Να εξηγήσεις την απάντηση σου.

Συλλογισμός με μεταβλητές (εντοπισμός σχέσεων μεταξύ μεταβλητών).	 Ο Ευτύχιος εφάρμοσε ένα κανόνα για να πάρει τον αριθμό στο □ από τον αριθμό στο △ . Ποιος ήταν ο κανόνας; *(α) Πολλαπλασιάζω επί 1 και προσθέτω 5.* *(β) Πολλαπλασιάζω επί 2 και προσθέτω 2.* *(γ) Πολλαπλασιάζω επί 3 και αφαιρώ 1.* *(δ) Πολλαπλασιάζω επί 4 και αφαιρώ 4.*
Μοντελοποίηση	Η Ιωάννα θα κάνει μάθημα ηλεκτρονικών υπολογιστών δύο φορές τη βδομάδα. Ποια είναι η πιο συμφέρουσα προσφορά, έτσι ώστε να πληρώσει όσο το δυνατόν λιγότερα χρήματα στο τέλος του μήνα; **ΠΡΟΣΦΟΡΑ Α** €8 για κάθε μάθημα **ΠΡΟΣΦΟΡΑ Β** €50 για τα 5 πρώτα μαθήματα του μήνα και €4 για κάθε επιπλέον μάθημα.
Γενίκευση και απόδειξη (χρήση γενικεύσεων για την οικοδόμηση άλλων γενικεύσεων)	Ποιο θα είναι το άθροισμα τριών μονών αριθμών;

Πίνακας 1: Παραδείγματα έργων για τους τέσσερις παράγοντες

Ανάλυση δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο MPLUS (Muthén & Muthén, 1998). Συγκεκριμένα, εφαρμόστηκε η Επιβεβαιωτική Παραγοντική Ανάλυση που αποσκοπεί στην επιβεβαίωση ενός θεωρητικού πλαισίου σχέσεων μεταξύ συγκεκριμένων παραγόντων (μεταβλητών), μέσα από τα δεδομένα ενός συγκεκριμένου πληθυσμού. Στην παρούσα μελέτη, η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση θα διερευνήσει κατά πόσο το υποτιθέμενο μοντέλο σε σχέση με τα βασικά στοιχεία που συνθέτουν τον ανώτερο παράγοντα αλγεβρική σκέψη επιβεβαιώνεται μέσα από τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί από τους μαθητές της Ε' και Στ' δημοτικού. Η καταλληλότητα του μοντέλου κρίνεται από τις τιμές τριών δεικτών καλής προσαρμογής: (α) το πηλίκο του chi-square ως προς το βαθμό ελευθερίας του (x^2/df) (β) του Comparative Fit index (CFI) και (γ) του Root Mean-Square Error of Approximation

(RMSEA). Η τιμή του x^2/df πρέπει να είναι μικρότερη από 2, η τιμή του CFI μεγαλύτερη από 0.9 και η τιμή του RMSEA πρέπει να είναι μικρότερη του 0.08.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

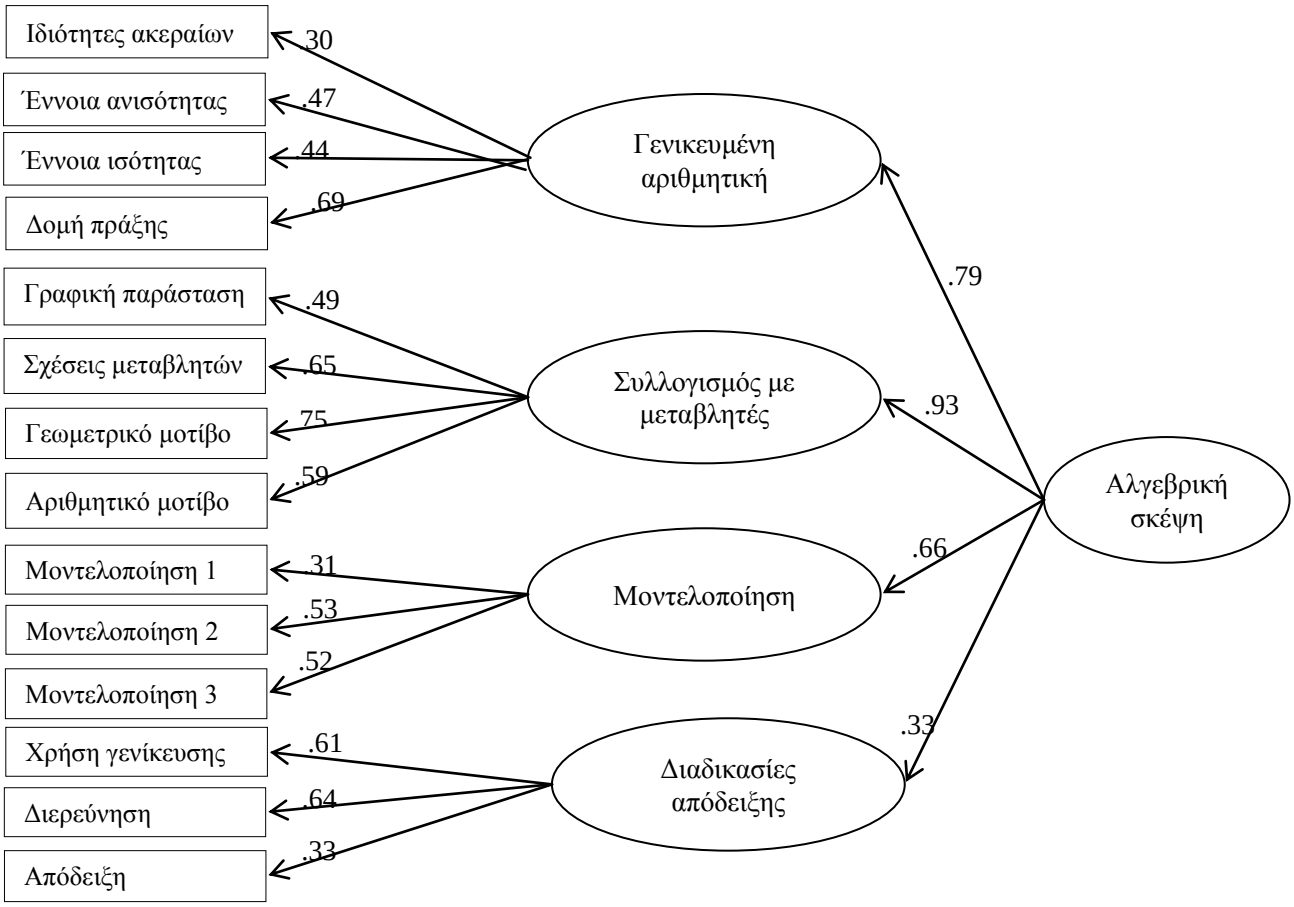
Για την αξιολόγηση του προτεινόμενου μοντέλου χρησιμοποιήθηκε η Επιβεβαιωτική Παραγοντική Ανάλυση. Σύμφωνα με τις τιμές των δεικτών, το μοντέλο φαίνεται να έχει καλή προσαρμογή στα δεδομένα του δείγματος (CFI=0.95, x2=103.345 df=131, x2/df=1.19, RMSEA=0.03).

ΠΡΟΣΦΟΡΑ Α

€8 για κάθε μάθημα

ΠΡΟΣΦΟΡΑ Β

€50 για τα 5 πρώτα μαθήματα του μήνα και €4 για κάθε επιπλέον μάθημα.



Εικόνα 1: Η δομή της αλγεβρικής σκέψης

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 1, η γενικευμένη αριθμητική, ο συλλογισμός με μεταβλητές, η μοντελοποίηση και οι διαδικασίες απόδειξης (πρώτης τάξης παράγοντες) συνθέτουν τον παράγοντα αλγεβρική σκέψη (δεύτερης τάξης παράγοντας). Οι φορτίσεις όλων των μεταβλητών (έργων) ήταν στατιστικά σημαντικές. Επιπλέον, η ανάλυση έδειξε ότι το κάθε έργο του δοκιμίου φορτίζει με κατάλληλο τρόπο μόνο σε ένα από τους τέσσερις παράγοντες, ενισχύοντας την υπόθεση ότι οι τέσσερις παράγοντες αντικατοπτρίζουν διαφορετικές ικανότητες που συνθέτουν τη γενικότερη ικανότητα της αλγεβρικής σκέψης. Οι φορτίσεις των τεσσάρων παραγόντων στον δεύτερης τάξης παράγοντα ήταν αρκετά ψηλές (0.79, 0.93, 0.66 και 0.33). Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι η δομή των σχέσεων που προτείνεται από το μοντέλο μπορεί να επεξηγήσει τη διασπορά των μαθητών στα έργα του δοκιμίου με ακρίβεια.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα μελέτη διερεύνησε τις μορφές της αλγεβρικής σκέψης σε μαθητές Ε’ και Στ’ Δημοτικού, επιβεβαιώνοντας τη δομή ενός προτεινόμενου μοντέλου για τους παράγοντες που τη συνιστούν. Τα αποτελέσματα της είναι σημαντικά γιατί κατ’ αρχήν υποστηρίζουν τις επισημάνσεις της σύγχρονης βιβλιογραφίας για τη δυνατότητα εμφάνισης και ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης από τα χρόνια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Επιπρόσθετα, η παρούσα μελέτη προσδιορίζει το εννοιολογικό πεδίο της αλγεβρικής σκέψης στο δημοτικό σχολείο, μέσα από την περιγραφή τεσσάρων διακριτών παραγόντων οι οποίοι μπορούν να καθοδηγήσουν την ανάπτυξη συγκεκριμένου υλικού και διδακτικών προσεγγίσεων για την οικοδόμηση της έννοιας της αλγεβρικής σκέψης.

Η παρουσία της *γενικευμένης αριθμητικής* ανάμεσα στους παράγοντες που συνθέτουν την αλγεβρική σκέψη συνάδει με τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών που εισηγούνται την αξιοποίηση των γνώσεων των μαθητών στον τομέα της αριθμητικής. Ειδικότερα, η γενικευμένη αριθμητική αποσκοπεί στην αναγνώριση της δομής και των σχέσεων σε αριθμητικά πλαίσια (e.g. Carpenter, Franke, & Levi, 2003). Σε ό,τι αφορά το *συλλογισμό με μεταβλητές*, η συμπερίληψη του στη δομή της αλγεβρικής σκέψης είναι συναφής με τις εισηγήσεις ενός εύρους ερευνών που υποστηρίζουν ότι τα μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο, πέρα από την έμφαση στα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, θα πρέπει να επεκταθούν σε έργα που περιγράφουν τη σχέση και τη μεταβολή δύο ή περισσότερων ποσοτήτων (π.χ. Blanton & Kaput, 2011).

Το γεγονός ότι ο παράγοντας *μοντελοποίηση* αποτελεί διακριτό παράγοντα και δεν εμπίπτει σε οποιαδήποτε από τις προηγούμενες δύο συνιστώσες, ενισχύει την άποψη της Kieran (2007) σχετικά με το χαρακτηρισμό της μοντελοποίησης ως «παγκόσμιας/μετα-επιπέδου» δραστηριότητας. Σε αυτά τα έργα, δεν απαιτείται μόνο γενίκευση

αριθμητικών σχέσεων ή συλλογισμός με μεταβλητές, αλλά και άλλες γενικές μαθηματικές διαδικασίες. Παράλληλα, δεν είναι απαραίτητη η χρήση του επίσημου αλγεβρικού συμβολισμού για τη λύση τους. Κατά παρόμοιο τρόπο, οι Carraher και Schliemann (2007) διευκρινίζουν ότι η μοντελοποίηση είναι βασική όχι μόνο για τις δραστηριότητες της άλγεβρας αλλά και σε οποιαδήποτε μαθηματική δραστηριότητα.

Μια σημαντική συνεισφορά της παρούσας μελέτης σε σχέση με την περιγραφή της αλγεβρικής σκέψης είναι η επέκταση του θεωρητικού μοντέλου του Kaput έτσι ώστε να συμπεριληφθεί σε αυτό και ο παράγοντας *διαδικασίες απόδειξης*. Όπως διαφάνηκε από τα αποτελέσματα της έρευνας, οι διαδικασίες απόδειξης αποτελούν ξεχωριστό παράγοντα της αλγεβρικής σκέψης, ενισχύοντας τις απόψεις πρόσφατων ερευνών για το σημαντικό ρόλο της άλγεβρας ως γλώσσα επικοινωνίας για την έκφραση αποδείξεων (π.χ. Pedemonte, 2008). Επομένως, φαίνεται ότι η μαθηματική απόδειξη μπορεί να αποτελέσει μέρος της διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο καθώς και στοιχείο που μπορεί να συνδυαστεί με την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης.

Σε μελλοντικές έρευνες, το προτεινόμενο μοντέλο μπορεί να εξεταστεί ως προς την προσαρμογή του σε διαφορετικές ηλικιακές ομάδες. Επιπρόσθετα, σημαντική θα ήταν και η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο οι μορφές της αλγεβρικής σκέψης αναπτύσσονται ιεραρχικά στα άτομα και αν ένα αναπτυξιακό μοντέλο μπορεί να προβλέψει και να περιγράψει την πρόοδο των ατόμων στους τέσσερις παράγοντες της αλγεβρικής σκέψης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412–446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. *Early Algebraization*, 5-23. doi: 10.1007/978-3-642-17735-4_2

Carraher, D.W. & Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics.* (Vol II pp.669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Irwin, K.C., & Britt, M.C. (2005).The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zealand Numeracy Project. *Educational Studies in Mathematics Education, 58*(2), 169-188. doi: 10.1007/s10649-005-2755-y

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). New York: Routledge.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), *Eighth International Congress on Mathematical Education: Selected Lectures* (pp. 271–290). Seville: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2004). The algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2007). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.) *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 11-50). Rotterdam: Sense.

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research andteaching. In J. Cai& E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 557-577). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra.* London: Sage (Paul Chapman)

Muthén, L. K, & Muthén, B. O (2004). *Mplus user's guide (3rd ed.)*. Los Angeles: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000): *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM, 40*(3), 385-400. doi: 10.1007/s11858-008-0085-0

Radford, L. (2000). Sings and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268. doi: 10.1023/A:1017530828058

Stylianides G.J., & Stylianides A.J. (2008). Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(2), 103-133. doi:10.1080/10986060701854425

Η ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΣΕ ΕΡΓΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ

Μαριλένα Β. Χρυσοστόμου & Κωνσταντίνος Χρίστου

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

marilena-c@hotmail.com, edchrist@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπό της εργασίας αποτέλεσε η μελέτη της ικανότητας επίλυσης έργων αλγεβρικής σκέψης και η σχέση της με την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού. Χορηγήθηκαν δύο δοκίμια σε 624 μαθητές Ε' και Στ' δημοτικού και Α' γυμνασίου, όπου το πρώτο αφορούσε στην αλγεβρική σκέψη και το δεύτερο στον αναλογικό συλλογισμό. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού μπορεί να προβλέψει σε μεγάλο βαθμό την επίδοση σε έργα αλγεβρικής σκέψης. Από τις συνεντεύξεις που ακολούθησαν για την επίλυση ενός έργου που ενέπλεκε ταυτόχρονα ικανότητα αναλογικού συλλογισμού και αλγεβρικής σκέψης, εντοπίστηκαν τρεις τρόποι προσέγγισης που υιοθετούν οι μαθητές διαφορετικής επίδοσης.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η έρευνα τα τελευταία χρόνια έχει χαράξει ένα νέο δρόμο, αυτόν που παρέχει στοιχεία και τονίζει ότι ο αλγεβρικός τρόπος σκέψης πρέπει να υφίσταται από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Η ικανότητα γενίκευσης σχέσεων μεταβολής και συμμεταβολής (ΓΣΜ) και η ικανότητα γενίκευσης ιδιοτήτων από την αριθμητική (ΓΙΑ),αποτελούν βασικές διαστάσεις στις θεωρίες που περιγράφουν τη φύση της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες τάξεις(π.χ. Kaput,2008; Kieran, 2004). Ενώ η πλειοψηφία των ερευνών του πεδίου της αλγεβρικής σκέψης εξετάζει μια συγκεκριμένη ικανότητα ή έννοια κάθε φορά, στην παρούσα εργασία εξετάζονται και οι δύο ικανότητες γενίκευσης ταυτόχρονα, στην προσπάθεια μιας πιο ολοκληρωμένης μέτρησης της ικανότητας γενίκευσης σε έργα αλγεβρικής σκέψης.

Η ικανότητα γενίκευσης σχέσεων μεταβολής εμπλέκει την ικανότητα γενίκευσης μοτίβων όπου απαιτείται ο εντοπισμός της μεταβολής σε μια ακολουθία (π.χ. 1,3,6,10, _, _, _) (Blanton & Kaput, 2011). Με τη γενίκευση σχέσεων συμμεταβολής αναφερόμαστε στον εντοπισμό της σχέσης αντιστοιχίας (συναρτησιακής σχέσης) μεταξύ των μεταβλητών (π.χ. το ψ είναι δύο φορές το χ συν 3) (Blanton & Kaput, 2011)σε έργα με αναπτυσσόμενα μοτίβα και έργα με πίνακες τιμών (input/output) (Kaput, 2008). Η γενίκευση μπορεί να εκφραστεί με λόγια ή αλγεβρικά σύμβολα. Αρκετές, κυρίως πρόσφατες έρευνες, υποδεικνύουν ότι οι μαθητές του δημοτικού μπορούν να ανακαλύψουν τη σχέση αντιστοιχίας και να καταλήξουν σε γενίκευση της σχέσης (Blanton & Kaput, 2011; Tanisli, 2011). Από την άλλη, επικρατεί και η

άποψη ότι ακόμη και οι μεγαλύτεροι ηλικιακά μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες σε τέτοιου είδους έργα (π.χ. Lannin, Barker & Townsend, 2006).

Η δεύτερη ικανότητα που εξετάζεται αφορά στη γενικευμένη αριθμητική η οποία σύμφωνα με τον Kaput (2008), αναφέρεται στην οικοδόμηση γενικεύσεων για τις ιδιότητες των πράξεων και τις ιδιότητες των αριθμών που μπορούν να διατυπωθούν είτε με λόγια είτε με σύμβολα. Σύμφωνα με την Kieran (1992), οι συγκεκριμένες δραστηριότητες αλγεβρικής σκέψης, είναι αυτές που απαιτούν εννοιολογική κατανόηση. Εντούτοις, αρκετές έρευνες παρέχουν στοιχεία ότι ακόμη και οι μαθητές του δημοτικού μπορούν να κάνουν γενικεύσεις για τις ιδιότητες των πράξεων και των αριθμών (π.χ. Bastable & Schifter, 2008).

Ενώ αρκετές πρόσφατες έρευνες έχουν εστιάσει στις δυνατότητες των μικρότερων ηλικιακά μαθητών να σκέφτονται αλγεβρικά, ελάχιστη προσοχή έχει δοθεί στη διερεύνηση των διαδικασιών συλλογισμού στις οποίες μπορεί να οφείλεται η επιτυχία ή η αποτυχία των μαθητών στο συγκεκριμένο πεδίο (English & Warren, 1994). Η αλγεβρική σκέψη γενικότερα, αλλά και πιο συγκεκριμένα οι ικανότητες γενίκευσης που εξετάζονται στην παρούσα εργασία, εμπλέκουν την αφαίρεση ιδεών και σχέσεων, στις οποίες διαδραματίζει σημαντικό ρόλο ο εντοπισμός συσχεσιακών μοτίβων και η ανάπτυξη της σκέψης για τη δομή. Η διαδικασία συλλογισμού η οποία έχει να κάνει άμεσα με τον εντοπισμό συσχεσιακών μοτίβων και την εστίαση της προσοχής στη δομή είναι ο αναλογικός συλλογισμός, όπως αυτός ορίζεται στο πεδίο της ψυχολογίας. Ο αναλογικός συλλογισμός περιλαμβάνει την αναγνώριση και μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα (πηγή) σε ένα άλλο (στόχο) και πραγματοποιείται με την εύρεση της αντιστοιχίας ανάμεσα στις διαδικασίες και τους μηχανισμούς που χαρακτηρίζουν τα δύο συστήματα (Vosniadou, 1989). Η μέτρηση της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού εμπλέκει κυρίως την επίλυση κλασσικών αναλογιών της μορφής Α:Β::Γ:Δ, όπου η σχέση μεταξύ των δύο πρώτων όρων θα πρέπει να είναι ισοδύναμη με τη σχέση των δύο τελευταίων όρων.Αν εξαιρέσουμε την έρευνα των English και Warren (1994), η επίδραση της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού στην ικανότητα και επίδοση σε έργα αλγεβρικής σκέψης δεν έχει αποτελέσει στόχο διερεύνησης. Ωστόσο, η προαναφερθείσα έρευνα παρέχει ενδείξεις ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού σχετίζεται με την επίδοση στην άλγεβρα (π.χ. γενίκευση μοτίβων, διατύπωση αλγεβρικών εκφράσεων) με συντελεστή συσχέτισης .410, $p<.01$.

Ένα άλλο θέμα που προκύπτει σε σχέση με τα έργα αναλογικού συλλογισμού, είναι η πρόταση των Lee και Shriraman (2011), οι οποίοι αναφέρονται σε μια πιο δυναμική και ανοικτή εκδοχή των κλασσικών αναλογιών (Α:Β::Γ:Δ) οι οποίες αποκτούν πλέον μαθηματικό περιεχόμενο (π.χ. γεωμετρίας), για τη διερεύνηση και οικοδόμηση εννοιών. Οι ίδιοι αναφέρονται σε τρία επίπεδα επίλυσης αυτών των έργων: (α) οι μαθητές εστιάζουν στην επιφανειακή και αντιληπτική ομοιότητα των αντικειμένων, (β) μεταβατική ομοιότητα όπου παρατηρείται εντοπισμός σχέσεων και αναγνώριση ή δημιουργία της έννοιας (εντοπίζεται συσχεσιακή ομοιότητα),χωρίς όμως ικανότητα αιτιολόγησης και (γ)συσχεσιακή ομοιότητα όπου ο μαθητής μπορεί να οικοδομήσει

νέες έννοιες ή νέες ιδιότητες του αντικειμένου-στόχος και να αιτιολογήσει(Lee & Shriraman, 2011).

Με βάση τα όσα προαναφέρθηκαν, σκοπό της παρούσας εργασίας αποτελεί η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της ικανότητας ΓΣΜ και της ικανότητας ΓΙΑ, με την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού. Ο σκοπός αναλύεται στα εξής ερευνητικά ερωτήματα: (α) Ποια είναι η σχέση μεταξύ της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού με την ικανότητα επίλυσης έργων αλγεβρικής σκέψης αλλά και με κάθε διάσταση ξεχωριστά (ΓΣΝ, ΓΙΑ); (β) Μπορεί η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού να προβλέψει την επίδοση των μαθητών σε έργα αλγεβρικής σκέψης; (γ) Πώς προσεγγίζουν το έργο «αναλογικού συλλογισμού αλγεβρικής σκέψης» (το οποίο αποτελεί δυναμική εκδοχή των κλασσικών αναλογιών με μαθηματικό περιεχόμενο) οι μαθητές διαφορετικής επίδοσης (με βάση το δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης);

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

2.1. Δείγμα

Το δείγμα αποτέλεσαν 624 μαθητές Ε΄ και Στ΄ τάξεων του δημοτικού και Α΄ γυμνασίου, από οκτώ σχολεία. Οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν ένα δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης και ένα δοκίμιο αναλογικού συλλογισμού.

2.2. Δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης

Το δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης αφορούσε συγκεκριμένα: (α) στην ικανότητα ΓΣΜ (6 έργα): 2 έργα γενίκευσης γεωμετρικού μοτίβου με γενικό κανόνα (2ν+1) και (3ν+1) αντίστοιχα, 2 έργα γενίκευσης σχέσης δύο μεταβλητών των όποιων οι τιμές βρίσκονται σε πίνακα με γενικό κανόνα ν×ν και 3×ν αντίστοιχα, 4 έργα μοτίβων όπου η μεταβολή είναι σε μια μόνο διάσταση (2 αριθμητικά μοτίβα, 1 χωρικό μοτίβο και 1 επαναλαμβανόμενο), και (β) στην ικανότητα ΓΙΑ (7 έργα): 1 έργο για τη γενίκευση της αντιμεταθετικής ιδιότητας, 1 για τη γενίκευση της επιμεριστικής ιδιότητας, 2 έργα για τη γενίκευση βασικών αρχών της αριθμητικής (προσθετικό αντίστροφο, πολλαπλασιαστικό αντίστροφο) και 3 έργα που ενέπλεκαν γενικεύσεις για άρτιους και περιττούς αριθμούς (π.χ. περιττός + περιττός= άρτιος ή περιττός, να εξηγήσεις). Σε όλα τα έργα στα οποία οι μαθητές καλούνταν να συμπληρώσουν μια απάντηση χωρίς αιτιολόγηση, αποδόθηκε η τιμή 1 και 0 για τις ορθές και λανθασμένες απαντήσεις αντίστοιχα, ενώ στις περιπτώσεις των ανοικτών ερωτήσεων όπου μαθητές καλούνταν να αιτιολογήσουν τη γενίκευσή τους, υιοθετήθηκε μια πιο αναλυτική βαθμολόγηση με πάλι μέγιστη τιμή το 1 (λόγω περιορισμένης έκτασης του άρθρου δεν παρουσιάζεται η αναλυτική βαθμολόγηση του κάθε έργου). Από την πρόσθεση της επίδοσης των έργων της κάθε κατηγορίας προέκυψε (α) η ικανότητα ΓΣΜ και (β) ικανότητα ΓΙΑ. Η πρόσθεση της επίδοσης στα έργα ΓΣΜ και ΓΙΑ

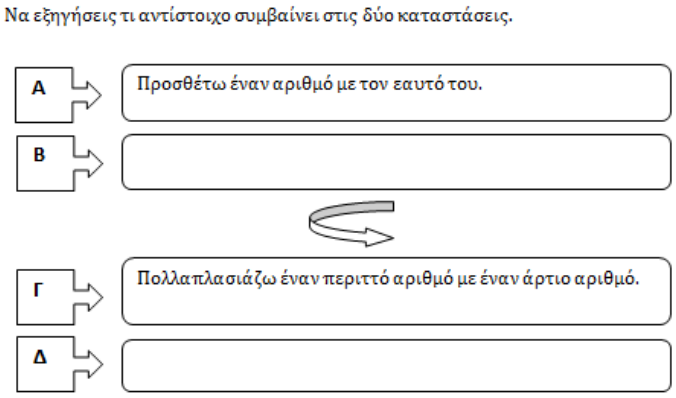
οδήγησε στη «ικανότητα επίλυσης έργων αλγεβρικής σκέψης» (ΕΑΣ). Η μέγιστη τιμή επίδοσης και στις τρεις διαστάσεις (ΓΣΜ, ΓΙΑ, ΕΑΣ) είναι το 1. Με βάση την ΕΑΣ οι μαθητές χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες ανάλογα με την επίδοσή τους.

2.3. Δοκίμιο αναλογικού συλλογισμού

Στην προσπάθεια μιας πιο πολύπλευρης μέτρησης της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού, χρησιμοποιήθηκαν έργα από διαφορετικά δοκίμια, ωστόσο όλα ήταν της μορφής κλασσικών αναλογιών Α:Β::Γ:_ με τέσσερις επιλογές για τον εντοπισμό του όρου Δ: (α) 22 έργα από το Figural Analogy Test των Orzechowski και Chuderski (unpublished manuscript), όπου οι όροι των αναλογιών είναι σχήματα, (β) 15 λεκτικές αναλογίες οι οποίες βασίζονται κυρίως στις κατηγορίες του Miller Analogies Test (MAT) (Meagher, 2008) και (γ) 8 έργα με αριθμητικές αναλογίες οι οποίες βασίστηκαν επίσης στο Miller Analogies Test (MAT) (Meagher, 2008) (π.χ. (6:8::9:_ 12,16,18). Οι ορθές και λανθασμένες απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 1 και 0 αντίστοιχα. Με την πρόσθεση της βαθμολογίας των μαθητών στα έργα προέκυψε η μεταβλητή για την «ικανότητα αναλογικού συλλογισμού».

2.4. Ημι-δομημένες συνεντεύξεις

Βασισμένοι στη σημασία που έχει ο αναλογικός συλλογισμός και ο εντοπισμός της δομής στην επίδοση έργων αλγεβρικής σκέψης (φαίνεται στα αποτελέσματα), κατασκευάστηκαν έργα «αναλογικού συλλογισμού αλγεβρικής σκέψης» (ΕΑΣΑΣ) (Σχήμα 1) τα οποία είχαν ως στόχο να επιστήσουν την προσοχή των μαθητών στη δομή. Τα έργα είναι παρόμοιας φιλοσοφίας με αυτά των Lee και Sriraman (2011), τα οποία έχουν τη μορφή κλασσικών αναλογιών Α:Β::Γ:Δ, μόνο που στην παρούσα εργασία δίνονται μόνο οι δύο όροι (Α και Γ) και τα έργα εμπλέκουν περιεχόμενο που αφορά στην αλγεβρική σκέψη (Σχήμα 1). Αναμενόταν ότι μέσα από συνεχή σύγκριση της πρώτης πιο απλής κατάστασης (η οποία λειτουργούσε ως βάση) με την πιο σύνθετη, οι μαθητές θα άρχιζαν να «αποκωδικοποιούν» και τη δεύτερη πιο σύνθετη κατάσταση, καθιστώντας έτσι πιο εύκολο τον εντοπισμό και αιτιολόγηση της δομικής ομοιότητας των δυο καταστάσεων μέσω γενικεύσεων, επιδεικνύοντας αλγεβρική σκέψη. Στις ημι-δομημένες ατομικές συνεντεύξεις συμμετείχαν 19, 26 και 24 μαθητές από την ομάδα επίδοσης 1, 2 και 3, αντίστοιχα. Κάθε συνέντευξη είχε διάρκεια 30 λεπτών στα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν 5 έργα της μορφής που φαίνεται στο Σχήμα 1. Το έργο του οποίου τα αποτελέσματα αναλύονται στην παρούσα εργασία είναι το εξής:



Σχήμα 1: Έργο το οποίο χρησιμοποιήθηκε στις συνεντεύξεις.

2.5. Ανάλυση των δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκαν με τη χρήση του στατιστικού πακέτου SPSS αναλύσεις συσχέτισης, ανάλυση παλινδρόμησης, ανάλυση κατά συστάδες και χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία περιγραφικής στατιστικής. Στην ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων των συνεντεύξεων, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της σταθερής σύγκρισης (Constant Comparative method) (Miles&Huberman, 1994).

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 1, παρουσιάζονται οι μέσοι όροι της επίδοσης των μαθητών στις δυο διαστάσεις της αλγεβρικής σκέψης (ΓΣΜ και ΓΙΑ)και στην συνολική επίδοση στα έργα αλγεβρικής σκέψης (ΕΑΣ). Όπως φαίνεται και από το συνολικό δείγμα και από κάθε ηλικιακή ομάδα, η επίδοση των μαθητών στα έργα ΓΣΜ είναι ψηλότερη από την επίδοσή τους στα έργα ΓΙΑ. Επιπρόσθετα, η επίδοση για κάθε διάσταση αλγεβρικής σκέψης αυξάνεται όταν μετακινούμαστε από μικρότερη τάξη σε μεγαλύτερη.

	Μέγιστη τιμή επίδοσης	Σύνολο μαθητών		Α΄ γυμνασίου		Στ΄ δημοτικού		Ε΄ δημοτικού	
		N	□	N	□	N	□	N	□
ΕΑΣ	1	624	,576	226	,628	196	,575	202	,518
ΓΣΜ	1	624	,698	226	,745	196	,706	202	,637
ΓΙΑ	1	624	,453	226	,511	196	,443	202	,399

Πίνακας 1: Μέσοι όροι της επίδοσης των μαθητών στα έργα των δύο διαστάσεων της αλγεβρικής σκέψης

Για να εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ αναλογικού συλλογισμού και της συνολικής επίδοσης στα έργα αλγεβρικής σκέψης, αλλά και με κάθε μια από τις δύο διαστάσεις (ΓΙΑ, ΓΣΜ) πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις συσχέτισης.Φαίνεται ότι η ικανότητα

αναλογικού συλλογισμού σχετίζεται στατιστικά σημαντικά τόσο με τη συνολική επίδοση στα έργα αλγεβρικής σκέψης (r=.756, p<.001) όσο και με την κάθε διάσταση ξεχωριστά (ΓΙΑ: r=.663, p<.001, ΓΣΜ: r=.714, p<.001). Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε ανάλυση παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή τη συνολική επίδοση των μαθητών στα έργα αλγεβρικής σκέψης και ανεξάρτητη μεταβλητή την ικανότητα αναλογικού συλλογισμού. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ικανότητα αναλογικού συλλογισμού (ΑΝ) αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης της επίδοσης σε έργα αλγεβρικής σκέψης (ΑΣ) με την εξής εξίσωση: ΑΣ = .802(ΑΝ) + .034, με ποσοστό ερμηνευόμενης διασποράς 57% (R^2=.572).

Ακολούθησε ανάλυση κατά συστάδες (clusteranalysis) από την οποία προέκυψαν τρεις ομάδες μαθητών με βάση τη συνολική επίδοσή τους στο δοκίμιο αλγεβρικής σκέψης (Ομάδα 3: N=186, μέσος όρος επίδοσης=.785, Ομάδα 2: N=288, μέσος όρος=.579, Ομάδα 1: N=150, μέσος όρος=.308).

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τις συνεντεύξεις στις οποίες συμμετείχαν μαθητές και από τις τρεις ομάδες. Από την ανάλυση του τρόπου επίλυσης του έργου (Σχήμα 1) προέκυψαν οι εξής τρεις κατηγορίες προσέγγισης: (α) Επιφανειακή προσέγγιση: οι μαθητές εστιάζουν σε επιφανειακά χαρακτηριστικά των δύο καταστάσεων και όχι στη δομή, εγκλωβίζονται σε αυτή την προσέγγιση χωρίς να υπάρχει καμιά προσπάθεια για πιο βαθιά ερμηνεία των καταστάσεων. (β) Μεταβατική προσέγγιση: Οι μαθητές πιθανό να αρχίσουν με μια επιφανειακή προσέγγιση στη συνέχεια όμως εντοπίζουν συσχεσιακή ομοιότητα μεταξύ των καταστάσεων πέραν των επιφανειακών χαρακτηριστικών, και καταλήγουν σε ένα συμπέρασμα, ωστόσο περιορίζονται στην αντικατάσταση τιμών να δικαιολογήσουν την ομοιότητα και το συμπέρασμά τους, χωρίς να μπορούν να αιτιολογήσουν μέσω γενικευμένων δηλώσεων. (γ) Δομική προσέγγιση: οι μαθητές εστιάζουν στη δομή των δύο καταστάσεων και μπορούν να σκεφτούν αναλογικά χρησιμοποιώντας γενικευμένες εκφράσεις μέσα από τις οποίες αιτιολογούν τη συσχεσιακή ομοιότητα και το συμπέρασμά τους.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζεται ο τρόπος προσέγγισης που υιοθέτησαν οι μαθητές των τριών ομάδων για την επίλυση του αναλογικού έργου στη συνέντευξη. Όπως φαίνεται, η πλειοψηφία των μαθητών της ομάδας 1 (με χαμηλή επίδοση) υιοθετούν μια επιφανειακή προσέγγιση, η πλειοψηφία των μαθητών μέτριας επίδοσης μια μεταβατική προσέγγιση, ενώ η ομάδα 3 μια δοκιμή προσέγγιση. Φαίνεται επίσης ότι οκτώ μαθητές της ομάδας 2, μέσω του έργου της συνέντευξης, μπόρεσαν να εντοπίσουν τη συσχεσιακή ομοιότητα και να αιτιολογήσουν με πλήρεις γενικεύσεις.

Ομάδες	N	Επιφανειακή προσέγγιση	Μεταβατική προσέγγιση	Δομική προσέγγιση
Ομάδα 1	19	15	4	0
Ομάδα 2	26	3	15	8
Ομάδα 3	24	0	2	22

Πίνακας 2. Οι προσεγγίσεις που ακολούθησαν οι μαθητές των τριών ομάδων κατά την επίλυση του έργου της συνέντευξης

Στη συνέχεια παρουσιάζονται χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις.

3.1. Επιφανειακή και έπειτα μεταβατική προσέγγιση (μαθητής ομάδας 2)

Σε αυτή την περίπτωση η μαθήτρια ξεκινά με μια επιφανειακή προσέγγιση, ωστόσο στην πορεία προχωρά σε μια μεταβατική προσέγγιση όπου εντοπίζει συσχεσιακή ομοιότητα, χωρίς όμως να μπορεί να αιτιολογήσει.

Ελένη: Εμ.. και στις δύο καταστάσεις έχουμε πράξεις με αριθμούς, και μάλιστα δε γνωρίζουμε ακριβώς ποιοι αριθμοί είναι.

Ερευνητής: Μπορείς να σκεφτείς κάτι άλλο που βλέπεις ότι συμβαίνει και στις δύο καταστάσεις;

Ελένη: Εμ… βασικά ίσως να μοιάζουν στο ότι θα έχουν τους ίδιους αριθμούς.

Ερευνητής: Δηλαδή; Εξήγησέ μου λίγο τι εννοείς.

Ελένη: Στην πάνω περίπτωση (δείχνει «αριθμός+αριθμός) μπορεί να πούμε ότι έχουμε 5+5 που κάνει 10, ενώ στην κάτω περίπτωση (δείχνει «μονός επί ζυγός») θα μπορούσαμε να έχουμε 5 φορές το 2 που πάλι κάνει 10…εμμ…μοιάζουν στο ότι έχουν αποτέλεσμα 10!

Ερευνητής: Δηλαδή, αν ήταν διαφορετικοί αριθμοί από αυτούς που λες, οι δυο καταστάσεις δεν θα είχαν τίποτα όμοιο;

Ελένη: Δεν ξέρω… Πρέπει να δοκιμάσω και με άλλους αριθμούς, ένα λεπτό… εμμ… νομίζω βλέπω κάτι άλλο… και στις δυο περιπτώσεις βγαίνει πάντα άρτιος αριθμός αποτέλεσμα.

Ερευνητής: Ξέρεις γιατί βγαίνει άρτιος αριθμός;

Ελένη: Επειδή το βρήκα από τις πράξεις.

Ερευνητής: Μπορείς να μου εξηγήσεις χωρίς να κάνεις πράξεις, γιατί είναι άρτιος αριθμός το αποτέλεσμα στην πρώτη κατάσταση;

Ελένη: Σκέφτηκα αρκετή ώρα αλλά δεν μπορώ, όχι.

3.2 Δομική προσέγγιση (μαθητής ομάδας 3)

Ρόζα: Και στα δύο το αποτέλεσμα είναι άρτιος.

Ερευνητής: Μπορείς να μου εξηγήσεις γιατί:

Ρόζα: Ναι, αφού στη μια πολλαπλασιάζει με το 2 που είναι άρτιος ενώ στην κάτω περίπτωση πολλαπλασιάζει με οποιοδήποτε άρτιο.

Ερευνητής: Και γιατί όταν πολλαπλασιάζω κάτι με έναν άρτιο βγαίνει άρτιος αριθμός το αποτέλεσμα;

Ρόζα: Στην πρώτη περίπτωση όταν κάνω κάτι φορές δύο αυτό που παίρνω έχει σίγουρα έχει μισό, διαιρείται ακριβώς με το 2 άρα είναι άρτιος.

Ερευνητής: Και στην κάτω περίπτωση;

Ρόζα: Στην κάτω περίπτωση έχω περιττό επί κάποιο άρτιο, τον άρτιο μπορούμε να τον σκεφτούμε και ως 2 επί κάτι άλλο, έτσι έχουμε 2 επί κάτι άλλο επί περιττό αριθμό, άρα πάλι έχω «2 επί κάτι άλλο», που σας εξήγησα πριν γιατί είναι άρτιος.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η επίδοση των μαθητών στα έργα ΓΣΜ κρίνεται καλή (μέσος όρος αρκετά πάνω από το 0.5 με μέγιστη τιμή στη μεταβλητή ΓΣΜ το 1) κάτι που συνάδει με αποτελέσματα άλλων ερευνών (Blanton & Kaput, 2011;Tanisli, 2011).Από την άλλη τα αποτελέσματα για την επίδοση στα έργα ΓΙΑ δεν είναι τόσο ενθαρρυντικά (μέσος όρος λίγο κάτω από το 0.5 με μέγιστη τιμή στη μεταβλητή ΓΙΑ το 1). Αυτό είναι αναμενόμενο λαμβάνοντας υπόψη ότι τα έργα γενίκευσης των ιδιοτήτων των αριθμών και των πράξεων, είναι τα έργα αλγεβρικής σκέψης τα οποία απαιτούν εννοιολογική κατανόηση (Kieran,1992). Ωστόσο, η επίδοση των μαθητών κρίνεται σχετικά ικανοποιητική αν αναλογιστούμε ότι η επαφή των μαθητών με τέτοιου είδους έργα κυμαίνεται από περιορισμένη έως και ανύπαρκτη.

Επίσης, αρκετά ψηλή φαίνεται η συσχέτιση της ικανότητας αναλογικού συλλογισμού και της επίδοσης σε έργα αλγεβρικής σκέψης, ψηλότερη από αυτή που εντόπισαν οι Engilishκαι Warren (1994). Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της παλινδρόμησης με το σχετικά ψηλό ποσοστό ερμηνευόμενης διασποράς, αλλά και το ψηλό συντελεστή παλινδρόμησης, τότε η περαιτέρω διερεύνηση της σχέσης μεταξύ των δύο κρίνεται αναγκαία. Επίσης, ανάγκη για διερεύνηση χρήζει και η σχέση του αναλογικού συλλογισμού και με άλλες διαστάσεις της αλγεβρικής σκέψης, πέρα από αυτές που εμπλέκουν άμεσα τη γενίκευση ως αποτέλεσμα.

Τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων έδειξαν ότι οι μαθητές με χαμηλή επίδοση «εγκλωβίζονται» σε μια επιφανειακή προσέγγιση, ενώ σχεδόν όλοι οι μαθητές με ψηλή επίδοση υιοθέτησαν μια δομική προσέγγιση και κατάφεραν να λύσουν με επιτυχία το έργο της συνέντευξης. Φαίνεται ότι το συγκεκριμένο έργο αναλογικού

συλλογισμού αλγεβρικής σκέψης, δε βοήθησε τους μαθητές χαμηλής επίδοσης να «κτίσουν» και να «εμπλακούν» περισσότερο σε έργα αλγεβρικής σκέψης. Αυτό πιθανό να συμβαίνει λόγω του ότι «στερούνται εννοιολογικής κατανόησης», ένα μεγάλο κενό που το έργο αναλογικού συλλογισμού δεν είναι αρκετό για να τους βοηθήσει να αναπληρώσουν. Από την άλλη, αρκετοί μαθητές (8 από 26) από την ομάδα 2 (μέτριας επίδοσης και οι οποίοι στο γραπτό δοκίμιο δεν είχαν αιτιολογήσει τις γενικεύσεις τους στα έργα ΓΙΑ) κατάφεραν στη συνέντευξη να εστιάσουν στη δομή και να αιτιολογήσουν μέσω γενικευμένων δηλώσεων τη συσχεσιακή ομοιότητα των δύο καταστάσεων. Φυσικά τίθεται και το θέμα ότι το περιβάλλον της συνέντευξης, είναι πιθανόν από μόνο του πιο «ευνοϊκό» ή «κατάλληλο» για το μαθητή να επιδείξει τις δυνατότητές του. Παρόλα αυτά, η επιτυχία των συγκεκριμένων μαθητών αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο τα έργα αναλογικού συλλογισμού με μαθηματικό περιεχόμενο, να είναι χρήσιμα για τη διδασκαλία (Lee & Sriraman, 2011), και στην προσπάθεια ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bastable, V., & Schifter, D. (2008). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 165–184). Mahwah, NJ: Erlbaum Associates.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*(pp. 5-23).Heidelberg, Germany: Springer.

English, L. D.,& Warren, E. (1994). The interaction between general reasoning process and achievement algebra and novel problem solving. InG. Bell, B. Wright, N. Leeson, & J. Geeke (Eds.), *Proceedings of the 17th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 223-231). Lismore, NSW: MERGA.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Mahwah, NJ:Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 299–317.

Lee, K., & Sriraman, B. (2011). Conjecturing via reconceived classical analogy. *Educational Studies in Mathematics*, *76*, 2, 123-140.

Meagher D. (2008). *Introduction to the Miller Analogies Test*. San Antonio, TX: Pearson Education.

Miles, M. B., & Huberman, M. A. (1994). *Qualitative data analysis: A sourcebook of new methods*. (2nd ed.). Newbury Park, CA: Sage.

Orzechowski, J., & Chuderski, A. (unpublished). *TAO Figural Analogy Test: Test & manual*. Krakow: Jagiellonian University.

Tanisli, D. (2011). Functional Thinking Ways in Relation to Linear Function Tables of Elementary School Students. *Journal of Mathematical Behavior*, *30*(3), 206-223.

Vosniadou, S. (1989). Analogical reasoning as a mechanism in knowledge acquisition: A developmental perspective. In S. Vosniadou & A. Ortony (eds.), *Similarity and Analogical Reasoning*(pp. 413-437).Cambridge: University Press.

ΣΧΕΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗΣ

Μαρία Κάττου* & Κωνσταντίνος Χρίστου**

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

*kattou.maria@ucy.ac.cy, **edchrist@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία είχε ως στόχο να διερευνήσει κατά πόσο η νοημοσύνη αποτελεί δείκτη πρόβλεψης της μαθηματικής δημιουργικότητας και κατ' επέκταση αν αυτή η σχέση διαφοροποιείται σε μαθητές με διαφορετικό βαθμό ευφυΐας. Στην έρευνα συμμετείχαν 476 μαθητές Δ', Ε' και Στ' δημοτικού σχολείου, συμπληρώνοντας δύο εργαλεία: μαθηματικής δημιουργικότητας και νοημοσύνης. Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση έδειξε ότι η νοημοσύνη αποτελεί ένα ισχυρό δείκτη πρόβλεψης της μαθηματικής δημιουργικότητας. Παράλληλα, συσχετιστικές αναλύσεις έδειξαν ότι η νοημοσύνη και η δημιουργικότητα συσχετίζονται στο μέσο πληθυσμό ευφυΐας, ενώ σε μαθητές με υψηλό ή χαμηλό δείκτη νοημοσύνης οι δύο γνωστικές δομές λειτουργούν ανεξάρτητα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας και του δείκτη νοημοσύνης δεν είναι ιδιαίτερα απλή (Leikin, 2008). Οι προσπάθειες για διερεύνηση της σχέσης αυτής ξεκίνησαν με την εμφάνιση της έννοιας της δημιουργικότητας, σε μια προσπάθεια ανεξαρτητοποίησης του τομέα από άλλους τομείς της ψυχολογίας, όπως η νοημοσύνη (Runco, 2007). Ως εκ τούτου, διάφορα εμπειρικά δεδομένα προέκυψαν, πολλές φορές αντικρουόμενα. Αρκετοί είναι οι ερευνητές που έχουν εντοπίσει στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ της νοημοσύνης και της δημιουργικότητας (π.χ. Srivastava & Thomas, 1991), ενώ άλλοι έχουν παρατηρήσει ότι οι δύο έννοιες λειτουργούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη (π.χ. Heilman, 2005; Silvia, 2008). Λόγω της ασυμφωνίας στην ύπαρξη σχέσης μεταξύ νοημοσύνης και δημιουργικότητας, το θέμα παραμένει άλυτο και απαιτεί περαιτέρω διερεύνηση (Sternberg & O' Hara, 1999). Η παρούσα εργασία στοχεύει να συνεισφέρει σε αυτό το σημείο, διερευνώντας κατά πόσο οι δύο γνωστικές ικανότητες σχετίζονται μεταξύ τους, καθώς επίσης εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο αυτή η σχέση διαφοροποιείται σε μαθητές με διαφορετικό βαθμό ευφυΐας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Ορίζοντας τη μαθηματική δημιουργικότητα

Οι ορισμοί που έχουν αναπτυχθεί για τη μαθηματική δημιουργικότητα υιοθετούν στοιχεία από τους ορισμούς που έχουν προταθεί στο πεδίο της ψυχολογίας (π.χ.

Torrance, 1995), ενσωματώνοντας στοιχεία από το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, & Christou, 2011). Για παράδειγμα, στις περισσότερες ερευνητικές προσπάθειες στον τομέα της μαθηματικής παιδείας (π.χ. Kattou, κ.α., 2011; Leikin, 2008), οι ερευνητές υιοθετούν τον ορισμό που προτάθηκε από τον Torrance (1995) για τη γενική δημιουργική ικανότητα αξιοποιώντας μαθηματικά έργα με πολλαπλές λύσεις ή μεθόδους επίλυσης. Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό, η δημιουργικότητα ορίζεται ως ο συνδυασμός των ικανοτήτων της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας. Σε αυτό το πλαίσιο, η ευχέρεια αναφέρεται στον αριθμό των ορθών και διαφορετικών λύσεων που προτείνονται, η ευελιξία στις εναλλαγές μεταξύ διαφορετικών ιδεών και τέλος, η πρωτοτυπία αναφέρεται στο βαθμό καινοτομίας των προτεινόμενων λύσεων (Leikin, 2008).

Συνδέοντας τη μαθηματική δημιουργικότητα με τη νοημοσύνη

Οι ερευνητικές προσπάθειες που έχουν γίνει με στόχο να διερευνήσουν τη σχέση της νοημοσύνης και της δημιουργικότητας κατέληξαν σε αντικρουόμενα συμπεράσματα (Sternberg & O' Hara, 1999). Στη συνέχεια παρατίθενται ερευνητικές εργασίες που θεωρούν ότι η δημιουργικότητα και η νοημοσύνη αποτελούν ξεχωριστές οντότητες και ακολούθως έρευνες που υποστηρίζουν την ύπαρξη σχέσης μεταξύ τους.

Οι Getzels και Jackson (1962) ήταν από τους πρώτους ερευνητές που εντόπισαν ότι η δημιουργικότητα και η νοημοσύνη αποτελούν ασύνδετες δομές. Η προσπάθεια των ερευνητών επικεντρώθηκε στον εντοπισμό δύο ομάδων μαθητών- άτομα με υψηλή νοημοσύνη αλλά χαμηλή δημιουργικότητα και άτομα με υψηλή δημιουργικότητα και χαμηλή νοημοσύνη- με στόχο να τις συγκρίνουν ως προς την ακαδημαϊκή τους επίδοση. Η εργασία των Getzels και Jackson (1962) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι δύο ομάδες μαθητών είχαν διαφορές μεταξύ τους μόνο όσον αφορά στον επαγγελματικό προσανατολισμό και στα ενδιαφέροντα. Οι Wallach και Kogan (1965) επανέλαβαν παρόμοιο πείραμα εντοπίζοντας ότι ο βαθμός συσχέτισης των μετρήσεων σε ένα εργαλείο δημιουργικότητας και σε ένα εργαλείο νοημοσύνης ήταν πολύ χαμηλός, επαναλαμβάνοντας το συμπέρασμα ότι οι δύο έννοιες δεν έχουν σχέση μεταξύ τους. Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξε η έρευνα του Silvia (2008) ο οποίος μετααναλύ-οντας τα δεδομένα των Wallach και Kogan παρατήρησε ότι η σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας και της νοημοσύνης ήταν χαμηλή. Ο Kim (2008) στη δική του εργασία βρήκε μια αμελητέα σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας και της νοημοσύνης, προτείνοντας ότι οι μαθητές με χαμηλό δείκτη νοημοσύνης μπορούν να είναι δημιουργικοί και αντίστροφα. Πρόσφατα, ο Heilman (2005) έδωσε ένα πραγματικό παράδειγμα για να υποστηρίξει το πιο πάνω συμπέρασμα: ο Lewis Terman σε έρευνά του το 1954 μελέτησε ενήλικες οι οποίοι ως μαθητές είχαν συγκεντρώσει υψηλή βαθμολογία σε τεστ νοημοσύνης. Ανάμεσα σε αυτούς τους ενήλικες λίγοι ήταν εκείνοι που αποδείχθηκαν ως δημιουργικοί, ενώ ένα άτομο που ως μαθητής είχε λάβει χαμηλή βαθμολογία στο τεστ νοημοσύνης κέρδισε Βραβείο Νόμπελ στη Φυσική για την πρωτότυπη εργασία του (William Shockley).

Σε αντίθεση με τα πιο πάνω, υπήρξαν ερευνητικές προσπάθειες που δεν εστιάστηκαν στο ερώτημα κατά πόσο υπάρχει σχέση μεταξύ των δύο εννοιών, αλλά στον τρόπο με τον οποίο οι έννοιες συνδέονται, θεωρώντας αυτονόητη την ύπαρξη μιας τέτοιας σχέσης. Για παράδειγμα, στο μοντέλο Structure of Intellect που προτάθηκε από το Guilford (1967), η δημιουργικότητα θεωρείται ως στοιχείο της νοημοσύνης, ενώ στη θεωρία των Sternberg και Lubart (1996) η νοημοσύνη περιλαμβάνεται ανάμεσα στις μεταβλητές που αποτελούν προϋπόθεση για εμφάνιση της δημιουργικότητας.

Υπήρξαν βέβαια ερευνητές οι οποίοι κατέληξαν σε συμπεράσματα που συνδυάζουν τις πιο πάνω απόψεις. Μια τέτοια θεωρία είναι η Threshold theory of intelligence (Torrance, 1962), η οποία προτείνει ότι η δημιουργικότητα και η νοημοσύνη αποτελούν ξεχωριστές οντότητες, αλλά υπάρχει σχέση μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, η δημιουργικότητα και η νοημοσύνη σχετίζονται μεταξύ τους κάτω από ένα όριο νοημοσύνης (συνήθως 120) (Runco, 2007; Sternberg & O'Hara, 1999). Όταν ο δείκτης νοημοσύνης του ατόμου είναι πέρα από 120 (5% πληθυσμού), η σχέση μεταξύ δημιουργικότητας και νοημοσύνης είναι αμελητέα και οι δύο έννοιες μοιάζουν να είναι σχεδόν ανεξάρτητες νοητικές ικανότητες (Runco, 2007). Όμοια οι Jauk, Benedek, Dunst και Neubauer (2013) εντόπισαν ένα εύρος τιμών στο οποίο υπάρχει σχέση μεταξύ δημιουργικότητας και νοημοσύνης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Υποκείμενα

Στην παρούσα εργασία έλαβαν μέρος 476 μαθητές Δ', Ε' και Στ' τάξης δημοτικών σχολείων της Κύπρου, οι οποίοι επιλέχθηκαν με σκόπιμη δειγματοληψία μέγιστης ετερογένειας. Πιο συγκεκριμένα, κατά το έτος χορήγησης των εργαλείων, 202 μαθητές (42.4% του δείγματος) φοιτούσαν στη Δ' τάξη, 165 μαθητές (34.7% του δείγματος) φοιτούσαν στην Ε' τάξη και 109 μαθητές (22.9% του δείγματος) φοιτούσαν στη Στ' τάξη.

Εργαλεία μέτρησης

Για τη συλλογή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν δύο εργαλεία: το εργαλείο μαθηματικής δημιουργικότητας και το εργαλείο μέτρησης της νοημοσύνης.

Το εργαλείο μαθηματικής δημιουργικότητας αποτελείται από τέσσερα ανοικτού τύπου έργα (παράδειγμα παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 1) στα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να προτείνουν πολλές λύσεις, διαφορετικές λύσεις, και λύσεις που κανένας άλλος δεν θα μπορούσε να σκεφτεί, σε διάστημα 40 λεπτών. Με την οδηγία που δόθηκε διαφυλάχτηκε ο τρόπος αξιολόγησης των έργων, ώστε να είναι σε συμφωνία με τον ορισμό της μαθηματικής δημιουργικότητας (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία). Το εργαλείο έτυχε ελέγχων για την εξασφάλιση της εγκυρότητας (φαινομενική) και της αξιοπιστίας (α=.783).

Να σχηματίσεις ομάδες αριθμών χρησιμοποιώντας τους αριθμούς που δίνονται πιο κάτω και να τις ονομάσεις:

2, 3, 7, 9, 13, 15, 17, 25, 36, 39, 49, 51, 60, 64, 91, 119, 121, 125, 136, 143, 150

ΠΡΟΣΟΧΗ: Κάθε ομάδα πρέπει να έχει περισσότερους από δύο αριθμούς.

Διάγραμμα 1: Παράδειγμα έργου από το εργαλείο μαθηματικής δημιουργικότητας

Η διαδικασία αξιολόγησης ενός έργου μαθηματικής δημιουργικότητας έχει ως ακολούθως: (α) Ο βαθμός ευχέρειας υπολογίζεται ως το πηλίκο του αριθμού των ορθών μαθηματικών λύσεων που προτάθηκαν από ένα μαθητή διά του μέγιστου αριθμού ορθών μαθηματικών λύσεων που προτάθηκαν από κάποιο μαθητή στον υπό διερεύνηση πληθυσμό. (β) Ο βαθμός ευελιξίας υπολογίζεται ως το πηλίκο του αριθμού των μαθηματικών ιδεών που εμπλέκονται στις λύσεις ενός μαθητή διά του μέγιστου αριθμού μαθηματικών ιδεών που εμπλέκονται στις λύσεις κάποιου μαθητή στον υπό διερεύνηση πληθυσμό. (γ) Ο βαθμός πρωτοτυπίας υπολογίζεται με βάση τη συχνότητα εμφάνισης μιας λύσης σε σχέση με το σύνολο αναφοράς. Με αυτό τον τρόπο προέκυψαν τρεις τιμές κατά την αξιολόγηση κάθε έργου, οι οποίες κυμαίνονται από 0 μέχρι 1. Ο συνολικός βαθμός ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας στο εργαλείο υπολογίζεται ως ο λόγος του αθροίσματος των επί μέρους επιδόσεων στα έργα, ως προς τον αριθμό των έργων. Ακολουθεί περιγραφή της μεθόδου αξιολόγησης που ακολουθήθηκε σε ενδεικτικές απαντήσεις που δόθηκαν από ένα μαθητή (Διάγραμμα 2).

Α) Οι αριθμοί 2, 3, 7, 9 είναι μονοψήφιοι.

Β) Οι αριθμοί 13, 15, 17, 25, 36, 39, 49, 51, 60, 64, 91 είναι διψήφιοι.

Γ) Οι αριθμοί 2, 36, 60, 136, 150 είναι ζυγοί.

Δ) Οι αριθμοί 51, 60, 64, 91, 119, 121, 125, 136, 143, 150 είναι μεγαλύτεροι του 50.

Διάγραμμα 2: Ενδεικτικές απαντήσεις σε έργο του εργαλείου μαθηματικής δημιουργικότητας

Ο βαθμός ευχέρειας του μαθητή στο συγκεκριμένο έργο είναι 4, λόγω του αριθμού των ορθών απαντήσεων που έδωσε. Ο βαθμός ευελιξίας του μαθητή είναι 3, μιας και ανάμεσα στις απαντήσεις του αξιοποιήθηκαν τρεις διαφορετικές μαθηματικές ιδέες (απαντήσεις Α και Β: αριθμός ψηφίων, απάντηση Γ: κατηγορίες αριθμών, όπως ζυγοί, τετράγωνοι κ.λ.π., απάντηση Δ: μέγεθος αριθμού). Αν υποθέσουμε ότι ο μέγιστος αριθμός ορθών απαντήσεων που δόθηκαν από ένα μαθητή ήταν 20 και ο μέγιστος αριθμός μαθηματικών ιδεών που αξιοποιήθηκαν στο συγκεκριμένο έργο ήταν 10, ο βαθμός ευχέρειας του έργου θα μετατραπεί ως $\frac{4}{20} = 0.2$ και ο βαθμός

ευελιξίας θα μετατραπεί ως $\frac{3}{10} = 0.3$. Η πρωτοτυπία των απαντήσεων του μαθητή αξιολογείται με βάση τη συχνότητα εμφάνισής τους (ανάλογα με το ποσοστό εμφάνισης των απαντήσεων δίνεται συγκεκριμένος βαθμός). Για παράδειγμα, αν η απάντηση Γ ήταν η σπανιότερη ανάμεσα σε αυτές που πρότεινε ο μαθητής και είχε δοθεί από λιγότερους από 10% του δείγματος, ο μαθητής θα λάβει το βαθμό 0.6 για την πρωτοτυπία του συγκεκριμένου έργου.

Για τη μέτρηση της νοημοσύνης των μαθητών χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο Naglieri Nonverbal Ability Test (NNAT). Το NNAT είναι ένα σύντομο εργαλείο (με διάρκεια περίπου 30 λεπτών) που περιλαμβάνει 40 έργα πολλαπλής επιλογής που ομαδοποιούνται σε τέσσερις κατηγορίες: συμπλήρωση μοτίβου, αναλογικός συλλογισμός, σειριακός συλλογισμός και χωρική οπτικοποίηση (Naglieri, 1997). Η αξιολόγηση του NNAT έγινε με βάση το εγχειρίδιο χρήσης του. Οι ορθές απαντήσεις έλαβαν το βαθμό 1 ενώ οι λανθασμένες έλαβαν το βαθμό 0. Το άθροισμα των ορθών απαντήσεων έδωσε το βαθμό για κάθε μαθητή. Η εγκυρότητα του εργαλείου επιβεβαιώθηκε από το Naglieri ο οποίος έλεγξε το εργαλείο σε διαφορετικές ομάδες μαθητών. Όσον αφορά την αξιοπιστία του NNAT, το εργαλείο έδειξε εσωτερική αξιοπιστία α=.831.

Ανάλυση δεδομένων

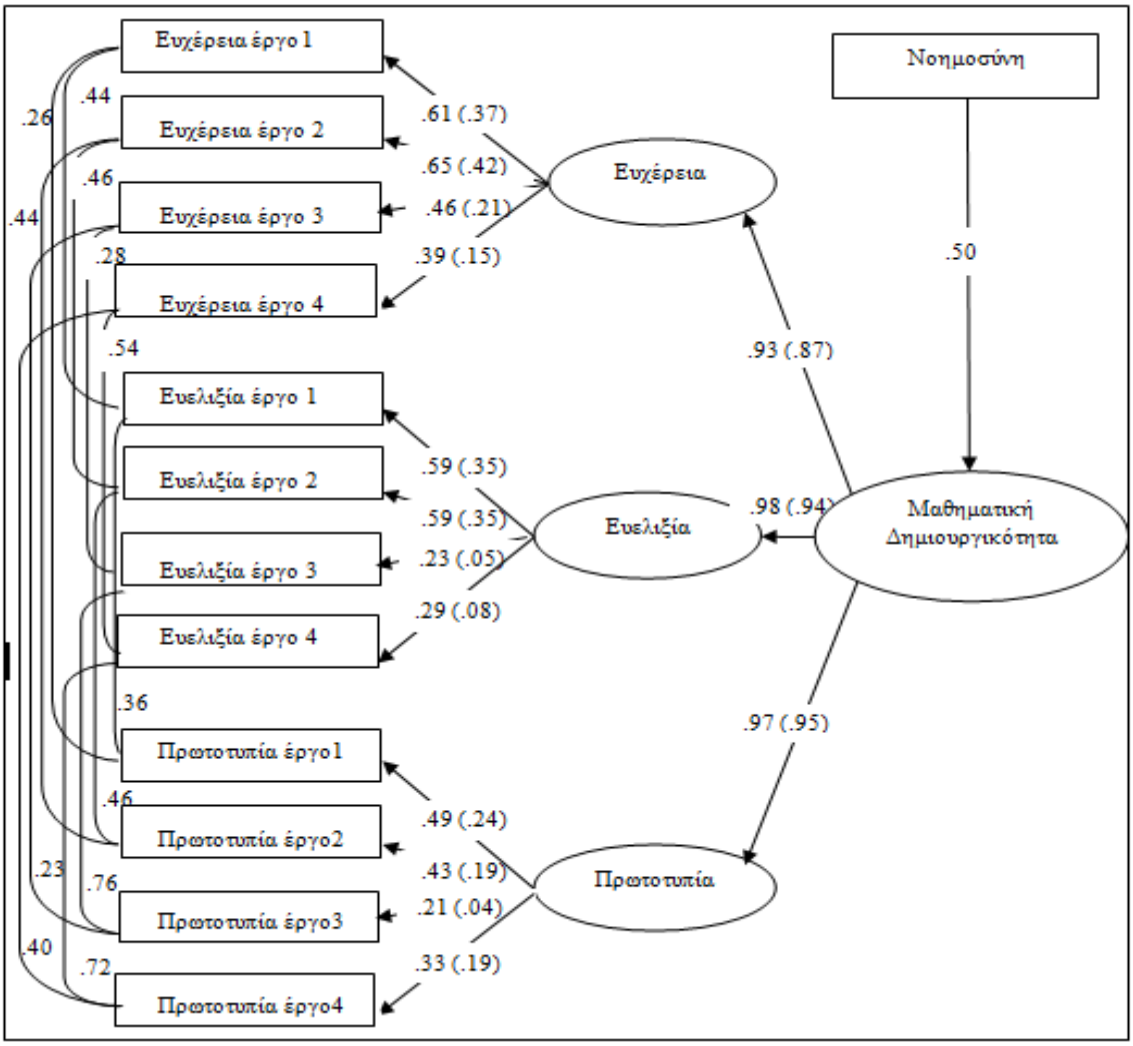
Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με το λογισμικό γραμμικής δομικής ανάλυσης Mplus (Muthén & Muthén, 1998) και το στατιστικό πακέτο SPSS. Ειδικότερα, αξιοποιήθηκε η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση, για τον έλεγχο της εγκυρότητας του θεωρητικού μοντέλου που περιγράφει τη σχέση μεταξύ μαθηματικής δημιουργικότητας και νοημοσύνης. Η αξιολόγηση του βαθμού προσαρμογής ενός μοντέλου στηρίζεται σε τρεις δείκτες: το δείκτη CFI, το πηλίκο χ^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου (χ^2/df) και το δείκτη RMSEA. Σύμφωνα με τους Marcoulides και Schumacker (1996), για να είναι αποδεκτό ένα μοντέλο η τιμή του CFI θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 0.90, η τιμή του χ^2/df πρέπει να είναι μικρότερη από 2 και η τιμή του RMSEA να είναι μικρότερη από 0.08. Τέλος, χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο SPSS για τη διεξαγωγή συσχετιστικής ανάλυσης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της εργασίας έχουν οργανωθεί ως ακολούθως: πρώτα διερευνάται κατά πόσο ο βαθμός νοημοσύνης έχει τη δυνατότητα πρόβλεψης της μαθηματικής δημιουργικότητας, μέσω επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης. Έπειτα, εξετάζεται η σχέση μεταξύ νοημοσύνης και μαθηματικής δημιουργικότητας σε μαθητές με διαφορετικό βαθμό ευφυΐας, αξιοποιώντας συσχετιστική ανάλυση.

Διερεύνηση της επίδρασης της νοημοσύνης στη μαθηματική δημιουργικότητα

Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση είχε ως στόχο να διερευνήσει κατά πόσο ο βαθμός νοημοσύνης μπορεί να προβλέψει το βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών. Ως εκ τούτου αναπτύχθηκε εκ των προτέρων ένα θεωρητικό μοντέλο, του οποίου η δομή παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 3. Συγκεκριμένα, στο θεωρητικό μοντέλο η μαθηματική δημιουργικότητα ορίζεται σαν μια ανώτερη δομή που σχηματίζεται από τις ικανότητες της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας (Torrance, 1962), θεωρώντας ότι οι τρεις ικανότητες συσχετίζονται μεταξύ τους εντός του ίδιου έργου. Ταυτόχρονα, η νοημοσύνη αποτελεί δείκτη πρόβλεψης της μαθηματικής δημιουργικής ικανότητας. Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν την προσαρμογή του θεωρητικού μοντέλου στα δεδομένα της παρούσας εργασίας (CFI=0.989, χ^2=85.045, df=51, χ^2/df= 1.667, RMSEA=.051).



Διάγραμμα 3: Η δομή και οι φορτίσεις του θεωρητικού μοντέλου

Ερμηνεύοντας το πιο πάνω μοντέλο, η μαθηματική δημιουργικότητα αποτελεί ένα δεύτερης τάξης παράγοντα, ο οποίος σχηματίζεται από τους τρεις παράγοντες

πρώτης τάξης: ευχέρεια (r=.93, R^2=.87), ευελιξία (r=.98, R^2=.94) και πρωτοτυπία (r=.97, R^2=.95), όπως επιβεβαιώνεται από τις υψηλές φορτίσεις των παραγόντων πρώτης τάξης στον παράγοντα δεύτερης τάξης. Οι παράγοντες πρώτης τάξης σχηματίζονται από τις αντίστοιχες επιδόσεις των υποκειμένων στα έργα του Εργαλείου Μαθηματικής Δημιουργικότητας. Οι στατιστικά σημαντικές φορτίσεις των επιδόσεων ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας σε καθένα από τα τέσσερα έργα επιβεβαιώνουν ότι τα έργα που χρησιμοποιήθηκαν είναι κατάλληλα για τη μέτρηση των άδηλων παραγόντων πρώτης τάξης. Ταυτόχρονα, μεταξύ της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας εντός του ίδιου έργου υπάρχουν στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις, που κυμαίνονται μεταξύ του .23 (Πρωτοτυπία - Ευχέρεια έργο 3) και του .76 (Πρωτοτυπία - Ευελιξία έργο 3). Τέλος, η παλινδρομική ανάλυση που έγινε κατέληξε σε στατιστικά σημαντικό συντελεστή παλινδρόμησης της νοημοσύνης στη μαθηματική δημιουργικότητα (r=.50, p<.05), επιβεβαιώνοντας ότι η νοημοσύνη μπορεί να προβλέψει τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών, ερμηνεύοντας ένα αξιοσημείωτο ποσοστό της διασποράς της (24.9%).

Διερεύνηση της συσχέτισης της νοημοσύνης στη μαθηματική δημιουργικότητα σε ομάδες πληθυσμού

Πέρα από τη διερεύνηση της επίδρασης της νοημοσύνης στη μαθηματική δημιουργικότητα, κρίθηκε σκόπιμη η εξέταση της ύπαρξης αντίστοιχης σχέσης σε συγκεκριμένες ομάδες πληθυσμού. Λαμβάνοντας υπόψη τη Threshold Theory of Intelligence, τα υποκείμενα της εργασίας χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες: Ομάδα 1 - μαθητές με χαμηλό δείκτη νοημοσύνης (χαμηλότερο 5%), Ομάδα 2 - μαθητές με μέσο δείκτη νοημοσύνης, Ομάδα 3- μαθητές με υψηλό δείκτη νοημοσύνης (υψηλότερο 5%). Τα περιγραφικά χαρακτηριστικά των ομάδων μαθητών παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

	Ομάδα 1 (N=18)	Ομάδα 2 (N=429)	Ομάδα 3 (N=29)
	$\bar{X}$ (SD)	$\bar{X}$ (SD)	$\bar{X}$ (SD)
Ευχέρεια	.318 (.121)	.363 (.129)	.475 (.136)
Ευελιξία	.247 (.104)	.273 (.081)	.348 (.091)
Πρωτοτυπία	.342 (.187)	.432 (.168)	.571 (.156)
Νοημοσύνη	6.833 (1.581)	18.655 (5.336)	31.966 (1.569)

Πίνακας 1: Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις των ομάδων πληθυσμού

Ακολούθησε συσχετιστική ανάλυση ανάμεσα στα στοιχεία της μαθηματικής δημιουργικότητας (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία) και της νοημοσύνης, στις τρεις ομάδες του πληθυσμού. Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη συσχετιστική ανάλυση ανάμεσα στη μαθηματική δημιουργικότητα και το βαθμό νοημοσύνης των μαθητών.

	Νοημοσύνη		
	Ομάδα 1 r (p)	Ομάδα 2 r (p)	Ομάδα 3 r (p)
Ευχέρεια	-.206 (.411)	.324 (.001)*	.210 (.274)
Ευελιξία	-.043 (.865)	.290 (.001)*	.038 (.847)
Πρωτοτυπία	-.154 (.542)	.220 (.001)*	.076 (.695)

* Στατιστικά σημαντική συσχέτιση σε επίπεδο p<.05

Πίνακας 2: Συσχέτιση του Βαθμού Νοημοσύνης με τη Μαθηματική Δημιουργικότητα στις ομάδες πληθυσμού

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ νοημοσύνης και δημιουργικής ικανότητας στα μαθηματικά στην Ομάδα 2, σε αντίθεση με τις Ομάδες 1 και 3. Ειδικότερα, στον πληθυσμό με μέσο βαθμό νοημοσύνης (Ομάδα 2) ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ της νοημοσύνης και της ευχέρειας ήταν r=.324 (p<.05), ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ της νοημοσύνης και της ευελιξίας ήταν r=.290 (p<.05) και ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ της νοημοσύνης και της πρωτοτυπίας ήταν r=.220 (p<.05). Παρόλα αυτά, για τους μαθητές που βρίσκονται στο ανώτερο 5% των επιδόσεων του εργαλείου νοημοσύνης (Ομάδα 3) η μαθηματική δημιουργικότητα δεν έχει στατιστικά σημαντική συσχέτιση με τη νοημοσύνη (p>.05). Όμοια, δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές συσχετίσεις μεταξύ της νοημοσύνης και της δημιουργικότητας (p>.05) στους μαθητές με χαμηλό δείκτη νοημοσύνης (Ομάδα 1).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στόχος της παρούσας εργασίας ήταν η διερεύνηση της σχέσης που υπάρχει μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας και της νοημοσύνης. Πιο συγκεκριμένα, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας διερευνήθηκε κατά πόσο η νοημοσύνη μπορεί να προβλέψει το βαθμό μαθηματικής δημιουργικότητας μαθητών δημοτικού σχολείου. Ταυτόχρονα, εξετάστηκε κατά πόσο η σχέση μεταξύ νοημοσύνης και μαθηματικής δημιουργικότητας διαφοροποιείται ανάμεσα σε μαθητές με διαφορετικό δείκτη ευφυΐας.

Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση έδειξε ότι η μαθηματική δημιουργικότητα ορίζεται από τις ικανότητες της ευχέρειας, της ευελιξίας και της πρωτοτυπίας, ενώ ταυτόχρονα ερμηνεύεται από τη νοημοσύνη. Με άλλα λόγια, ο βαθμός νοημοσύνης μπορεί να αποτελέσει δείκτη πρόβλεψης της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών στα μαθηματικά, χωρίς όμως να την καθορίζει. Το πιο πάνω αποτέλεσμα είναι σε συμφωνία με την αναφορά του Torrance (1962) ότι η νοημοσύνη είναι απαραίτητη αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για την εμφάνιση δημιουργικής συμπεριφοράς.

Παράλληλα, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας έδειξαν ότι η νοημοσύνη και η μαθηματική δημιουργικότητα συσχετίζονται σε μαθητές με μέσο δείκτη ευφυΐας, ενώ στα άτομα με υψηλό ή χαμηλό δείκτη νοημοσύνης, οι δύο γνωστικές δομές είναι

ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το πιο πάνω αποτέλεσμα φαίνεται να επαληθεύει αλλά και να επεκτείνει την Threshold theory of intelligence (Runco, 2007; Torrance, 1962). Όπως και στη Threshold theory of intelligence εντοπίστηκε στατιστικά σημαντική συσχέτιση της μαθηματικής δημιουργικότητας με τη νοημοσύνη σε μαθητές με μέσο βαθμό νοημοσύνης, σε αντίθεση με τους μαθητές με ιδιαίτερα υψηλό δείκτη νοημοσύνης όπου δεν εντοπίστηκε στατιστικά σημαντική συσχέτιση. Αυτό ενδεχομένως να σημαίνει ότι υπάρχει ένα ανώτερο επίπεδο νοημοσύνης πάνω από το οποίο δεν υπάρχει αιτιώδης σχέση με τη δημιουργικότητα (Runco, 2007). Πέρα από τα πιο πάνω, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας εντοπίστηκε ένα κατώτερο επίπεδο νοημοσύνης, κάτω από το οποίο δεν εντοπίζεται οποιαδήποτε αιτιώδης σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας και της νοημοσύνης. Σε παρόμοιο συμπέρασμα κατέληξε η εργασία των Jauk, Benedek, Dunst και Neubauer (2013), οι οποίοι παρατήρησαν στατιστικά σημαντική σχέση μεταξύ νοημοσύνης και δημιουργικότητας σε ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών για τη νοημοσύνη, ενώ πέρα από αυτό οι δύο οντότητες λειτουργούσαν ανεξάρτητα.

Συνοψίζοντας, η σχέση μεταξύ της δημιουργικότητας και του δείκτη νοημοσύνης δεν είναι ιδιαίτερα απλή (Leikin, 2008). Η σχέση μεταξύ των δύο εννοιών διαφοροποιείται ανάμεσα σε μαθητές με συγκεκριμένα γνωστικά χαρακτηριστικά. Ως εκ τούτου, πέρα από τη διερεύνηση της σχέσης μεταξύ δημιουργικότητας και νοημοσύνης σε μαθητές με διαφορετικό δείκτη ευφυίας, θα μπορούσε να εξεταστεί η μορφή της σχέσης σε μαθητές με διαφορετικά γνωστικά χαρακτηριστικά, όπως για παράδειγμα μαθηματική επάρκεια, μνήμη, επεξεργασία. Ταυτόχρονα, σε μελλοντικές εργασίες θα μπορούσε να εξεταστεί με ποιο τρόπο η αλληλεπίδραση γνωστικών χαρακτηριστικών με τη νοημοσύνη επηρεάζουν τη δημιουργικότητα μαθητών στα μαθηματικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Getzels, J. W. & Jackson, P. J. (1962). *Creativity and Intelligence: Explorations with Gifted Students*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw-Hill.

Heilman, K. M. (2005). *Creativity and the brain*. New York: Psychology Press.

Jauk, E., Benedek, M., Dunst, B., & Neubauer, A. (2013). The relationship between intelligence and creativity: new support for the threshold hypothesis by means of empirical breakpoint detection. *Intelligence, 41*(4), 212–221.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2011). Does mathematical creativity differentiate mathematical ability? In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of Seventh Conference of the European Research in Mathematics Education* (pp. 1056 – 1065). Rzeshów, Poland: University of Rzeszów.

Kim, K. H. (2008). Meta-analyses of the relationship of creative achievement to both IQ and divergent thinking test scores. *Journal of Creative Behavior, 42*, 106−130.

Leikin, R. (2008). Teaching mathematics with and for creativity: An intercultural perspective. In P. Ernest, B. Greer, B. Sriraman (Eds.), *Critical Issues in Mathematics Education* (pp. 39-43). USA: Information Age Publishing Inc. & The Montana Council of Teachers of Mathematics.

Marcoulides, G. A., & Schumacker, R. E. (1996). *Advanced Capacity equation modelling: Issues and techniques*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Muthén, L. K., & Muthén, B. O. (1998). *Mplus user's guide*. Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.

Naglieri, J. A. (1997). *Naglieri nonverbal ability test technical manual*. San Antonio. TX: The Psychological Corporation.

Runco, M. A. (2007). *Creativity: Theories, themes, practice. Philadelphia*, CA: Academic Press.

Silvia, P. (2008). Creativity and Intelligence Revisited: A Latent Variable Analysis of Wallach and Kogan, *Creativity Research Journal, 20*(1), 34-39.

Srivastava, S. & Thomas, A. (1991). Creativity of pre-school children effect of sex, age, birth order and intelligence. *Journal of Psychological Researches, 36*(2), 92–98.

Sternberg, R. J. & Lubart, T. I. (1996). Investing in creativity. *American Psychologist, 51*(7), 677-688.

Sternberg, R. J. & O'Hara, L. A. (1999). Creativity and intelligence. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 251–272). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Torrance, E. P. (1995). *The beyonders' in why fly? A philosophy of creativity*. Norwood, NJ: Ablex.

Torrance, E. P. (1962). *Guiding creative talent*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Wallach, M. A. & Kogan, N. (1965). *Modes of thinking in young children: A study of the creativity-intelligence distinction*. New York: Holt, Rinehart, & Winston.

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΣΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Θεοδώρα Χριστοδούλου & Αθανάσιος Γαγάτσης

Πανεπιστήμιο Κύπρου

christodoulou.theodora@ucy.ac.cy, gagatsis@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το παρόν κείμενο αποτελεί μια πρώτη προσπάθεια πολυδιάστατης μελέτης των γραφημάτων στατιστικής. Ειδικότερα, μελετά την κατανόηση των γραφικών παραστάσεων και συνδέει αυτή την κατανόηση με άλλες πτυχές, όπως η ικανότητα της αναπαραστατικής ευελιξίας και ο τρόπος που οι μαθητές επεξεργάζονται τις γραφικές παραστάσεις.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γενικά αποδεκτό ότι τα μαθηματικά ήταν και είναι ένα γνωστικό αντικείμενο στο οποίο οι μαθητές αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες. Ένα κεντρικό ζήτημα στην Διδακτική και την Ψυχολογία των Μαθηματικών είναι ο τρόπος που οι μαθητές μαθαίνουν, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάζουν και μετασχηματίζουν τις μαθηματικές έννοιες (Cobb et al., 1992, σελ.2). Σύμφωνα με την Κολέζα (2003), η εξέλιξη της επιστημονικής σκέψης δεν νοείται ανεξάρτητα από την εξέλιξη ιδιαίτερων συμβολισμών για την αναπαράσταση αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων.

Οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη μαθησιακή διαδικασία καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό τα όσα μαθαίνει ο μαθητής και το πόσο εύκολα επιτυγχάνεται η κατανόηση των εννοιών στα μαθηματικά. Ως εκ τούτου, λειτουργούν ως χρήσιμα εργαλεία για την οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης, την εννοιολογική κατανόηση και την επικοινωνία μαθηματικών εννοιών, αλλά και την ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών να ερμηνεύουν μαθηματικές πληροφορίες που παρουσιάζονται σε διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης, να οργανώνουν, να καταγράφουν και να μεταδίδουν μαθηματικές ιδέες με λόγια, εικόνες, γραφικές παραστάσεις, πίνακες ή σύμβολα (Greeno and Hall, 1997).

ΠΡΩΤΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

1. Επίπεδα κατανόησης γραφικών παραστάσεων και αναπαραστατική ευελιξία

1.1 Ορισμός και λειτουργίες των γραφικών παραστάσεων

Ορισμός. Γραφική παράσταση είναι οι πληροφορίες που μεταδίδονται από τη θέση του σημείου, της γραμμής ή της περιοχής σε μια δισδιάστατη επιφάνεια (Fry, 1984).

Λειτουργίες γραφικών παραστάσεων. Ένας από τους λόγους που η χρήση των γραφικών παραστάσεων είναι διάχυτη είναι ότι διευκολύνουν την κατανόηση ποσοτικών πληροφοριών (Winn, 1987). Οι γραφικές παραστάσεις και άλλες οπτικές απεικονίσεις μπορεί να είναι χρήσιμες στην απεικόνιση μιας ποσοτικής ή επιστημονικής έννοιας, ιδιαίτερα όταν η έννοια εκφράζεται ρητά (Pinker, 1990). Σύμφωνα με τον Bertin (1983), οι λειτουργίες των γραφικών παραστάσεων είναι να καταγράφουν, να επικοινωνούν και να επεξεργάζονται πληροφορίες, καθώς επίσης, στόχος μιας γραφικής παράστασης είναι η απλούστευση των πληροφοριών για την επίτευξη των σκοπών αυτών. Επιπρόσθετες λειτουργίες σύμφωνα με την Tversky (1997) είναι να προσελκύουν την προσοχή και το ενδιαφέρον των αναγνωστών, να μοντελοποιούν πραγματικούς και θεωρητικούς κόσμους, να καταγράφουν πληροφορίες, να διευκολύνουν τη μνήμη και την επικοινωνία των αναγνωστών.

1.2 Επίπεδα και διαδικασίες κατανόησης μιας γραφικής παράστασης

Σε γενικές γραμμές, η κατανόηση των πληροφοριών σε γραπτή ή συμβολική μορφή περιλαμβάνει τρία είδη συμπεριφορών (Wood, 1968), τα οποία φαίνεται να σχετίζονται με την κατανόηση της γραφικής παράστασης, και συγκεκριμένα, οι συμπεριφορές αυτές είναι η μετάφραση (translation), η ερμηνεία (interpretation) και η παρέκταση / παρεμβολή (extrapolation/ interpolation).

Η μετάφραση απαιτεί μια αλλαγή στη μορφή της επικοινωνίας. Για να γίνει μετάφραση μεταξύ γραφικών παραστάσεων και πινάκων, θα μπορούσε κανείς να περιγράψει τα περιεχόμενα ενός πίνακα δεδομένων σε λέξεις ή να ερμηνεύσει μια γραφική παράσταση σε περιγραφικό επίπεδο, σχολιάζοντας τη συγκεκριμένη δομή της γραφικής παράστασης (Wood, 1968).

Η ερμηνεία απαιτεί αναδιάταξη των υλικών και διαλογή των σημαντικών από τους λιγότερο σημαντικούς παράγοντες (Wood, 1968). Για να ερμηνευτεί μια γραφική παράσταση, μπορεί κανείς να αναζητήσει τις σχέσεις μεταξύ των τεχνικών προδιαγραφών σε μια γραφική παράσταση ή μεταξύ μιας προδιαγραφής και ενός επισημασμένου άξονα.

Η παρέκταση και παρεμβολή, θεωρούνται προεκτάσεις της ερμηνείας, και απαιτούν δηλώσεις όχι μόνο για την ουσία της επικοινωνίας, αλλά και για τον εντοπισμό ορισμένων συνεπειών. Κατά την ενασχόληση με τις γραφικές παραστάσεις, θα

μπορούσε κανείς να κάνει παρέκταση ή παρεμβολή σημειώνοντας τις τάσεις που γίνονται αντιληπτές στα δεδομένα ή καθορίζοντας τις συνέπειες (Wood, 1968).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, τρία επίπεδα κατανόησης μιας γραφικής παράστασης έχουν προκύψει: (1) στοιχειώδες επίπεδο, που επικεντρώνεται στην εξαγωγή δεδομένων από μια γραφική παράσταση (δηλαδή, με τον εντοπισμό και τη μετάφραση), (2) ενδιάμεσο επίπεδο, που χαρακτηρίζεται από την παρεμβολή και την εύρεση σχέσεων στα δεδομένα, όπως φαίνονται στη γραφική παράσταση (δηλαδή, με την ενσωμάτωση και την ερμηνεία), και (3) προηγμένο επίπεδο, που απαιτεί παρέκταση από τα δεδομένα και ανάλυση των σχέσεων που βρίσκονται σιωπηρά σε ένα γράφημα (δηλαδή, με τη δημιουργία και την πρόβλεψη). (Friel et al., 2001)

Σε έρευνες που έγιναν σχετικά με την κατανόηση των γραφικών παραστάσεων, φάνηκαν τρεις διαδικασίες κατανόησής τους (π.χ., Carpenter and Shah, 1998).

Κατά την πρώτη διαδικασία, οι αναγνώστες θα πρέπει να κωδικοποιούν την οπτική διάταξη και να εντοπίζουν τα σημαντικά οπτικά χαρακτηριστικά, όπως μια καμπύλη γραμμή. Στη συνέχεια, θα πρέπει να συσχετίζουν τα οπτικά χαρακτηριστικά με τις εννοιολογικές σχέσεις, οι οποίες αναπαριστώνται από αυτά τα χαρακτηριστικά (Pinker, 1990). Τέλος, στην τρίτη διαδικασία κατανόησης μιας γραφικής παράστασης, οι αναγνώστες θα πρέπει να καθορίσουν το αντικείμενο αναφοράς των εννοιών που ποσοτικοποιήθηκαν και να συνδέσουν τις αναφορές με τις κωδικοποιημένες λειτουργίες (Bertin, 1983).

Αυτές οι τρεις διαδικασίες συνεπάγονται τρεις παράγοντες που παίζουν σημαντικό ρόλο στην ερμηνεία των δεδομένων από τον αναγνώστη: τα χαρακτηριστικά της οπτικής απεικόνισης (π.χ., αν είναι ραβδόγραμμα ή γράφημα γραμμής, έγχρωμη ή μαυρόασπρη), τη γνώση για τις γραφικές παραστάσεις και τη γνώση περιεχομένου (π.χ., ηλικία σε σχέση με το ύψος, χρόνος σε σχέση με την απόσταση) (Shah and Hoeffner, 2002).

1.3 Αναπαραστατική ευελιξία και κατανόηση των γραφικών παραστάσεων

Οι μαθητές στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών έρχονται καθημερινά σε επαφή με μια μεγάλη ποικιλία αναπαραστάσεων. Απαραίτητες προϋποθέσεις, όμως, για την αποτελεσματική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας αποτελούν (α) η ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας σε μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης και (β) η ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα στο άλλο (Lesh, Post and Behr, 1987). Επιπλέον, απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση μιας έννοιας είναι η ικανότητα χειρισμού των αναπαραστάσεων, δηλαδή η ικανότητα μετασχηματισμού μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης.

Η ικανότητα μετάβασης από μια αναπαράσταση σε άλλη και η αλληλεπίδραση - διαδικαστικά και εννοιολογικά- με τις αναπαραστάσεις θεωρείται ένα είδος ευελιξίας

της μαθηματικής σκέψης, η οποία έχει συμπεριληφθεί κάτω από τον όρο «representational versatility» (Thomas, 2008, σελ. 82).

Ακολουθώντας αυτό τον ορισμό και τις θεωρητικές θέσεις του Duval (2006), του Lesh και των συνεργατών του (1987) και του Goldin (2003), ως αναπαραστατική ευελιξία θεωρείται η ικανότητα χειρισμού των μεταβολών εντός της αναπαράστασης (ευελιξία εντός της αναπαράστασης) και των μεταβολών μεταξύ των αναπαραστάσεων (ευελιξία μεταξύ των αναπαραστάσεων) για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο. Συγκεκριμένα, η αναπαραστατική ευελιξία στη μάθηση μιας μαθηματικής έννοιας, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο τριών ικανοτήτων που ομαδοποιούνται κάτω από την εξής δομή: (α) το χειρισμό της έννοιας μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης (π.χ., χειρισμός), (β) την αναγνώριση ορισμένων ειδών απεικονίσεων που αναφέρονται στην έννοια, η οποία δίνεται αρχικά σε ένα διαφορετικό σύστημα αναπαράστασης (δηλαδή, αναγνώριση) και (γ) μετατροπή μιας αναπαράστασης σε μια άλλη, χωρίς να αλλάζει το αντικείμενο που απεικονίζεται (δηλαδή, μετατροπή). Η ικανότητα χειρισμού αναφέρεται στην ευελιξία εντός της αναπαράστασης, καθώς οι μετασχηματισμοί που απαιτεί είναι εσωτερικοί, δηλαδή, πραγματοποιούνται μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης. Οι ικανότητες της αναγνώρισης και της μετατροπής αναφέρονται στην ευελιξία μεταξύ των αναπαραστάσεων, καθώς και οι δύο περιλαμβάνουν αλλαγή του συστήματος αναπαράστασης. Η διαφορά των δύο ικανοτήτων έγκειται στο ότι η ικανότητα μετατροπής περιλαμβάνει την κατασκευή της αναπαράστασης-στόχος για το ίδιο αντικείμενο, το οποίο απεικονίζεται στην αρχική αναπαράσταση, ενώ στην ικανότητα αναγνώρισης δεν συμβαίνει το ίδιο. Το κοινό χαρακτηριστικό των τριών ικανοτήτων είναι ότι όλοι περιλαμβάνουν αναπαραστατικούς μετασχηματισμούς, οι οποίοι μπορούν να θεωρηθούν ως ενδείξεις για την ύπαρξη αναπαραστατικής ευελιξίας σε ένα μαθηματικό τομέα. Αυτός ο ορισμός της αναπαραστατικής ευελιξίας προορίζεται για καταστάσεις όπου οι μαθητές έχουν ήδη διδαχθεί να εργάζονται με αναπαραστάσεις σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό τομέα. (Gagatsis et al., 2011).

ΔΕΥΤΕΡΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Επεξεργασία γραφικών παραστάσεων και αναπαραστατική ευελιξία

Όπως αναγράφεται στο ελληνικό βιβλίο των Μαθηματικών Στ΄ τάξης για τον εκπαιδευτικό, «οι γραφικές παραστάσεις χρησιμοποιούνται αποτελεσματικά για την οπτικοποίηση δεδομένων, για την εξαγωγή συμπερασμάτων, καθώς και για την επεξήγηση ορισμένων εφαρμογών» (βιβλίο Μαθηματικών Ελλάδας). Αν και αυτό φαίνεται απλό, εντούτοις οι ερευνητές έχουν δείξει ότι, οι μαθητές συχνά αδυνατούν να αντιληφθούν τις θεμελιώδεις έννοιες και τις λειτουργίες μιας γραφικής παράστασης, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει στην εμφάνιση χάσματος ανάμεσα σε αυτό που ένας δάσκαλος πιστεύει ότι οι μαθητές αντιλήφθηκαν και σε εκείνο που οι μαθητές πραγματικά αντιλήφθηκαν (Garfield, 1995). Έρευνες έδειξαν (Van Dyke and White, 2004) ότι το χάσμα αυτό οφείλεται στο ότι οι μαθητές δεν ξέρουν σε ποια

σημεία της γραφικής παράστασης να εστιάσουν την προσοχή τους ούτε πώς να «διαβάσουν» ένα γράφημα.

Έρευνα που βρίσκεται υπό εξέλιξη, έχει ως στόχο να διερευνήσει κατά πόσο η ικανότητα της αναπαραστατικής ευελιξίας συνδέεται με την ικανότητα ερμηνείας γραφικών παραστάσεων. Συγκεκριμένα, η έρευνα στοχεύει να περιγράψει τον τρόπο με τον οποίο οι Κύπριοι μαθητές Β΄ και Γ΄ τάξης δημοτικού επεξεργάζονται έργα αναγνώρισης, μετάφρασης και ερμηνείας γραφικών παραστάσεων -εικονόγραμμα και ραβδόγραμμα-. Οι ικανότητες της αναγνώρισης και της μετάφρασης αποτελούν δύο συνιστώσες της αναπαραστατικής ευελιξίας, ενώ η ικανότητα της ερμηνείας αποτελεί μια τρίτη διάσταση, η οποία διερευνάται κατά πόσο συνδέεται με την ικανότητα της αναπαραστατικής ευελιξίας των μαθητών.

Μέχρι στιγμής, από την έρευνα αυτή, φάνηκε ότι οι μαθητές χειρίζονται αρκετά όμοια τα έργα αναπαράστασης δεδομένων σε δύο περιπτώσεις: όταν τα έργα περιλαμβάνουν την ίδια γραφική παράσταση (εικονόγραμμα ή ραβδόγραμμα) και όταν τα έργα εξετάζουν την ίδια ικανότητα (αναγνώριση, μετάφραση ή ερμηνεία). Επιπλέον, τα έργα που συνοδεύονται από ραβδόγραμμα και τα έργα μετάφρασης, φάνηκε να έχουν τη μεγαλύτερη δυσκολία για τους μαθητές. Σχετικά με τις διαφορές μεταξύ των μαθητών στις δύο τάξεις, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές της Γ΄ τάξης απάντησαν με μεγαλύτερη συνέπεια στα έργα του δοκιμίου, ιδιαίτερα σε αυτά που συνοδεύονταν από ραβδογράμματα.

Όσον αφορά τη σύνδεση μεταξύ της ικανότητας ερμηνείας γραφικών παραστάσεων και την ικανότητα της αναπαραστατικής ευελιξίας η έρευνα έδειξε ότι η επίδοση των μαθητών στα έργα ερμηνείας μπορεί να ερμηνεύσει 47% της διασποράς της επίδοσης των μαθητών στα έργα αναγνώρισης και μετάφρασης γραφικών παραστάσεων. Αυτό σημαίνει ότι η ικανότητα ερμηνείας γραφικών παραστάσεων μπορεί να προβλέψει την ικανότητα αναπαραστατικής ευελιξίας των μαθητών σε επίπεδο 47%, καθώς επίσης η συνεισφορά της διάστασης της ερμηνείας γραφικών παραστάσεων στην πρόβλεψη της ικανότητας της αναπαραστατικής ευελιξίας είναι στατιστικά σημαντική ($F(1,148)=133.42$, $p<0.001$).

Ειδικότερα, η ικανότητα ερμηνείας εικονογράμματος μπορεί να προβλέψει την ικανότητα αναπαραστατικής ευελιξίας των μαθητών σε έργα με εικονογράμματα σε επίπεδο 17%, καθώς επίσης η συνεισφορά της διάστασης της ερμηνείας εικονογράμματος στην πρόβλεψη της ικανότητας της αναπαραστατικής ευελιξίας σε έργα με εικονογράμματα είναι στατιστικά σημαντική ($F(1,148)=30.78$, $p<0.001$).

Όμοια, η ικανότητα ερμηνείας ραβδογράμματος μπορεί να προβλέψει την ικανότητα της αναπαραστατικής ευελιξίας των μαθητών σε έργα με ραβδογράμματα σε επίπεδο 39%. Και σε αυτή την περίπτωση, η συνεισφορά της διάστασης της ερμηνείας ραβδογράμματος είναι στατιστικά σημαντική ($F(1,148)=93.5$, $p<0.001$) στην πρόβλεψη της ικανότητας της αναπαραστατικής ευελιξίας των μαθητών σε έργα με ραβδογράμματα.

Στην ίδια έρευνα πραγματοποιήθηκαν ατομικές συνεντεύξεις σε τρεις μαθητές από κάθε τάξη, ώστε να εντοπιστούν οι διεργασίες που ακολουθούν οι μαθητές των δύο τάξεων όταν επιλύουν τα συγκεκριμένα έργα γραφικών παραστάσεων. Από τις συνεντεύξεις παρατηρήθηκε ότι, σε κάθε τάξη οι μαθητές ακολουθούν άλλοτε παρόμοιες και άλλοτε διαφορετικές διεργασίες για να επιλύσουν τα έργα. Συγκεκριμένα, κανένας από τους μαθητές της Β΄ τάξης δεν διάβαζε ξανά το πρόβλημα για να βρει την απάντηση, ενώ οι μαθητές της Γ΄ τάξης ξαναδιάβαζαν το πρόβλημα μόνοι τους προτού απαντήσουν. Όλοι οι μαθητές, για να διαβάσουν ένα εικονόγραμμα μετρούσαν τις εικόνες στο εικονόγραμμα. Οι μαθητές της Β΄ τάξης, για να διαβάσουν ένα ραβδόγραμμα έβλεπαν τον αριθμό στο πλάι της γραφικής παράστασης, εκτός από μια περίπτωση στην οποία η μια μαθήτρια της Β΄ τάξης μέτρησε τα κουτάκια στο ραβδόγραμμα. Κανένας από τους μαθητές της Γ΄ τάξης δεν μέτρησε τα κουτάκια για να διαβάσει το ραβδόγραμμα, αλλά όλοι έβλεπαν τον αριθμό στον κατακόρυφο άξονα της γραφικής παράστασης. Αυτό εξηγείται στην επόμενη ενότητα, βάσει της θεωρίας της Tversky (1997), σχετικά με την αρχή της κατεύθυνσης στο σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η μελέτη γραφημάτων στατιστικής πρέπει να είναι πολυδιάστατη. Από τη μια πλευρά η κατανόηση μιας γραφικής παράστασης συνδέεται με συμπεριφορές όπως, η μετάφραση (translation), η ερμηνεία (interpretation) και η παρέκταση / παρεμβολή (extrapolation/interpolation) (Wood, 1968). Θα λέγαμε, λοιπόν ότι η συμπεριφορά της μετάφρασης ταυτίζεται με την ικανότητα μετατροπής μιας αναπαράστασης σε άλλη, ενώ η συμπεριφορά της ερμηνείας συνδέεται με την ικανότητα αναγνώρισης μιας μαθηματικής έννοιας σε μια αναπαράσταση διαφορετική από την αρχική, διότι για να επιτευχθεί η αναγνώριση, απαιτείται ερμηνεία της αρχικής αναπαράστασης. Όμοια, η συμπεριφορά της παρέκτασης/παρεμβολής συνδέεται με την ικανότητα χειρισμού, διότι απαιτεί επεξεργασία της έννοιας μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης. Από την άλλη, οι συμπεριφορές αυτές βρίσκονται σε στενή αλληλεπίδραση με την αναπαραστατική ευελιξία (Gagatsis et al., 2011).

Διάφοροι συγγραφείς έχουν προτείνει ταξινομίες κατανόησης και σχεδιασμού γραφικών παραστάσεων. Έτσι, η Tversky (1997) προτείνει για το σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων δύο αρχές: (1) τη χρήση των χωρικών μεταφορών (spatial metaphors) και (2) τη χρήση της κατεύθυνσης (directionality).

Χωρικές μεταφορές (spatial metaphors). Οι γραφικές παραστάσεις και τα διαγράμματα μεταφέρουν ποιοτικές και ποσοτικές πληροφορίες, χρησιμοποιώντας φυσικές αντιστοιχίες και χωρικές μεταφορές, κάποιες από τις οποίες εφαρμόζονται σε απλή διάταξη στοιχείων και άλλες σε χωρικά (ειδικά) σημεία. Οι πιο βασικές μεταφορές είναι η εγγύτητα. Η εγγύτητα στο χώρο χρησιμοποιείται για να δείξει την εγγύτητα σε μια άλλη ιδιότητα, όπως ο χρόνος και η τιμή, καθώς επίσης, για να

δείξει ότι το εμβαδόν των στοιχείων σε ένα γράφημα πρέπει να αντιστοιχεί σε μια ιδιότητα της αναπαριστώμενης μεταβλητής, όπως η συχνότητα ή το ποσοστό.

Κατεύθυνση (directionality). Η δεύτερη αρχή σχεδιασμού δηλώνει ότι οι γραφικές παραστάσεις τείνουν να διατάσσουν τα στοιχεία με διαφορετικές κατευθύνσεις, συνήθως είτε κατακόρυφα είτε οριζόντια. Η κατακόρυφη διάταξη υπερισχύει της οριζόντιας και αυτό είναι ριζωμένο στην αντίληψη του ατόμου (Franklin and Tversky 1990). Γι' αυτό άλλωστε, οι άνθρωποι τείνουν να επικεντρώνονται περισσότερο στην κατακόρυφη παρά στην οριζόντια διάσταση μιας γραφικής παράστασης, θεωρώντας ότι η κατακόρυφη διάσταση έχει μεγαλύτερη σημασία στην αλληλεπίδραση με τον κόσμο (π.χ. η βαρύτητα λειτουργεί κατακόρυφα). Σε αυτή την κατακόρυφη διάσταση, η κορυφή θεωρείται φυσικά ως κάτι περισσότερο ή καλύτερο από το κάτω μέρος. Οι άνθρωποι μεγαλώνουν σε μια κατακόρυφη κατεύθυνση, ενώ αν κάποιος κάνει μια στίβη από αντικείμενα, η στίβη θα είναι ψηλότερη και ούτω καθεξής. Αυτό σημαίνει ότι οι άνθρωποι έχουν την τάση να συνδέουν το ψηλότερο με το περισσότερο ή το καλύτερο.

Αυτές οι αρχές σχεδιασμού σχετικά με τη χρήση του χώρου και της κατεύθυνσης στις γραφικές παραστάσεις, μπορούν να εφαρμοστούν σε γραφικές αναπαραστάσεις για τις κατανομές των δεδομένων, για να εξηγήσουν πώς οι άνθρωποι ερμηνεύουν αυτές τις αναπαραστάσεις και γιατί ορισμένες αναπαραστάσεις είναι πιο δύσκολο να ερμηνευτούν από ό, τι άλλες αναπαραστάσεις. Επομένως, οι αρχές σχεδιασμού των γραφικών παραστάσεων της Tversky (1997) παρέχουν ένα γόνιμο πλαίσιο για να κατανοήσουμε πώς οι μαθητές τείνουν να ερμηνεύουν ή να παρερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις.

Ισχυριζόμαστε ότι μελλοντικές έρευνες για την κατανόηση των γραφημάτων στατιστικής πρέπει να βασίζονται στη θεωρία της αναπαραστατικής ευελιξίας και σε αρχές σχεδιασμού των γραφικών παραστάσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bertin, J. (1983). *Semiology of Graphics: Diagrams, Networks, Maps*. University of Wisconsin Press, Madison (French edn., 1967).

Carpenter, P. A., & Shah, P. (1998). A model of the perceptual and conceptual processes in graph comprehension. *Journal of Experimental Psychology: Applied 4*, 75–100.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in Mathematical Education. *Journal of Research in Mathematics Education, 23(1),* 2-33.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103- 131.

Franklin, N. & Tversky, B. (1990). Searching imagined environments. *Journal of Experimental Psychology: General, 119*, 63-76.

Friel, S. N., Curcio F. R. & Bright G. W., (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32(2),* 124–158.

Fry, E. (1984). *A theory of graphs for reading comprehension and writing communication.* New Brunswick, NJ: Rutgers University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 240 528)

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I. & Panaoura, A. (2011). Explorer la flexibilité : le cas du domaine numerique. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 21-38.

Garfield, J. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review*, *63*, 25-34.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, *78(5)*, 361-367.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Pinker, S. (1990). A theory of graph comprehension. In Freedle, R. (ed.), *Artificial Intelligence and the Future of Testing*, Erlbaum, Hillsdale, NJ, (pp. 73–126).

Shah, P. & Hoeffner, J., 2002. Review of Graph Comprehension Research: Implications for Instruction. *Educational Psychology Review*,14(1), 47-69.

Thomas, M. O. J. (2008). Developing versatility in mathematical thinking. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 7*(2), 71-91.

Tversky, B. (1997). Cognitive Principles of Graphic Displays. *AAAI Technical Report FS-97-03,* 116-124.

Van Dyke, F., & White, A. (2004). *Making Graphs Count. Mathematics Teaching*, *188*, 42-50.

Winn, B. (1987). Charts, graphs, and diagrams in educational materials. In Willows, D., and Houghton, H. A. (eds.), *The Psychology of Illustration*, Springer, New York.

Wood, R. (1968). Objectives in the teaching of mathematics. *Educational Research, 10*, 83–98.

Βιβλίο Μαθηματικών Ελλάδας Στ΄ Δημοτικού για τον εκπαιδευτικό και τον μαθητή. Ανακτήθηκε από http://www.pi-schools.gr/books/dimotiko/

Κολέζα, Ε. (2003). Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών. Στα πρακτικά *2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση*, 11-13 Απριλίου, 2003. Ανακτήθηκε από http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers.html

ΕΞΕΤΑΖΟΝΤΑΣ ΤΗ ΣΥΛΛΗΨΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Παρασκευή Μιχαήλ – Χρυσάνθου* και Αθανάσιος Γαγάτσης**
Πανεπιστήμιο Κύπρου
*pmicha@ucy.ac.cy, **gagatsis@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο άρθρο αυτό μελετώνται οι επιδόσεις των μαθητών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σε γεωμετρικά έργα που εξετάζουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να προσεγγιστούν τα γεωμετρικά σχήματα κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Η μελέτη πραγματοποιήθηκε σε 881 μαθητές Γυμνασίων και Λυκείων της Κύπρου. Τα αποτελέσματα κατέδειξαν διαφοροποιήσεις στις επιδόσεις των μαθητών των διαφορετικών τάξεων στα διάφορα έργα του δοκιμίου. Με βάση τον τρόπο που κατανέμονται οι ικανότητες των μαθητών στις διαφορετικές κατηγορίες έργων, προέκυψαν επίσης οι αυξημένες δυσκολίες των μαθητών στις γεωμετρικές κατασκευές και στην παραγωγή γεωμετρικών αποδείξεων.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Γεωμετρία αποτελεί ένα χώρο όπου η αλληλεπίδραση εικόνων και εννοιών είναι απαραίτητη (Mariotti, 1995). Η χρησιμότητα του γεωμετρικού σχήματος κατά την ανάλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος θεωρείται αναμφισβήτητη, αφού παρέχει μια διαισθητική παρουσίαση των συνιστωσών και σχέσεων σε μια γεωμετρική κατάσταση (Duval, 1995). Παρόλα αυτά, συχνά οι μαθητές παρουσιάζονται να μη βοηθιούνται από το σχήμα, ώστε να κατευθυνθούν προς τη λύση του προβλήματος. Στόχο, λοιπόν, για τη γεωμετρική εκπαίδευση πρέπει να αποτελεί η ανάπτυξη μιας εύκαμπτης αλληλεπίδρασης μεταξύ εικόνας και έννοιας, καθώς και η ανάπτυξη σύνθετων εννοιολογικών σχημάτων, τα οποία να ελέγχουν τα νοήματα, τις σχέσεις και τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων (Mariotti, 2003).

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζεται μέρος των αποτελεσμάτων μιας ευρύτερης έρευνας, σκοπός της οποίας ήταν η μελέτη των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους προσεγγίζουμε και χρησιμοποιούμε ένα σχήμα κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου. Ειδικότερα, η έρευνα αυτή αποσκοπούσε να καθορίσει τη δομή του τρόπου σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων και να προσδιορίσει τις γνωστικές λειτουργίες που λαμβάνουν χώρα κατά τη χρήση γεωμετρικών σχημάτων στα γεωμετρικά προβλήματα. Η έρευνα αυτή βασίστηκε στο θεωρητικό πλαίσιο του Γάλλου ερευνητή Raymond Duval (1988), ο οποίος διακρίνει τέσσερις διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να δούμε και να

προσεγγίσουμε γεωμετρικά σχήματα, μέσα από τη γνωστική λειτουργία της οπτικοποίησης. Συγκεκριμένα, ο Duval (1995) αναφέρεται στην αντιληπτική, την ακολουθιακή, τη λεκτική (ή λογική) και τη λειτουργική σύλληψη γεωμετρικών σχημάτων. Προηγούμενες έρευνες εξέτασαν συστηματικά το ρόλο των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη Γεωμετρία (π.χ. Duval, 1998; Mesquita, 1996; Kurina, 2003), ερευνητικά όμως εντοπίζεται κενό όσον αφορά στις γνωστικές διαδικασίες που χαρακτηρίζουν τη σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, όπως διατυπώθηκαν από τον Duval.

Λαμβάνοντας υπόψη τη γνωστική περιπλοκότητα της μάθησης της γεωμετρίας (Duval, 1995) σε συνδυασμό με τα προβλήματα που εντοπίζονται διεθνώς κατά τη μετάβαση των μαθητών από μια εκπαιδευτική βαθμίδα στην επόμενη (Mullins & Irvin, 2000), η έρευνα πραγματοποιήθηκε με μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου, με σκοπό την εξέταση των αλλαγών που προκύπτουν μετά τη μετάβαση τους από μια εκπαιδευτική βαθμίδα στην επόμενη, καθώς και μεταξύ δύο συνεχόμενων τάξεων. Συνεπώς, το άρθρο αυτό πραγματεύεται τον εντοπισμό των διαφορών μεταξύ των μαθητών μέσα από τη σύγκριση των διαφόρων ηλικιακών ομάδων, όσον αφορά στους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους προσεγγίζουν τα γεωμετρικά σχήματα κατά την επίλυση γεωμετρικών έργων. Συγκεκριμένα, το άρθρο προσανατολίζεται στην απάντηση των ακόλουθων ερωτημάτων:

1 Ποιες είναι οι ικανότητες των μαθητών Γ Γυμνασίου και Λυκείου (Α και Β) στην επίλυση γεωμετρικών έργων που εμπλέκουν τους τέσσερις διαφορετικούς τρόπους σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων;
2 Υπάρχουν διαφορές μεταξύ των διαφορετικών ομάδων μαθητών ως προς την επίδοση τους στην επίλυση γεωμετρικών έργων;

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το θέμα της ανάπτυξης της γεωμετρικής γνώσης έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές από το χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης και τον τομέα της γνωστικής ψυχολογίας για πολλά χρόνια. Υπάρχουν πολλές έρευνες και προτεινόμενα θεωρητικά μοντέλα για τη μάθηση της γεωμετρίας, με τις περισσότερες από αυτές να λαμβάνουν υπόψη τα γεωμετρικά σχήματα και τον τρόπο χρήσης τους, χωρίς όμως τα σχήματα να είναι ο κύριος στόχος της έρευνας τους. Για παράδειγμα, υπάρχουν συγγραφείς που ενδιαφέρονται όχι μόνο για το γεωμετρικό σχήμα, αλλά κυρίως για τα σχήματα σε σχέση με την απόδειξη, το χώρο κ.λπ. (Bishop, 1983; Parzysz, 1991). Εντοπίζονται, επίσης, διάφορα μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη με πιο συγκεκριμένο τρόπο το πρόβλημα των σχημάτων και της οπτικοποίησης (Mesquita, 1996; Kurina, 2003). Αντιθέτως, υπάρχουν πολύ λιγότερες προσεγγίσεις που μπορούν να θεωρηθούν ως πιο ξεκάθαρα επικεντρωμένες στα γεωμετρικά σχήματα και την οπτικοποίηση (van Hiele, 1986; Duval, 1988; Fischbein, 1993). Στην εργασία αυτή έμφαση δίνεται στη γνωστική προσέγγιση της γεωμετρίας που επιχειρείται από τον

Duval (1995), μέσα από την οποία παρουσιάζεται ένα λεπτομερές πλαίσιο ανάλυσης των γεωμετρικών σχημάτων και εντοπίζονται τέσσερις τύποι γνωστικής σύλληψης τους.

Συγκεκριμένα, ο Duval (1995) αναφέρεται στην αντιληπτική, την ακολουθιακή, τη λεκτική (ή λογική) και τη λειτουργική σύλληψη γεωμετρικών σχημάτων. Ο πρώτος τύπος σύλληψης αντιστοιχεί στην κοινή και αυθόρμητη αναγνώριση σχημάτων. Ο δεύτερος τύπος σύλληψης αφορά στην κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων με τη χρήση συγκεκριμένων εργαλείων. Η λειτουργική σύλληψη συνδέεται με διάφορους τρόπους τροποποίησης ενός δοσμένου σχήματος, έτσι η λύση σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα επιτυγχάνεται μέσω μιας ευρετικής αναδιοργάνωσης ενός σχήματος σε άλλα σχήματα. Η λεκτική σύλληψη σχετίζεται με τη λεκτική αναγνώριση των όσων αναπαρίστανται σε ένα σχήμα, με ένα μαθηματικό τρόπο, και εξαρτάται, συνεπώς, από τα δοσμένα στοιχεία σε ένα πρόβλημα, καθώς και από τη γνώση ορισμών και θεωρημάτων. Όμως, ανεξάρτητα από το βαθμό της λεκτικής διατύπωσης που αναμένεται στα πλαίσια της διδασκαλίας, πάντα περιλαμβάνει την αποδόμηση (dimensional deconstruction) του σχήματος. Το κάθε είδος σύλληψης έχει συγκεκριμένους νόμους οργάνωσης και επεξεργασίας του οπτικού ερεθίσματος.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην έρευνα συμμετείχαν 881 μαθητές (312 μαθητές Γ Γυμνασίου, 304 μαθητές Α Λυκείου, 125 μαθητές Β Λυκείου με μαθηματικά κοινού κορμού [κκ] και 140 μαθητές Β Λυκείου με μαθηματικά κατεύθυνσης [κατ]) από σχολεία της Κύπρου. Για τη συλλογή των δεδομένων αναπτύχθηκε ένα δοκίμιο με 16 έργα που ήταν χωρισμένα με βάση τα τέσσερα είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Συγκεκριμένα, υπήρχαν 2 έργα αντιληπτικής σύλληψης, στα οποία οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν και να ονομάσουν υποσχήματα σε ένα δοσμένο σχήμα (PE1, PE2), 5 έργα λειτουργικής σύλληψης τα οποία αναμενόταν να λυθούν με αναδιαμόρφωση των δοσμένων σχημάτων (OP1 – OP5), 3 έργα ακολουθιακής σύλληψης στα οποία ζητήθηκε η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων (SE1 – SE3) και 6 έργα λεκτικής σύλληψης, 4 από τα οποία αφορούσαν σε παραγωγή γεωμετρικής απόδειξης (DI1, DI2, DI5, DI6), ενώ τα υπόλοιπα 2 στην αναγνώριση απόδειξης (DI3, DI4). Το τελικό δοκίμιο χωρίστηκε σε δύο μέρη, όπου χορηγήθηκαν σε διαφορετικές διδακτικές περιόδους των 40 λεπτών. Κατά τη βαθμολόγηση των έργων, για τις ορθές απαντήσεις δινόταν 1, ενώ δινόταν 0 για λανθασμένες απαντήσεις ή κενές απαντήσεις.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο πίνακας 1 περιλαμβάνει τα αποτελέσματα σχετικά με την επιτυχία των μαθητών στα έργα του δοκιμίου, για κάθε τάξη ξεχωριστά. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν την ύπαρξη διαφορών στις επιδόσεις μεταξύ των μαθητών από τις διάφορες τάξεις. Αρχικώς παρατηρούνται μερικές περιπτώσεις όπου η επίδοση των μαθητών αυξάνεται καθώς προχωρούμε σε επόμενη τάξη. Αυτά είναι τα έργα PE2, OP1, DI3 και DI4. Στα συγκεκριμένα έργα η επίδοση των μαθητών βελτιώνεται από τη Γ Γυμνασίου στην Α Λυκείου και η βελτίωση αυτή συνεχίζεται και στη Β Λυκείου. Παρόλα αυτά προκύπτουν διαφορές μεταξύ των δύο διαφορετικών ομάδων της Β Λυκείου, αφού οι μαθητές της κατεύθυνσης έχουν ψηλότερες επιδόσεις σε σχέση με τους μαθητές του κοινού κορμού. Είναι αξιοσημείωτο, επίσης, ότι στα έργα αυτά περιλαμβάνονται και τα δύο έργα που εξετάζουν την αναγνώριση της απόδειξης (DI3 και DI4), γεγονός που αποτελεί ένδειξη για ανάπτυξη της εν λόγω ικανότητας με την αύξηση της ηλικίας και των μαθησιακών εμπειριών των μαθητών.

Από την άλλη, υπάρχουν και έργα για τα οποία η αύξηση στην επίδοση των μαθητών από μια τάξη στην επόμενη δεν είναι συνεχής, αλλά εντοπίζονται και περιπτώσεις όπου παρατηρείται μείωση σε επόμενη τάξη. . Ειδικότερα, στα έργα της κατηγορίας αυτής η επίδοση των μαθητών βελτιώνεται από το Γυμνάσιο στην Α Λυκείου. Από την Α στη Β Λυκείου, όμως, η επίδοση τους διαφοροποιείται ανάλογα με την ομάδα στην οποία εντάσσονται. Οι μαθητές της Β Λυκείου κκ έχουν μειωμένες επιδόσεις σε σχέση με τους μαθητές της Α Λυκείου, ενώ για τους μαθητές της κατεύθυνσης συμβαίνει το αντίθετο. Τα έργα που περιλαμβάνονται σε αυτή την κατηγορία, τα οποία αποτελούν την πλειοψηφία των έργων του δοκιμίου, είναι το έργο αντιληπτικής σύλληψης PE1, τέσσερα από τα έργα λειτουργικής σύλληψης (OP2, OP3, OP4 και OP5), δύο από τα έργα ακολουθιακής σύλληψης (SE1 και SE2) και όλα τα έργα λεκτικής σύλληψης, που αφορούν σε παραγωγή αποδείξεων (DI1, DI2, DI5, DI6).

Μεταξύ των έργων που εμπίπτουν στην κατηγορία αυτή σημειώνεται, επιπλέον, μια διαφορά, η οποία προκύπτει κατά τη σύγκριση μεταξύ της επίδοσης των μαθητών της Γ Γυμνασίου και της Β Λυκείου κκ. Συγκεκριμένα, σε κάποια έργα (PE1, OP2, OP4, SE3, DI1, DI5, DI6) η επίδοση των μαθητών του Γυμνασίου είναι ψηλότερη σε σύγκριση με αυτή των μαθητών της Β Λυκείου κκ. Αξιοσημείωτο είναι ότι αυτό ισχύει για τα 7 από τα 16 έργα του δοκιμίου της έρευνας, στα οποία περιλαμβάνονται κυρίως έργα παραγωγής γεωμετρικών αποδείξεων. Το γεγονός αυτό δημιουργεί προβληματισμό για το πώς προκύπτει οι μαθητές Γυμνασίου, οι οποίοι έχουν λιγότερες γνώσεις και πιο επιφανειακές εμπειρίες με γεωμετρικές αποδείξεις σε σχέση με τους μαθητές της Β Λυκείου, να ανταποκρίνονται πιο αποτελεσματικά σε έργα παραγωγής γεωμετρικών αποδείξεων.

Μια εξήγηση ενδέχεται να είναι το ότι στα έργα αυτά οι μαθητές έπρεπε κυρίως να χρησιμοποιήσουν θεωρητική γνώση της γεωμετρίας. Για παράδειγμα, στα έργα απόδειξης DI1 και DI5 οι μαθητές έπρεπε να χρησιμοποιήσουν το θεώρημα του

Θαλή, ενώ στο έργο DI5 έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τα κριτήρια για τα ίσα τρίγωνα. Επίσης, για την επίλυση του έργου OP2 οι μαθητές μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τον τύπο του εμβαδού τραπεζίου. Συνεπώς, το γεγονός ότι η επίλυση των έργων της ομάδας αυτής απαιτούσε τη χρήση της θεωρητικής γνώσης των μαθητών στη γεωμετρία, πιθανόν να ευνόησε τους μαθητές του Γυμνασίου, έναντι των μαθητών της Β Λυκείου κκ, λόγω του ότι η γνώση αυτή ήταν πιο πρόσφατα αποκτημένη για τους συγκριμένους μαθητές και έτσι πιο εύκολο να εφαρμοστεί. Ακόμη, η πτώση των επιδόσεων των μαθητών της Β Λυκείου κκ φαίνεται να συνδέεται και με το ότι η διδασκαλία των μαθηματικών στην τάξη αυτή είναι περιορισμένη, τόσο σε περιεχόμενο όσο και σε διδακτικές περιόδους.

Έργα	Γ Γυμν. (N=312) (%)	Α Λυκ. (N=304) (%)	Β Λυκ. κ.κ (N=125) (%)	Β Λυκ. κατ. (N=140) (%)	Συνολικό Δείγμα (N=881) (%)
PE1	21.47	45.72	20.8	55.71	35.19
PE2	36.54	43.75	44.0	57.14	43.36
M.O*	0.29	0.45	0.32	0.56	0.39
T.A	0.35	0.39	0.36	0.39	0.38
OP1	62.82	71.38	79.2	85.71	71.74
OP2	32.05	35.86	26.4	63.57	37.57
OP3	54.17	62.50	59.2	82.86	62.32
OP4	10.34	11.84	8.40	15.89	11.46
OP5	53.21	66.78	57.6	66.43	60.61
M.O*	0.43	0.50	0.46	0.63	0.49
T.A	0.24	0.24	0.23	0.20	0.24
SE1	9.62	18.09	12.8	32.14	16.57
SE2	1.28	3.29	1.60	22.14	5.33
SE3	8.01	7.24	7.20	15.71	8.85
M.O*	0.06	0.10	0.07	0.23	0.10
T.A	0.15	0.18	0.14	0.28	0.19
DI1	57.05	61.18	44.0	82.86	60.73
DI2	21.15	25.99	24.8	57.14	29.06

DI3	9.94	15.13	21.6	25.71	15.89
DI4	14.1	18.75	22.4	29.29	19.30
DI5	9.29	15.79	2.40	21.43	12.49
DI6	50.32	51.97	46.4	72.14	53.80
M.O*	0.27	0.31	0.27	0.48	0.35
T.A	0.20	0.22	0.23	0.23	0.24

*μέγιστο=1

Πίνακας 1: Ποσοστά Επιτυχίας, Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις για την Επίδοση των Μαθητών στα Έργα του Δοκιμίου σε Κάθε Τύπο Σύλληψης Γεωμετρικού Σχήματος ανά Τάξη

Για να εξεταστεί το κατά πόσο οι διαφορές αυτές που παρουσιάζονται στις επιδόσεις των μαθητών από τις διαφορετικές τάξεις στα έργα σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος είναι στατιστικά σημαντικές, πραγματοποιήθηκε η πολυμεταβλητή ανάλυση διασποράς (MANOVA). Οι μέσοι όροι επίδοσης (M.O) των μαθητών και οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις (T.A) για κάθε τύπο σύλληψης γεωμετρικού σχήματος περιλαμβάνονται επίσης στον πίνακα 1, για κάθε τάξη ξεχωριστά. Σε όλες τις ομάδες μαθητών οι υψηλότεροι μέσοι όροι επίδοσης προκύπτουν στα έργα λειτουργικής σύλληψης του σχήματος, ενώ οι χαμηλότεροι παρουσιάζονται στα έργα που εξετάζουν την ακολουθιακή σύλληψη των μαθητών.

Βάσει της συγκεκριμένης ανάλυσης, η επίδραση του παράγοντα «τάξη των μαθητών» προκύπτει σημαντική (Pillai's $F(3, 779)=14.51$, $p<0.001$) για την επίδοση των μαθητών στα έργα σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων. Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα καταδεικνύουν την ύπαρξη σημαντικών διαφορών στους μέσους όρους επίδοσης των μαθητών από διαφορετικές τάξεις στα έργα αντιληπτικής ($F(3, 779)=21.48$, $p<0.001$), λειτουργικής ($F(3, 779)=25.20$, $p<0.001$), ακολουθιακής ($F(3, 779)=29.31$, $p<0.001$) και λεκτικής σύλληψης ($F(3, 779)=34.43$, $p<0.001$). Από την ανάλυση post hoc προκύπτουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στους μέσους όρους επίδοσης των μαθητών διαφορετικών τάξεων σε κάθε κατηγορία έργων ($p<0.001$).

Ειδικότερα, στα έργα αντιληπτικής σύλληψης ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της Γ Γυμνασίου είναι σημαντικά χαμηλότερος από το μέσο όρο επίδοσης των μαθητών της Α Λυκείου και Β Λυκείου κατ., ενώ δεν παρουσιάζεται σημαντική διαφορά σε σχέση με τους μαθητές της Β Λυκείου κκ. Όσον αφορά στους μαθητές της Α Λυκείου, ο μέσος όρος επίδοσης τους στα έργα αντιληπτικής σύλληψης είναι σημαντικά ψηλότερος σε σχέση με τους μαθητές της Β Λυκείου κκ και σημαντικά χαμηλότερος σε σχέση με τους μαθητές της Β Λυκείου κατ. Επιπρόσθετα, ο μέσος

όρος επίδοσης των μαθητών της Β Λυκείου κκ στα έργα αυτά είναι σημαντικά χαμηλότερος από το μέσο όρο επίδοσης των μαθητών της Β Λυκείου κατ.

Στα έργα λειτουργικής σύλληψης, για τους μαθητές της Γ Γυμνασίου ισχύει ότι και προηγουμένως για τα έργα αντιληπτικής σύλληψης. Οι μαθητές της Α Λυκείου παρουσιάζουν σημαντικά χαμηλότερο μέσο όρο επίδοσης ως προς τους μαθητές της Β Λυκείου κατ στα έργα αυτά, ενώ δεν εντοπίζεται στατιστικά σημαντική διαφορά ως τους μαθητές της Β Λυκείου κκ.

Αναφορικά με τα έργα ακολουθιακής και λεκτικής σύλληψης, παρουσιάζονται οι ίδιες σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών και στις δύο κατηγορίες έργων. Συγκεκριμένα, ο μέσος όρος επίδοσης των μαθητών της Γ Γυμνασίου, της Α λυκείου, καθώς και της Β Λυκείου κκ είναι σημαντικά χαμηλότερος σε από αυτόν των μαθητών της Β Λυκείου κατ. Ανάμεσα στους μαθητές της Α Λυκείου και της Β Λυκείου κκ δεν προκύπτουν στατιστικά σημαντικές διαφορές.

5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο σκοπός του κειμένου αυτού ήταν η εξέταση των γεωμετρικών ικανοτήτων των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου της Κύπρου, μέσα από την επίλυση γεωμετρικών έργων που ενεργοποιούν τέσσερις διαφορετικούς τρόπους σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων, όπως διακρίνονται από τον Duval (1995). Ταυτοχρόνως, έγινε σύγκριση των γεωμετρικών ικανοτήτων των μαθητών ως προς την τάξη στην οποία ανήκουν, ώστε να εντοπιστούν διαφορές στις γεωμετρικές τους ικανότητες. Μέσα από τη σύγκριση αυτή προκύπτουν σημαντικές διαφορές μεταξύ των γεωμετρικών ικανοτήτων των μαθητών των διαφορετικών τάξεων.

Όσον αφορά στις ικανότητες των μαθητών στους διαφορετικούς τύπους γεωμετρικών έργων του δοκιμίου, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι κυρίως τα έργα γεωμετρικών κατασκευών και κάποια από τα έργα γεωμετρικών αποδείξεων δημιουργούν μεγαλύτερες δυσκολίες στους μαθητές, συγκρινόμενα με τα έργα αντιληπτικής και λειτουργικής σύλληψης. Οι χαμηλές επιδόσεις στα έργα ακολουθιακής σύλληψης ήταν, θα λέγαμε, αναμενόμενη, αφού το κομμάτι των γεωμετρικών κατασκευών ήταν παραμελημένο στο Αναλυτικό Πρόγραμμα των μαθηματικών για τις τάξεις αυτές την περίοδο διεξαγωγής της έρευνας. Αυτό έγινε φανερό και μέσα από την ανασκόπηση των σχετικών σχολικών εγχειριδίων των τάξεων αυτών (Michael, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou & Philippou, 2009), τα οποία περιλάμβαναν πολύ μικρό αριθμό παραδειγμάτων και ασκήσεων που να αφορούν σε γεωμετρικές κατασκευές. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Schoenfeld (1986), οι διδακτικές πρακτικές που χρησιμοποιούνται στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση επηρεάζουν τις ικανότητες γεωμετρικών κατασκευών των μαθητών, λόγω του ότι η έμφαση δίνεται στην κατασκευή ως διαδικασία, παρόλο που οι κατασκευές εγκυροποιούνται με τη χρήση θεωρημάτων και μέσω της μαθηματικής αφαίρεσης. Ο ίδιος ερευνητής υποστηρίζει

ότι οι περισσότεροι μαθητές μετά από ένα χρόνο φοίτησης στο Λύκειο γίνονται «αφελείς εμπειριστές», οι οποίοι προσεγγίζουν τις κατασκευές με χάρακα και διαβήτη ως μια εμπειρική διαδικασίας εικασίας – δοκιμής. Οι μαθητές κάνουν μια εικασία και την ελέγχουν εξετάζοντας την κατασκευή τους. Αν η κατασκευή τους φαίνεται ακριβής, τότε οι μαθητές ικανοποιούνται και η εικασία τους επιβεβαιώνεται.

Από τα αποτελέσματα για τα έργα γεωμετρικών αποδείξεων προκύπτουν ενδείξεις πως οι μαθητές δεν επιτυγχάνουν την εννοιολογική οικοδόμηση των γεωμετρικών εννοιών και τη διασύνδεση μεταξύ τους, αλλά αντιθέτως προκύπτει μια μηχανική και κατά συνέπεια προσωρινή εκμάθηση γεωμετρικών γνώσεων, αφού παρουσιάζονται να μην είναι σε θέση να εφαρμόσουν γνώσεις που διδάχθηκαν σε προηγούμενες τάξεις. Οι μαθητές είναι συνήθως σε θέση να παρουσιάζουν κάποια από τα βήματα του συλλογισμού τους, παρόλα αδυνατούν να τα αιτιολογήσουν χρησιμοποιώντας κατάλληλες μαθηματικές ιδιότητες, αξιώματα και θεωρήματα. Τα πιο πάνω ενισχύει και το γεγονός ότι στα έργα αναγνώρισης γεωμετρικής απόδειξης η ικανότητα των μαθητών φάνηκε να βελτιώνεται σε κάθε επόμενη τάξη, σε αντίθεση με τα έργα παραγωγής γεωμετρικών αποδείξεων, στα οποία πρόεκυψαν αυξομειώσεις ανάμεσα στις επιδόσεις των μαθητών των διαφορετικών τάξεων. Αφού, λοιπόν, στα έργα αναγνώρισης της απόδειξης οι μαθητές δε χρειάστηκαν να ανακαλέσουν γνώσεις θεωρημάτων, αλλά να κρίνουν δοσμένες απαντήσεις μαθητών, η επίδοσή τους δεν επηρεάστηκε αρνητικά και η βελτίωση της διατηρήθηκε και στις επόμενες τάξεις. Επιπλέον, οι δυσκολίες των μαθητών στα έργα γεωμετρικής απόδειξης πιθανόν να οφείλονται σε έλλειψη εμπειριών στο γεωμετρικό συλλογισμό (Carroll, 1998) και στο ότι οι μαθητές δεν έχουν ουσιαστικά κατανοήσει στον απαιτούμενο βαθμό το τι είναι και πώς λειτουργεί μια γεωμετρική απόδειξη (Schoenfeld, 1986). Συνεπώς, οι μαθητές πρέπει πρώτα να κατανοήσουν τη φύση της γεωμετρικής απόδειξης, ώστε να αναπτύξουν στη συνέχεια τις αποδεικτικές τους ικανότητες (Clements & Battista, 1992).

Με βάση την περιγραφική ανάλυση της επιτυχίας των μαθητών, εντοπίστηκαν περιπτώσεις όπου η επίδοση των μαθητών φάνηκε να βελτιώνεται σε κάθε επόμενη τάξη. Από την άλλη, για την πλειοψηφία των έργων του δοκιμίου της έρευνας, παρατηρήθηκαν αυξομειώσεις στις επιδόσεις των μαθητών σε κάθε επόμενη τάξη. Για τα έργα αυτά οι σχετικές ικανότητες των μαθητών φαίνεται να αναπτύσσονται μετά τη μετάβαση των μαθητών από το Γυμνάσιο στο Λύκειο, και συγκεκριμένα στην Α Λυκείου. Παρόλα αυτά, η ανάπτυξη αυτή παρουσιάζεται να διακόπτεται για τους μαθητές που στη Β Λυκείου συνεχίζουν με μαθηματικά κοινού κορμού. Αξιοσημείωτο είναι, επίσης, το γεγονός ότι η επίδοση των μαθητών αυτών δεν παραμένει σταθερή μετά την Α Λυκείου, αλλά σημειώνει περαιτέρω μείωση. Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα βρίσκονται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της Επιτροπής Εκπαιδευτικής Μεταρρύθμισης (2005), σύμφωνα με τα οποία παρατηρούνται κενά στο Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών της Κύπρου κατά τη μετάβαση από μια τάξη στην επόμενη στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Από την άλλη, οι μαθητές που επιλέγουν να συνεχίσουν στη Β Λυκείου με μαθηματικά

κατεύθυνσης εμφανίζονται να συνεχίζουν τη βελτίωση στις επιδόσεις τους, η οποία πιθανότατα συνδέεται κυρίως με την επίδραση της διδασκαλίας, αφού περιλαμβάνει μαθηματικά υψηλότερου επιπέδου σε σχέση με τον κοινό κορμό και η διδασκαλία των μαθηματικών είναι πιο συστηματική.

Συνεπώς εντοπίζονται διαφορές στα διαφορετικά επίπεδα διδασκαλίας των μαθηματικών στις διαφορετικές τάξεις που εξετάστηκαν ως προς τα τέσσερα είδη σύλληψης των γεωμετρικών σχημάτων, οι οποίες σχετίζονται τόσο με βελτιώσεις όσο και με μειώσεις στις επιδόσεις των μαθητών. Ο καταλυτικός ρόλος της διδασκαλίας είναι, λοιπόν, φανερός για την ανάπτυξη των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους οι μαθητές καλούνται να προσεγγίσουν γεωμετρικά σχήματα κατά την επίλυση γεωμετρικών έργων. Άρα, οι μαθητές χρειάζονται περισσότερες εμπειρίες με δραστηριότητες που να περιλαμβάνουν, όχι μόνο την αντιληπτική αναγνώριση και ονομασία σχημάτων, αλλά που να απαιτούν και να καλλιεργούν μια πιο διερευνητική – ευρετική επεξεργασία στο σχήμα που να οδηγεί στην αναγνώριση των κατάλληλων θεωρημάτων για μια γεωμετρική απόδειξη και που να δίνουν επίσης την ευκαιρία για κατασκευή σχημάτων με χρήση συγκεκριμένων εργαλείων. Συνεπώς, η έμφαση στη διδασκαλία θα πρέπει να στραφεί περισσότερο προς την ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού μέσα από καταστάσεις διερεύνησης, επαγωγικού συλλογισμού και επεξεργασίας γεωμετρικών σχημάτων, και όχι να προσανατολίζεται μόνο στην απόκτηση θεωρητικών και διαδικαστικών γνώσεων. Επιπλέον, θα ήταν αποτελεσματικότερο οι εμπειρίες αυτές να παρέχονται και από τις χαμηλότερες εκπαιδευτικές βαθμίδες, με την κατάλληλη σαφώς μορφή για την κάθε βαθμίδα, αφού οι μαθητές Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης μπορούν να αναπτύξουν καλύτερες γεωμετρικές ικανότητες όταν έχουν ουσιαστική εμπλοκή σε σχετικές δραστηριότητες από το Δημοτικό σχολείο (Carroll, 1998).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bishop, A. (1983). Space and geometry. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (175-203). New York: Academic Press.

Carroll, W. (1998). Middle school students' reasoning about geometric situations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3,* 398 – 403.

Clements, D. & Battista, M. (1992).Geometry and Spatial Reasoning. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NewYork: Macmillan Publishing Co.

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 57 – 74.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education.* Berlin, Springer, pp. 142- 157.

Duval, R. (1999). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana and V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-52). Kluwer Academic Publishers Dordrecht/ Boston.

Επιτροπής Εκπαιδευτικής Μεταρρύθμισης (2005). Έκθεση της Επιτροπής για την Εκπαιδευτική Μεταρρύθμιση. Κυπριακή Δημοκρατία – Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού. Ανακτήθηκε στις 14 Οκτωβρίου, 2006 από http://www.paideia.org.cy/upload/ekthesi_epitropis.pdf.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Kurina, F. (2003). Geometry - The resource of opportunities', in M. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME 3*, Bellaria, Italy, [On line] http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft

Mariotti, M. A. (1995). Images and Concepts in Geometrical Reasoning. In R. Sutherland and J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer.

Mariotti, A. (2003). Geometry: dynamic intuition and theory. Στο *Ανακοινώσεις του 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση-"Τα Μαθηματικά Στο Γυμνάσιο"* . Εθνικό Και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών - Πανεπιστήμιο Κύπρου, Αθήνα .11 - 13 Απριλίου, 2003.

Mesquita, A. L. (1996). On the utilization of encoding procedures on the treatment of geometrical problems. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. III, pp. 399- 406. Valencia.

Michael, P., Gagatsis, A., Deliyianni, E., Monoyiou A., & Philippou, A. (2009). The Functioning of Geometrical Figures in Cypriot Geometry Textbooks. In Gagatsis, A., Kuzniak, A., Deliyianni, E., & Vivier, L. (Eds), *Cyprus and France Research in Mathematics Education* (pp. 91-104). Lefkosia: University of Cyprus.

Mullins, E. R., & Irvin, J. L. (2000). Transition into middle school. *Middle School Journal, 31*(3), 57-60.

Parzysz, B (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics, 22*, pp. 575-593.

Schoenfeld, A. H. (1986). *On having and using Geometric Knowledge in Conceptual and Procedural Knowledge the case of mathematics* (Ed. J. Hiebert). Hillsdale NJ, Erlbaum.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

(DI3) Διάβασε τις ακόλουθες εξηγήσεις των τριών μαθητών, οι οποίοι εξηγούν γιατί το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι 180 μοίρες.

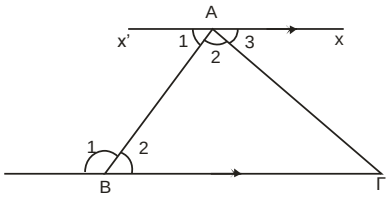
Μαθητής Α: *Μέτρησα και τις τρεις γωνιές και είναι 50°, 53° και 77°. 50°+53°+77°=180°. Άρα, το άθροισμα (των γωνιών ενός τριγώνου) είναι 180°.*

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Α ως απόδειξη; **Ναι/Οχι ……**

Μαθητής Β: *Σχημάτισα ένα τρίγωνο και έκοψα κάθε γωνία και τις έβαλα μαζί. Σχημάτιζαν μια ευθεία γραμμή. Άρα, το άθροισμα τους είναι 180°.*

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Β ως απόδειξη; **Ναι/Όχι ……..**

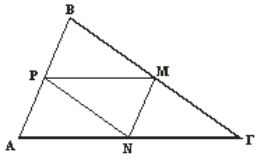
Μαθητής Γ: *Επεξήγηση με τη χρήση δύο παράλληλων ευθειών.*



$xx' \parallel B\Gamma \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_2$ και $\hat{A}_3 = \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180° \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{A}_2 + \hat{\Gamma} = 180°$

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Γ ως απόδειξη; **Ναι / Όχι**

(DI5) Τα σημεία Μ, Ν και Ρ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξεις ότι τα τετράπλευρα ΑΡΜΝ, ΒΜΝΡ, και ΓΝΡΜ είναι παραλληλόγραμμα.



ΤΡΟΠΟΙ ΠΡΟΣΛΗΨΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ιωάννης Μιχελαράκης
3ο Γενικό Λύκειο Πετρούπολης
michelarak@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της παρούσας έρευνας υπήρξε ο ρόλος της αντιληπτικής, λεκτικής, ακολουθιακής και λειτουργικής σύλληψης στην πρόσληψη του γεωμετρικού σχήματος, από 501 μαθητές Β΄ Λυκείου, 10 σχολείων της Ελλάδος. Οι στατιστικές αναλύσεις των δεδομένων που συλλέχθηκαν, καθώς και η ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από τις συνεντεύξεις, κατέδειξαν συνέπεια αλλά και διαφορές στη συμπεριφορά των μαθητών κατά την επίλυση γεωμετρικών έργων, αλλά και την ανάγκη υιοθέτησης δράσεων που εστιάζουν και στους τέσσερις τύπους κατανόησης γεωμετρικών σχημάτων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο χώρο της Μαθηματικής κοινότητας η διδασκαλία της Γεωμετρίας, προβάλλει ως αδήριτη αναγκαιότητα. Η ενασχόληση με τη Γεωμετρία συμβάλλει αφ' ενός μεν στην ανάπτυξη της ικανότητας οπτικοποίησης και επίλυσης προβλήματος, αφ' ετέρου δε καλλιεργεί την κριτική σκέψη, τη διαίσθηση, τη διατύπωση εικασιών, τον παραγωγικό συλλογισμό, τη λογική επιχειρηματολογία και την απόδειξη (Jones, 2002). Ως εκ τούτου, η εν γένει παρατηρούμενη υστέρηση ανάπτυξης γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές σε σχέση με τις αλγεβρικές έννοιες (Mammana & Villani 1998), ώθησε την εκπαιδευτική κοινότητα στην μελέτη των τρόπων ανάπτυξης τόσο της χωρικής και γεωμετρικής σκέψης αλλά και στην εμβριθή διερεύνηση των παρατηρούμενων γνωστικών εμποδίων. Στην κατεύθυνση υπερκέρασης των δυσκολιών της Γεωμετρίας, η χρησιμότητα του γεωμετρικού σχήματος κατά την ανάλυση ενός προβλήματος θεωρείται αναμφισβήτητη, λόγω του ότι ένα σχήμα παρουσιάζει διαισθητικά τις συνιστώσες και τις σχέσεις μιας κατάστασης (Duval, 1995). Από την άλλη όμως πλευρά η Mesquita (1998), στο πλαίσιο διερεύνησης των γνωστικών εμποδίων ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης, συσχετίζει την επιτυχία επίλυσης προβλημάτων με τη χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων, που έχουν τη φύση εικόνας, όπου η λεκτική διατύπωση δε συμβαδίζει με τη σχηματική παράσταση, και εκείνων που έχουν τη φύση αντικειμένου, όπου υπάρχει ταύτιση λεκτικής διατύπωσης και σχηματικής παράστασης. Ειδικότερα, για τις γνωστικές διαδικασίες, οι Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou και Panaoura (2009), επιβεβαίωσαν την ύπαρξη ενός μοντέλου τρίτης τάξης για τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος. Ακολούθως έμφαση δόθηκε στις γνωστικές διαδικασίες της λειτουργικής

σύλληψης του σχήματος (Elia, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou & Michael, 2009: Michael, Gagatsis, Avgerinos, & Kuzniak, 2011: Michael, 2012).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στον ερευνητικό χώρο η «γεωμετρική κατανόηση» προσεγγίζεται από διαφορετικές οπτικές γωνίες συχνά αποκλίνουσες μεταξύ τους. Από την Πιαζετιανή θεώρηση, περάσαμε στο μοντέλο των Van Hieles και στη συνέχεια στην θεώρηση των Houdement και Kuzniak. Ο Fischbein, εστιάζοντας στο ρόλο του γεωμετρικού σχήματος, θεωρεί ότι αποτελεί νοερή δομή και αναπαριστά νοερές κατασκευές που ταυτόχρονα εμπεριέχουν «εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες» (Fischbein & Nachlielli, 1998),αποτελούν δε κατά τον Fischbein (1993), το «εννοιολογικό σχήμα». Παρόλα αυτά, οι μαθητές στις καθημερινές τους ενασχολήσεις με τα γεωμετρικά προβλήματα, παρουσιάζονται να μη βοηθούνται από την ύπαρξη ενός σχήματος, προς την κατεύθυνση της ορθής λύσης ενός προβλήματος (Duval, 1999). Γι' αυτό ο Duval (1995) εισηγείται μια «γνωστική προσέγγιση» του θέματος, και υποστηρίζει ότι απαιτούνται τέσσερα είδη ή τύποι γνωστικής σύλληψης: η αντιληπτική, η σειριακή ή ακολουθιακή, η λεκτική και τέλος η λειτουργική σύλληψη. **Η αντιληπτική σύλληψη** (perceptual apprehension), που συνδέεται με την αναγνώριση ενός σχήματος με την πρώτη ματιά, την κατανόηση της συνολικής μορφής του και την διάκριση των μερών του (υποσχημάτων). **Η σειριακή σύλληψη** (sequential apprehension), που συνίσταται στη διαδικασία αντίληψης του τρόπου δόμησης των συστατικών μερών του σχήματος (ιδίως σε γεωμετρικές κατασκευές ή περιγραφή αυτών). **Η λεκτική σύλληψη** (discursive apprehension), που συνδέεται άρρηκτα τόσο με την αντιληπτική όσο και με την σειριακή κατανόηση, ιδιαίτερα στα πλαίσια μιας απόδειξης. **Η λειτουργική σύλληψη** (operative apprehension), η οποία δημιουργεί συνθήκες πρόσβασης στη λύση του προβλήματος και σχετίζεται άμεσα με τους διάφορους τρόπους τροποποίησης ενός σχήματος .

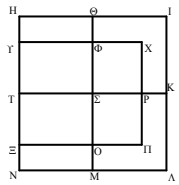
Ειδικά για τη λειτουργική κατανόηση ο Duval αναφέρει τρία είδη δυνατών τροποποιήσεων ενός γεωμετρικού σχήματος: **Μερολογικές (mereologic)** που αφορούν στην ανάλυση ή διάσπαση του σχήματος σε διάφορα υποσχήματα, τα οποία αντίστοιχα μπορούν να συνδυαστούν και να δημιουργήσουν ένα νέο σχήμα (reconfiguration). **Οπτικές (optic)** που αφορούν μετασχηματισμούς όπως μεγέθυνση ή σμίκρυνση ή λόξωση, σαν να γίνεται χρήση φακών. **Αλλαγής θέσης (place way)** που αφορούν αλλαγή του προσανατολισμού ενός σχήματος (αναγνώριση των ορθών γωνιών).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Βασικός στόχος της μελέτης αυτής ήταν η διερεύνηση των δυσκολιών κατανόησης ενός γεωμετρικού σχήματος, αλλά και ο έλεγχος της ικανότητας σύλληψής του από τους μαθητές Β΄ Λυκείου, βάσει της προσέγγισης του Duval. Στην έρευνα έλαβαν μέρος συνολικά 501 μαθητές από 10 Λύκεια διαφόρων περιοχών,(στοχευμένη

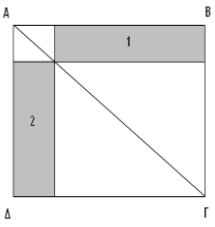
επιλογή για λόγους εγκυρότητας), αστικών ή επαρχιακών της Ελλάδος. Συγκεκριμένα το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν μαθητές Β΄Λυκείου από 6 Λύκεια της Αθήνας, 1 Λύκειο της Θεσσαλονίκης, 1 Λύκειο του Βόλου, 1 Λύκειο της Φλώρινας και 1 Λύκειο της Εύβοιας. (260 αγόρια (51,9%) και 232 κορίτσια (46,3%).Υπάρχουν και 9 μαθητές (ποσοστό 1,8%) που δε δήλωσαν φύλο).

Για τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας οι 501 μαθητές συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο που περιείχε δύο μέρη, με 12 και 11 ερωτήσεις αντίστοιχα. Στο ερωτηματολόγιο εμπεριέχονταν 4 ομάδες έργων: Η ομάδα των αντιληπτικών έργων **(PE)** περιελάμβανε 4 έργα: 3 αναγνώρισης υποσχημάτων ενός γεωμετρικού σχήματος και 1 ονομασίας υποσχημάτων. Η ομάδα των έργων λειτουργικής σύλληψης **(OP)** περιελάμβανε 3 έργα αναγνώρισης μέσω αλλαγής θέσης, 3 έργα οπτικής και 3 έργα μερολογικής τροποποίησης. Η ομάδα των έργων λεκτικής σύλληψης **(VE)** περιελάμβανε 2 έργα αποδείξεων βάσει ορισμού, 4 έργα αποδείξεων βάσει διαδικασίας και 2 έργα αποδείξεων όπου το σχήμα έχει φύση εικόνας (διαφωνία λεκτικής με σχηματική παρουσίαση). Τέλος η ομάδα των έργων ακολουθιακής σύλληψης **(SE)** περιελάμβανε 3 γεωμετρικές κατασκευές και 2 έργα περιγραφής κατασκευής γεωμ. σχήματος. Παραθέτουμε ενδεικτικά έργα από κάθε κατηγορία:



1) Αντιληπτικής σύλληψης έργο PEr3 (Αναγνώρισης)

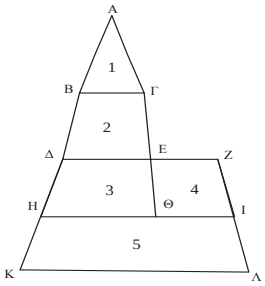
Μελέτησε προσεκτικά το παρακάτω σχήμα. Α. Πόσα τετράγωνα βλέπεις στο σχήμα; Β. Ονόμασέ τα.



2)Λειτουργικής σύλληψης έργο OPme3 (Μερολογικής):

Στην πιο κάτω εικόνα, το ΑΒΓΔ είναι <u>ορθογώνιο</u>. Παρατήρησε τα σκιασμένα ορθογώνια 1 και 2. Κύκλωσε τη σωστή πρόταση και <u>αιτιολόγησε</u> την απάντησή σου

α. Το ορθογώνιο 1 έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το 2.
β. Το ορθογώνιο 1 έχει ίσο εμβαδόν με το ορθογώνιο 2.
γ. Το ορθογώνιο 1 έχει μικρότερο εμβαδόν από το ορθογώνιο 2.



3)Λεκτικής σύλληψης έργο VEpi2 (Απόδειξη) : Στο σχήμα, το σχήμα 1 είναι ισόπλευρο τρίγωνο, το σχήμα 2 είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα σχήματα 3 και 4 είναι τετράγωνα και το σχήμα που σχηματίζεται από τα 3,4 και 5 είναι τετράγωνο. Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΘΙ και ΙΛ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε.

4) Ακολουθιακής σύλληψης έργο SEc2 (Κατασκευή)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Το σημείο Ε είναι ένα σημείο που ανήκει πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ. Ο κύκλος με διάμετρο ΑΕ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι: **ΑΒ = 6, ΑΓ = 6,5 , ΑΕ = (4/5)ΑΓ.** Να κατασκευάσετε το σχήμα με τη χρήση χάρακα και διαβήτη.
(Το ερωτηματολόγιο προέρχεται από την Διατριβή της **Παρασκευής Μιχαήλ** του Πανεπιστημίου της Κύπρου).

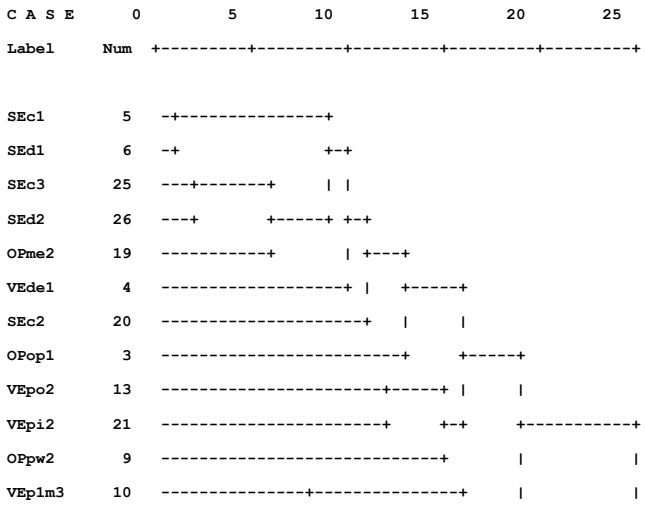
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

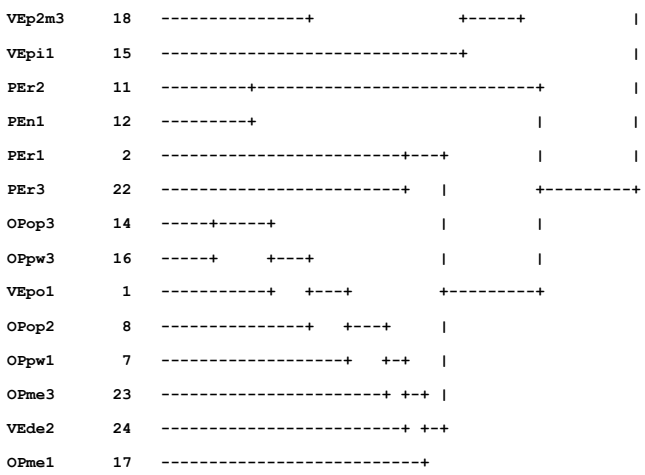
Για τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο SPSS, από όπου προέκυψε τόσο η παραγοντική ανάλυση των δηλώσεων, όσο και η ανάλυση ομοιότητας, ενώ μέσω του στατιστικού προγράμματος C.H.I.C. επιβεβαιώθηκαν οι σχέσεις ομοιότητας και προέκυψε το συνεπαγωγικό διάγραμμα. Από το παρακάτω διάγραμμα ομοιότητας-δενδρόγραμμα (Σχήμα 1) διαπιστώνουμε ότι δημιουργούνται 2 κλάσεις ομοιότητας:

Η πρώτη κλάση περιλαμβάνει 14 έργα και αποτελείται από όλα τα έργα ακολουθιακής σύλληψης (SE), 6 έργα λεκτικής σύλληψης (VEde1, VEpo2, VEp1m3, VEp2m3, VEpi1, VEpi2) και 3 έργα λειτουργικής σύλληψης (OPpw2, OPop1, OPme2).

Η δεύτερη κλάση περιλαμβάνει 12 έργα και αποτελείται από όλα τα έργα αντιληπτικής σύλληψης (PE), 6 έργα λειτουργικής σύλληψης (OPpw3,OPpw1, OPop2,OPop3, OPme1, OPme3) και 2 έργα λεκτικής σύλληψης (VEde2, VEpo1).

Προκύπτει, λοιπόν από το διάγραμμα ομοιότητας, ότι στα έργα που υπάγονται στην ακολουθιακή σύλληψη (SE) υφίστανται πολύ ισχυρές σχέσεις μεταξύ εκείνων που ελέγχουν την ικανότητα κατασκευής σχημάτων (SEc1, SEc2 και SEc3) από τους μαθητές της Β΄ Λυκείου και αυτών που απαιτούν την περιγραφή των εν λόγω κατασκευών (SEd1, SEd2).



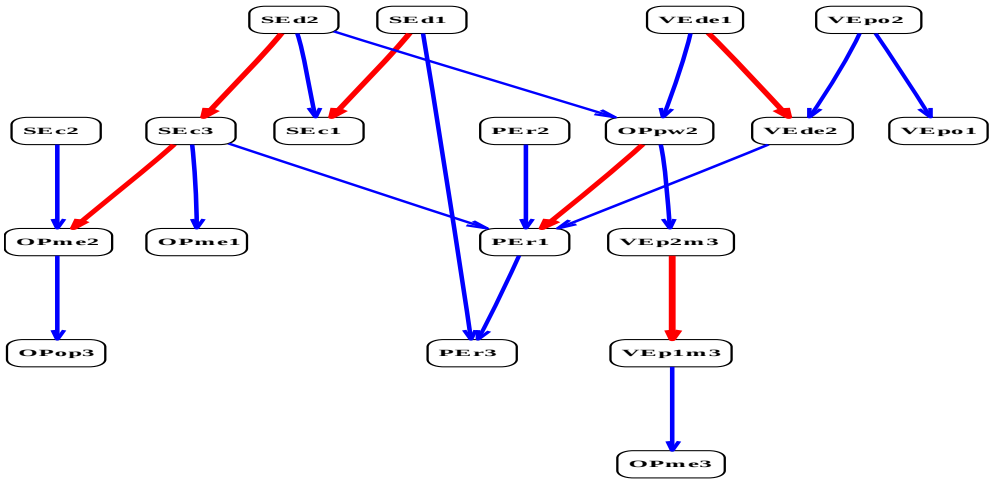


Σχήμα 1: Διάγραμμα Ομοιότητας – Δενδρόγραμμα

Αντίστοιχες σχέσεις, λιγότερο όμως ισχυρές, προκύπτουν μεταξύ των έργων αντιληπτικής σύλληψης που απαιτούν τόσο αναγνώριση PEr1, PEr2, PEr3, όσο και ονομασία υποσχημάτων PEn1. Επιπροσθέτως, στην πρώτη κλάση εμφανής είναι η ύπαρξη αρκετά ισχυρών σχέσεων ομοιότητας μεταξύ όλων των έργων ακολουθιακής σύλληψης (SE) και της πλειοψηφίας των έργων λεκτικής σύλληψης (VE) που αφορούν στη διάκριση των ειδών αποδείξεων (VEp1m3, VEp2m3), στην απόδειξη που βασίζεται σε ένα ορισμό (VEde1), καθώς και τις αποδείξεις που η λεκτική διατύπωση διαφέρει της ορθής κατασκευής του γεωμετρικού σχήματος (VEpi1, VEpi2).

Τα έργα της λειτουργικής σύλληψης (OPop2, OPop3, OPpw1, OPpw3, OPme1 και OPme3) δημιουργούν αρκετά ισχυρές σχέσεις με τα λεκτικά έργα VEpo1 και VEde2 αντίστοιχα, που βασίζονται αφ' ενός μεν σε διαδικασίες απόδειξης και αφ' ετέρου σε αποδείξεις βάσει ορισμού. Ακολούθως, από τη χρήση του προγράμματος CHIC προέκυψε το παρακάτω συνεπαγωγικό διάγραμμα (Σχήμα 2), στο οποίο διακρίνονται δύο συνεπαγωγικές αλυσίδες (ομάδες έργων):

Στην πρώτη ομάδα διακρίνουμε σχέσεις συνεπαγωγής μεταξύ έργων ακολουθιακής και λειτουργικής σύλληψης. Στην κορυφή αυτής της αλυσίδας εντοπίζουμε έργα ακολουθιακής σύλληψης (που είναι δυσκολότερα από τα λειτουργικής που βρίσκονται χαμηλότερα), τα οποία απαιτούν την περιγραφή της κατασκευής ενός γεωμετρικού σχήματος (SEd1 και SEd2). Οι συνεπαγωγικές σχέσεις που δημιουργούνται μεταξύ των έργων ακολουθιακής σύλληψης ενισχύουν το συμπέρασμα που προκύπτει από το διάγραμμα ομοιότητας, δηλαδή ότι οι μαθητές παρουσιάζουν μια συνέπεια στη συμπεριφορά τους ως προς την επίλυση έργων ακολουθιακής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.



Σχήμα 2: Συνεπαγωγικό διάγραμμα

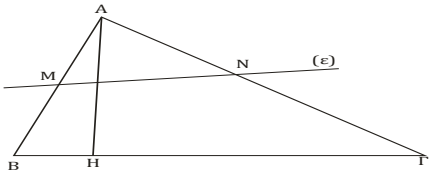
Η δεύτερη ομάδα έργων του συνεπαγωγικού διαγράμματος περιλαμβάνει συνεπαγωγικές αλυσίδες μεταξύ έργων λεκτικής, αντιληπτικής και λειτουργικής σύλληψης. Μια πρώτη συνεπαγωγική αλυσίδα που εντοπίζουμε στην ομάδα αυτή δημιουργείται από έργα αντιληπτικής κατανόησης (PEr1, PEr2 και PEr3), τα οποία απαιτούν την αναγνώριση υποσχημάτων σε ένα ενιαίο σχήμα. Φαίνεται, λοιπόν, ότι οι μαθητές επιδεικνύουν μια συνέπεια στον τρόπο απάντησης τους σε έργα αναγνώρισης.Στο πάνω μέρος αυτής της ομάδας έργων εντοπίζουμε έργα λεκτικής σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να προσέξουμε τις συνεπαγωγικές σχέσεις που προκύπτουν μεταξύ των έργων που η επίλυση τους βασίζεται στη χρήση ενός ορισμού (VEde1 και VEde2) και αυτών όπου απαιτείται μια διαδικασία απόδειξης (VEpo1 και VEpo2) αντίστοιχα. Οι σχέσεις αυτές αποτελούν ενδείξεις για το ότι οι μαθητές διαχειρίζονται με διακριτό τρόπο τους δύο αυτούς τύπους έργων, τα οποία εμπίπτουν όμως στην ίδια κατηγορία. Αξίζει, επίσης, να αναφερθούμε στη συνεπαγωγική σχέση που συνδέει τα δύο αντίστοιχα έργα που αφορούν στη διάκριση της τυπικής απόδειξης από την εμπειρική και την ημιεμπειρική (VEp1m3 και VEp2m3).Με απλά λόγια λοιπόν οι μαθητές του δείγματος είναι σε θέση να διακρίνουν την τυπική απόδειξη από τις υπόλοιπες.

Από τη δεύτερη ομάδα συνεπαγωγικών αλυσίδων μπορούμε, γενικά να πούμε ότι διακρίνεται μια συνέπεια από τους μαθητές ως προς τα έργα λεκτικής αλλά και τα αντιληπτικής σύλληψης. Παρόλα αυτά, οι μαθητές φαίνεται να διαφοροποιούν τη συμπεριφορά τους στους δύο διαφορετικούς τύπους έργων που εμπίπτουν στη λεκτική σύλληψη του σχήματος.

Παραθέτουμε στη συνέχεια χαρακτηριστικά αποσπάσματα, από μία μόνο ερώτηση **λεκτικής σύλληψης VEpi1** (λόγω έλλειψης χώρου).

Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται ότι ΑΒ = ΑΓ, (ε) // ΒΓ και ΑΗ ⊥ ΒΓ.
Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΗ και ΝΗ.
α) Τα τμήματα ΜΗ και ΝΗ είναι ίσα β) Το τμήμα ΜΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΝΗ γ) Το τμήμα ΝΗ είναι μεγαλύτερο από το τμήμα ΜΗ

δ) Δεν μπορεί να προσδιοριστεί. Εξήγησε πώς βρήκες την απάντηση.



Σχήμα 3: Ερώτηση VEpi1 (Λεκτικής σύλληψης – απόδειξη φύσης εικόνας)

(Ε = Ερευνητής , Μ1 = Μαθητής 1, Μ2 = Μαθητής 2 κλπ.)

Μ1: Καταρχάς, βλέπω στο σχήμα ότι η (ε) δεν είναι παράλληλη με τη ΒΓ, άρα δεν μπορεί να προσδιοριστεί (εννοεί ποιό είναι μεγαλύτερο).
Ε: Υπάρχει κάποιο πρόβλημα; Πως κατέληξες σ' αυτήν την απάντηση;
Μ1: Εγώ βλέπω στο σχήμα ότι η (ε) δεν είναι παράλληλη στη ΒΓ, κατά πρώτο και μετά βλέπω ότι λείπουν στοιχεία, άρα δεν λύνεται η άσκηση.
Ε: Και τί κάνουμε τότε;
1 Μ1: Απλά σταματάμε. (Άλλη μαθήτρια με έμφαση παρατηρεί)
Μ2: Μα δεν μπορεί να προσδιοριστεί!
Ε: Πώς κατέληξες σ' αυτό, εξήγησε μου το σκεπτικό σου.
Μ2: Το σχήμα, απλά είναι λάθος. Λάθος ως προς την εκφώνηση της άσκησης.
Ε: Και λοιπόν τί θα κάνουμε τώρα;
2 Μ2: Δεν μπορούμε να προχωρήσουμε, πρώτα να διορθώσετε το λάθος σχήμα.
Ε: Μπορείς να μου περιγράψεις τι παρατηρείς και τι έκανες;
3 Μ3: Αφού εδώ δεν ταιριάζουν τα λόγια με το σχήμα δίνω σημασία στα λόγια.
4 Ε: Γενικότερα πού δίνεις βαρύτητα στο σχήμα ή στη λεκτική διατύπωση ;
5 Μ3: Δεν δίνω βάση στο σχήμα αλλά στα λόγια. Άλλος μαθητής επισημαίνει:
6 Μ4: Παρατηρώ ότι ενώ το ΑΒΓ είναι ισοσκελές, στο σχήμα το έχει σκαληνό και ούτε είναι (ε) // ΒΓ , γι αυτό κάνω ένα σωστό σχήμα και…
7 Μ4: Κάνω σωστό σχήμα για να το βλέπω γιατί μπερδεύομαι αλλιώς.
Ε: Ακολουθείς κάποια συγκεκριμένη στρατηγική σε παρόμοιες περιπτώσεις;
8 Μ4: Πάντοτε, γιατί δίνω περισσότερο βαρύτητα στη διατύπωση και όχι στο λάθος σχήμα. (Μαθήτρια και μαθητής περιφερειακού Λυκείου):
9 Μ5: Εγώ πάνω στο λάθος σχήμα, έφτιαξα ένα άλλο σωστό σχήμα με ΑΒ=ΑΓ.
10 Μ6: Δεν μου άρεσε το σχήμα σας, εξάλλου είναι λάθος, άρα η ΑΗ είναι ύψος στο ισοσκελές ΑΒΓ άρα και διάμεσος (περιγράφει τη λύση).
Ε: Πού δώσατε μεγαλύτερη βαρύτητα στο σχήμα ή στην λεκτική διατύπωση;
11 Μ6: Εγώ δίνω περισσότερη βαρύτητα στην εκφώνηση και όχι στο σχήμα.
12 Μ5: Πρώτα κοιτάζω αν τα λόγια είναι ευθυγραμμισμένα (εννοεί ταιριάζουν) με το σχήμα κι αν είναι λύνω την άσκηση με το σωστό σχήμα.

Από τις 24 ημιδομημένες συνεντεύξεις που πήραμε από τους μαθητές στις διάφορες ερωτήσεις, αλλά και τους στατιστικούς πίνακες, προκύπτουν δύο καθαρές ομάδες. Αυτοί που επηρεάζονται από το σχήμα (περιπτ.1,2) και όχι από τη λεκτική διατύπωση, οι λεγόμενοι **«οπτικοί τύποι»**, με αποτέλεσμα να αποτυγχάνουν (ποσοστό σωστών απαντήσεων στους 501μαθητές στην ερώτηση **VEpi1** μόνο 47,9%) και αυτοί που δεν εστιάζουν στο σχήμα, αλλά τηρούν επακριβώς τη λεκτική

διατύπωση (3,5,6,8,9,10), οι λεγόμενοι **«λεκτικοί τύποι»**, που συνήθως, οδηγούνται σε σωστές λύσεις (π.χ OPme3) Οι τρόποι προσέγγισης των λύσεων είναι συνήθως η μερολογική κατάτμηση σε υποσχήματα και η σύγκριση αυτών. (Στην αντίστοιχη ερώτηση **VEpi2** με το λάθος σχήμα στους 501μαθητές,οι σωστές απαντήσεις ήταν μόνο το 40,7%).Να αντιδιαστείλουμε εδώ ότι στις αντίστοιχες ερωτήσεις **VEpo1**, **VEpo2**,που είχαν όμως **σωστό** σχήμα, οι σωστές απαντήσεις ήταν 87,4% και 43,5% αντίστοιχα. Οι «οπτικοί τύποι» έδειξαν και στις συνεντεύξεις, ότι εμφανώς αποσυντονίζονται από το «λάθος» σχήμα και ότι επικεντρώνονται σε επιμέρους τμήματα, χάνοντας την σύνολη σχηματική παράσταση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η κατά Duval (1995) διερεύνηση της πρόσληψης γεωμετρικού σχήματος. Από τις απαντήσεις των μαθητών, παρατηρείται αρκετή δυσκολία στα έργα λειτουργικής σύλληψης, όπως και στα έργα ακολουθιακής προσέγγισης (αφού οι κατασκευές είναι πλέον εκτός ύλης). Από τα διαγράμματα (ομοιότητας και συνεπαγωγικό) και την παραγοντική ανάλυση που ακολούθησε καταγράφονται οι ισχυρές σχέσεις, άρα και η συνέπεια της συμπεριφοράς των μαθητών, κυρίως στην επίλυση έργων ακολουθιακής σύλληψης, λεκτικής αλλά και λειτουργικής σύλληψης, λόγω των υφιστάμενων σχέσεων μεταξύ τους. Γίνεται, επίσης, φανερή η δημιουργία δεσμών ομοιότητας μεταξύ έργων ακολουθιακής και λεκτικής σύλληψης, κυρίως λόγω επενέργειας των κατασκευαστικών περιορισμών ενός σχήματος, τα δε ακολουθιακά έργα είναι σαφώς δυσκολότερα των λειτουργικών (στο κάτω μέρος της αριστερής συνεπαγωγικής αλυσίδας).

Από τα αποτελέσματα των έργων λειτουργικής κατανόησης, επαληθεύεται η επίδρασή της στην ικανότητα επίλυσης και προκύπτει ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές βλέπουν συχνά **«εικονικά»** τα σχήματα και τείνουν προς μια αντιληπτικού τύπου προσέγγιση των σχημάτων. (Χαρακτηριστικό παράδειγμα το λειτουργικό έργο OPme3, που ενώ οι σωστές απαντήσεις είναι 76%, μόνο ένας στους τρεις, 28,3% δίνει ορθή αιτιολόγηση). Η επιτυχία δεν οφείλεται στη λειτουργική κατανόηση, αλλά στην επικράτηση της αντιληπτικής πρόσληψης, όταν επισκιάζει τη λειτουργική. Τέλος, επιβεβαιώνεται η επίδραση της **φύσης** του σχήματος στην ορθή ή λανθασμένη προσέγγιση γεωμετρικών προβλημάτων από τους μαθητές του δείγματος μας, όπως παρουσιάσαμε προηγουμένως (π.χ VEpi1,VEpi2).

Η παρούσα εργασία, χωρίς να δικαιούται να κάνει γενικεύσεις, εισηγείται αφ'ενός μεν την αναγκαιότητα υπέρβασης της προσκόλλησης των μαθητών στα επιμέρους υποσχήματα και την αντιμετώπιση του σχήματος ως ενιαίας οντότητας και αφ'ετέρου την υιοθέτηση δράσεων και προς τις 4 μορφές κατανόησης, για να αποκτήσουν οι μαθητές μας ολιστική προσέγγιση της σύλληψης ενός γεωμετρικού σχήματος. Θεωρούμε επίσης, εκ μέρους των διδασκόντων, επιβεβλημένη την επιλογή προβλημάτων που έχουν «λάθος σχήμα», ώστε ωθούμενοι οι μαθητές στην κατασκευή σωστού και ευδιάκριτου σχήματος, να οδηγούνται σε ορθές λύσεις, με

απώτερο στόχο την πάταξη της «κυριαρχίας» της αντιληπτικής πρόσληψης και την επαύξηση της δράσης των λειτουργικών προσεγγίσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Deliyianni E., Elia I., Gagatsis A., Monoyiou A., & Panaoura A. (2009). A theoretical model of students geometrical figure understanding. In V. Durand-Guerrier, S. Soury- Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 696-705). Lyon.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt and M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American, Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Morelos, México, vol. I, 3-26.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142- 157). Berlin: Springer.

Elia, I., Gagatsis, A., Deliyianni, E., Monoyiou, A., & Michael, S. (2009). A structural model of primary school students' operative apprehension of geometrical figures. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*: Vol.3 (pp.18). Thessaloniki.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*,20(10),1193- 1211.

Jones,K.(2002).Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In L. Haggarty (Ed). Aspects of Teaching Secondary mathematics: perspectives on practice Chapter 8, (pp. 121-139). London: Routledge Falmer.

Mammana, C. & Villani, V. (eds.) (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century An ICMI Study.* The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geom. *Journal of mathematical behavior*,17(2),183-195.

Michael, P. (2012). The Operative Apprehension of a Geometrical Figure through Students' Transition to a Next Educational Level. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 11 (1-2),* 147 – 165.

Michael, P., Gagatsis, A, Avgerinos, E. & Kuzniak, A. (2011). Middle and High school students' operative apprehension of geometrical figures. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics, 11*, 45 –55.

Η ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΟΥΣ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Λυγούρας Γεώργιος
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας/Παιδαγωγική Σχολή Φλώρινας
geliguras@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μελέτη διερευνά την ευελιξία 223 μαθητών/τριών της Στ΄ τάξης στους νοερούς υπολογισμούς και αναζητά συσχετίσεις αυτής με κοινωνικούς παράγοντες. Οι μαθητές εξετάστηκαν με προσωπικές συνεντεύξεις σε 5 προσθέσεις, αφαιρέσεις και πολλαπλασιασμούς. Η ευελιξία διερευνήθηκε με δύο τρόπους: Πρώτα ελέγχθηκε η χρήση των ολιστικών στρατηγικών (ευελιξία 1) και μετά ελέγχθηκε η χρήση των πιο κατάλληλων στρατηγικών (γρήγορων και αποτελεσματικών) στρατηγικών (ευελιξία 2). Από την έρευνα προέκυψε πως το μορφωτικό επίπεδο του πατέρα, το βιοτικό επίπεδο της οικογένειας και η επικοινωνία γονέων-μαθητών σχετίζονται με την ευελιξία 2 των μαθητών, ενώ κανένας παράγοντας που εξετάστηκε δε σχετίζεται με την ευελιξία 1.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αυτό που προβληματίζει συνεχώς τους ερευνητές και της μαθηματικής εκπαίδευσης και της ψυχολογίας είναι να ερμηνεύσουν τον τρόπο με τον οποίο επιλέγει και χρησιμοποιεί ένα παιδί τη στρατηγική που του χρειάζεται για να επιλύσει μία άσκηση.

Παρόλες τις προσπάθειες που καταβλήθηκαν φαίνεται ότι η παραδοχή πως η εμπειρία και η εξάσκηση οδηγούν σε γρήγορα και σωστά αποτελέσματα αυξάνοντας την ευελιξία δεν είναι αρκετή. Πολλές έρευνες καταλήγουν στο συμπέρασμα πως η ευελιξία ιδιαίτερα πρέπει να ορίζεται και να μελετάται με βάση όχι μόνο την αποτελεσματικότητα και την ταχύτητα των υπολογισμών, αλλά λαμβάνοντας υπόψη τα γνωστικά και τα κοινωνικά χαρακτηριστικά του ατόμου (π.χ. Torbeyns et.al., 2009). Άλλοι πάλι (Ellis, 1997) σημειώνουν πως οι επιλογές των μαθητών επηρεάζονται από το κοινωνικό πλαίσιο που τους διέπει και πως οι εκπαιδευτικοί πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους κατά τη διδασκαλία τον τρόπο υπολογισμού που προκρίνει το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον των μαθητών.

Το ερώτημα που προκύπτει μέσα από την επισκόπηση της διεθνής βιβλιογραφίας που σχετίζεται με τους νοερούς υπολογισμούς στα μαθηματικά είναι: «Τι είναι η ευελιξία»; Και πώς αυτή προσδιορίζεται; Οι ερευνητές ξεκινώντας από την απλή διαπίστωση πως κάποιοι μαθητές εναλλάσσουν στρατηγικές όταν υπολογίζουν νοερά ερμήνευσαν την ευελιξία με βάση την ποικιλία των στρατηγικών που χρησιμοποιούν (Heirdsfield, & Cooper, 2002) τον αριθμητισμό (Star, & Seifert, 2006), την αίσθηση

των αριθμών (MacIntosh, 2005), την ταχύτητα και την αποτελεσματικότητα (Siegler, & Lemaire, 1997) και το κοινωνικό υπόβαθρο των μαθητών (Ellis, 1997; Lemonidis, Ligouras, 2009).

Στην παρούσα έρευνα γίνεται μία προσπάθεια μελέτης της ευελιξίας βασισμένη στη διεθνή βιβλιογραφία. Αυτό που διαφοροποιείται και δίνει το στοιχείο της καινοτομίας είναι:

Α) Ο τρόπος με τον οποίο διερευνάται η ευελιξία. Η ευελιξία προσεγγίστηκε με δύο τρόπους. Πρώτα ελέγχθηκε η χρήση των ολιστικών στρατηγικών σε ασκήσεις που σχεδιάστηκαν έτσι ώστε η ολιστικές στρατηγικές να είναι οι πιο κατάλληλες για γρήγορο υπολογισμό (π.χ. 48+19). Διαπιστώθηκε δηλαδή και καταγράφηκε ο βαθμός με τον οποίο οι μαθητές λαμβάνουν υπόψη τους τα χαρακτηριστικά των πράξεων που κλήθηκαν να εκτελέσουν νοερά. Το αποτέλεσμα ονομάστηκε Ευελιξία 1.

Ο δεύτερος τρόπος προσέγγισης της ευελιξίας στηρίχθηκε στη μεθοδολογία της γνωστικής ψυχολογίας εστιάζοντας στη σύγκριση των επιλογών των μαθητών με την ταχύτητα και την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών που χρησιμοποιούν για να μελετήσουν την ευελιξία. Ελέγχθηκε δηλαδή ο βαθμός με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν την πιο γρήγορη και αποτελεσματική στρατηγική που διαθέτουν. Το αποτέλεσμα ονομάστηκε Ευελιξία 2.

Β) Η διερεύνηση κοινωνικών παραγόντων. Στη μελέτη αυτή αναζητούνται συσχετίσεις της ευελιξίας με κοινωνικούς παράγοντες που δεν έχουν ακόμα διερευνηθεί εκτεταμένα. Η επιλογή των παραγόντων αυτών έγινε πρώτον γιατί όλοι οι ερευνητές (π.χ. Torbeyns et. al., 2009) μέχρι σήμερα δηλώνουν ανικανοποίητοι από τα αποτελέσματα των ερευνών τους και δηλώνουν την ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση της ευελιξίας και δεύτερον γιατί οι παράγοντες αυτοί έχει βρεθεί ότι επηρεάζουν σημαντικά τη γενικότερη επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά. Στους κοινωνικούς παράγοντες εστιάστηκε η προσοχή στο μορφωτικό-οικονομικό επίπεδο της οικογένειας και στην εμπλοκή των γονέων στους τομείς: ενδιαφέρον για το σχολείο, επίπεδο επικοινωνίας με τους μαθητές, και καλλιέργεια νοερών υπολογισμών στο σπίτι.

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε είχε την έγκριση του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου και του Υπουργείου Παιδείας (Φ15/660/63100/Γ1/01-06-2009).

2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΥΕΛΙΞΙΑΣ

Στην παρούσα μελέτη, λαμβάνοντας υπόψη τις διάφορες εκδοχές και ερμηνείας της ικανότητας των παιδιών να υπολογίζουν νοερά, επιλέχτηκε και χρησιμοποιείται ο όρος «ευελιξία» με βάση τον ορισμό της από τους Verschaffel, et al. (2007), όρος ο οποίος προέκυψε ύστερα από μία μακροχρόνια μελέτη της ευελιξίας από διάφορους ερευνητές, οι οποίοι δε συμφωνούσαν πάντα για το τι είναι ευελιξία, τι είναι αυτό που τη χαρακτηρίζει και πώς πρέπει να μελετηθεί και να ερμηνευτεί.

«*Ο όρος προσαρμοστικότητα ή ευελιξία νοείται ως η ενσυνείδητη ή ασυνείδητη επιλογή και χρήση της πιο κατάλληλης στρατηγικής επίλυσης σε ένα μαθηματικό αντικείμενο (πράξη/πρόβλημα) που προτείνεται σε ένα συγκεκριμένο υποκείμενο που ανήκει σε ένα συγκεκριμένο κοινωνικό-πολιτιστικό περιβάλλον*».

3. ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Το ενδιαφέρον των ερευνητών της μαθηματικής εκπαίδευσης έχει επικεντρωθεί τα τελευταία χρόνια στη διερεύνηση κοινωνικών συνθηκών και καταστάσεων, οι οποίες διαμορφώνουν το κοινωνικό πλαίσιο (social context) των μαθητών και καθορίζουν την πορεία ανάπτυξης της μάθησης των μαθηματικών σε σχολικά και μη σχολικά περιβάλλοντα. Παράλληλα, και σε συνδυασμό, ένα πλήθος ερευνών επιβεβαιώνει, ότι η συγκρότηση των μαθηματικών εννοιών και η ανάπτυξη των μαθηματικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων στα παιδιά, αλλά και στους ενήλικες είναι μια διαδικασία πρώτιστα κοινωνικής προέλευσης, η οποία γεννιέται και εξελίσσεται τόσο σε μικρο-κοινωνικό όσο και σε μακρο-κοινωνικό επίπεδο (Lerman, 1994).

Οι έρευνες (π.χ. Ewing, 2005) δείχνουν, ότι παιδιά που προέρχονται από υποβαθμισμένο κοινωνικό περιβάλλον αναπτύσσουν χαμηλότερους δείκτες αριθμητισμού σε σχέση με τα παιδιά που έχουν υψηλό κοινωνικό προφίλ. Η κοινωνικοποίηση στην οικογένεια παίζει θεμελιώδη ρόλο, ως προς τη διαμόρφωση των κινήτρων μάθησης και ως προς την ανταπόκριση του παιδιού στις σχολικές απαιτήσεις. Το γεγονός αυτό δικαιολογεί σύμφωνα με την Epstein (1989) την υψηλή συσχέτιση μεταξύ κοινωνικοοικονομικής οικογενειακής προέλευσης και επίδοσης στο σχολείο.

Με άλλα λόγια, κατά την κρίσιμη μετάβαση του παιδιού από το οικογενειακό περιβάλλον στο σχολικό, το πολιτισμικό κεφάλαιο, το οποίο κληρονομεί από την οικογένειά του παίζει σημαντικό ρόλο στην περαιτέρω ακαδημαϊκή του εξέλιξη και είναι σε θέση να προσδιορίσει, με υψηλή πιθανότητα επιτυχίας, και την κοινωνική του εξέλιξη (Λεμονίδης, Χατζηλιαμή, Κυρίδης, 2002).

4. Η ΕΡΕΥΝΑ

4.1 Ο σκοπός και τα ερευνητικά ερωτήματα

Ο γενικότερος σκοπός της έρευνας είναι η διερεύνηση της ευελιξίας των μαθητών της Στ΄ τάξης δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς. Τα επιμέρους ερωτήματα διατυπώνονται ως εξής:

Ποιο είναι το επίπεδο της ευελιξίας των μαθητών της Στ΄ τάξης δημοτικού όσο αφορά την ικανότητά τους να λαμβάνουν υπόψη τους τα χαρακτηριστικά των πράξεων στους νοερούς υπολογισμούς γενικά και ανά πράξη (ευελιξία 1);

Ποιο είναι το επίπεδο ευελιξίας των μαθητών της Στ΄ τάξης Δημοτικού όσο αφορά την ικανότητά τους να χρησιμοποιούν την πιο κατάλληλη στρατηγική (γρήγορη και αποτελεσματική) που διαθέτουν στους νοερούς υπολογισμούς γενικά και ανά πράξη (ευελιξία 2);
Υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στους δύο τύπους ευελιξίας;
Υπάρχει επίδραση στην ευελιξία οικογενειακών παραγόντων όπως το μορφωτικό-οικονομικό επίπεδο της οικογένειας και η εμπλοκή των γονέων στους τομείς: βοήθεια στην καλλιέργεια των νοερών υπολογισμών, ενδιαφέρον για το σχολείο και επικοινωνία με τα παιδιά;

4.2 Το δείγμα

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν διακόσιοι είκοσι τρεις μαθητές (223) και μαθήτριες της έκτης τάξης δημοτικών σχολείων της ευρύτερης περιοχής της Φλώρινας. Από το σύνολο των 223 μαθητών τα 116 είναι αγόρια (ποσοστό 52%) και τα 107 κορίτσια (ποσοστό 48%). Η επιλογή των σχολείων έγινε με γνώμονα την καλύτερη αντιπροσώπευση μαθητών από αστική και αγροτικές περιοχές.

4.3 Τα εργαλεία

Τα εργαλεία της έρευνας σχεδιάστηκαν με βάση τα ερωτήματα της έρευνας. Για τον καθορισμό της ευελιξίας των μαθητών ελήφθησαν υπόψη τέσσερα χαρακτηριστικά υπολογισμού. Η γνώση των στρατηγικών, η επίδοση στην εκτέλεση των πράξεων, η ταχύτητα εκτέλεσης των υπολογισμών και η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής (ευελιξία). Οι τέσσερις διαστάσεις της επιλογής στρατηγικών προτείνονται από τη βιβλιογραφία (Lemaire, & Siegler, 1995; Siegler, & Lemaire, 1997) και χρησιμοποιούνται εκτενώς σε ανάλογες έρευνες Verschaffel, et al., 2007). Για την εξέταση των παραπάνω παραγόντων χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο έρευνας επιλογής/μη επιλογής (choice/no choice) των Lemaire, και Siegler (1995).

4.3.1 Τα πρωτόκολλα των ερωτήσεων

Πρώτα σχεδιάστηκαν τα τρία πρωτόκολλα ερωτήσεων. Συμπεριλήφθηκαν πέντε προσθέσεις, πέντε αφαιρέσεις και πέντε πολλαπλασιασμοί. Ο αριθμός των πράξεων αποφασίστηκε με βάση τον εκτιμώμενο χρόνο επεξεργασίας τους από τους μαθητές που είναι περίπου μισή ώρα. Δεν επιλέχθηκαν διαιρέσεις γιατί οι στρατηγικές αυτών είναι παρόμοιες με αυτές του πολλαπλασιασμού.

Πίνακας 1: Οι προτεινόμενες πράξεις

Α/Α	ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ	ΑΦΑΙΡΕΣΕΙΣ	ΠΟΛΛ/ΣΜΟΙ
1	48 + 19	42 – 25	8 χ 25
2	39 + 27	71 – 59	9 χ 21

3	69 + 56	80 – 28	12 χ 18
4	88 + 45	93 – 37	19 χ 30
5	147 + 58	167 – 99	15 χ 49

Η επιλογή των πράξεων μέσα στις πράξεις έγινε με τα ακόλουθα κριτήρια:
Ανταποκρίνονται στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών της Στ΄ Δημοτικού.
Όλες οι πράξεις ενδείκνυνται να εκτελεστούν με τις ολιστικές στρατηγικές, καθώς το ψηφίο των μονάδων των αριθμών είναι κοντά στη στρογγυλή δεκάδα (7, 8 και 9).

4.3.2 Το ερωτηματολόγιο

Το ερωτηματολόγιο κατασκευάστηκε με σκοπό την άμεση άντληση πληροφοριών από τους μαθητές του δείγματος σχετικά με τα κοινωνικά χαρακτηριστικά τους. Ο τρόπος σχεδιασμού βασίστηκε σε αντίστοιχο που χρησιμοποιεί το PISA στις μετρήσεις του. Περιλάμβανε οκτώ ερωτήσεις που αντιστοιχούσαν σε οκτώ παράγοντες, κάθε μία από τις οποίες εμπεριείχε προτάσεις-μεταβλητές:
1-2 Ποιο είναι το επάγγελμα του πατέρα και της μητέρας σου;
3-4 Ποιο είναι το ανώτερο σχολείο που τελείωσαν ο πατέρας και η μητέρα σου; (Μορφωτικό επίπεδο γονέων)
5. Ποιο από τα παρακάτω είδη (π.χ. Τηλεοράσεις, τουαλέτες) και πόσα υπάρχουν στο σπίτι σου; (Βιοτικό επίπεδο οικογένειας)
6. Πόσο συχνά συζητάς με τους γονείς σου; (Επίπεδο επικοινωνίας)
7. Πόσο συχνά κάνεις μαθηματικά χωρίς χαρτί μολύβι με τους γονείς σου; (Καλλιέργεια νοερών υπολογισμών).
Πόσο συχνά οι γονείς σου έρχονται σε επαφή με το σχολείο; (Ενδιαφέρονγονέων για το σχολείο).

4.4 Η Μεθόδευση της έρευνας

Για την καταγραφή και αποτύπωση όλων των δεδομένων της έρευνας πραγματοποιήθηκαν τρεις συνεντεύξεις μισής ώρας με κάθε έναν/μία από τους 223 μαθητές/τριες που συμμετείχαν.

Πριν από την έναρξη της έρευνας κάθε μαθητής που συμμετείχε κωδικοποιήθηκε με ένα αύξοντα αριθμό, έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η ανωνυμία. Οι συνεντεύξεις πραγματοποιούνταν σε σχολικό χώρο διαφορετικό από την αίθουσα διδασκαλίας χωρίς την παρουσία τρίτου προσώπου και με χρονική διαφορά τουλάχιστον τρεις ημέρες μεταξύ τους. Όλες οι απαντήσεις των μαθητών καταγράφονταν από τον ερευνητή σε φύλλα παρατηρήσεων. Πάντα πρώτα πραγματοποιούνταν η κατάσταση επιλογής και ακολουθούσαν οι καταστάσεις μη επιλογής.

Α. ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ (Choice condition)

Το έργο αυτό υλοποιήθηκε στην πρώτη συνέντευξη με τους μαθητές. Στην αρχή ο ερευνητής εξηγούσε στους μαθητές ότι θα πρέπει να κάνουν υπολογισμούς με το

μυαλό τους χωρίς να χρησιμοποιήσουν κάποιο άλλο μέσο. Επίσης, τους διευκρίνιζε ότι μπορούν ελεύθερα να ανακοινώνουν προφορικά τον τρόπο σκέψης τους μετά τον υπολογισμό χωρίς να έχουν το φόβο του λάθους. Στην όλη διαδικασία ο ερευνητής δεν έλεγε εάν οι απαντήσεις ήταν σωστές ή λανθασμένες.

Ο ερευνητής με τη βοήθεια του PowerPoint παρουσίαζε στην οθόνη πρώτα μία πράξη. Με την εμφάνιση της ο ερευνητής ρωτούσε τους μαθητές: *Πόσο κάνει…..;* Με τη λήξη της ερώτησης (τελευταία λέξη) ενεργοποιούσε το χρονόμετρο. Μόλις οι μαθητές έδιναν μία απάντηση σταματούσε το χρονόμετρο και καταγράφονταν η απάντηση και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα και κλάσματα δευτερολέπτου (π.χ. 8΄42΄΄).

Μετά την καταγραφή χρόνου και απάντησης σωστής ή λανθασμένης ο ερευνητής ρωτούσε τους μαθητές: *Με ποιον τρόπο σκέφτηκες; ή Πώς υπολόγισες;* Η ερώτηση αυτή αποσκοπούσε στην καταγραφή της στρατηγικής που χρησιμοποίησαν οι μαθητές. Η κωδικοποίηση των στρατηγικών έγινε με βάση τη διεθνή βιβλιογραφία. Για τις προσθέσεις και αφαιρέσεις χρησιμοποιήθηκε η κατάταξη των Cooper, Heirdsfield και Irons (1996) και για τους πολλαπλασιασμούς αυτή του Baek (1998).

Β. ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ (No choice conditions)

Οι δύο καταστάσεις μη επιλογής ακολούθησαν την κατάσταση επιλογής και υλοποιήθηκαν με δύο συνεντεύξεις. Εδώ, ο ερευνητής απεύθυνε προς τους μαθητές με την ίδια διαδικασία όπως στην κατάσταση επιλογής τις ίδιες πράξεις με διαφορετική σειρά. Την πρώτη φορά τους κάλεσε να λύσουν τις πράξεις χρησιμοποιώντας μόνο τις ολιστικές στρατηγικές.

Στο δεύτερο μέρος της συνέντευξης ο ερευνητής απεύθυνε προς τους μαθητές ξανά τις ίδιες πράξεις με διαφορετική σειρά κάτω όμως από μία νέα οδηγία. Εδώ, οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν με μία στρατηγική διαφορετική από τις ολιστικές στρατηγικές.

Αυτό που καταγράφηκε ουσιαστικά με τις δύο συνεντεύξεις των καταστάσεων μη επιλογής είναι η αποτελεσματικότητα και η ταχύτητα των μαθητών στους νοερούς υπολογισμούς όταν υπολογίζουν με τις ολιστικές στρατηγικές και όταν υπολογίζουν με μία διαφορετική στρατηγική.

4.4.1 Μέτρηση της ευελιξίας

Με την πρώτη συνέντευξη, την κατάσταση επιλογής, ελέγχθηκε η χρήση των ολιστικών στρατηγικών σε όλες τις πράξεις. Ελέγχθηκε, δηλαδή, αν οι μαθητές έλαβαν υπόψη τους τα χαρακτηριστικά των αριθμών ολιστικά (ψηφία των μονάδων κοντά σε δεκάδα, π.χ. 39+27) και αν επέλεξαν ή όχι να υπολογίσουν με ολιστική στρατηγική. Κάθε χρήση της ολιστικής στρατηγικής σημειώνονταν με σκορ «1». Όταν ένας μαθητής χρησιμοποιούσε μία διαφορετική στρατηγική ή δε φανέρωνε ποια στρατηγική επέλεγε σημειώνονταν σκορ «0». Έτσι προέκυψαν τρία σκορ για κάθε μαθητή. Ένα για κάθε πράξη ξεχωριστά (0-1), ένα για κάθε ομάδα πράξεων (0-5) και ένα για το σύνολο των πράξεων (0-15).

Το σκορ της ευελιξίας 2 καταγράφηκε με τον εξής τρόπο: Πρώτα εντοπίστηκαν οι περιπτώσεις εκείνες όπου οι μαθητές απάντησαν σωστά στην ίδια πράξη και στις δύο καταστάσεις μη επιλογής. Δηλαδή, βρήκαν το σωστό αποτέλεσμα και χρησιμοποιώντας μία ολιστική στρατηγική (στην κατάσταση μη επιλογής 1) και μία διαφορετική από ολιστική στρατηγική (στην κατάσταση μη επιλογής 2). Μετά ελεγχθήκαν οι χρόνοι απάντησης των δύο σωστών υπολογισμών. Καταγράφηκε δηλαδή ποια στρατηγική από τις δύο που χρησιμοποιήθηκαν έδωσε σωστό αποτέλεσμα πιο γρήγορα. Τέλος, ελέγχθηκε εάν στην κατάσταση επιλογής χρησιμοποίησαν οι μαθητές στην ίδια πράξη την πιο γρήγορη στρατηγική από αυτές που χρησιμοποίησαν σωστά στις καταστάσεις μη επιλογής. Σε θετική περίπτωση σημειώνονταν σκορ: 1. Σε αντίθετη περίπτωση το σκορ ήταν 0. Έτσι προέκυψε και ο μέσος όρος ευελιξίας 2 των μαθητών (0-100%) και σκορ (0-1) για κάθε μία πράξη ξεχωριστά, σκορ 0-5 για τις ομάδες των πράξεων και σκορ 0-15 για το σύνολο των πράξεων.

5 ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για τον έλεγχο πιθανών διαφοροποιήσεων των μέσων όρων χρήσης των ολιστικών και κατάλληλων στρατηγικών χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση διακύμανσης με επαναλαμβανόμενες μετρήσεις ANOVA (repeated measures). Στην ανάλυση συμπεριλήφθηκε ως between-subject ο παράγοντας φύλο και ως within-subjects οι μέσοι όροι των ειδών των στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές στην κατάσταση/συνθήκη όπου αυτοί επέλεγαν ελεύθερα στρατηγική [2(φύλο: κορίτσι, αγόρι) x 2(στρατηγική: κατάλληλη στρατηγική, μη κατάλληλη στρατηγική)].

ΠΙΝΑΚΑΣ 2: Οι δύο τύποι ευελιξίας

Πράξεις	ΕΥΕΛΙΞΙΑ 1		ΕΥΕΛΙΞΙΑ 2	
	ΜΟ	ΤΑ	ΜΟ	ΤΑ
Προσθέσεις	11.03	26.41	24.84	23.44
Αφαιρέσεις	15.78	28.13	12.56	20.01
Πολλ/σμοί	06.19	18.10	05.92	14.11
ΣΥΝΟΛΟ	11.04	19.57	14.42	14.00

Όπως προέκυψε από την ανάλυση, η ευελιξία των μαθητών του δείγματος κινείται σε χαμηλά επίπεδα και στις τρεις ομάδες πράξεων που εξετάστηκαν. Αυτό ισχύει και για τη χρήση των ολιστικών στρατηγικών και για τη χρήση των πιο κατάλληλων στρατηγικών (Ευελιξία1: Συνολικός ΜΟ= 11.04, ΤΑ=19.57, Ευελιξία2: Συνολικός ΜΟ=14.42, ΤΑ=14.01). Οι μαθητές, όσο αφορά τη χρήση των ολιστικών στρατηγικών δείχνουν μεγαλύτερη ευελιξία στις αφαιρέσεις (ΜΟ=15.78, ΤΑ=28.13), μετά στις προσθέσεις (ΜΟ=11.03, ΤΑ=26.41) και μετά στους πολλαπλασιασμούς

(ΜΟ=6.19, ΤΑ=18.09). Όσο αφορά τη χρήση των κατάλληλων στρατηγικών οι μαθητές δείχνουν μεγαλύτερη ευελιξία πρώτα στις προσθέσεις (ΜΟ=24.84, ΤΑ=23.44), μετά στις αφαιρέσεις (ΜΟ=12.56, ΤΑ=20.09) και μετά στους πολλαπλασιασμούς (ΜΟ=5.92, ΤΑ=14.11). Η σύγκριση των δύο τύπων της ευελιξίας ανά ομάδα πράξεων έδειξε να υπάρχει σημαντική διαφορά των μέσων όρων (t=-2.472, df=222, p<.005), ενώ για τις ομάδες πράξεων μόνο στις προσθέσεις παρατηρείται σημαντική διαφορά των μέσων όρων (t=-6.104, df=222, p<.001).

Όλες οι μέσες επιδόσεις των μαθητών στη χρήση των ολιστικών και των κατάλληλων στρατηγικών ανά ομάδα πράξεων παρουσιάζουν σημαντική συσχέτιση μεταξύ τους (ps<.001). Η χρήση των ολιστικών και των κατάλληλων στρατηγικών διαφέρει σημαντικά μεταξύ των πράξεων. Οι μαθητές χρησιμοποιούν πιο συχνά τις ολιστικές στρατηγικές πρώτα στις αφαιρέσεις, μετά στις προσθέσεις και τέλος στους πολλαπλασιασμούς. Αντίθετα οι μαθητές χρησιμοποιούν τις κατάλληλες στρατηγικές πρώτα στις προσθέσεις, μετά στις αφαιρέσεις και τέλος στους πολλαπλασιασμούς. Η σύγκριση των μέσων επιδόσεων των μαθητών και στη χρήση των ολιστικών στρατηγικών και στη χρήση των κατάλληλων στρατηγικών για τις ομάδες των πράξεων έδειξε να υπάρχει σημαντική διαφορά (ps<.001). Το φύλο δεν επηρεάζει την ευελιξία των μαθητών.

Με την ιεραρχική ανάλυση παλινδρόμηση (regression analysis) ελέγχθηκε ο βαθμός πρόβλεψης των κοινωνικών μεταβλητών που καταγράφηκαν επί των δύο τύπων ευελιξίας που αποτυπώθηκαν στην έρευνα. Οι δύο τύποι της ευελιξίας χρησιμοποιήθηκαν στην ανάλυση ως εξαρτημένες μεταβλητές.

Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης φαίνεται ότι καμία μεταβλητή του μορφωτικού-οικονομικού παράγοντα της οικογένειας δεν μπορεί να ερμηνεύσει τη χρήση των ολιστικών στρατηγικών ούτε στο σύνολο των πράξεων (R^2= .010, F=.539, p>.05), ούτε ανά ομάδα πράξεων (R^2= .013-.039, F=.358-1.090, ps>.05). Επίσης, καμία μεταβλητή των παραγόντων της εμπλοκής των γονέων δεν μπορεί να ερμηνεύσει τη χρήση των ολιστικών στρατηγικών ούτε στο σύνολο των πράξεων (R^2= .014, F=.510, p>.05), ούτε ανά ομάδα πράξεων (R^2= .008-.015, F=.300-.558, ps>.05).

Αυτό σημαίνει ότι ούτε το μορφωτικό επίπεδο των γονέων, ούτε το επίπεδο δεξιοτήτων του επαγγέλματος των γονέων, ούτε και το βιοτικό επίπεδο της οικογένειας, αλλά ούτε και η εμπλοκή των γονέων δεν επιδρούν στη διαμόρφωση της ευελιξίας των μαθητών, όσο αφορά την ικανότητά τους να χρησιμοποιούν τις ολιστικές στρατηγικές σε πράξεις που επιλύονται πιο εύκολα με τις στρατηγικές αυτές.

Όσο αφορά τη χρήση των κατάλληλων στρατηγικών (ευελιξία 2), αυτό που διαπιστώνεται είναι ότι για το σύνολο των πράξεων οι μεταβλητές «υψηλό μορφωτικό επίπεδο πατέρα» και «χαμηλό βιοτικό επίπεδο οικογένειας» μπορούν να προβλέψουν τη χρήση των κατάλληλων στρατηγικών (ευελιξία 2) από τους μαθητές (R^2=.124). Πιο συγκεκριμένα το υψηλό μορφωτικό επίπεδο του πατέρα διαμορφώνει το 10% της ευελιξίας2 (R=.325, R^2=.105, p<.001), ενώ το χαμηλό βιοτικό επίπεδο διαμορφώνει επιπλέον 2% της ευελιξίας2 (R=.352, R^2=.124, p<.005). Η επίδραση του χαμηλού βιοτικού επιπέδου είναι αρνητική (β=-.041, t=-2.184, p<.005). Καμία άλλη

μεταβλητή του μορφωτικού-οικονομικού παράγοντα δεν μπορεί να προβλέψει τη χρήση των κατάλληλων στρατηγικών για το σύνολο των πράξεων (όλα τα *ps*>.005). Όσο αφορά την εμπλοκή των γονέων αυτό που διαπιστώνεται είναι ότι για το σύνολο των πράξεων η μεταβλητή «χαμηλό επίπεδο επικοινωνίας γονέων-μαθητών» μπορεί να προβλέψει τη χρήση των κατάλληλων στρατηγικών (ευελιξία 2) από τους μαθητές (R^2=.025). Πιο συγκεκριμένα το χαμηλό επίπεδο επικοινωνίας γονέων-μαθητών διαμορφώνει το 2% της ευελιξίας 2 (R=.159, R^2=.025, p<.005). Η επίδραση της μεταβλητής αυτής είναι αρνητική (β=-.159, t=-2.359, p<.005). Καμία άλλη μεταβλητή του παράγοντα εμπλοκή γονέων δεν μπορεί να προβλέψει τη χρήση των κατάλληλων στρατηγικών για το σύνολο των πράξεων (όλα τα *ps*>.005).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα η χρήση των ολιστικών στρατηγικών δεν επηρεάζεται από κανέναν οικογενειακό παράγοντα που εξετάσαμε. Αντίθετα, η χρήση των πιο κατάλληλων στρατηγικών (γρήγορων και αποτελεσματικών) επηρεάζεται από οικογενειακούς παράγοντες όπως το επίπεδο επικοινωνίας γονέων-μαθητών, το βιοτικό επίπεδο της οικογένειας και το μορφωτικό επίπεδο του πατέρα. Επίσης σημαντικό είναι το εύρημα, ότι κανένας τύπος της ευελιξίας δεν επηρεάζεται από το φύλο.

Οι νοεροί υπολογισμοί και η ευέλικτη χρήση αυτών είναι μία λειτουργία που δεν έρχεται εύκολα στην επιφάνεια. Οι γονείς βοηθούν στην ανάπτυξη της ευελιξίας των παιδιών άτυπα, χωρίς ούτε οι ίδιοι να το καταλαβαίνουν όταν στο σπίτι διατηρούν ένα καλό κλίμα επικοινωνίας με τα παιδιά τους. Η μεγαλύτερη συμβολή τους στην ανάπτυξη των ικανοτήτων επιλογής γίνεται όταν αυτοί συζητούν με τα παιδιά τους για διάφορα θέματα του σχολείου ή και εκτός σχολείου. Όταν παροτρύνουν τα παιδιά να μιλούν για θέματα που τους απασχολούν και τα προβληματίζουν. Τα παιδιά που ζουν σε ένα ανοιχτό περιβάλλον αναπτύσσουν ικανότητες αξιολόγησης των ικανοτήτων και των γνώσεών τους, δε διστάζουν να δοκιμάζουν. Συνήθως ανάλογο περιβάλλον αναπτύσσεται σε οικογένειες με υψηλό μορφωτικό επίπεδο γονέων, ανεξαρτήτου επαγγέλματος, και για αυτό η έρευνα ανέδειξε το υψηλό μορφωτικό επίπεδο του πατέρα ως σημαντικό παράγοντα επίδρασης της ευελιξίας στη χρήση των κατάλληλων στρατηγικών. Ως αποτέλεσμα έρχεται η ανάπτυξη της ικανότητας για επιλογή και σίγουρη χρήση των κατάλληλων στρατηγικών ανά περίπτωση. Το σχολείο θα πρέπει να ενθαρρύνει τους γονείς να είναι ανοιχτοί απέναντι στις ιδέες των παιδιών. Είτε μέσα από επιστολές, είτε μέσα από συναντήσεις με τους εκπαιδευτικούς του σχολείου θα πρέπει να παροτρύνονται πρώτα να ακούν τα παιδιά τους. Μετά να μην περιορίζονται μόνο σε εξάσκηση των παιδιών τους σε τυπικούς γραπτούς αλγόριθμους. Να θέτουν προβλήματα μέσα από την καθημερινότητα και να ζητούν από τα παιδιά να σχολιάζουν και να αξιολογούν κάθε λύση ή απάντηση σε προβλήματα και ασκήσεις που εκτελούν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Baek, J. (1998). Children's invented algorithms for multi-digit multiplication problems. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.). The teaching and learning of algorithms in school mathematics (pp. 151-160). Reston, VA: NCTM.

Cooper, T. J., Heirdsfield, A. M., Irons, C. J. (1996). Children's mental strategies for addition and subtraction word problems. In: J. Mulligan & M. Mitchelmore (Eds.), *Children's number learning* (pp. 147-162). Adelaide, SA: Australian Association of Mathematics Teachers, Inc.

Ellis, S. (1997). Strategy choice in sociocultural context. *Development Review*, *17*, 490-524.

Epstein, J., L. (1989). Family structures and student motivation: A development perspective. In C. Ames and R. Ames (Eds.), *Research on motivation: Goals and cognitions* (pp. 259-295). San Diego, CA: Academic Press.

Ewing, B. F. (2005). Children on the margins: The effect of social background on Mathematics learning in early childhood. In Proceedings Early Childhood Australia Biennial Conference, Brisbane.

Heirdsfield A. M. & Cooper T. J. (2002). Flexibility and inflexibility in accurate mental addition and subtraction: two case studies. Journal of Mathematical Behavior 21(2002) 57-74

Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to Children's Learning of Multiplication. Journal of Experimental Psychology: General, 124, 83-97.

Λεμονίδης, Χ., Χατζηλιαμή, Μ., Κυρίδης, Α., (2002). Η επίδραση του οικογενειακού περιβάλλοντος στις αριθμητικές γνώσεις των νηπίων. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*. 34/2002, σελ. 121-139, Ατραπός

Lemonidis, Ch., Ligouras G. (2009). The effect of social background on third grade pupils' mental calculations. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8*(2), 81-100.

Lerman, S. (1994). Changing focus in the mathematics classroom. In: S. Lerman (Eds), *Cultural perspectives in the mathematics classroom, p.p. 191-213*, Kluwer Academic Publishers.

McIntosh, A., & Dole, S. (2005). *Mental computation: A strategies approach.* Hobart: Department of Education, Tasmania.

Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General, 126*, 71-92

Star, J. R., & Seifert, C. (2006). *The development of flexibility in equation solving.* Contemporary Educational Psychology 31, 280–300.

Torbeyns, J., Ghesquiere, P., & Verschaffel, L. (2009). Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit subtraction. *Learning and Instruction 19*(2009) 1-2.

Verschaffel., L., Torbeyns, J., De Smedt, B., Luwel, K., & Van Dooren, W. (2007). Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. *Educational and Child Psychology, 24*(2), 16-27.

ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΕ ΝΟΕΡΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΜΕ ΡΗΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Λεμονίδης Χαράλαμπος[1], Κερμελή Αλεξάνδρα[2]

[1]Καθηγητής Διδακτικής Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

[2]Μεταπτυχιακή φοιτήτρια, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

[1]xlemon@uowm.gr, [2]alexia.k06@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη παρούσα εργασία εξετάζονται και αναλύονται οι συμπεριφορές τριών εκπαιδευτικών πριν και μετά μια πειραματική διδασκαλία σε νοερούς υπολογισμούς ρητών αριθμών στην Στ΄ τάξη του Δημοτικού. Βασικός στόχος της έρευνας αυτής είναι να εξεταστεί αν οι αντιλήψεις και η διδακτική αντιμετώπιση των εκπαιδευτικών αλλάζουν μετά την παρακολούθηση μιας επιμόρφωσης με θέμα τους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς και την υλοποίηση πειραματικών διδασκαλιών στη λογική της επιμόρφωσης. Τα συμπεράσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί δεν γνώριζαν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται για την επίλυση νοερών πράξεων με ρητούς αριθμούς και θεωρούσαν ότι μόνο οι καλοί μαθητές μπορούν να εκτελέσουν τέτοιες πράξεις.

Λέξεις- κλειδιά: *νοεροί υπολογισμοί με ρητούς αριθμούς, αντιλήψεις εκπαιδευτικών, διδακτική αντιμετώπιση, επιμόρφωση*

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν ένα διδακτικό αντικείμενο που πολλοί εκπαιδευτικοί βρίσκουν δύσκολο να κατανοήσουν και να διδάξουν (Ma, 1999; Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993 όπως αναφέρεται από τους Clarke & Roche, 2009). Σύμφωνα με την Caney (2004), οι εκπαιδευτικοί προωθούν την νοερή εργασία με ρητούς αριθμούς σε μικρότερο βαθμό σε σύγκριση με τους ακέραιους αριθμούς. Μάλιστα, η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών με ρητούς αριθμούς τις περισσότερες φορές λαμβάνει τη μορφή κατευθυνόμενης διδασκαλίας μιας ποικιλίας στρατηγικών νοερών υπολογισμών από τους εκπαιδευτικούς (Mc Intosh, A., et al., 1995). Ακόμη, οι Caney & Watson (2003) & Mc Intosh et al. (1995) αναφέρουν ότι πολλοί μαθητές δηλώνουν ότι δεν ρωτούνται ποτέ να εκφράσουν τον τρόπο που επιλύουν ένα πρόβλημα στην τάξη, κάτι που υποδηλώνει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν τα οφέλη της μεταγνωστικής διαδικασίας του αναστοχασμού των μαθητών και δεν τους υποβάλλουν σε αυτή τη διαδικασία. Η Caney (2004) αναφέρει ότι πολλοί μαθητές δεν συνειδητοποιούν πότε οι εκπαιδευτικοί τους ζητούν να ασχοληθούν με νοερά

μαθηματικά στην τάξη. Ενώ οι εκπαιδευτικοί ισχυρίζονται ότι αφιερώνουν χρόνο στη διδασκαλία τους για τους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς, οι περισσότεροι μαθητές δεν το αντιλαμβάνονται.

Ιδιαίτερη αναφορά αξίζει να γίνει στο γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν τις στρατηγικές, τα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών τους στο διδακτικό αντικείμενο των ρητών αριθμών. Σύμφωνα με τους Clarke & Roche (2009), οι δάσκαλοι της Αυστραλίας δεν γνωρίζουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές τους. Μάλιστα, μια πληθώρα εκπαιδευτικών αδυνατεί να χρησιμοποιήσει νοερές εννοιολογικές στρατηγικές. Για παράδειγμα, πολλοί από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς δεν είναι σε θέση να προτείνουν μια πιθανή εναλλακτική στρατηγική για τη σύγκριση των κλασμάτων ¾ και 7/9 εκτός των κοινών παρονομαστών. Ενώ μια μερίδα μαθητών έχει εννοιολογική κατανόηση του μεγέθους των κλασμάτων και χρησιμοποιεί εννοιολογικές στρατηγικές όπως η σκέψη υπολοίπου (residual thinking), και *το σημείο αναφοράς* (benchmarks), οι στρατηγικές αυτές δεν χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς στα σχολεία (Clarke & Roche, 2009). Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί καταφεύγουν σε διαδικαστικές παρά σε εννοιολογικές στρατηγικές (Huang, Liu & Lin, 1990). Τέλος, οι εκπαιδευτικοί δεν είναι ενήμεροι των παρανοήσεων των μαθητών όσον αφορά τους ρητούς αριθμούς και στις εξηγήσεις τους προς τους μαθητές είναι πολύ γενικοί ή επιμένουν στην εφαρμογή διαδικαστικών στρατηγικών εις βάρος της εννοιολογικής κατανόησης (Stacey, Helme, Steinle, Baturo, Irwin, Bana, 2001 όπως αναφέρεται από τους Steinle & Stacey, 2004).

2. Η ΕΡΕΥΝΑ

Ο σκοπός της παρούσας έρευνας έγκειται στην διερεύνηση των αντιλήψεων και της διδακτικής προσέγγισης των νοερών υπολογισμών στους ρητούς αριθμούς τριών εκπαιδευτικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης του νομού Λάρισας πριν και μετά την επιμόρφωση και την πειραματική διδασκαλία. Η διερεύνηση αυτή έχει ως στόχο να δώσει απάντηση στα εξής ερωτήματα:

- Ποιες είναι οι αντιλήψεις των τριών εκπαιδευτικών της ΣΤ΄ Δημοτικού ως προς την σπουδαιότητα των νοερών υπολογισμών στους ρητούς αριθμούς και ποια η διδακτική τους προσέγγιση στην τάξη;
- Πώς οι αντιλήψεις των τριών εκπαιδευτικών της ΣΤ΄ Δημοτικού και η διδακτική προσέγγιση των νοερών υπολογισμών με ρητούς αριθμούς τροποποιούνται μετά την επιμόρφωση, το σχεδιασμό και την υλοποίηση των διδασκαλιών τους στην τάξη;

2.1. Μεθοδολογία

Ερευνητική μέθοδος

Η ερευνητική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε είναι η έρευνα δράσης. Στόχος μας ήταν η αλλαγή των αρχικών αντιλήψεων και της διδακτικής αντιμετώπισης των νοερών υπολογισμών στους ρητούς αριθμούς μετά την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και τη διδασκαλία στις τάξεις τους.

Δείγμα

Το δείγμα της έρευνας μας αποτελούν τρεις εκπαιδευτικοί της ΣΤ΄ Δημοτικού του νομού Λάρισας. Οι συγκεκριμένες εκπαιδευτικοί διδάσκουν για πρώτη χρονιά στην ΣΤ΄ Δημοτικού και έχουν 11, 18 και 22 χρόνια υπηρεσίας η καθεμία αντίστοιχα. Οι εκπαιδευτικοί αυτοί δεν έχουν επιμορφωθεί στην διδασκαλία των ρητών αριθμών αλλά δηλώνουν ανοιχτές στην τροποποίηση των στάσεων και του τρόπου διδασκαλίας των ρητών αριθμών. Οι ίδιες εκτιμούν τις γνώσεις τους στο διδακτικό αντικείμενο των νοερών υπολογισμών στους ρητούς αριθμούς ως αρκετά καλή (εκπαιδευτικός 2) και πολύ καλή (εκπαιδευτικός 1 και 3[1]). Η επιλογή των τριών εκπαιδευτικών έγινε ανάμεσα σε εκπαιδευτικούς που ρωτήθηκαν και δήλωσαν ότι θέλουν να συμμετάσχουν στη διαδικασία έρευνας και επιμόρφωσης. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι η επιλογή τους δεν είναι τυχαία αλλά αντιπροσωπεύουν εκπαιδευτικούς με ενδιαφέρον για τη δουλειά τους και ανοιχτές σε διδακτικές καινοτομίες.

Ερευνητική Διαδικασία και Επιμόρφωση

Η ερευνητική διαδικασία πραγματοποιείται σε 4 στάδια. Σε **πρώτο στάδιο** πραγματοποιήθηκαν προσωπικές συνεντεύξεις σε κάθε εκπαιδευτικό που διήρκησαν 25 λεπτά (με καθεμιά από τις Εκπαιδευτικούς 1 και 2) και 40 λεπτά με την Εκπαιδευτικό 3, όταν ξεκινούσαν τη διδασκαλία των ρητών αριθμών και συγκεκριμένα των κλασματικών αριθμών. Σε **δεύτερο στάδιο**, πραγματοποιήθηκε επιμόρφωση των τριών εκπαιδευτικών, οι άξονες της οποίας παρουσιάζονται παρακάτω. Η επιμόρφωση διήρκησε 2 ώρες, έγινε ατομικά σε κάθε εκπαιδευτικό εκτός σχολικού χώρου και πραγματοποιήθηκε πριν τις διακοπές των Χριστουγέννων ούτως ώστε οι εκπαιδευτικοί να έχουν αρκετό χρόνο στις διακοπές να μελετήσουν το επιμορφωτικό υλικό, να αναζητήσουν υλικό σε διάφορες πηγές και να σχεδιάσουν τις διδασκαλίες τους. Στο **τρίτο στάδιο**, που διήρκησε τρεις μήνες οι εκπαιδευτικοί σχεδίασαν και υλοποίησαν τις διδασκαλίες στην τάξη. Τέλος, στο **τέταρτο στάδιο** πραγματοποιήθηκαν προσωπικές συνεντεύξεις σε κάθε εκπαιδευτικό, που διήρκησαν 24 λεπτά (με καθεμιά από τις Εκπαιδευτικούς 2 και 3)[2], για την διερεύνηση της πιθανής αλλαγής των αντιλήψεων τους και της διδακτικής προσέγγισης των νοερών υπολογισμών με ρητούς αριθμούς καθώς και των αποτελεσμάτων της εφαρμογής στην τάξη προτάσεων που παρουσιάστηκαν στην επιμόρφωση.

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

[1] Δεν αναφέρονται τα ονόματα των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών στην έρευνα, αντί αυτού αναφέρουμε Εκπαιδευτικός 1, Εκπαιδευτικός 2 και Εκπαιδευτικός 3.
[2] Η Εκπαιδευτικός 1 προτίμησε να μην μαγνητοφωνηθεί η τελική συνέντευξη.

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με βάση τις απομαγνητοφωνήσεις των συνεντεύξεων και τις σημειώσεις της ερευνήτριας κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων που έγιναν στο πρώτο και τέταρτο στάδιο. Η ανάλυση των δεδομένων των προσωπικών συνεντεύξεων του πρώτου και τέταρτου σταδίου, έγινε με βάση κάποιες θεματικές περιοχές.

Οι άξονες της επιμόρφωση στους εκπαιδευτικούς

Η επιμόρφωση στους εκπαιδευτικούς επικεντρώθηκε κυρίως στα παρακάτω θέματα:

- *Η έννοια του νοερού υπολογισμού και διαφορές με το γραπτό αλγόριθμο*.

Διασαφηνίστηκε η έννοια του νοερού υπολογισμού και η σχέση των νοερών υπολογισμών και των γραπτών αλγορίθμων.

- *Συμβολή των νοερών υπολογισμών με ρητούς στην κατανόηση των αριθμών και πράξεων.*

Τονίστηκε και έγινε κατανοητό στους εκπαιδευτικούς ότι μέσω των νοερών υπολογισμών στους ρητούς αριθμούς επιτυγχάνεται κατανόηση των πράξεων και των ρητών αριθμών που υπάρχουν στις πράξεις σε αντίθεση με ότι συμβαίνει στους γραπτούς αλγορίθμους όπου δεν υπάρχει κατανόηση.

- *Παρουσίαση των στρατηγικών και των λαθών των μαθητών*

Παρουσιάστηκαν και ονομάστηκαν οι διάφορες στρατηγικές που είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές όταν εκτελούν πράξεις με ρητούς αριθμούς. Παρουσιάστηκαν και αιτιολογήθηκαν τα συστηματικά λάθη, οι δυσκολίες και οι παρανοήσεις των μαθητών σύμφωνα με τα ερευνητικά δεδομένα.

- *Τρόπος διδασκαλίας και μεταγνωστική διαδικασία*

Τονίστηκε η σημασία τα χρήσης της μεταγνωστικής διαδικασίας κατά τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών, δηλαδή το να ζητείται από τους μαθητές να μιλήσουν και να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκαν. Τονίστηκε επίσης η αρχή του πλουραλισμού στις στρατηγικές, δηλαδή η αναγκαιότητα της παρουσίασης και αποδοχής όλων των στρατηγικών που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1. Απόψεις των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών στους ρητούς αριθμούς πριν την παρέμβαση

Οι τρεις εκπαιδευτικοί έκριναν ως πολύ σημαντική τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και εστίασαν σε διαφορετικά πλεονεκτήματα της. Συγκεκριμένα, η εκπαιδευτικός 1 τόνισε την εννοιολογική κατανόηση που προκύπτει από την

ενασχόληση με νοερούς υπολογισμούς, η εκπαιδευτικός 2 εστίασε στη χρησιμότητα των νοερών υπολογισμών με ρητούς αριθμούς στην καθημερινή ζωή, ενώ η εκπαιδευτικός 3 τόνισε την προοπτική απεξάρτησης των μαθητών από τη διεξαγωγή αλγορίθμων και την επίδραση των νοερών υπολογισμών στη σύνδεση των Μαθηματικών με την καθημερινή ζωή. Χαρακτηριστική είναι η απάντηση της εκπαιδευτικού 1. "*Θεωρώ πολύ σημαντική τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών. Θεωρώ ότι τα μαθηματικά αν δεν μπορείς να τα καταλάβεις νοερά μηχανικά δεν γίνονται, δεν έχεις καταλάβει τίποτα, αν απλά κάνεις τους αλγόριθμους χωρίς να έχεις καταλάβει τη σημασία της κάθε πράξης για ποιο λόγο γίνεται η πρόσθεση, για ποιο λόγο η αφαίρεση, πότε κάνουμε διαίρεση, και πως θα κάνω τη διαίρεση, τι σημαίνει διαίρεση, τι σημαίνει πολλαπλασιασμός, αν δεν δουλέψεις νοερά, δεν νομίζω ότι θα καταλάβεις τίποτα, θεωρώ λοιπόν πολύ σημαντική τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών.*"

Οι απόψεις των εκπαιδευτικών διαφοροποιήθηκαν ως προς την σημασία που αποδίδουν στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών σε αντιδιαστολή εκείνης των γραπτών αλγορίθμων και ως προς την σειρά διδασκαλίας τους στην πράξη. Η εκπαιδευτικός 1 κρίνει σημαντικότερη την διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και υποστηρίζει ότι θα πρέπει να προηγείται της διδασκαλίας των γραπτών αλγορίθμων. Η εκπαιδευτικός 2 υποστηρίζει μια συγκεκριμένη πορεία διδασκαλίας, δηλαδή την διδασκαλία των νοερών υπολογισμών πριν την διδασκαλία των γραπτών αλγορίθμων, χωρίς ωστόσο να υποστηρίζει ξεκάθαρα τι θεωρεί πιο σημαντικό γνωστικά για τους μαθητές. Τέλος, η εκπαιδευτικός 3 κρίνει ως ισότιμης σημασίας τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και των γραπτών αλγορίθμων, ωστόσο υποστηρίζει ότι θα πρέπει να εισάγεται πρώτα ο γραπτός υπολογισμός και μετά ο νοερός υπολογισμός, προβάλλοντας το εξής επιχείρημα: «*Πρώτα χρειάζεται η θεωρία και αφού την έχουν καταλάβει, χρειάζεται να τους δείξουμε έξυπνους τρόπους*». Τέλος, οι εκπαιδευτικοί 1 και 2 πιστεύουν ότι το σχολικό βιβλίο δεν βοηθά στην προσέγγιση των νοερών υπολογισμών στους ρητούς αριθμούς, ενώ η εκπαιδευτικός 3, κρίνει ότι το βιβλίο του δασκάλου εστιάζει στα λάθη και σε στρατηγικές των μαθητών ενώ παράλληλα τονίζει και το ρόλο της προσωπικής έρευνας του εκπαιδευτικού στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών.

3.2. Διδακτική προσέγγιση των νοερών υπολογισμών με ρητούς αριθμούς πριν την επιμόρφωση

Από τις δηλώσεις των εκπαιδευτικών φαίνεται ότι αυτές διδάσκουν με διαφορετικό τρόπο την προσέγγιση των νοερών υπολογισμών με ρητούς αριθμούς. Η εκπαιδευτικός 1, δηλώνει ότι τον περισσότερο χρόνο τον αφιερώνει στους νοερούς υπολογισμούς και προσπαθεί κυρίως να οπτικοποιεί τα προβλήματα. Αφιερώνει περισσότερο χρόνο στην κατανόηση και λιγότερο στους αλγορίθμους. Η εκπαιδευτικός 2, απαντά "*στη διδασκαλία μου εισάγω τους νοερούς υπολογισμούς πριν τους γραπτούς αλγορίθμους. Αφιερώνω χρόνο σε εβδομαδιαία βάση και όχι*

καθημερινά. Συνήθως, προτείνω στους μαθητές μου να σκέφτονται νοερά με κάποια δικά μου παραδείγματα που δίνω εκτός σχολικού εγχειριδίου."

Η εκπαιδευτικός 3, σύμφωνα με αυτά που λέει θεωρεί ότι διδάσκει τους νοερούς υπολογισμούς όταν δίνει εξηγήσεις με μικρούς αριθμούς σε σημεία του γραπτού αλγόριθμου. Και οι τρεις εκπαιδευτικοί ως υλικό χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις του βιβλίου ή άλλων βιβλίων και πηγών (π.χ. διαδίκτυο), αναπαραστάσεις στον πίνακα και πράγματα της καθημερινής ή σχολικής ζωής. Οι εκπαιδευτικοί 2 και 3 κάνουν αναφορά στη χρήση της αριθμογραμμής. Ενδιαφέρον είναι ότι και οι τρεις εκπαιδευτικοί δηλώνουν ότι δεν χρησιμοποιούν τον υπολογιστή και κάποιο λογισμικό στη διδασκαλία τους λόγω υλικοτεχνικών δυσκολιών ενώ κατανοούν τη χρησιμότητα της χρήσης της τεχνολογίας.

3.3. Εκτίμηση από τους εκπαιδευτικούς της συμπεριφοράς των μαθητών

Οι εκπαιδευτικοί ρωτήθηκαν να εκτιμήσουν αν η πλειοψηφία των μαθητών σε μια τυπική σχολική τάξη είναι σε θέση να αναπτύξει νοερές στρατηγικές στην επίλυση προβλημάτων με ρητούς αριθμούς. Σύμφωνα με τις απαντήσεις τους φαίνεται ότι θεωρούν δύσκολες τις νοερές πράξεις και υποθέτουν ότι δεν θα μπορέσει να ανταποκριθεί η πλειοψηφία των μαθητών αλλά μόνο οι καλοί μαθητές.

Ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να αναφέρουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές στα κλάσματα, στους δεκαδικούς αριθμούς και στα ποσοστά. Η μια εκπαιδευτικός δηλώνει ότι δεν θυμάται, οι άλλες δύο αναφέρουν ότι στους δεκαδικούς αριθμούς οι μαθητές δουλεύουν όπως στους ακεραίους. Μια χαρακτηριστική δήλωση της εκπαιδευτικού 2 είναι η εξής: "*Για παράδειγμα, όταν προσθέτουν το 0,15 και 0,25, έρχονται στο μυαλό τους οι ακέραιοι, προσθέτουν τους ακέραιους 15 και 25 για να βρουν το παραπάνω άθροισμα, υπολογίζουν τα ψηφία μετά την υποδιαστολή και έτσι τοποθετούν σωστά την υποδιαστολή*." Η εκπαιδευτικός 2 δηλώνει επίσης ότι: "*Στα κλάσματα, οι μαθητές μου υπολογίζουν τι διαφορά έχει ο αριθμητής από τον παρονομαστή σε κάθε κλάσμα*." χωρίς να σχολιάζει ότι δεν είναι μια μέθοδος που ισχύει πάντα για τη σύγκριση των κλασμάτων και διαφαίνεται ότι τη θεωρεί σωστή. Η εκπαιδευτικός 3 δηλώνει επιπλέον ότι τα ετερώνυμα κλάσματα οι μαθητές τα μετατρέπουν σε δεκαδικούς και κάνουν τις πράξεις. Από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών μπορούμε να καταλάβουμε ότι δεν γνωρίζουν γενικά τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν υπολογίζουν με ρητούς εκτός από την αναφορά στους δεκαδικούς αριθμούς που έκαναν οι δύο εκπαιδευτικοί.

Στην ερώτηση ποια λάθη των μαθητών γνωρίζουν στα κλάσματα, τους δεκαδικούς και τα ποσοστά και πως τα ερμηνεύουν οι τρεις εκπαιδευτικοί απάντησαν με διαφορετικούς τρόπους και κάθε μια αναφέρθηκε αποσπασματικά σε κάποια λάθη και δυσκολίες των μαθητών. Η εκπαιδευτικός 1 αναφέρθηκε στο ότι οι μαθητές συχνά δεν μετατρέπουν τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα και προσθέτουν αριθμητές με παρονομαστές. Για τους δεκαδικούς αριθμούς είπε ότι οι μαθητές δεν

προσέχουν την αξία ψηφίου. Η δασκάλα αυτή επισημαίνει ότι: "*Νοερά σε καμιά περίπτωση δεν κάνουν διαίρεση με δεκαδικούς αριθμούς. Επίσης φυσικούς αριθμούς πολλά παιδιά κάνουν νοερά υπολογισμούς, αλλά επίσης δεκαδικούς όχι. Στη διαίρεση κλασμάτων δυσκολεύονται αλλά νοερούς υπολογισμούς γενικά στην πρόσθεση, στη διάταξη, στη σύγκριση και στην αφαίρεση μπορούν να κάνουν.*» Η εκπαιδευτικός 2 επισημαίνει τα εξής λάθη: " *… μπερδεύουν δηλαδή το 1/5 με το 1, η κλασματική μονάδα νομίζουν ότι είναι ο αριθμός 1. Επίσης δεκαδικούς αριθμούς μπερδεύουν το 0,4 και το 0,40 και νομίζουν ότι είναι διαφορετικά μεταξύ επίσης. Ακόμη, μεταξύ δύο δεκαδικών αριθμών επίσης το 1,4 και το 1,5 πιστεύουν ότι δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί ανάμεσα επίσης.*" Η εκπαιδευτικός 3 κάνει νύξη για την γενική δυσκολία στην κατανόηση του κλάσματος και για το ότι επίσης δεκαδικούς αριθμούς όταν πολλαπλασιάζεις μικραίνει, χωρίς να επεκτείνεται περισσότερο και να το αναλύει.

Για να φανεί συγκεκριμένα ποιες στρατηγικές γνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί τέθηκε η εξής ερώτηση: *Ποιες είναι οι πιθανές στρατηγικές που θα χρησιμοποιούσαν οι μαθητές αν τους ζητούσαμε να υπολογίσουν νοερά τις παρακάτω πράξεις: α) 1-1/4, β) ½:1/4, γ) συγκρίνω το κλάσμα 3/7 και 5/8 και δ) βρίσκω το 90% του 40.*

Για την πρώτη ερώτηση 1-1/4 προτάθηκαν οι παρακάτω τρεις στρατηγικές:

1. Μετατρέπουν το 1 σε 4/4 και αφαιρούν από αυτό το ¼.
2. Σκέφτονται ένα γεωμετρικό σχήμα από το οποίο βγάζουν το ¼.
3. Σκέφτονται το 1 σαν 100, μοιράζουν το 100 σε 4 μέρη και αφαιρούν με αυτόν τον τρόπο.

Η εκπαιδευτικός 1 πρότεινε τις στρατηγικές 1 και 2, η εκπαιδευτικός 2 τις 2 και 3 και η εκπαιδευτικός 3 μόνο τη στρατηγική 1.

Για την ερώτηση β) ½:1/4 η εκπαιδευτικός 1 δήλωσε ότι είναι πολύ δύσκολο μόνο με τον αλγόριθμο θα το καταλάβαιναν, η εκπαιδευτικός 2 είπε: "*θα έπαιρναν μια μονάδα και θα την μοίραζαν στη μέση και μετά θα την ξαναμοίραζαν στη μέση*" κάτι που είναι λάθος και η εκπαιδευτικός 3 δήλωσε: " *δεν ξέρω πρέπει να το κάνουμε πρώτα*". Στην πράξη αυτή της διαίρεσης μόνο η πρώτη εκπαιδευτικός προτείνει τον αλγόριθμο ενώ οι άλλοι δύο φαίνεται ότι δεν γνωρίζουν να λύσουν την άσκηση.

Για τη σύγκριση των κλασμάτων *3/7 και 5/8* προτάθηκαν συνολικά οι παρακάτω στρατηγικές: 1. Μετατροπή σε ομώνυμα και σύγκριση, 2. Μετατροπή σε δεκαδικούς. 3. Σύγκριση των δύο κλασμάτων με σημείο αναφοράς το ½.

Η εκπαιδευτικός 1 πρότεινε τις στρατηγικές 1 και 3, η εκπαιδευτικός 2 δηλώνει: "*θα έλεγαν ότι το 3 από το 7 απέχει περισσότερο από ότι το 5 από το 8*" κριτήριο το οποίο δεν είναι πάντοτε σωστό. Η εκπαιδευτικός 3 πρότεινε τις στρατηγικές 1 και 2.

Στην ερώτηση *"βρίσκω το 90% του 40"* η εκπαιδευτικός 1 δεν πρότεινε κάποια στρατηγική υπολογισμού, η εκπαιδευτικός 2 απαντά: "*θα έκαναν τον πολλαπλασιασμό στο μυαλό τους (4 x 9) και θα το έβρισκαν έτσι*" και η εκπαιδευτικός 3 απάντησε "δεν έχουμε κάνει τα ποσοστά και δεν ξέρω".

Σύμφωνα με τις παραπάνω απαντήσεις των εκπαιδευτικών παρατηρούμε ότι όχι μόνο δεν γνωρίζουν μια ποικιλία στρατηγικών αλλά σε ερωτήσεις όπως η διαίρεση κλασμάτων δεν γνωρίζουν τις σωστές απαντήσεις.

3.4. Επιρροή της παρέμβασης στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών. Αξιολόγηση της επιμόρφωσης.

Στην ερώτηση αν η επιμόρφωση κατάφερε να αλλάξει τις αρχικές αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για την σπουδαιότητα των νοερών υπολογισμών, η εκπαιδευτικοί 1 και 3 δήλωσαν ότι πάντοτε γνώριζαν την σπουδαιότητα των νοερών υπολογισμών και δεν άλλαξαν άποψη. Μόνο η εκπαιδευτικός 3 σημειώνει ότι "*Μετά την επιμόρφωση, όμως, στην πράξη είδα ότι οι νοεροί υπολογισμοί βοηθούν τους μαθητές*." Η εκπαιδευτικός 2 θεωρεί ότι άλλαξε αντιλήψεις μετά την παρέμβαση και συγκεκριμένα δηλώνει: "*Αναθεώρησα κάποιες αρχικές απόψεις μου, καθώς πίστευα ότι οι μαθητές κατανοούν όταν κάνουν τις πράξεις με χαρτί και μολύβι αλλά τελικά τροχίζει το μυαλό τους να σκεφτούν νοερά.*"

Οι τρεις εκπαιδευτικοί γενικά δηλώνουν ικανοποιημένοι από την επιμόρφωση. Η εκπαιδευτικός 3 δηλώνει ότι δεν έχει να παρατηρήσει τίποτα, ενώ η εκπαιδευτικός 1 λέει: "*Θα ήθελα να δοθεί περισσότερη έμφαση στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές και στα λάθη που κάνουν και λιγότερη στο θεωρητικό μέρος*" η εκπαιδευτικός 2 επίσης θα επιθυμούσε περισσότερα παραδείγματα στρατηγικών σύμφωνα με το επίπεδο των μαθητών.

Η εκπαιδευτικός 1 δηλώνει ότι η επιμόρφωση που πραγματοποιήθηκε την βοήθησε να εμπλουτίσει τις γνώσεις της για τον τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές, τα λάθη που κάνουν και για τις στρατηγικές που θα μπορούσε να εφαρμόσει στην τάξη. Η εκπαιδευτικός 2 αναφέρει ότι βοηθήθηκε μέσω των παραδειγμάτων και των ασκήσεων και η εκπαιδευτικός 3 αναφέρει ότι η επιμόρφωση της πρόσφερε την επιστημονική βεβαιότητα ότι οι νοεροί υπολογισμοί βοηθούν τους μαθητές στην κατανόηση των ρητών αριθμών.

3.5. Διδακτική παρέμβαση μετά την επιμόρφωση. Συμπεριφορές των μαθητών

Όσον αφορά τον τρόπο που οργάνωσαν τη διδακτική τους παρέμβαση μετά την επιμόρφωση οι εκπαιδευτικοί 1 και 2 δήλωσαν ότι εισήγαγαν επίσης νοερούς υπολογισμούς στην αρχή κάθε καινούριου κεφαλαίου. Η εκπαιδευτικός 1 εισήγαγε επίσης νοερούς υπολογισμούς στην αρχή κάθε καινούριου κεφαλαίου καθώς και όταν οι μαθητές συναντούσαν δυσκολίες και αφιέρωνε στη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών τον μισό χρόνο. Η εκπαιδευτικός 2 αφιέρωνε μία ώρα σε κάθε καινούριο μάθημα για τους νοερούς υπολογισμούς και 10 λεπτά σε κάθε επόμενο μάθημα για εξάσκηση με νοερούς υπολογισμούς, ενώ η εκπαιδευτικός 3 δίδασκε παράλληλα τους νοερούς υπολογισμούς και τους γραπτούς αλγορίθμους, σε κάποιες περιπτώσεις εισήγαγε πρώτα τους νοερούς υπολογισμούς και ύστερα τον γραπτό

αλγόριθμο ενώ όπου η κατάσταση ήταν ήδη γνωστή, οι μαθητές δούλευαν πρώτα με τον αλγόριθμο και έπειτα έλυναν και προβλήματα κάνοντας χρήση νοερών στρατηγικών.

Ως υλικό οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν δραστηριότητες από τις προτάσεις της επιμόρφωσης, τα βιβλία και από το διαδίκτυο. Σε σχέση με την τεχνολογία μόνο η εκπαιδευτικός 1, παρουσίασε με βάση το λογισμικό «Μπάρες» κάποιες δραστηριότητες στους μαθητές από τον προσωπικό επίσης φορητό υπολογιστή λόγω έλλειψης υπολογιστών στο σχολείο. Οι εκπαιδευτικοί αναφέρονται στην έλλειψη υποδομών και τη δυσκολία χρήσης της τεχνολογίας.

Σχετικά με την ανταπόκριση των μαθητών στη διδασκαλία οι εκπαιδευτικοί επεσήμαναν ότι συμμετείχαν όλοι οι μαθητές και οι αδύναμοι μαθητές χρειαζόντουσαν περισσότερο χρόνο. Είναι χαρακτηριστική η δήλωση της εκπαιδευτικού 1: "*Αρχικά, στους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς ανταποκρίθηκαν οι καλοί μαθητές. Στη συνέχεια, παρακινήθηκαν και οι υπόλοιποι μαθητές και κάποιοι αδύνατοι μαθητές που ήταν αδιάφοροι συνήθως και συμμετείχαν στο μάθημα. Καθώς μέσω των νοερών υπολογισμών οι μαθητές κατανοούσαν τους ρητούς αριθμούς αισθανόντουσαν πιο σίγουροι για τις απαντήσεις τους και συμμετείχαν με μεγαλύτερη προθυμία στο μάθημα.*" Επισημαίνεται και τονίζεται από επίσης τρεις εκπαιδευτικούς ότι στην πειραματική διδασκαλία συμμετείχαν όλοι οι μαθητές ακόμη και οι πιο αδύναμοι. Σχετικά με τη χρήση των νοερών υπολογισμών είναι χαρακτηριστική η απάντηση της εκπαιδευτικού 2: "*Κάποιοι μαθητές καταλάβαιναν μέσω νοερών υπολογισμών και μετά η γραπτή πράξη ήταν μια απλή διαδικασία. Κάποιοι άλλοι κατανοούσαν όταν η πράξη γινόταν γραπτά. Συγκεκριμένα, όταν ήταν απλά τα παραδείγματα και παρόμοια με τα παραδείγματα επίσης δασκάλας οι μαθητές κατέφευγαν επίσης νοερούς υπολογισμούς και τα κατάφερναν. Όταν τα παραδείγματα γίνονταν πιο σύνθετα οι μαθητές κατέφευγαν επίσης γραπτούς αλγορίθμους.*". Οι εκπαιδευτικοί επισημαίνουν επίσης ότι αρκετοί μαθητές γνωρίζουν και χρησιμοποιούν ανάλογα με την περίπτωση διαφορετικές στρατηγικές υπολογισμού δηλαδή υπολογίζουν ευέλικτα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι τρεις δασκάλες που συμμετείχαν στην έρευνα αυτή δεν είχαν κάποια ειδική επιμόρφωση στη διδασκαλία των ρητών αριθμών και είχαν ενδιαφέρον να συμμετέχουν σε μια επιμόρφωση και πειραματική διδασκαλία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι βρίσκονται πάνω από το μέσο όρο των δασκάλων. Γνώριζαν εκ των προτέρων και ήταν πεπεισμένες θεωρητικά για τη σημαντικότητα και τα οφέλη από τους νοερούς υπολογισμούς. Αρχικά θεωρούσαν τους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς δύσκολους που προορίζονταν μόνο για τους καλούς μαθητές. Πιθανά η θεώρηση τους αυτή να επηρεάζονταν από τις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν και αυτές οι ίδιες στις πράξεις των ρητών αριθμών. Οι δύο εκπαιδευτικοί φαίνεται να είχαν μια συγκεχυμένη ιδέα σχετικά με το τι είναι νοεροί υπολογισμοί ρητών

αριθμών, θεωρούσαν ως τέτοιους περισσότερο τις επεξηγήσεις που δίνονταν στους μαθητές. Σχετικά με τα λάθη των μαθητών γνώριζαν κάποια αποσπασματικά αλλά έλλειπε μια συστηματική γνώση και ερμηνεία αυτών των λαθών. Όσον αφορά τους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς και τις στρατηγικές στους υπολογισμούς αυτούς οι δασκάλες δεν γνώριζαν τις στρατηγικές και έκαναν λάθη στις δύσκολες πράξεις με ρητούς αριθμούς. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι φάνηκε ανάγκη για μια επιμόρφωση και εξάσκηση των εκπαιδευτικών στην επίλυση με διαφορετικές στρατηγικές στις πράξεις με ρητούς αριθμούς όπως η διαίρεση, η σύγκριση κλασμάτων καθώς και τα ποσοστά.

Μετά την επιμόρφωση και την πειραματική διδασκαλία στην τάξη, οι τρεις εκπαιδευτικοί αναθεώρησαν την αρχική τους άποψη ότι οι νοεροί υπολογισμοί στους ρητούς αφορούν τους καλούς μαθητές. Επισήμαναν όλες την συμμετοχή και τα κίνητρα που είχαν οι αδύνατοι μαθητές καθώς και το γεγονός ότι κατανοούσαν. Ο τρόπος διδασκαλίας και εισαγωγής των νοερών υπολογισμών έγινε διαφορετικά από τις τρεις δασκάλες. Η μια μάλιστα δίδασκε παράλληλα τους νοερούς υπολογισμούς και τους γραπτούς αλγόριθμους. Τονίστηκε επίσης ότι η φτωχή υλικοτεχνική υποδομή δεν επέτρεψε τη χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία. Τελικά όσον αφορά τους μαθητές, από τις δηλώσεις των δασκάλων, φάνηκε ότι συμμετείχε και κατανοούσε η πλειοψηφία των μαθητών καθώς και αρκετοί μαθητές απέκτησαν κάποια ευελιξία στην επιλογή στρατηγικών κατά τους υπολογισμούς.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Caney, A. (2004). Perception of mental computation practice: Reports from middle school teachers and students. In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. Proceedings of the Twenty-seventh Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol 1, pp.159-166). Townsville: MERGA

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation for part-whole number operations. *Paper presented at the joint conferences of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*, Auckland.

Clarke, D. M., Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educ Stud Math (2009) 72:*127–138.

Huang, T.- W., Liu S.- T. & Lin C.- Y. (1990). Preservice teachers' mathematical knowledge of fractions. *Research in Higher Educational Journal*.

McIntosh, A., Nohda, N., Reys, B., and Reys, R. (1995). Mental computation performance in Australia, Japan and the United States. *Educational Studies in Mathematics. Vol. 29.3*

Steinle, V., & Stacey, K. (2004). A longitudinal study of students' understanding of decimal notation: An overview and refined results. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 541-548). Townsville: MERGA.

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΞΙΟΤΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΕΙΚΑΣΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Δόξα Κωτσαλίδου[1], Απόστολος Ν. Μαγουλιώτης[2], Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης[3], Κατερίνα Μιχαλοπούλου[4]

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

[1]kdoxa@yahoo.gr, [2]amagouliotis@uth.gr, [3]ttriant@uth.gr, [4]kmihal@uth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, σας παρουσιάζουμε την πρότασή μας για τη διαθεματική σύνδεση και συνεργασία δύο διαφορετικών μαθησιακών περιοχών του αναλυτικού προγράμματος σπουδών για την α' δημοτικού, των εικαστικών και των μαθηματικών. Υλοποιώντας εικαστικές δραστηριότητες, μπορούν να αναδυθούν και να κατανοηθούν ποικίλες μαθηματικές έννοιες. Αφορμή για τη Διδακτική παρέμβαση που υλοποιήσαμε, στάθηκε η διαπίστωση, ότι οι εκπαιδευτικοί, προκειμένου να «εξασκήσουν» περισσότερο τους μαθητές τους σε μαθηματικές έννοιες, καταστρατηγούν τις ώρες των εικαστικών και τις μετατρέπουν σε φροντιστηριακά μαθήματα για περαιτέρω εξάσκηση των μαθητών στα μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια ιστορική αναδρομή στην Ιστορία της Τέχνης, μας οδηγεί στη διαπίστωση, ότι η τέχνη και η επιστήμη συναντώνται σε μια κατ' εξοχήν ευγενή εκδήλωση της δημιουργικότητας του ανθρώπου, κι αυτό ισχύει από τους αμνημόνευτους ιστορικούς χρόνους ως τα σήμερα και σε όποιο σημείο της γης βρίσκεται ανθρώπινη ζωή (Αρβελέρ, 2007). Ο ρόλος της αισθητικής και της αρμονίας στη μαθηματική έκφραση και στην καλλιτεχνική δημιουργία και οι κοινές διαδικασίες παραγωγής μαθηματικής γνώσης και καλλιτεχνικών έργων, όπως είναι η παρατήρηση, η ανάλυση και η σύνθεση, η αναλογική σκέψη, η οπτική παράσταση και η γραφική αναπαράσταση, αποτελούν μερικά από τα κοινά χαρακτηριστικά των μαθηματικών και των τεχνών (Βάος, 2008).

Η κοινή παραδοχή εικαστικών και μαθηματικών, ότι υπάρχει άρρηκτη σχέση μεταξύ των δύο ξεχωριστών πεδίων στάθηκε η βαθύτερη αιτία για την ενασχόλησή μας με τη διαθεματική σύνδεση και συνεργασία της εικαστικής τέχνης με τα μαθηματικά. Η αφορμή όμως δόθηκε από την κατάσταση που επικρατεί στη σχολική πραγματικότητα της χώρας μας. Παρά το γεγονός ότι τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών που αφορούν στο δημοτικό σχολείο, προτρέπουν τους εκπαιδευτικούς να προσεγγίζουν διεπιστημονικά τα ξεχωριστά γνωστικά αντικείμενα και να υμνούν τη διαθεματικότητα, εν τούτοις, παρατηρείται το φαινόμενο, να διατηρούνται απομονωμένες όλες οι μαθησιακές περιοχές. Το ωρολόγιο πρόγραμμα συνεχίζει να

ξεχωρίζει τα μαθήματα και οι εκπαιδευτικοί, εγκλωβισμένοι ανάμεσα στο πρόγραμμα, την ύλη και το χρόνο, αναγκάζονται να καταστρατηγούν τις ώρες που αναλογούν στα εικαστικά και να τις χρησιμοποιούν για συμπληρωματική εξάσκηση των μαθητών στα μαθηματικά, με τη δικαιολογία ότι τα παιδιά δυσκολεύονται στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και υπάρχει μεγάλη ανάγκη περαιτέρω εξάσκησης.

Αισιοδοξούμε με την πρότασή μας να συμβάλλουμε α. στη στενή και δημιουργική συνεργασία της Εικαστικής Τέχνης και των Μαθηματικών, β. στην αξιοποίηση των κοινών στοιχείων των δύο διαφορετικών πεδίων, γ. στη δημιουργία ολοκληρωμένων προγραμμάτων εικαστικής αγωγής (Kooll, 1997), δ. στην κατανόηση «δύσκολων» μαθηματικών εννοιών, και ε. να ανατρέψουμε τη λανθασμένη αντίληψη ότι η «μαθηματικοποίηση» είναι μια δύσβατη και ακαταλαβίστικη διαδικασία, αποδεικνύοντας ότι η διαθεματική σύνδεση των εικαστικών και των μαθηματικών μπορεί να επιφέρει από τη μια πλευρά την ευχαρίστηση και την αισθητική τέρψη και από την άλλη, τη δημιουργία και τη γνώση.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ

Δέκα περίπου χρόνια μετά από την κυκλοφορία του ΔΕΠΠΣ (ΔΕΠΠΣ, 2001), το υπουργείο παιδείας επανέρχεται και προτείνει ένα νέο πρόγραμμα σπουδών που οραματίζεται με αυτό, το Νέο Σχολείο που θα μπορέσει να συμβαδίσει με τις αλλαγές στην κοινωνία και τον πολιτισμό της χώρας μας και θα μπορέσει να αντεπεξέλθει στις ανάγκες του 21ου αιώνα. Οι κεντρικοί στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν είναι πια η τυπική μάθηση εννοιών και διαδικασιών, αλλά η ανάπτυξη ενός τρόπου σκέψης που αξιοποιεί χαρακτηριστικά της μαθηματικής επιστήμης (McClain, Cobb & Bowers 1998, Yacket & Cobb, 1996, Λεμονίδης, 2013). Η μαθηματική εκπαίδευση εντάσσεται σε ένα πρώτο και ενιαίο κύκλο σπουδών (4-8 χρόνων), στη διάρκεια που οποίου τα παιδιά θεμελιώνουν βασικές μαθηματικές διεργασίες και γνώσεις. Η οργάνωση του προγράμματος των Μαθηματικών για τη δεκάχρονη υποχρεωτική εκπαίδευση στηρίχθηκε στη λογική των ‘τροχιών’ ανάπτυξης εννοιών και διεργασιών, οι οποίες οργανώνουν την πορεία που θα ακολουθήσει η μαθησιακή εμπειρία των παιδιών και ερμηνεύουν την αντίστοιχη διδακτική προετοιμασία που είναι απαραίτητη. Οι πέντε άξονες με τις τροχιές που αναπτύσσονται στο πρόγραμμα των Μαθηματικών και αφορούν την α’ τάξη δημοτικού είναι:

α. Αριθμοί και πράξεις, β. Χώρος και Γεωμετρία, γ. Εισαγωγή στην Αλγεβρική σκέψη, δ. Μετρήσεις και ε. Στοχαστικά Μαθηματικά.

Όλοι παραδέχονται ότι η επιστήμη των μαθηματικών, εξαιτίας της πολλαπλότητας των εφαρμογών της, αναδεικνύεται απαραίτητη στον πολίτη του αιώνα των επιστημονικών και τεχνολογικών εξελίξεων, ενώ παράλληλα τον εξοπλίζει με μια ιδιαίτερη συλλογιστική ικανότητα (Schoenfeld, 1985).

Πλήθος επιστημόνων πρεσβεύουν ότι τα μαθηματικά αποτελούν μέρος της βιώσιμης πραγματικότητας των παιδιών και έτσι ακριβώς πρέπει να εκτιμώνται και να διδάσκονται (Cobb & Boufi, 1997, Hughes, 2002, Streefland, 1991). Για το λόγο αυτό, μπορούν κάλλιστα να συνδυαστούν με άλλα γνωστικά αντικείμενα και να διδαχθούν π.χ. διάφορες μαθηματικές έννοιες με τυχόν εναύσματα που θα δοθούν στα πλαίσια της εικαστικής αγωγής (Κοτοπούλης, 2007). Τα παιδιά μπορούν να παρατηρούν συμμετρίες σε έργα τέχνης ή να εντοπίζουν κανονικότητες στη φύση, να κάνουν μετρήσεις για να αντιμετωπίσουν καθημερινές καταστάσεις ή να υπολογίσουν για να λύσουν κάποιο αθροιστικό ή πολλαπλασιαστικό πρόβλημα (Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, 2011). Μα πρωτίστως, τα παιδιά πρέπει να νιώθουν ότι τα μαθηματικά είναι ένα ανθρώπινο δημιούργημα, χρήσιμο και συνδεδεμένο με τη ζωή, που μπορεί να ανακαλυφθεί και να δημιουργηθεί ξανά από τον καθένα. Ο μαθητής πρέπει να βρίσκει ελκυστικό κι ενδιαφέρον το περιεχόμενο μάθησης που του προτείνεται, να μπορεί να δρα μέσα σε αυτό, να εφαρμόζει τη γνώση που ήδη διαθέτει, να κάνει σκέψεις, πιθανά λάθη, να εφαρμόζει μεθόδους και τεχνικές κ.λπ. (Λεμονίδης, 2003).

ΤΑ ΕΙΚΑΣΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ

Κύριος στόχος της εικαστικής αγωγής, είναι να έρθουν τα παιδιά σε επαφή με έργα τέχνης και με την καλλιτεχνική δημιουργία, να εκφράσουν τις δικές τους ιδέες με διαφορετικά μέσα και τρόπους, να αναπτύξουν τη φαντασία και τη δημιουργικότητα και να διακρίνουν το ωραίο στη φύση, στο περιβάλλον και στα έργα τέχνης (Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, 2011). Για την πραγμάτωση των παραπάνω στόχων, προτείνεται ένα περιεχόμενο, το οποίο βασίζεται στους συνδυασμούς 5 αξόνων, ανάλογα με τις θεματικές ενότητες που επιλέγονται (Μαγουλιώτης & Λαζάρου, 2006) και είναι οι παρακάτω:

α. Απλά Υλικά, Μέσα, Τεχνικές, β. Μορφικά στοιχεία, γ. Θέμα, δ. Μορφές εικαστικών τεχνών, ε. Έργα τέχνης και στ. Εισαγωγή στην καλαισθησία.

Ο όρος εικαστικές τέχνες, περιλαμβάνει πολλές διαφορετικές μορφές και τεχνικές, παραδοσιακές και νεότερες, τις καλές και εφαρμοσμένες τέχνες, αλλά και έργα που πραγματοποιούνται με τη χρήση νέων τεχνολογιών και εστιάζουν στη διαμόρφωση χώρων (Frydman,1988). Όμως είναι κοινώς αποδεκτό, ότι όλες οι καλλιτεχνικές δημιουργίες υπόκεινται σε μαθηματικές αρχές (Kent,1995).

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στα τελευταία χρόνια η ιδέα της διαθεματικότητας και της διεπιστημονικότητας δεσπόζει στους προβληματισμούς και τις επιλογές των εκπαιδευτικών για τη διαμόρφωση κατάλληλων μαθησιακών προγραμμάτων (Bailey, 1996). Η επιστημονική πολυδιάσπαση και ο πολυμερισμός της σχολικής γνώσης σε απομονωμένους επιστημονικούς κλάδους, κατακερματίζουν τη σκέψη των παιδιών

και τα αποτρέπουν από την κατανόηση των κοινών σημείων των επιστημών (Varnava-Skoura, 1988). Η παιδαγωγική του σχολείου μετατρέπεται πλέον σε μια παιδαγωγική βοήθειας και «επεξεργασίας», βασισμένη στη φύση του παιδιού, αφού μόνο μέσω της «επεξεργασίας» τα παιδιά αντιλαμβάνονται και κατανοούν την καθημερινή πραγματικότητα της ζωής (Πανταζής, 2002). Η δημιουργία περιβαλλόντων μάθησης, δημιουργεί επίσης μια προοπτική επινόησης και εγκαθίδρυσης νέων εκπαιδευτικών συνθηκών, μαθησιακών καταστάσεων, παιδαγωγικών στρατηγικών και κυρίως νέων μαθησιακών δραστηριοτήτων (Δημητρακοπούλου, 1998).

Ειδικότερα στην περίπτωση των μαθηματικών, η ανάθεση βιωματικών καταστάσεων προβληματισμού στη διδακτική ομάδα στηρίζεται στην αντίληψη ότι τα παιδιά μπορούν να πειραματίζονται και να μετέχουν σε μια ανοιχτή, πνευματική πρόκληση καθώς προσπαθούν να διατυπώσουν τις δικές τους εικασίες και απορίες, τα δικά τους επιχειρήματα και τις στρατηγικές και να ανιχνεύουν εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης των προβλημάτων (Van de Walle, 2005). Επιδεικνύοντας τα παιδιά φαντασία και ευρηματικότητα, καλούνται να ακολουθήσουν ένα μη γραμμικό επιστημονικό δρόμο στον οποίο ενυπάρχουν πρόοδοι και πισωγυρίσματα, ταλαντεύσεις και ανατροπές εμποδίων, κριτικοί έλεγχοι, τροποποιήσεις και βελτιωτικές ανασκευές. (Τζεκάκη, 2010).

Στις επόμενες ενότητες θα παρουσιάσουμε την εικαστική-μαθηματική δραστηριότητα, καθώς και τα πορίσματα που εξήχθησαν από αυτήν.

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Στόχος της διδακτικής μας παρέμβασης, είναι η υλοποίηση μαθησιακών καταστάσεων και δραστηριοτήτων βασιζόμενων στην «εκμετάλλευση» των εικαστικών δραστηριοτήτων, ως μέσο για να έρθουν σε επαφή τα μικρά παιδιά με κύριες μαθηματικές έννοιες και να κατανοήσουν όσο γίνεται καλύτερα τις έννοιες αυτές, με απώτερο στόχο να αποκτήσουν θετική στάση προς την οικοδόμηση όλων των εμπλεκόμενων εννοιών και δεξιοτήτων.

Το σχέδιο δράσης μας, είναι ευέλικτο και προσαρμοσμένο σύμφωνα με τις ανάγκες και τις ικανότητες των παιδιών. Στο σχεδιασμό μας, λάβαμε σοβαρά υπόψη μας τα παιδικά βιώματα και ενδιαφέροντα, τα προτεινόμενα αναλυτικά προγράμματα σπουδών και το θεωρητικό πλαίσιο, το οποίο παρουσιάσαμε στις προηγούμενες ενότητες.

Το σύνολο των δραστηριοτήτων που σχεδιάσαμε, αποτελεί μια διδακτική πρόταση διαθεματικής σύνδεσης των Εικαστικών τεχνών και των Μαθηματικών. Η παρούσα δραστηριότητα αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας, η οποία πραγματοποιήθηκε σε ελληνικό δημοτικό σχολείο.

Η Εικαστική – Μαθηματική Δραστηριότητα

Ο σχεδιασμός και η υλοποίηση της δραστηριότητας, βασίστηκε στο τρίπτυχο: α. Προσέγγιση έργων τέχνης, β. Πειραματισμός και Δημιουργία και γ. Αποτελέσματα - Αξιολόγηση

ΤΙΤΛΟΣ: Ζάρια

ΜΕΘΟΔΟΣ: Επίδειξη εποπτικού υλικού (έργα τέχνης), παρατήρηση, περιγραφή, συζήτηση, προβληματισμός και πειραματισμός.

ΣΤΟΧΟΙ:

ΕΙΚΑΣΤΙΚΟΙ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ
-Να εξασκηθούν τα παιδιά στην προσεκτική παρατήρηση και να μάθουν να εστιάζουν σε λεπτομέρειες. -Να χρησιμοποιούν τον προφορικό λόγο για να περιγράψουν μια εικόνα, ένα συναίσθημα, μια κατάσταση. -Να αναγνωρίζουν διαφορετικές μορφές τέχνης (κατασκευές). -Να γνωρίσουν έργα και καλλιτέχνες σύγχρονης τέχνης (εγκαταστάσεις). -Να δημιουργήσουν με ποικίλες τεχνικές και ποικίλα υλικά. -Να καλλιεργηθεί η φαντασία και η δημιουργικότητά του. -Να προβούν σε παρατηρήσεις που αφορούν στα χρώματα. -Να περιγράψουν μια εικόνα από πολλές και διαφορετικές οπτικές γωνίες. -Να γνωρίσουν και να αναλύσουν ένα βασικό στερεό γεωμετρικό σχήμα, τον κύβο και να	-Να αναγνωρίσουν άμεσα ποσότητες με συγκεκριμένη διάταξη στο χώρο. -Να εργαστούν σε συγκεκριμένη επιφάνεια και να τη δομήσουν με συγκεκριμένες ποσότητες συμβόλων. -Να αναγνωρίσουν άμεσα μικρές ποσότητες σε συγκεκριμένη διάταξη, να μετρήσουν, να προσθέσουν και να υπολογίσουν. -Να δημιουργήσουν αθροιστικές καταστάσεις. -Να εντοπίσουν, περιγράψουν και αναπαραστήσουν θέσεις, διαδρομές και διευθύνσεις μέσα στο χώρο. -Να συνθέσουν και αναλύσουν επίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα και να συζητήσουν τις ιδιότητές τους. -Να αντιληφθούν τη διαφορά του δισδιάστατου από τον τρισδιάστατο χώρο. -Να γνωρίσουν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του κύβου σε ποικιλία θέσεων, προσανατολισμών και μεγεθών, να δημιουργήσουν με αυτό και να χρησιμοποιήσουν στην περιγραφή τους, μαθηματική ορολογία (πλευρές, γωνίες, ακμές). -Να περιγράψουν όλα τα δυνατά αποτελέσματα σε απλά πειράματα τύχης (παιχνίδι με τα ζάρια). -Να περιγράψουν ένα ενδεχόμενο ως βέβαιο, πιθανό, απίθανο, αδύνατο. -Να εξασκηθούν τα παιδιά στην προσεκτική παρατήρηση και να μάθουν να εστιάζουν σε λεπτομέρειες. -Να χρησιμοποιούν τον προφορικό λόγο για να περιγράψουν μια εικόνα, ένα συναίσθημα, μια κατάσταση. -Να καλλιεργηθεί η φαντασία και η δημιουργικότητά

δημιουργήσουν με αυτό.	του.

Πίνακας 1. Οι εικαστικοί και μαθηματικοί στόχοι που επιτυγχάνονται μέσα από τη δραστηριότητα

ΥΛΙΚΑ-ΜΕΣΑ: Τα έργα τέχνης, ένας Η/Υ κι ένας προβολέας, 6 κατασκευασμένα ζάρια, μαρκαδόροι, λευκά χαρτιά και χαρτόνια, αληθινά ζάρια.

Α. Προσέγγιση έργων τέχνης

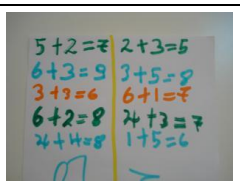
Για την προσέγγιση των έργων τέχνης χρησιμοποιήσαμε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή και προβάλαμε τα έργα σε οθόνη προβολής, επιτυγχάνοντας καλύτερο οπτικό αποτέλεσμα και κάνοντας χρήση των εργαλείων της μεγέθυνσης των εικόνων, όπου αυτή χρειαζόταν.

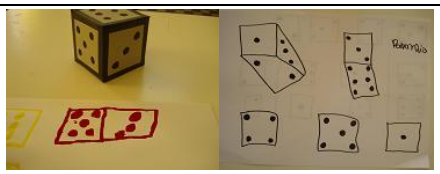
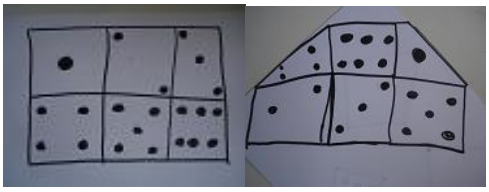
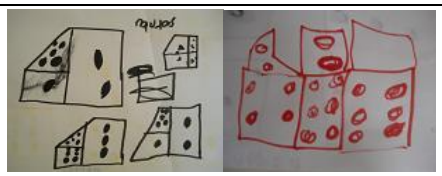
 Εικ.1. Γιώργος Λάππας, Ζάρια, εγκατάσταση στην Βενετία,1990	 Εικ.2. SOL LEWITT. Παραμορφωμένοι κύβοι, 2001, 71.1 X 90,2cm. Λινολαιογραφία,
Εικαστικές έννοιες των έργων τέχνης	Μαθηματικές έννοιες των έργων τέχνης
Δισδιάστατος και τρισδιάστατος χώρος και σχήματα, βάθος, χρώματα, σχήματα, εγκατάσταση, ψευδαίσθηση, επανάληψη, υλικά, θέσεις, διευθύνσεις σχημάτων, διαφορετικές οπτικές γωνίες, χρώματα, αντιθέσεις χρωμάτων.	Μετρήσεις, δισδιάστατος και τρισδιάστατος χώρος και σχήματα, βάθος, σχήματα, επανάληψη, ανάπτυγμα κύβου, άμεση αναγνώριση ποσοτήτων, αριθμητικές πράξεις, θέσεις και κατευθύνσεις των σχημάτων, διαφορετικές οπτικές γωνίες.

Πίνακας 2. Τα έργα τέχνης που προσέγγισαν τα παιδιά, καθώς και οι εικαστικές και μαθηματικές έννοιες που αναδεικνύονται μέσα από αυτά.

Β. Πειραματισμός και Δημιουργία

Τα παιδιά, αφού προσέγγισαν και γνώρισαν το έργο του Γιώργου Λάππα εικ.1., προχώρησαν στο επόμενο στάδιο, που ήταν οι δικοί τους πειραματισμοί:

	  Β) έριχναν ζαριές και κατέγραφαν το

Α). τοποθέτησαν τα 6 ζάρια το ένα πάνω στο άλλο, παρατηρώντας τις ποσότητες των πλευρών τους, έτσι ώστε να είναι όλα τοποθετημένα από την ίδια πλευρά.	αποτέλεσμα προβαίνοντας σε άμεσες αναγνωρίσεις ποσοτήτων και σε προσθέσεις. Η εκπαιδευτικός ρώτησε αν είναι δυνατό να βρεθεί αποτέλεσμα με τον αριθμό π.χ. 13, 20 κ.λπ. (πάνω από 12). Τα παιδιά κατανόησαν ότι αυτό δεν είναι δυνατό, και ότι το μεγαλύτερο δυνατό αποτέλεσμα από την πρόσθεση δύο ζαριών, είναι το 12.
 Γ) παρατηρούσαν ζάρια και τα ζωγράφιζαν. Προσπαθούσαν να ζωγραφίσουν όσες πλευρές έβλεπαν. Οι προσπάθειες ήταν πολλές και πολύ ενδιαφέρουσες.	 Κάποια παιδιά, τοποθέτησαν ένα ζάρι πάνω στο χαρτί και διέγραψαν το περίγραμμά του 6 φορές, όσες είναι οι πλευρές. Πείσμωσαν και θέλησαν να φτιάξουν τα ζάρια τους όπως τα αληθινά.
 Προσπάθησαν διαισθητικά να ανακαλύψουν τον τρόπο που πρέπει να ζωγραφίσουν τον κύβο για να φαίνεται τρισδιάστατος. Ανακάλυψαν πρωτόλεια αναπτύγματα του κύβου.	 Χρωμάτισαν τα ζάρια, τα έκοψαν και τα τοποθέτησαν σε μια επιφάνεια. Δημιούργησαν μια καταπληκτική εγκατάσταση με ζάρια!

Πίνακας 3. Οι πειραματισμοί των παιδιών

Αφού ολοκλήρωσαν τα παιδιά τους πειραματισμούς τους, παρατήρησαν το έργο του Sol Lewitt (εικ.2) και αντιλήφθηκαν ότι τα σχήματα που βλέπουν, έχουν πολλά κοινά στοιχεία με τα ζάρια που σχεδίασαν και κατασκεύασαν. Μέτρησαν τα ορθογώνια πλαίσια που βρίσκονται εντός τους οι κύβοι, περίγραψαν τα χρώματα των κύβων (κάθε πλευρά έχει διαφορετικό χρώμα) και κατανόησαν ότι είναι ζωγραφισμένοι από πολλές και διαφορετικές οπτικές γωνίες (από μπροστά, από το πλάι, λίγο στραβά κ.λπ.), διαχώρισαν ποιοι κύβοι είναι ψηλοί, χαμηλοί, λεπτοί κ.ο.κ.

Γ. Αποτελέσματα - Αξιολόγηση

Η δραστηριότητα με τα ζάρια αποδείχθηκε περισσότερο δραστηριότητα μαθηματικών. Τα παιδιά: μέτρησαν, αναγνώρισαν άμεσα μικρές ποσότητες στα ζάρια, πρόσθεσαν, έγραψαν τα αριθμητικά σύμβολα, τα σύμβολα της πρόσθεσης και του ίσον, πειραματίστηκαν με τον τρισδιάστατο χώρο, αντιλήφθηκαν διαισθητικά την προοπτική, γνώρισαν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του κύβου και κατάφεραν να

δημιουργήσουν πρωτόλεια αναπτύγματα μέσα από τις δικές τους εμπειρίες, δυνατότητες και μετρήσεις.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αναλύοντας και ερμηνεύοντας τα έργα και τους πειραματισμούς των παιδιών, αντιλαμβανόμαστε ότι: α. Όλοι οι εικαστικοί και μαθηματικοί στόχοι της δραστηριότητας επιτεύχθηκαν και επιπλέον, οι γνώσεις που ανακάλυψαν τα παιδιά διαισθητικά, ξεπέρασαν ακόμα και τις απαιτήσεις του αναλυτικού προγράμματος και β. Σχεδιάζοντας και υλοποιώντας ο εκπαιδευτικός, ποιοτικές εικαστικές δραστηριότητες και εντάσσοντας στη μαθησιακή διαδικασία τις προσεγγίσεις έργων τέχνης και τον αναστοχασμό-αξιολόγηση της δραστηριότητας, μπορεί να «εξασκήσει» τους μαθητές του σε μαθηματικές έννοιες χωρίς αναγκαστικά να τους στερήσει τη χαρά και τη δημιουργία που είναι τόσο αναγκαία για την ολόπλευρη ανάπτυξή τους.

Η παραπάνω πρόταση που υλοποιήθηκε σε ελληνικό σχολείο, ανάδειξε την αδικημένη εικαστική τέχνη, συνέβαλε στην ανάπτυξη και καλλιέργεια μαθηματικών εννοιών και κυρίως, ακύρωσε τη δικαιολογία της έλλειψης χρόνου για την εκμάθηση των μαθηματικών και την καταστρατήγηση της ώρας των εικαστικών.

Τα βραχυπρόθεσμα αποτελέσματα είναι, ότι τα παιδιά γνώρισαν 2 σύγχρονους καλλιτέχνες και το έργο τους, ενώ ταυτόχρονα πειραματίστηκαν με μαθηματικές έννοιες υψηλού επιπέδου, στην προσπάθειά τους να δημιουργήσουν τα δικά τους έργα. Τα μακροπρόθεσμα όμως αποτελέσματα, που είναι η αισθητική παιδεία και η κριτική κι επιστημονική σκέψη του αναπτυσσόμενου ανθρώπου, εξαρτώνται από τη συνέπεια και τη συνέχεια των καινοτόμων προγραμμάτων της ελληνικής εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνόγλωσση

Αρβελέρ-Γλύκατζη, Ε. (2007). *Πολιτισμός και Ελληνισμός,* Προσεγγίσεις, Αθήνα: Καστανιώτης.

Βάος, Α. (2008). *Ζητήματα διδακτικής των εικαστικών τεχνών,* Αθήνα: Τόπος.

ΔΕΠΠΣ. (2001), Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΦΕΚ 1366 τ. Β, 18 – 10 – 2001).

Δημητρακοπούλου, Α. (1998). Σχεδιάζοντας εκπαιδευτικά λογισμικά - Από τις εμπειρικές προσεγγίσεις στη διεπιστημονική θεώρηση-. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*. Νο 100 &101, Αθήνα.

Hughes, M. (2002). *Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών,* επ. Στέλλα Βοσνιάδου, Αθήνα: Gutenberg.

Kent, S.1995). *Ανακαλύπτω την τέχνη, Σύνθεση,* Αθήνα: Δεληθανάσης- Ερευνητές.

Κοτοπούλης, Θ. (2007). Η διδακτική των μαθηματικών εννοιών στη βασική εκπαίδευση: Όψεις και Προοπτικές, στο: *Επιστημονικό Βήμα του Δασκάλου,* τ. 7, σ. 142-156, ΔΟΕ, ΙΠΕΜ, Αθήνα.

Λεμονίδης, Χ. (2003). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου,* Αθήνα: Πατάκης.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής,* Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ. (2011). (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450

Μαγουλιώτης, Α. & Λαζάρου, Σ. (2006). «Το μάθημα των Εικαστικών τα τελευταία χρόνια στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση», στο *ΜΑΚΕΔΝΟΝ,* τ. 15ο, Φλώρινα.

Πανταζής, Σπ. (2002). *Η παιδαγωγική εργασία στο Νηπιαγωγείο,* Αθήνα: Gutemberg

Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία,* Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Van de Walle, J. A. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο,* επιστημονική επιμέλεια Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης, μτφ. Αλεξανδροπούλου Α. & Κομπορόζος Β. Αθήνα: Τυπωθήτω-Δαρδανός

Ξενόγλωσση

Bailey, D. (1996). *An overview of interdisciplinary training*. In D. Bricker & A. Widerstrom (eds), *Preparing personnel to work with infants and young children and their families:* A team approach, Baltimore, MD: Paul Brookes.

Cobb, P. & Boufi, A. (1997). *Reflective discourse and collective reflection, journal for Reseanch in Mathematics*, Education, 28, 258-277.

Frydman, O, Bryant, P. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children, Cognitive Development.3, 323-339

Kooll, M. (1997). *The Project method its vocational education origin and international development,* journal of international teacher education.

McClain, K., Cobb, P., & Bowers, I. (1998). A contextual investigation of three-digit addition and subtraction. In L. J. Morrow & M.J. Kenney (Eds), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics (pp. 141-150).* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem Solving , Academic Press

Streefland, L. (1991). *Fructions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publications.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Classroom sosiomathematical norms and intellectual autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.

Varnava-Skoura, G. (1988). *Surprise and reflective abstraction:* a study of leaming, p.12, Papazissis Publishers.

Ηλεκτρονική βιβλιογραφία

http://www.sollewittprints.org/lewitt-raisonne-2001

Η ΧΡΗΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

Λουίζα Δημητρίου & Δήμητρα Πίττα-Πανταζή
Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
demetriou.louiza@ucy.ac.cy , dpitta@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα έρευνα εξετάζει την επίδραση που έχει η χρήση δυναμικής γεωμετρίας καθώς και η χρήση παραδειγμάτων στην αναγνώριση ορθογωνίων από παιδιά προδημοτικής. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 50 μαθητές ενός αστικού νηπιαγωγείου. Η πρώτη ομάδα μαθητών έλαβε μέρος σε παρεμβατική διδασκαλία με χρήση παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων, ενώ η δεύτερη ομάδα σε παρεμβατική διδασκαλία με χρήση μόνο παραδειγμάτων η οποία εμπλουτίστηκε με ένα μαθηματικό εφαρμογίδιο δυναμικής γεωμετρίας. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές που διδάχτηκαν με χρήση παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων είχαν στατιστικά καλύτερη επίδοση σε σχέση με τους μαθητές που διδάχτηκαν με χρήση δυναμικής γεωμετρίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τόσο στο παρελθόν όσο και στις μέρες μας, πολλοί είναι οι ερευνητές που έχουν ασχοληθεί με την επίδραση της χρήσης των παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων στη διδασκαλία και ιδιαίτερα στη γεωμετρία. Παράλληλα, η αναγκαιότητα της χρήσης της τεχνολογίας στη διδασκαλία έχει προταθεί εδώ και χρόνια από πολλούς διεθνείς οργανισμούς (NCTM, 2000). Ωστόσο, οι περισσότερες έρευνες που διερευνούν την επίδραση της δυναμικής γεωμετρίας φαίνεται να εστιάζουν στις πρώτες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με ένα περιορισμένο αριθμό ερευνών να εξετάζει την επίδρασή της σε μαθητές προδημοτικής με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα ερευνητικό κενό. Κατά συνέπεια σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εξετάσει εάν η διδασκαλία με χρήση παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων ή η διδασκαλία με χρήση παραδειγμάτων σε συνδυασμό με ένα μαθηματικό εφαρμογίδιο δυναμικής γεωμετρίας, μπορεί να βοηθήσει σε μεγαλύτερο βαθμό τους μαθητές να αναπτύξουν την ικανότητα αναγνώρισης διαισθητικών και μη διαισθητικών παραδειγμάτων ορθογωνίου. Κατά συνέπεια τα ερευνητικά ερωτήματα που εξετάζει η παρούσα έρευνα είναι:

1. Ποια από τις δύο διδασκαλίες (χρήση παραδειγμάτων/μη παραδειγμάτων ή χρήση παραδειγμάτων σε συνδυασμό με εφαρμογίδιο δυναμικής γεωμετρίας) μπορεί να συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση της έννοιας του ορθογωνίου από παιδιά προδημοτικής;

2. Ποιες είναι οι ικανότητες αναγνώρισης των παραδειγμάτων και των μη παραδειγμάτων του ορθογωνίου (διαισθητικά και μη) των μαθητών των δύο ομάδων πριν και μετά την παρέμβαση;

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1. Σχηματική έννοια, πρωτοτυπικά παραδείγματα, διαίσθηση

Θέλοντας να εξηγήσει γιατί οι περισσότεροι μαθητές φαίνεται να παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες κατά την ενασχόλησή τους με τη γεωμετρία, ο Fishbein (1993) εισήγαγε το όρο σχηματική έννοια. Η κατάκτηση της έννοιας του σχήματος είναι μια περίπλοκη διαδικασία κατά την οποία τα παραδείγματα διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο. Στη γνωστική ψυχολογία έχουν διατυπωθεί δύο θεωρίες οι οποίες υποστηρίζουν την απόκτηση της έννοιας του σχήματος, η κλασική αντίληψη και η πρωτοτυπική αντίληψη. Σύμφωνα με την πρωτοτυπική αντίληψη τα παιδιά μικρής ηλικίας είναι σε θέση να ταξινομούν ένα γεωμετρικό σχήμα βασιζόμενα συχνά στη σύγκριση με ένα οπτικό πρωτοτυπικό παράδειγμα το οποίο αντιπροσωπεύει μια κατηγορία σχημάτων. Έτσι εντάσσουν ή απορρίπτουν ένα γεωμετρικό σχήμα σε μια κατηγορία. Τα οπτικά πρωτοτυπικά παραδείγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε ως παράδειγμα μιας κατηγορίας, είτε ως μη παράδειγμα (Walcott, Mohr & Kastberg, 2009). Οι Hershkowitz (1989), Schwarz & Hershkowitz (1999) και Wilson (1990) με έρευνές τους έδειξαν ότι οι μαθητές τείνουν να θεωρούν ως παραδείγματα μόνο τα πρωτοτυπικά, ενώ θεωρούν όλα τα υπόλοιπα ως μη παραδείγματα. Ο Wilson (1990) αναφέρεται σε άκαμπτα και ευέλικτα πρωτοτυπικά παραδείγματα. Τα παιδιά που μπορούν να «δουν» τα σχήματα να κινούνται διαθέτουν ευέλικτα πρωτοτυπικά παραδείγματα.

Πολλοί είναι οι ερευνητές που έχουν ασχοληθεί με την επίδραση της χρήσης παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων στη διδασκαλία. Με τον όρο παραδείγματα εννοούμε συγκεκριμένες περιπτώσεις μιας μεγαλύτερης κατηγορίας (Zodik & Zaslavsky, 2008). Σύμφωνα με τους Tsamir, Tirosh και Levenson, (2008), η κατάκτηση της έννοιας του σχήματος, συνεπάγεται την ικανότητα αναγνώρισης των παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων της. Οι Klausmeier et al. (1975) και McKinney et al. (1983), αναφέρουν ότι οι εκπαιδευτικοί επιδιώκουν να χρησιμοποιούν παραδείγματα και μη παραδείγματα στις διδασκαλίες τους, για γρηγορότερο και πληρέστερο σχηματισμό μιας έννοιας. Τα μη παραδείγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να τονισθούν οι διαφορές που υπάρχουν σε μαθηματικές έννοιες (Zodik & Zaslavsky, 2008). Ωστόσο μερικοί ερευνητές Ausubel, Novak και Hanesian (1978), Bruner και Anglin (1973), Bruner, Goodnow και Austin (1953), υποστηρίζουν ότι η χρήση μη παραδειγμάτων στη διδασκαλία εννοιών έχει αρνητικές συνέπειες (αναφορά στο Petty & Jansson, 1987). Όλα τα παραδείγματα μιας έννοιας πρέπει να περιλαμβάνουν όλες τις κρίσιμες ιδιότητες της

έννοιας δηλαδή τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες που απαιτούνται για να αναγνωριστεί ένα παράδειγμα μιας έννοιας. Ωστόσο, στα πρωτοτυπικά σχήματα, εκτός από τις απαραίτητες και επαρκείς ιδιότητες που έχουν όλα τα παραδείγματα, περιλαμβάνονται και μη κρίσιμες ιδιότητες (Hershkowitz, 1989). Αυτές οι μη κρίσιμες ιδιότητες προκαλούν σύγχυση στους μαθητές.

Πρόσφατα οι Tsamir, Tirosh και Levenson (2008), έχουν εισάγει τους όρους διαισθητικά και μη διαισθητικά παραδείγματα/ μη παραδείγματα αναφέροντας ως διαισθητικά τα παραδείγματα τα οποία γίνονται άμεσα αντιληπτά από τα παιδιά σε αντίθεση με τα μη διαισθητικά τα οποία δε γίνονται άμεσα αντιληπτά από τα παιδιά.

1.2. Λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας

Σημαντική θέση στη διδασκαλία των γεωμετρικών σχημάτων θα πρέπει να κατέχει η χρήση λογισμικών και μαθηματικών εφαρμογιδίων δυναμικής γεωμετρίας. Η χρήση των λογισμικών, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να χειριστούν γεωμετρικά σχήματα και να εντοπίσουν γεωμετρικές σχέσεις χρησιμοποιώντας μια σειρά από παραδείγματα και μετρήσεις, τα οποία παρέχονται εύκολα και γρήγορα (Jones, 2000). Ο De Villiers (1993, 2003) αναφέρει ότι μέσω της δυναμικής γεωμετρίας, οι μαθητές μπορούν εύκολα να πειστούν για την εγκυρότητα των υποθέσεων τους, βλέποντας γεωμετρικά σχήματα και αντικείμενα να υποβάλλονται σε συνεχείς μετασχηματισμούς (αναφορά στο Christou et al, 2004).

1.3. Αναγνώριση του ορθογωνίου από μαθητές νηπιαγωγείου

Σύμφωνα με τους Clements et al. (1999) οι μαθητές νηπιαγωγείου, τείνουν να χρησιμοποιούν ένα πρωτοτυπικό παράδειγμα παρά ένα λεκτικό ορισμό για την κατηγοριοποίηση σχημάτων. Παράλληλα σύμφωνα με τους Walcott, Mohr & Kastberg (2009), ο προσανατολισμός των σχημάτων είναι ένας ακόμη παράγοντας που επηρεάζει την κατηγοριοποίηση ενός σχήματος. Ο Monaghan (2000) υποστηρίζει ότι οι μαθητές είναι πιο πιθανό να αναγνωρίσουν ένα ορθογώνιο όταν οι οριζόντιες πλευρές του είναι μεγαλύτερες από τις κατακόρυφες, και όχι το αντίστροφο. Σε έρευνές τους οι Clements και Battista (1992) διαπίστωσαν ότι τα παιδιά είχαν την τάση να εντάσσουν τα μακρόστενα τετράπλευρα στην κατηγορία των ορθογωνίων όταν τουλάχιστον ένα ζευγάρι πλευρών, ήταν παράλληλο. Οι Clements et al. (1999) διαπίστωσαν ότι τα παιδιά είχαν περισσότερες πιθανότητες να εντάξουν τα μακρόστενα παραλληλόγραμμα ως ορθογώνια, συγκρίνοντάς τα με ένα οπτικό πρωτοτυπικό παράδειγμα. Παράλληλα ανέφεραν ότι τα παιδιά που δέχονται τα τετράγωνα σαν ορθογώνια, το κάνουν ίσως επειδή δεν είναι σε θέση να κρίνουν την ισότητα όλων των πλευρών του σχήματος.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

2.1. Υποκείμενα της έρευνας

Για τη συλλογή των δεδομένων, το δείγμα αποτέλεσαν παιδιά προδημοτικής ενός αστικού νηπιαγωγείου στην Κύπρο. Συμμετείχαν συνολικά 50 παιδιά. Στα 25 παιδιά (ομάδα Α) έγινε παρεμβατική διδασκαλία με χρήση παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων, ενώ στα υπόλοιπα 25 παιδιά (ομάδα Β) εφαρμόστηκε παρεμβατική διδασκαλία με χρήση μόνο παραδειγμάτων σε συνδυασμό με ένα εφαρμογίδιο δυναμικής γεωμετρίας.

2.2. Διαδικασία

Το ρόλο της εκπαιδευτικού ανέλαβαν οι ερευνήτριες. Πριν από την εφαρμογή των παρεμβατικών διδασκαλιών δόθηκαν σαφείς οδηγίες για τον τρόπο με τον οποίο θα εφαρμοζόταν καθεμιά από αυτές.

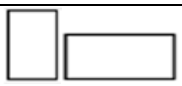
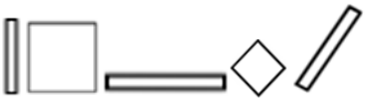
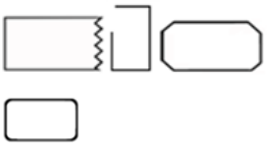
Προ-πειραματικό δοκίμιο: Η πρώτη χορήγηση του δοκιμίου έγινε κατά τη διάρκεια των ελεύθερων δραστηριοτήτων σε ατομικό επίπεδο στο φυσιολογικό περιβάλλον της τάξης, πριν από την εφαρμογή της παρεμβατικής διδασκαλίας.

Παρεμβατική διδασκαλία: Οι δύο διδασκαλίες είχαν διάρκεια 2 διδακτικών περιόδων (80 λεπτά) και πραγματοποιήθηκαν από τις ίδιες της ερευνήτριες. Κατά τη διάρκεια και των δύο διδασκαλιών προέκυψαν οι κρίσιμες ιδιότητες που καθορίζουν εάν ένα σχήμα είναι ορθογώνιο ή όχι. Κατά τη διάρκεια της παρεμβατικής διδασκαλίας στην ομάδα Α, παρουσιάστηκαν διαισθητικά και μη διαισθητικά παραδείγματα και μη παραδείγματα ορθογωνίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα μη παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την παρεμβατική διδασκαλία, δεν ήταν τα ίδια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στα δοκίμια. Κατά τη διάρκεια της παρεμβατικής διδασκαλίας στην ομάδα Β, οι μαθητές ήρθαν σε επαφή μόνο με διαισθητικά και μη διαισθητικά παραδείγματα ορθογωνίων. Παράλληλα έγινε χρήση ενός εφαρμογιδίου δυναμικής γεωμετρίας στο οποίο οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να αυξομειώσουν τις διαστάσεις και να αλλάξουν τον προσανατολισμό των ορθογωνίων.

Μετα-πειραματικό δοκίμιο: Με την ολοκλήρωση των παρεμβατικών διδασκαλιών έγινε χορήγηση του ίδιου αρχικού δοκιμίου, την επόμενη ημέρα. Κάποιες περιπτώσεις παιδιών που κρίθηκαν ενδιαφέρουσες, κλήθηκαν σε ολιγόλεπτη συνέντευξη.

2.3. Εργαλεία Μέτρησης

Για τη συλλογή των δεδομένων της εργασίας χορηγήθηκε ένα κοινό δοκίμιο και για τις δύο ομάδες σε ατομικό επίπεδο πριν και μετά από την παρεμβατική διδασκαλία. Η κατηγοριοποίηση των σχημάτων βασίστηκε στη θεωρία των Tsamir et al. (2008). Στο δοκίμιο υπήρχαν 14 σχήματα (βλ. Πίνακα 1) από τα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να χρωματίσουν μόνο τα ορθογώνια. Ο χρόνος που δόθηκε στους μαθητές για την επίλυση κάθε δοκιμίου ήταν περίπου 20 λεπτά.

	Παραδείγματα	Μη παραδείγματα
Διαισθητικά		
Μη διαισθητικά		

Πίνακας 1:Παραδείγματα/μη παραδείγματα ορθογωνίου που χρησιμοποιήθηκαν στο δοκίμιο

Κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογήθηκε με 0, ενώ κάθε ορθή με 1. Πραγματοποιήθηκε περιγραφική και επαγωγική ανάλυση των δεδομένων με τη χρήση του στατιστικού πακέτου SPSS.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για να εξεταστεί εάν οι δύο ομάδες μαθητών διαφέρουν στην επίδοσή τους στην αρχική μέτρηση έγινε έλεγχος t για ανεξάρτητα δείγματα. Όπως διαπιστώθηκε, οι μαθητές της Β ομάδας ($\bar{x}$= 0,59, SD=0,11) είχαν ελαφρώς ψηλότερη επίδοση σε σχέση με τους μαθητές της Α ομάδα ($\bar{x}$=0,57, SD= 0,13). Ωστόσο ο έλεγχος t για ανεξάρτητα δείγματα έδειξε ότι η διαφορά αυτή δεν ήταν στατιστικά σημαντική σε επίπεδο α=0,05 (t=-0,69, df= 48, p=0,49)

Για να γίνει έλεγχος αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των ομάδων των μαθητών στις δύο παρεμβάσεις στο μετα-πειραματικό δοκίμιο, έγινε χρήση της ανάλυσης συνδιακύμανσης ANCOVA, ορίζοντας ως συμμεταβλητή (covariance) την επίδοση στο προ-πειραματικό δοκίμιο. Βρέθηκε ότι οι δύο ομάδες έχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ τους στο μετα-πειραματικό δοκίμιο (F= 14,86, p=0,00). Συγκεκριμένα βρέθηκε ότι η ομάδα Α στην οποία έγινε παρέμβαση με τη χρήση παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων, είχε στατιστικά υψηλότερη επίδοση ($\bar{X}_A$=0,84, SD=0,12) από την ομάδα Β ($\bar{X}_B$ =0,72, SD=0,12).

Θέλοντας να διαπιστωθεί σε ποιο είδος ασκήσεων φαίνεται η διαφορά των δύο ομάδων, χρησιμοποιήθηκε περιγραφική στατιστική.

Στον πίνακα 2 παρουσιάζεται η συχνότητα (σε ποσοστό) των σωστών αναγνωρίσεων για τις κατηγορίες διαισθητικών και μη διαισθητικών παραδειγμάτων στο προ-πειραματικό και μετα-πειραματικό δοκίμιο.

Όπως φαίνεται από τον πίνακα 2, το ποσοστό αναγνώρισης του ορθογωνίου είναι πολύ ψηλό και για τις δύο περιπτώσεις διαισθητικών σχημάτων κατά την αρχική χορήγηση. Οι παρεμβατικές διδασκαλίες που ακολούθησαν φαίνεται να βελτίωσαν την επίδοση των μαθητών αφού όλοι οι μαθητές ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν σωστά τα διαισθητικά παραδείγματα (100%).

Όσον αφορά την κατηγορία μη διαισθητικά παραδείγματα σημαντική φαίνεται να είναι η αύξηση της επίδοσης των μαθητών και στις δύο ομάδες, μετά την παρεμβατική διδασκαλία.

Ωστόσο μεγαλύτερη βελτίωση φαίνεται να παρουσιάζουν οι μαθητές της Β ομάδας αφού κατά την αρχική χορήγηση το ποσοστό επιτυχίας ήταν αρκετά χαμηλό για όλα τα σχήματα (8%-12%) ενώ με την ολοκλήρωση της παρεμβατικής διδασκαλίας περισσότεροι από τους μισούς μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν σωστά τα μη διαισθητικά ορθογώνια αφού το ποσοστό επιτυχίας κυμάνθηκε από 64%-100%.

Τόσο οι μαθητές της ομάδας Α (80%) όσο και οι μαθητές της ομάδας Β (80%) φαίνεται να βελτίωσαν την ικανότητα αναγνώρισης του τετραγώνου σε συνήθη προσανατολισμό.

	Σχήμα	Ομάδα Α		Ομάδα Β	
	Διαισθητικά παραδείγματα	Προ πειραματικό δοκίμιο (%)	Μετα πειραματικό δοκίμιο (%)	Προ πειραματικό δοκίμιο (%)	Μετα πειραματικό δοκίμιο (%)
1.		92	100	96	100
2.		100	100	80	100
	Μη διαισθητικά παραδείγματα				
3.		44	92	12	80
4.		48	80	8	80
5.		40	92	8	76
6.		36	56	12	44
7.		32	72	12	64

Πίνακας 2: Ποσοστά Επιτυχίας των Δύο Ομάδων για την Κατηγορία Διαισθητικά και μη Διαισθητικά Παραδείγματα στο Προπειραματικό και Μεταπειραματικό Δοκίμιο.

Ωστόσο χαμηλή φαίνεται να είναι η επίδοσή τους στην περίπτωση του τετραγώνου σε μη συνήθη προσανατολισμό (σχήμα 6) καθώς και στην περίπτωση του μακρόστενου ορθογωνίου (σχήμα 7) σε μη συνήθη προσανατολισμό.

Παρόλο που και στις δύο διδασκαλίες δόθηκε σημασία στην αναγνώριση του τετραγώνου ως ορθογώνιο, μόνο το 56% των μαθητών της Α ομάδας και το 44% της Β ομάδας ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν το τετράγωνο σε μη συνήθη προσανατολισμό ως ορθογώνιο στο μεταπειραματικό δοκίμιο. Πιο κάτω δίνεται ο διάλογος μεταξύ της ερευνήτριας και ενός μαθητή της ομάδας Β που είχε βελτιώσει την επίδοση στην αναγνώριση ορθογωνίων, στο μετα-πειραματικό δοκίμιο.

Ερευνήτρια: Γιατί δεν ζωγράφισες αυτό το σχήμα; (σχήμα 6)

Μαθητής: Δεν το ζωγράφισα γιατί είναι τετράγωνο, δεν είναι ορθογώνιο.

Ερευνήτρια: Αν μετρήσεις τις πλευρές και τις ορθές του γωνίες; Έχει όσες και το ορθογώνιο;

Μαθητής : …..1, 2, 3, 4 πλευρές…..1,2,3,4 ορθές γωνίες. Ναι.

Ερευνήτρια: Άρα μπορούμε να πούμε ότι είναι ορθογώνιο;

Μαθητής: Όχι γιατί ξέρω ότι αυτό το σχήμα το λένε τετράγωνο.

Στον πίνακα 3 παρουσιάζονται τα ποσοστά σωστών αναγνωρίσεων των διαισθητικών και μη διαισθητικών μη παραδειγμάτων ορθογωνίου.

Σχήμα	Ομάδα Α		Ομάδα Β	
Διαισθητικά μη παραδείγματα	Προ Πειραματικό δοκίμιο (%)	Μετα Πειραματικό δοκίμιο (%)	Προ Πειραματικό δοκίμιο (%)	Μετα Πειραματικό δοκίμιο (%)
1. 	80	100	100	100
2. 	76	100	96	92
3. 	28	44	44	20
Μη διαισθητικά μη παραδείγματα				
4. 	20	80	36	40

5. 	12	68	28	32
6. 	40	72	80	64
7. 	56	92	60	56

Πίνακας 3: Ποσοστά επιτυχίας των δύο ομάδων για την κατηγορία διαισθητικά και μη διαισθητικά μη παραδείγματα στο Προπειραματικό και Μεταπειραματικό Δοκίμιο.

Ιδιαίτερη έμφαση αξίζει να δοθεί στην περίπτωση του παραλληλογράμμου. Παρόλο που το συγκεκριμένο σχήμα έχει κατηγοριοποιηθεί στην κατηγορία των διαισθητικών μη παραδειγμάτων, εντούτοις μόνο ένα μικρό ποσοστό μαθητών της ομάδας Α (44%) και της ομάδας Β (20%) φαίνεται να το αναγνωρίζουν ως μη παράδειγμα.

Αίσθηση φαίνεται να προκαλεί και το γεγονός ότι μετά την παρεμβατική διδασκαλία, το ποσοστό των μαθητών της Β ομάδας που ήταν σε θέση να αναγνωρίσει το παραλληλόγραμμο ως μη παράδειγμα (20%), μειώθηκε κάτι που δημιουργεί ερωτηματικά σχετικά με την επίδραση της παρεμβατικής διδασκαλίας με τη χρήση του μαθηματικού εφαρμογιδίου.

Παρόμοια φαίνεται να είναι και τα αποτελέσματα που προκύπτουν στην περίπτωση των μη διαισθητικών μη παραδειγμάτων με τους μαθητές της ομάδας Α να αυξάνουν το ποσοστό των σωστών αναγνωρίσεων κατά την τελική χορήγηση. Αντίθετα για τους μαθητές της ομάδας Β η αύξηση του ποσοστού αναγνώρισης είναι ελάχιστη (σχήμα 4: 40%, σχήμα 5: 32%) ενώ στις δύο τελευταίες περιπτώσεις σχημάτων (σχήμα 6: 64%, σχήμα 7: 56%) το ποσοστό των μαθητών που αναγνώρισαν τα σχήματα ως μη παραδείγματα μειώθηκε.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εξετάσει αν η διδασκαλία με χρήση παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων ή η διδασκαλία με χρήση μόνο παραδειγμάτων σε συνδυασμό με ένα εφαρμογίδιο δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να βοηθήσει καλύτερα τους μαθητές προδημοτικής στην αναγνώριση του ορθογωνίου.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, μετά την παρεμβατική διδασκαλία, μεγαλύτερη βελτίωση φαίνεται να παρουσίασαν οι μαθητές της ομάδας Α, οι οποίοι διδάχτηκαν με τη χρήση παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων, και η επίδοση αυτή φαίνεται να είναι στατιστικά σημαντική.

Η χρήση των δύο παρεμβατικών διδασκαλιών φαίνεται να βοήθησε τους μαθητές και των δύο ομάδων να βελτιώσουν την επίδοσή τους στις περιπτώσεις των διαισθητικών και μη διαισθητικών παραδειγμάτων. Μέσω των δυνατοτήτων που προσέφερε το μαθηματικό εφαρμογίδιο στους μαθητές της ομάδας Β, οι μαθητές διερεύνησαν και

κατέληξαν στις κρίσιμες ιδιότητες του ορθογωνίου με αποτέλεσμα να αναγνωρίσουν τις περισσότερες περιπτώσεις μη διαισθητικών παραδειγμάτων. Τα αποτελέσματα αυτά βρίσκονται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα των Jones (2000) και Christou et al (2004). Παρόμοια συμπεριφορά φαίνεται να παρουσιάζουν και οι μαθητές της ομάδας Α. Οι διδασκαλίες φαίνεται να βοήθησαν τους μαθητές να δημιουργήσουν ευέλικτα πρωτοτυπικά παραδείγματα (Wilson, 1990). Όσον αφορά την αναγνώριση του τετραγώνου ως μη διαισθητικό παράδειγμα ορθογωνίου, οι παρεμβατικές διδασκαλίες φαίνεται να συνέβαλαν σε σημαντικό βαθμό αφού ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών και από τις δύο ομάδες αναγνώρισαν σωστά το τετράγωνο σε συνήθη προσανατολισμό και αυτό είναι κάτι που μπορεί να ερμηνευτεί με βάση τα ευρήματα των Clements et al. (1999). Ωστόσο, χαμηλή φαίνεται να παρέμεινε η επίδοση των μαθητών στα μη διαισθητικά παραδείγματα σε μη συνήθη προσανατολισμό (βλ. Πίνακα 2 σχήματα 6, 7). Ο προσανατολισμός των σχημάτων φαίνεται να επηρέασε την ταξινόμηση των σχημάτων κάτι που επιβεβαιώνεται και στα ευρήματα των Walcott, Mohr & Kastberg (2009). Στα πρωτοτυπικά σχήματα που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, εκτός από τις απαραίτητες και επαρκείς ιδιότητες που έχουν όλα τα παραδείγματα, φαίνεται να έχουν συμπεριλάβει και μη κρίσιμες ιδιότητες (Hershkowitz, 1989), με αποτέλεσμα να οδηγηθούν σε λανθασμένες αναγνωρίσεις.

Σημαντική φαίνεται να είναι η επίδραση των παρεμβατικών διδασκαλιών στην ορθή αναγνώριση των διαισθητικών μη παραδειγμάτων ορθογωνίου. Ωστόσο το παραλληλόγραμμο φαίνεται να μην αναγνωρίστηκε ως διαισθητικό μη παράδειγμα από τους μαθητές κατά την αρχική χορήγηση αφού το ποσοστό επιτυχίας ήταν χαμηλό. Παράλληλα φαίνεται να δημιουργούνται κάποιοι προβληματισμοί σχετικά με την επίδραση της παρεμβατικής διδασκαλίας με τη χρήση του εφαρμογιδίου δυναμικής γεωμετρίας στην κατηγορία των μη διαισθητικών μη παραδειγμάτων. Συγκεκριμένα στην κατηγορία αυτή, η επίδοση των μαθητών της ομάδας Β μειώθηκε σε δύο περιπτώσεις (βλ. Πίνακα 3 σχήματα 6, 7) σε σχέση με την αρχική χορήγηση που ήταν ιδιαίτερα ψηλή. Τα αποτελέσματα αυτά δε φαίνεται να παρουσιάστηκαν στους μαθητές της ομάδας Α οι οποίοι βελτίωσαν την ικανότητα ορθής αναγνώρισης σε όλες τις περιπτώσεις μη διαισθητικών μη παραδειγμάτων.

Όπως διαπιστώνεται μέσα από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας, οι μαθητές οι οποίοι διδάχτηκαν με τη χρήση παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων φαίνεται να παρουσίασαν καλύτερη επίδοση σε σχέση με τους μαθητές που διδάχτηκαν με τη χρήση παραδειγμάτων σε συνδυασμό με το εφαρμογίδιο δυναμικής γεωμετρίας. Το γεγονός αυτό αποτελεί ένα σημαντικό εύρημα όσον αφορά τη διδακτική πρακτική που εφαρμόζεται στις σχολικές αίθουσες. Μια πιθανή ερμηνεία για τα συγκεκριμένα αποτελέσματα φαίνεται να είναι και το γεγονός ότι η ποικιλία των μη παραδειγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν δημιούργησε ένα είδος γνωστικής σύγκρουσης που οδήγησε τα παιδιά να εστιαστούν στις κρίσιμες ιδιότητες του ορθογωνίου ξεφεύγοντας από τα πρωτοτυπικά παραδείγματα που πολλές φορές οδηγούν σε λανθασμένες αναγνωρίσεις. Αντίθετα, το εφαρμογίδιο δυναμικής γεωμετρίας παρόλο που

προσέφερε μια ποικιλία παραδειγμάτων στους μαθητές, εντούτοις δεν ήταν σε θέση να βοηθήσει τους μαθητές ώστε να εστιάσουν στις κρίσιμες ιδιότητες των σχημάτων με αποτέλεσμα να παραμείνουν προσκολλημένοι σε πρωτοτυπικά παραδείγματα που πιθανόν να τους οδήγησαν σε λανθασμένες αναγνωρίσεις. Ωστόσο, λόγω του περιορισμένου μεγέθους του δείγματος, τα αποτελέσματα δεν μπορούν να γενικευτούν και αυτό αποτελεί έναν από τους περιορισμούς της εργασίας. Κατά συνέπεια κρίνεται απαραίτητη η διενέργεια περαιτέρω έρευνας, με μεγαλύτερη διάρκεια και δείγμα, που να εξετάζουν σε βάθος την επίδραση της δυναμικής γεωμετρίας σε μαθητές προσχολικής ηλικίας, κάτι που φαίνεται να αποτελεί ένα ερευνητικό κενό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2, 339–352.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D.A. Grouws (Ed), *Handbook of research on mathematics and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Zeitler-Hannibal, M. A. & Sarama, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (2), 192-212.

Fishbein, E. (1993). The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61–76.

Klausmeier, H., & Feldman, K. (1975). Effects of a definition and a varying number of examples and nonexamples on concept attainment. *Journal of Educational Psychology*, 67, 174–178.

McKinney, C., Larkins, A., Ford, M., & Davis III, J. (1983). The effectiveness of three methods of teaching social studies concepts to fourth-grade students: an aptitude-treatment interaction study. *American Educational Research Journal*, 20, 663–670.

Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 179–196.

National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM). *Principles and Standarts for School Mathematics.* Va.: NCTM. 2000.

Petty, O. S. & Jansson, L. C. (1987). Sequencing Examples and Nonexamples to Facilitate Concept Attainment. *Journal for Research in Mathematis Education,* 18 (2), 112-125.

Schwarz, B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: brakes or levers in learning the function concept? *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 362–389.

Tsamir. P., Tirosh. D. & Levenson. E. (2008). Intuitive non examples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (2), 81-95. doi: 10.1007/s10649-008-9133-5

Walcott, C., Mohr, D. & Kastberg, S. E. (2009). Making sense of shape: An analysis of children's written responses. *Journal of Mathematical Behavior*, 28, 30–40.

Wilson, S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 31–47.

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 165–182. doi 10.1007/s10649-008-9140-6

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΚΕΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Παρασκευή Σοφοκλέους & Δήμητρα Πίττα-Πανταζή

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

skevis@ucy.ac.cy & dpitta@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της εργασίας αυτής ήταν να εξετάσει τον τρόπο με τον οποίο η χρήση της τεχνολογίας μπορεί να αναπτύξει ανωτέρου επιπέδου σκέψη στα μαθηματικά μαθητών Ε' και Στ' δημοτικού. Οι μαθητές συμμετείχαν σε έξι σαραντάλεπτα μαθήματα σχετικά με την ερμηνεία και την κατασκευή γραμμικών γραφικών παραστάσεων, χρησιμοποιώντας το λογισμικό SimCalc. Ο σχεδιασμός των μαθημάτων βασίστηκε στο Μοντέλο Σκέψης, στην αρχή «μαθαίνω με την τεχνολογία» και στη διερευνητική μάθηση. Στην παρούσα εργασία θα παρουσιαστεί ο τρόπος που εργάστηκε ένα ζευγάρι μαθητών Στ' δημοτικού στα μαθήματα αυτά. Συγκεκριμένα, θα περιγραφεί: (i) η ανάπτυξη της μαθηματικής τους γνώσης, της κριτικής, της δημιουργικής και της σύνθετης σκέψης τους, (ii) η εξέλιξή τους στον τρόπο χειρισμού του λογισμικού και (iii) η αλλαγή στα συναισθήματά τους.

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο κόσμος του σήμερα και του μέλλοντος χαρακτηρίζεται από κοινωνικοοικονομικές προκλήσεις, αυξανομένη ανταγωνιστικότητα και εξάρτηση από τη χρήση των τεχνολογικών επιτευγμάτων. Για το λόγο αυτό, το άτομο για να επιβιώσει, πρέπει να τα αντιμετωπίσει (π.χ., English, 2008). Όμως, η εκπαίδευση του ατόμου αδυνατεί να «συναντήσει» αυτό τον κόσμο, αφού συνεχίζει να είναι η ίδια και να μην λαμβάνει υπόψη όλα αυτά τα επιτεύγματα και τις προκλήσεις (Levin & Wadmany, 2006). Αυτό το γεγονός παρουσιάζεται και πιο ειδικά στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπου αναγνωρίζεται ότι υπάρχει αναντιστοιχία μεταξύ των ικανοτήτων που δίνεται έμφαση στο σχολείο και των ικανοτήτων που χρειάζονται οι μαθητές για να πετύχουν εκτός σχολείου (Lesh & Zawojewski, 2007). Για αυτό, οι μαθητές χρειάζονται εκείνη την εκπαίδευση που θα τους ενισχύσει με ικανότητες απαραίτητες για επιτυχία εκτός σχολείου. Τέτοιες ικανότητες μπορεί να είναι: η δημιουργική ικανότητα, η ικανότητα κατασκευής, περιγραφής, εξήγησης και πρόβλεψης σύνθετων συστημάτων, η ικανότητα διαχείρισης πολυεπίπεδων εργασιών που απαιτούν σχεδιασμό, έλεγχο και επικοινωνία ιδεών (Lesh & Zawojewski, 2007). Αυτές οι ικανότητες, σύμφωνα με το Μοντέλο Σκέψης του Iowa Department of Education (1989), συνθέτουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη (higher order thinking).

Με βάση έναν αριθμό ερευνητών, η τεχνολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν ανωτέρου επιπέδου σκέψη, δηλαδή να σκέφτονται σε βάθος (π.χ., Heid & Blume, 2008; Jonassen, 2000). Όμως, είναι ακόμη αναπάντητο το ερώτημα σχετικά με το ρόλο και τον τρόπο με τον οποίο η τεχνολογία μπορεί να ενισχύσει ή να αλλάξει τη μάθηση των μαθηματικών και ειδικότερα το πώς μπορεί να αναπτύξει πιο σύνθετες ικανότητες στα μαθηματικά που χρειάζονται στον ανεπτυγμένο κόσμο του σήμερα (English, 2008; Heid & Blume, 2008). Αυτό θα προσπαθήσει να εξετάσει η εργασία αυτή.

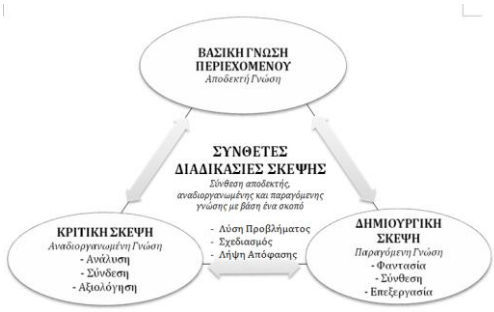
2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη στα Μαθηματικά

Η έννοια «ανωτέρου επιπέδου σκέψη» (higher order thinking) έχει δεχτεί πολλές ερμηνείες από διαφορετικές επιστημονικές περιοχές, οι οποίες δεν ταυτίζονται και η κάθε μια έχει τη βάση της στις ιδέες και στη φιλοσοφία της (Brookhart, 2010; Lewis & Smith, 1993). Οι φιλόσοφοι και γενικά οι εκπρόσωποι των ανθρωπιστικών επιστημών ταυτίζουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη με το λογικό συλλογισμό και την κριτική σκέψη, δηλαδή με την ικανότητα του ατόμου να καθορίζει με τη λογική του τι πιστεύει και τι κάνει (Lewis & Smith, 1993). Από την άλλη, οι ψυχολόγοι και γενικά οι ερευνητές από τις θετικές επιστήμες ταυτίζουν την ανωτέρου επιπέδου σκέψη με τη λύση προβλήματος, δηλαδή με την ικανότητα του ατόμου να λύνει σύνθετα προβλήματα (Lewis & Smith, 1993). Επίσης, όπως επισημαίνει η Brookhart (2010), υπάρχει και μια πιο γενική προσέγγιση της ανωτέρου επιπέδου σκέψης ως επέκταση της σκέψης, δηλαδή ως την ικανότητα εφαρμογής των υπάρχουσων γνώσεων σε νέες καταστάσεις. Όμως, όπως επισημαίνουν οι Lewis και Smith (1993), η λογική σκέψη, η κριτική σκέψη, η λύση προβλήματος και η επέκταση της σκέψης αποτελούν απαραίτητες ικανότητες για την κατανόηση της έννοιας «ανωτέρου επιπέδου σκέψη», αλλά δεν είναι αρκετές και ικανές για την εννοιολογική της κατανόηση. Συγκεκριμένα, αναφέρουν ότι η έννοια αυτή είναι πολυδιάστατη και περιλαμβάνει και άλλες ικανότητες, όπως η δημιουργική σκέψη και η ικανότητα λήψης απόφασης. Έχουν αναπτυχθεί κατά καιρούς διάφορα μοντέλα για να παρουσιάσουν τις πολλαπλές διαστάσεις της ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Ένα τέτοιο μοντέλο είναι το Μοντέλο Σκέψης (Integrated Thinking Model) (Iowa Department of Education, 1989), στο οποίο ορίζεται ότι για να θεωρείται ότι κάποιος έχει αναπτύξει ανωτέρου επιπέδου σκέψη, πρέπει να συνδυάζει γνώση περιεχομένου, κριτική σκέψη και δημιουργική σκέψη (βλέπε Σχήμα 1). Αυτά τα τρία στοιχεία αλληλοσυσχετίζονται και εξαρτάται το ένα από το άλλο.

Με βάση το Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989), η γνώση περιεχομένου είναι η γνώση που μπορεί να ανακληθεί άμεσα από αυτά που οι

μαθητές διδάσκονται. Η κριτική σκέψη αποτελεί την ικανότητα αναδιοργάνωσης της γνώσης, χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες της ανάλυσης, της σύνδεσης και της αξιολόγησης της αποδεκτής γνώσης. Η δημιουργική σκέψη περιλαμβάνει την παραγωγή νέας γνώσης, χρησιμοποιώντας και επεκτείνοντας την αποδεκτή και την αναδιοργανωμένη γνώση. Συγκεκριμένα, η δημιουργική γνώση είναι η νέα γνώση που προέρχεται από τη χρήση των διαδικασιών της φαντασίας, της σύνθεσης και της επεξεργασίας. Η σύνθετη σκέψη αποτελεί το συνδυασμό της γνώσης περιεχομένου και των διαδικασιών της κριτικής και της δημιουργικής σκέψης που οδηγούν στην παραγωγή μιας σύνθεσης αποδεκτής, αναδιοργανωμένης και παραγόμενης γνώσης. Με λίγα λόγια, η σύνθετη σκέψη δεν αποτελεί ξεχωριστό, διακριτό είδος σκέψης, αλλά αποτελεί συνδυασμό κριτικών και δημιουργικών ικανοτήτων με διάφορους τρόπους. Πιο συγκεκριμένα, αυτή η σύνθετη σκέψη αποτελείται από διαδικασίες λύσης προβλήματος, σχεδιασμού και λήψης απόφασης.



Σχήμα 1: Μοντέλο Σκέψης (Iowa Department of Education, 1989)

2.2 Νέες Τεχνολογίες και Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη στα Μαθηματικά

Ο Jonassen (2000) χρησιμοποιώντας το Μοντέλο Σκέψης, υποστηρίζει ότι η τεχνολογία μπορεί να αναπτύξει και να ενισχύσει δεξιότητες ανωτέρου επιπέδου σκέψης. Πιο συγκεκριμένα, ο Jonassen (2000) αναφέρει ότι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν δεξιότητες ανωτέρου επιπέδου σκέψης σε ένα περιβάλλον που υποστηρίζεται από τη χρήση νέων τεχνολογιών, το οποίο περιλαμβάνει στοχευμένες με πολλαπλά στάδια διαδικασίες, όπως ο σχεδιασμός κατάστασης, η λήψη απόφασης και η λύση προβλήματος. Όμως, ο Jonassen (2000) δεν υποστήριξε τις απόψεις του για το ρόλο αυτό της τεχνολογίας με εμπειρικά δεδομένα.

Παράλληλα, μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας στη μαθηματική παιδεία σχετικά με το ρόλο της τεχνολογίας στην ανάπτυξη δεξιοτήτων ανωτέρου επιπέδου σκέψης, βρέθηκαν αντικρουόμενα ερευνητικά αποτελέσματα. Από τη μια, αποτελέσματα ερευνών έχουν δείξει ότι η χρήση νέων τεχνολογιών ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών σε μαθηματικές έννοιες (Heid & Blume, 2008), την ικανότητα τους να κρίνουν και να επανεξετάζουν τη σκέψη τους (Geiger, Faragher, & Goos, 2010), τη δημιουργική και αποκλίνουσα σκέψη τους (Tabach et al., 2008). Όμως, από την άλλη, αποτελέσματα ερευνών έχουν δείξει ότι η χρήση της

τεχνολογίας δεν φαίνεται να έχει επίδραση στις ικανότητες των μαθητών για λύση προβλήματος, για εννοιολογική και διαδικαστική κατανόηση (Ellington, 2003). Αυτή η αντικρουόμενη φύση των αποτελεσμάτων μπορεί να οφείλεται, σύμφωνα με τον Kaput, στο ότι η χρήση της τεχνολογίας έχει γίνει απλώς μια υποδομή στις τάξεις των μαθηματικών του σήμερα, αφού η παρουσία τους και μόνο δεν είναι αρκετή για θετικά αποτελέσματα στη μάθηση των μαθητών (Kaput & Hegedus, 2007). Άρα, εξαρτάται με ποιο τρόπο θα χρησιμοποιηθούν. Για αυτό, όπως τονίζει η English (2008), χρειάζονται περισσότερες έρευνες που να εξετάζουν την επίδραση της τεχνολογίας στην ανάπτυξη διαδικασιών σκέψης, όταν χρησιμοποιείται με κατάλληλο τρόπο.

3. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Σκοπός της εργασίας αυτής ήταν να εξετάσει το ρόλο της τεχνολογίας, πιο συγκεκριμένα του λογισμικού SimCalc Mathworlds® (SimCalc) (Kaput & Roschelle, 1998), στην ανάπτυξη ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά, όπως ορίζεται στο Μοντέλο Σκέψης του Iowa Department of Education (1989). Συγκεκριμένα, έγινε προσπάθεια να απαντηθούν τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα.

1. Ποιες συμπεριφορές ανωτέρου επιπέδου σκέψης παρατηρούνται κατά την εργασία των μαθητών στο περιβάλλον του SimCalc;
2. Με ποιους τρόπους ο χειρισμός του λογισμικού SimCalc από μέρους των μαθητών αλλάζει κατά τη διάρκεια της εργασίας τους σε αυτό;
3. Υπάρχει αλλαγή στα συναισθήματα των μαθητών προς το περιβάλλον του SimCalc κατά τη διάρκεια της εργασίας τους σε αυτό;

Το κάθε ένα από αυτά τα ερωτήματα εξετάζει μια διάσταση της εμπλοκής των μαθητών στη διαδικασία μάθησης: τη γνώση, τη συμπεριφορά και τα συναισθήματα (Fredricks, Blumenfeld, & Paris, 2004). Δηλαδή, το πρώτο ερώτημα εξετάζει το ρόλο της τεχνολογίας στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών, το δεύτερο ερώτημα εξετάζει το ρόλο της τεχνολογίας στην εξέλιξη του τρόπου χειρισμού του λογισμικού από τους μαθητές και το τρίτο ερώτημα εξετάζει το ρόλο της τεχνολογίας στη συναισθηματική ανάπτυξή τους. Η χρήση των τριών αυτών διαστάσεων για καθορισμό του ρόλου της τεχνολογίας είναι σημαντική, γιατί αποτελούν σημαντικό δείκτη ποιοτικής και αποτελεσματικής μάθησης παρουσιάζοντας ένα ευρύ φάσμα χαρακτηρισμών της εμπλοκής των μαθητών στη διαδικασία μάθησης (Fredricks et al., 2004).

4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1 Δείγμα της Έρευνας και Διαδικασία

Για την εξέταση του σκοπού της εργασίας αυτής, σχεδιάστηκαν 6 σαραντάλεπτα μαθήματα αξιοποιώντας το λογισμικό SimCalc και εφαρμόστηκαν σε μια τάξη δεκαπέντε μαθητών Ε' και Στ' δημοτικού (10 και 11 χρονών, 6 αγόρια και 9 κορίτσια) ενός δημόσιου σχολείου της υπαίθρου στην Κύπρο. Η διδάσκουσα των μαθημάτων αυτών ήταν η πρώτη συγγραφέας του άρθρου και διεξήχθησαν σε διάστημα 3 εβδομάδων. Οι συμμετέχοντες δεν είχαν χρησιμοποιήσει ξανά το λογισμικό SimCalc, καθώς και κανένα άλλο λογισμικό ή εφαρμογίδιο στο μάθημα των μαθηματικών. Άρα, δεν ήταν εξοικειωμένοι με τη χρήση της τεχνολογίας στο μάθημα των μαθηματικών. Για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων του άρθρου αυτού, θα μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο εργάστηκε ένα ζευγάρι μαθητών Στ' δημοτικού στα μαθήματα αυτά.

4.2 Σχεδιασμός του Περιβάλλοντος Μάθησης στο SimCalc

Ο σχεδιασμός των μαθημάτων στηρίχθηκε στη διερευνητική μάθηση, όπου οι μαθητές είχαν ενεργό ρόλο, πρότειναν και αξιολογούσαν μαθηματικές ιδέες και επικοινωνούσαν χρησιμοποιώντας μαθηματικά (Goos, 2004). Ακόμη, τα μαθήματα βασίστηκαν στην αρχή της μάθησης με τεχνολογία, όπου το SimCalc χρησιμοποιήθηκε για να υποστηρίξει την κατανόηση των μαθητών (Jonnassen, 2000). Εκτός από τα πιο πάνω, ο σχεδιασμός των μαθημάτων και κατ' επέκταση οι στόχοι των μαθημάτων που σχεδιάστηκαν με το SimCalc βασίστηκαν στα τέσσερα στοιχεία του Μοντέλου Σκέψης. Συγκεκριμένα, στόχοι των μαθημάτων ήταν η ανάπτυξη της εννοιολογικής γνώσης των μαθητών για την ερμηνεία και την κατασκευή γραφικών παραστάσεων απόστασης-χρόνου και ταχύτητας-χρόνου, της κριτικής, της δημιουργικής και της σύνθετης σκέψης τους σε αυτές τις έννοιες. Παρόμοια, και οι δραστηριότητες των μαθημάτων διακρίνονται σε αυτές που προωθούν την κριτική σκέψη (π.χ., Να γράψετε ομοιότητες και διαφορές μεταξύ της γραφικής παράστασης απόστασης-χρόνου και της αντίστοιχης ταχύτητας-χρόνου), τη δημιουργική σκέψη (π.χ., Να προσθέσετε ένα ακόμη αυτοκίνητο στην προσομοίωση σας, ώστε να τερματίζει πρώτο σε σχέση με τα άλλα δυο αυτοκίνητα που υπάρχουν ήδη σε αυτή. Να δώσετε όσες περισσότερες και διαφορετικές μορφές γραφικών παραστάσεων απόστασης-χρόνου μπορείτε, για να δείξετε την κατάσταση αυτή) και τη σύνθετη σκέψη (π.χ., Δίνεται το πιο κάτω σενάριο και θα πρέπει να το δείξετε στο λογισμικό SimCalc, ώστε να βρείτε ποιος τερματίζει πρώτος. Να δείξετε ξεκάθαρα τις γραφικές παραστάσεις απόστασης-χρόνου και ταχύτητας-χρόνου. ή Να κατασκευάσετε το δικό σας αγώνα και να το περιγράψετε).

Όσον αφορά την οργάνωση της τάξης, οι μαθητές εργάζονταν σε ζευγάρια συμπληρώνοντας τα φύλλα εργασίας. Η εκπαιδευτικός παρατηρούσε την εργασία τους και έδινε κατάλληλη ανατροφοδότηση. Ακόμη, στην αρχή και στο τέλος του κάθε μαθήματος, η εκπαιδευτικός καλούσε τους μαθητές στην ολομέλεια της τάξης, ώστε να γίνει παρουσίαση της εργασίας τους, για ανταλλαγή ιδεών και εμπειριών. Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το σχεδιασμό και την οργάνωση των μαθημάτων θα βρείτε στους Pitta-Pantazi, Sophocleous και Christou (2013).

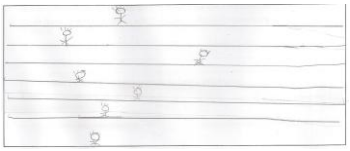
4.3 Συλλογή Δεδομένων και Ανάλυση Δεδομένων

Για να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασία αυτής, έχουν συλλεχθεί δεδομένα από τρεις πηγές: (α) τις γραπτές απαντήσεις των μαθητών στα φύλλα εργασίας, (β) τα ηλεκτρονικά αρχεία που δημιούργησαν ή άλλαξαν οι μαθητές στο SimCalc με βάση τις οδηγίες των δραστηριοτήτων που συμμετείχαν και (γ) τις λεπτομερείς σημειώσεις του ερευνητή που παρακολουθούσε τις ενέργειες, τις συμπεριφορές και τις συζητήσεις των δυο μαθητών. Για την ανάλυση των δεδομένων, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της σταθερής ή συνεχούς σύγκρισης (constant comparative method) (Maykut & Morehouse, 1994). Η μέθοδος αυτή συνδυάζει την επαγωγική κωδικοποίηση και την ταυτόχρονη σύγκριση μονάδων νοήματος (Maykut & Morehouse, 1994). Δηλαδή, γινόταν ανάλυση κάθε δεδομένου αν αφορούσε συγκεκριμένο στοιχείο του Μοντέλου Σκέψης ή κάποια από τις διαστάσεις του ρόλου της τεχνολογίας που παρουσιάστηκαν πιο πάνω και ανάλογα γινόταν η κωδικοποίησή του.

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

5.1 Ανάπτυξη Ανωτέρου Επιπέδου Σκέψη στα Μαθηματικά

Στην αρχή του πρώτου μαθήματος, κλήθηκαν οι μαθητές να παρακολουθήσουν τον τελικό αγώνα δρόμου των 100 m ανδρών από τους Ολυμπιακούς Αγώνες του 2008. Το βίντεο παρουσιάστηκε χωρίς ήχο και οι μαθητές κλήθηκαν αρχικά να δείξουν τον αγώνα αυτό σε σχέδιο, χρησιμοποιώντας μόνο σχήματα και γραμμές. Το σχέδιο που έκαναν δίνεται στο Σχήμα 2. Παρατηρείται ότι σχεδίασαν εφτά αθλητές σε σταθερή θέση και έδειξαν ότι προπορεύεται ο τρίτος αθλητής που ήταν και ο νικητής. Όταν ρωτήθηκαν οι δυο μαθητές γιατί αυτός ο αθλητής ήρθε πρώτος, αυτοί έγραψαν: «Γιατί έβαλε πολύ τα δυνατά του και κατάφερε να τρέξει γρηγορότερα από όλους». Τόσο το σχέδιο των μαθητών όσο και η εξήγησή τους χαρακτηρίζονται ασαφείς και μη μαθηματικά ορθά. Παρόμοια κατάσταση παρατηρήθηκε και στις αρχικές ερμηνείες των γραφικών παραστάσεων απόστασης-χρόνου που δίνονταν στο SimCalc στο πρώτο μάθημα (βλέπε Πίνακα 1).



Σχήμα 2: Σχέδιο των μαθητών που δείχνει ένα αγώνα δρόμου πριν τη χρήση του SimCalc

Καθώς τα μαθήματα περνούσαν, οι μαθητές γίνονταν ικανοί να κατασκευάζουν ορθές γραφικές παραστάσεις απόστασης-χρόνου, για να δείξουν τον αγώνα δυο ή περισσοτέρων αθλητών, τόσο στο χαρτί όσο και στο περιβάλλον του SimCalc. Ταυτόχρονα οι ερμηνείες τους γίνονταν πιο μαθηματικά ορθές και ακριβείς. Κάποια παραδείγματα από την εξέλιξη των ερμηνειών τους δίνονται στον Πίνακα 1. Είναι φανερό ότι κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, οι δυο μαθητές έγιναν ικανοί να αναλύουν αναπαραστάσεις ορθά, να εντοπίζουν ομοιότητες και διαφορές και να καταλήγουν σε συμπεράσματα, δηλαδή να χρησιμοποιούν διαδικασίες κριτικής σκέψης.

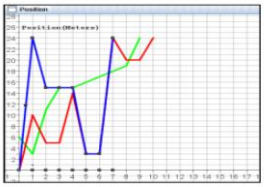
Κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν όσες περισσότερες γραφικές παραστάσεις απόστασης-χρόνου μπορούν, για να δείξουν συγκεκριμένη κατάσταση. Οι δυο μαθητές χρησιμοποίησαν διαδικασίες δημιουργικής σκέψης σε αυτές τις ασκήσεις: φαντασία, σύνθεση και επεξεργασία. Για παράδειγμα, η φαντασία τους ήταν φανερή όταν έδειχναν τις υποθέσεις τους για τη λύση με το χέρι τους στην οθόνη του υπολογιστή. Επίσης, η σύνθεση τους διακρινόταν όταν ανακαλούσαν προηγούμενη τους εμπειρία στο SimCalc. Χαρακτηριστικά δήλωναν: «Θα βάλουμε το νέο αυτοκίνητο εδώ, όπως κάναμε και στο προηγούμενο μάθημα με το μπλέ αθλητή». Τέλος, η διαδικασία της επεξεργασίας φαινόταν από τις «πολλές αλλαγές» που έκαναν πλέον στις διαδρομές των αθλητών. Δηλαδή, δεν υπήρχε σταθερός ρυθμός στην κίνηση των αθλητών.

	Προσομοίωση	**Γραφική παράσταση Απόστασης-Χρόνου**	**Σύγκριση Απόστασης-Χρόνου και Ταχύτητας-Χρόνου**
Αρχική Ερμηνεία	Σε αυτό το βίντεο βλέπουμε 2 παίχτες να τρέχουν και αυτός με την κόκκινη κάρτα να τερματίζει πρώτος με διαφορά.	Η γραφική παράσταση απεικονίζει τη θέση του κάθε αθλητή (μέτρα) και τα δευτερόλεπτα. *(Οι μαθητές γράφουν τα δεδομένα που βλέπουν.)*	Οι δυο γραφικές παραστάσεις δείχνουν την κίνηση των δυο αθλητών και το χρόνο τους. Στη μια γραφική παράσταση οι γραμμές είναι οριζόντιες *(εννοεί τη ταχύτητα-χρόνου)*, ενώ στην άλλη δεν είναι.
Ερμηνεία που διαμορφώθηκε κατά τη διάρκεια των μαθημάτων	Ο κόκκινος αθλητής έτρεξε 20 m και ο μπλε αθλητής 10 m. Τερμάτισε πρώτος ο κόκκινος, αφού έτρεχε κάθε δευτερόλεπτο τα διπλάσια μέτρα. Αυτό είναι φανερό από τη λειτουργία με τα ίχνη και προχωρά	Ο κόκκινος αθλητής ήρθε πρώτος στα 20 m και ο χρόνος του ήταν 10 δευτερόλεπτα. Ο μπλε αθλητής έτρεξε 10 m στον ίδιο χρόνο. Φαίνεται ακόμη ότι ο κόκκινος αθλητής τρέχει γρηγορότερα και η γραφική του στην απόσταση-κάθε χρόνου είναι κοντά στον άξονα	Όταν κάνεις αλλαγές στη γραφική παράσταση απόστασης-χρόνου, η γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου αλλάζει και το αντίστροφο. Όταν η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη, ο αθλητής τρέχει γρηγορότερα και η γραφική του στην απόσταση-κάθε χρόνου είναι κοντά στον άξονα

τους αριθμούς πηγαίνουν στον πίνακα αριθμών.	σαν μοτίβο	που δευτερόλεπτο ο μπλε 1m.	2 m, ενώ της απόστασης. Η ταχύτητα είναι σημαντική τιμή ώστε ο αθλητής να έρθει πρώτος.

Πίνακας 1: Ερμηνείες διαφορετικών αναπαραστάσεων κατά τη διάρκεια των μαθημάτων

Η διαδικασία της επεξεργασίας, φάνηκε έντονα και στη τελευταία δραστηριότητα των μαθημάτων, όπου κλήθηκαν οι μαθητές να κατασκευάσουν το δικό τους αγώνα και να τον περιγράψουν. Το ζευγάρι επέλεξε να δημιουργήσει ένα αγώνα με ψάρια. Η γραφική παράσταση απόστασης-χρόνου που δημιούργησε φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Τελική δημιουργία των μαθητών

Στο τελευταίο μάθημα ακόμη, οι μαθητές κλήθηκαν να αναπαραστήσουν συγκεκριμένα δεδομένα στο SimCalc, για να αποφασίσουν ποιος θα τερμάτιζε πρώτος. Αυτή αποτελεί δραστηριότητα σύνθετης σκέψης. Οι μαθητές ανάλυσαν βήμα προς βήμα τις οδηγίες (ανάλυση: διαδικασία κριτικής σκέψης), αξιολογούσαν κάθε φορά αυτό που κατασκεύαζαν αν έδειχνε τα δοσμένα δεδομένα ελέγχοντας την προσομοίωση (αξιολόγηση: διαδικασία κριτικής σκέψης) και σύνθεσαν πληροφορίες για να πάρουν μια απόφαση (σύνθεση: διαδικασία δημιουργικής σκέψης).

5.2 Εξέλιξη στον Τρόπο Χειρισμού του Λογισμικού SimCalc

Στην αρχή του πρώτου μαθήματος, οι δυο μαθητές φάνηκε να έχουν χαμηλή αυτοπεποίθηση στη χρήση του λογισμικού SimCalc. Αυτό φάνηκε γιατί έκαναν συνεχείς ερωτήσεις στην εκπαιδευτικό σχετικά με τις λειτουργίες του SimCalc που καλούνταν με βάση το φύλλο εργασίας να χρησιμοποιήσουν. Για παράδειγμα, όταν η δραστηριότητα τους ζητούσε να επιλέξουν με διπλό κλικ έναν αθλητή στην προσομοίωση ώστε να ενεργοποιήσουν τα ίχνη, οι μαθητές δεν το έκαναν μέχρι η εκπαιδευτικός να τους πλησιάσει, για να τους επιβεβαιώσει ότι θα επιλέξουν το ορθό κουμπί. Ενδεικτικός διάλογος:

Μαθητής Α: Να πατήσουμε αυτό; (δείχνει το μπλε αθλητή)

Εκπαιδευτικός: Ναι.

Μαθητής Β: Τώρα να πατήσουμε το κουμπί αυτό; (δείχνει το κουμπί που αφορά την ενεργοποίηση των ιχνών);

Εκπαιδευτικός: Ναι....Τι παρατηρείς όταν ξεκινήσεις την προσομοίωση;

Καθώς περνούσαν τα μαθήματα, οι δυο μαθητές φάνηκε να έχουν περισσότερη αυτοπεποίθηση σχετικά με τις λειτουργίες του λογισμικού και να μην χρειάζονται τη

βοήθεια της εκπαιδευτικού. Χαρακτηριστική κίνησή τους ήταν ότι χρησιμοποιούσαν από μόνοι τους λειτουργίες, για να ελέγχουν την ορθότητα της εργασίας τους, χωρίς να τους ζητηθεί. Ακόμη, ο ένας από τους δυο μαθητές δήλωσε ότι «Μου αρέσει το λογισμικό γιατί το έμαθα και λύνω τις ασκήσεις χωρίς δυσκολία. Είναι ένα παιχνίδι.». Δηλαδή, φαίνεται ότι οι μαθητές στο τέλος των μαθημάτων απόκτησαν περισσότερη αυτοπεποίθηση και ευελιξία στη χρήση του λογισμικού.

5.3 Αλλαγή στα Συναισθήματα και Αναστοχασμός

Στο πρώτο μάθημα, παρατηρήθηκε ότι οι δυο μαθητές αισθάνονταν περίεργα, αφού δεν είχαν ξαναδουλέψει με υπολογιστή στο μάθημα των μαθηματικών και ήταν κάτι διαφορετικό από τα μαθήματα που είχαν κάνει μέχρι στιγμής στα μαθηματικά. Χαρακτηριστική είναι η δήλωση του ενός από τους δυο μαθητές: «Είναι ασυνήθιστο αυτό που κάνουμε σήμερα.», καθώς και η ερώτηση του άλλου μαθητή: «Σε ποια σελίδα, κυρία, να ανοίξουμε το βιβλίο μας;». Στη συνέχεια του πρώτου μαθήματος, παρατηρήθηκε οι μαθητές να ακολουθούν πιστά τις οδηγίες της εκπαιδευτικού. Καθώς περνούσαν τα μαθήματα, φάνηκε οι δυο μαθητές να αισθάνονται πιο άνετα και μάλιστα ο ένας από τους δυο μαθητές να δηλώνει: «Μου άρεσαν πάρα πολύ τα μαθήματα αυτά αφού μαθαίναμε παίζοντας. Ήταν πραγματικά φανταστικά.». Στο τέλος των μαθημάτων, ζητήθηκε από τους δυο μαθητές να αναστοχαστούν για τα μαθήματα με το SimCalc και έκαναν το πιο κάτω διάλογο:

Μαθητής Α: Ήταν τέλεια τα μαθήματα! Αυτή η εμπειρία μας βοήθησε πάρα πολύ. Μάθαμε πώς να χειριζόμαστε το κομπιούτερ και πώς να φτιάχνουμε πολλές και διαφορετικές γραφικές παραστάσεις.

Μαθητής Β: Συμφωνώ με το Μαθητή Α. Έμαθα να σκέφτομαι ακόμη!

Μαθητής Α: Σωστά! Και ακόμη πώς να ελέγχουμε τους παίχτες μας και να υποθέτουμε αγώνες.

Μαθητής Α: Θα ήθελα πολύ να κάνουμε αυτό ξανά στο μάθημα των μαθηματικών.

Οι μαθητές φάνηκε να αναγνωρίζουν τις δυνατότητες που προσφέρει το περιβάλλον του SimCalc για ενίσχυση της γνώσης τους για τις γραφικές παραστάσεις, της κριτικής και της δημιουργικής τους σκέψης. Επίσης, φάνηκε οι μαθητές να αναγνωρίζουν ότι η εμπειρία τους αυτή τους βοήθησε να μάθουν να χειρίζονται το λογισμικό.

6. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι μαθητές με τη συμμετοχή τους στα μαθήματα, φάνηκε να έχουν ενισχύσει τη βασική τους γνώση σχετικά με την ερμηνεία και την κατασκευή γραμμικών γραφικών παραστάσεων (απόστασης-χρόνου και ταχύτητας-χρόνου), καθώς να έχουν αναπτύξει κριτική, δημιουργική και σύνθετη σκέψη στις έννοιες αυτές. Ακόμη, οι μαθητές φάνηκε να έχουν γίνει πιο ευέλικτοι χρήστες του λογισμικού SimCalc και να

νιώθουν πιο άνετοι με περισσότερη αυτοπεποίθηση στο περιβάλλον αυτό. Αυτό αποτελεί μια πολύ μικρή ένδειξη του ρόλου της τεχνολογίας στην ανάπτυξη ανωτέρου επιπέδου σκέψης στα μαθηματικά, επιβεβαιώνοντας αποτελέσματα άλλων ερευνών (π.χ., Heid & Blume, 2008). Όμως, χρειάζονται περισσότερες εργασίες σε μεγαλύτερο δείγμα μαθητών και με τη χρήση διαφορετικών τεχνολογικών εργαλείων (π.χ., μαθηματικά εφαρμογίδια, λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας κτλ).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Brookhart, S. M. (2010). *How to assess higher order thinking skills in your classroom*. Virginia, USA: ASCD.

Ellington, A. (2003). A meta-analysis of the effects of calculators on students' achievement and attitude levels in precollege mathematics classes. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*, 433–463.

English, L. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. In L. English et al. (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp.3–19). New York: Routledge.

Fredricks, J. A., Blumenfeld, P. C., & Paris, A. H. (2004). School engagement: Potential of the concept, state of evidence. *Review of Educational Research*, *74*(1), 59-109.

Geiger, V., Faragher, R., & Goos, M. (2010). CAS-enabled technologies as 'agents provocateurs' in teaching and learning mathematical modelling in secondary school classrooms. *Mathematics Education Research Journal, 22*(2), 48-68.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(4), 258-291.

Heid, M. K., & Blume, G. W. (2008). Technology and the teaching and learning mathematics: Cross-content implications. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Volume 1 Research Syntheses* (pp. 419-431). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Iowa Department of Education (1989). *A guide to developing higher order thinking across the curriculum*. Des Moines, IA. Retrieved from ERIC database (ED 306 550).

Jonassen, D. H. (2000). *Computers as mindtools for schools: Engaging critical thinking*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Kaput, J., & Hegedus, S. (2007). Technology becoming infrastructural in mathematics education. In R. A. Lesh, E. Hamilton, & J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education*(pp.173 - 192). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., & Roschelle, J. (1998). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context. In C. Hoyles, C. Morgan, & G. Woodhouse (Eds.),*Rethinking the mathematics curriculum* (pp.155-170). London: The Falmer Press.

Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modelling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763–804). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Levin, T., & Wadmany, R. (2006). Teachers' beliefs and practices in technology-based classrooms: A developmental view. *Journal of Research on Technology in Education, 39*(2), 157–181.

Lewis, A., & Smith, D. (1993). Defining higher order thinking. *Theory into Practice, 32*(3), 131 – 137.

Maykut, P., & Morehouse, R. (1994). *Beginning qualitative research: A philosophical and practical guide*. London: The Falmer Press.

Pitta-Pantazi, D., Sophocleous, P., & Christou, C. (2013). Developing and enhancing elementary school students' higher order mathematical thinking with SimCalc. In S. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics* (pp.319 – 340). New York: Springer.

Tabach, M., Hershkowitz, R., Arcavi, A., & Dreyfus, T. (2008). Computerized environments in mathematics classrooms: A research-design view. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & B. Sriranam (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.) (pp. 784 – 805). New York: Routledge.

‘ΑΞΙΕΣ’ (VALUES) ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ‘ΔΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΗΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ’

Παναγιώτα Κοταρίδου, Χαρούλα Σταθοπούλου
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας ΠΤΕΑ
pkotarinou@uth.gr, hastath@uth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με στόχο να ενεργοποιήσουμε και να εμπλέξουμε όλους τους μαθητές μιας τάξης Β΄Λυκείου στο μάθημα της Γεωμετρίας σχεδιάσαμε διδασκαλίες που αφορούσαν στην αξιωματική θεμελίωση Γεωμετριών με χρήση τεχνικών ‘Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση’(ΔΤΕ). [1] *Κατά την υλοποίηση αυτών των διδασκαλιών μεταξύ άλλων αναδείχτηκαν συγκεκριμένες αξίες (ρητές ή μη) συνδεδεμένες με τα Μαθηματικά και τη διδασκαλίας τους οι οποίες μελετώνται στην εργασία αυτή σε σχέση με την επίδρασή τους στην ταυτότητα των μαθητών ως ατόμων που μαθαίνουν και κάνουν μαθηματικά.*

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Presmeg (2007), πρόσφατα έγραψε ότι η μαθηματική εκπαίδευση βίωσε μια μεγάλη επανάσταση στις αντιλήψεις που θεωρούσαν τα μαθηματικά ανεξάρτητα από την κουλτούρα και τις αξίες, παρατηρώντας ότι είναι ένα πολιτισμικό προιόν και ως εκ τούτου ο ρόλος της κουλτούρας και των αξιών είναι σημαντικές πτυχές της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η σημασία των αξιών μπορεί να γίνει κατανοητή από δύο διαφορετικές οπτικές: οι αξίες στα μαθήματα μαθηματικών ως μέσο για την υλοποίηση ευρύτερων εκπαιδευτικών στόχων, (Atweh & Seah 2007), οι *αξίες μέσα (in)* στη μαθηματική εκπαίδευση, όπου η έννοιά τους διερευνάται στο πλαίσιο της βελτιστοποίησης των αποτελεσμάτων της μάθησης των μαθητών, μέσα από αποτίμηση συγκεκριμένων αξιών του δασκάλου/μαθητή (Seah, 2007). Σύμφωνα με αυτήν οι αξίες μπορούν να γίνουν τα μέσα για τη μάθηση, την κατανόηση, των μαθηματικών, ή την επιτυχία, παρότι υπάρχει σχετικά λίγη γνώση σχετικά με τις αξίες που φέρουν οι εκπαιδευτικοί και την επίγνωση των ίδιων γι αυτές και την επίδρασή τους στους μαθητές μέσα από τη διδασκαλία (Bishop et al., 2001).

Στη συγκεκριμένη εργασία συζητώνται τα δεδομένα από έρευνα πεδίου σε μια σχολική τάξη Β Λυκείου στην οποία πραγματοποιήθηκαν διδασκαλίες με τεχνικές ΔΤΕ διαμορφώνοντας έτσι μια διαφορετική πραγματικότητα. Παρότι η διερεύνηση των αξιών (ρητών ή μη) δεν αποτέλεσε ερευνητικό ερώτημα στο σχεδιασμό της έρευνας προέκυψαν σημαντικά ερευνητικά δεδομένα τα οποία μας πληροφορούν για τις αξίες και τη σύνδεσή τους με συγκεκριμένες διδακτικές πρακτικές.

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΝΔΕΔΕΜΕΝΕΣ ΜΕ ΑΥΤΑ ΑΞΙΕΣ

Οι αξίες στη Μαθηματική εκπαίδευση είναι σύμφωνα με τον Bishop (1999), οι συναισθηματικές ιδιότητες, τις οποίες η εκπαίδευση έχει σκοπό να ενθαρρύνει μέσω των σχολικών Μαθηματικών και αποτελούν ένα κρίσιμο συστατικό του συναισθηματικού περιβάλλοντος της σχολικής τάξης. Αντιπροσωπεύουν την εσωτερικοποίηση, γνωστικοποίηση καθώς και την αποπλαισίωση των συναισθηματικών κατασκευών ενός ατόμου στο πλαίσιο της κουλτούρας της κοινότητας που ανήκει το άτομο. Οι αξίες αυτές εφοδιάζουν το άτομο με γνωστικούς και συναισθηματικούς φακούς που διαμορφώνουν και μετατρέπουν τον τρόπο που αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει τον κόσμο και καθοδηγεί τις ενέργειές του.

Ο Bishop (2000) διακρίνει τις πεποιθήσεις από τις αξίες, αποκαλώντας τις αξίες 'πεποιθήσεις στην πράξη' και θεωρεί ότι οι πεποιθήσεις είναι βασικά γνωστικής φύσης και εκφράζονται σε συγκεκριμένα πλαίσια, ενώ οι αξίες έχουν συναισθηματικά χαρακτηριστικά και εκφράζονται αποπλαισιωμένες (Bishop, 2012). Η ανάπτυξη, η εξέταση και η θέσπιση ενός συστήματος αξιών ενός ατόμου, φαίνεται ότι δεν έχει μόνο γνωστική και συναισθηματική διάσταση, αλλά και κοινωνικοπολιτισμική (Seah, 2008). Το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο του ατόμου, επιδρά στη διαμόρφωση των αξιών και την εσωτερίκευσή τους.

Οι αξίες που αναγνωρίζονται σε μια τάξη των Μαθηματικών διακρίνονται σύμφωνα με τον Bishop (1999), σε τρία είδη: α) τις γενικές εκπαιδευτικές αξίες (general educational) οι οποίες έχουν σχέση με τους γενικούς εκπαιδευτικούς στόχους β) τις μαθηματικές αξίες (mathematical) που σχετίζονται με το ίδιο το αντικείμενο των μαθηματικών και γ) τις ειδικές αξίες της Μαθηματικής εκπαίδευσης (specific mathematics educational) που σχετίζονται με την παιδαγωγική αυτού του αντικειμένου.

α) **Γενικές εκπαιδευτικές αξίες:** Περιλαμβάνονται, κυρίως, ηθικές αξίες, όπως σεβασμός, η ειλικρίνεια, η ακεραιότητα κλπ (Bishop et al., 1999). Τελευταία, υπάρχει μια αναγνώριση ότι η ίδια η μαθηματική γνώση που αναπτύσσεται στα σχολεία μπορεί να είναι αποτελεσματική στη δημιουργία αξιών στην κοινωνία και συζητούν για τη συμβολή των μαθηματικών σε αξίες όπως η ισότητα ή η πολιτειότητα (Atweh et al., 2007).

β) **Μαθηματικές αξίες:** Οι μαθηματικές αξίες είναι συνδεδεμένες με τη φύση της μαθηματικής γνώσης και προέρχονται από τον τρόπο που οι μαθηματικοί από διάφορες κουλτούρες έχουν αναπτύξει τα Μαθηματικά. Τις συνδεδεμένες με τα 'Δυτικά Μαθηματικά', ο Bishop (1988) τις κατηγοριοποιεί σε τρία συμπληρωματικά ζεύγη, σύμφωνα με τρεις συνιστώσες: την ιδεολογική, τη συναισθηματική και την κοινωνιολογική.

Συνδεδεμένες άμεσα με την *ιδεολογική συνιστώσα*, είναι οι κυρίαρχες στα Δυτικά Μαθηματικά αξίες όπως *ο ορθολογισμός,* ο οποίος εμπεριέχει ιδέες όπως της λογικής, της υπόθεσης, του συλλογισμού και *ο αντικειμενισμός* (objectism), ο οποίος περιέχει

ιδέες όπως ο συμβολισμός, η αντικειμενοποίηση (objectification) δηλ. έκφραση του αφηρημένου μέσω των συμβόλων. Εξετάζοντας τις αξίες ως προς τη *συναισθηματική συνιστώσα*, διακρίνει ένα ζεύγος συμπληρωματικών ιδεών, του *ελέγχου* και της *προόδου*, θεωρώντας ότι η ισχύς των Μαθηματικών στην κοινωνία μας, προέρχεται από τα συναισθήματα ασφάλειας και ελέγχου και την πρόοδο που αυτά επιφέρουν. Ως προς την *κοινωνιολογική συνιστώσα* ο Bishop διακρίνει ως αξίες, την ιδιότητα που έχουν οι μαθηματικές αλήθειες να παραμένουν 'ανοιχτές' στην εξέτασή, καθώς και το 'μυστήριο'—αφηρημένη φύση των Μαθηματικών--που περιβάλλει τις μαθηματικές ιδέες.

γ) Ειδικές αξίες της Μαθηματικής εκπαίδευσης: Ενώ οι μαθηματικές αξίες αναφέρονται στα ίδια τα μαθηματικά ως ενός επιστημονικού αντικειμένου, οι αξίες της μαθηματικής εκπαίδευσης συνδέονται με την παιδαγωγική αυτού του αντικειμένου και αποτελούν τις *αξίες στη μαθηματική εκπαίδευση*. Οι πρακτικές διδασκαλίας των δασκάλων των Μαθηματικών καθώς και ο ρόλος των εγχειριδίων ως 'αοράτων δασκάλων' απεικονίζουν τις αξίες στη Μαθηματική εκπαίδευση, ενώ διαφορετικές κουλτούρες και διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα σε αυτές θα δώσουν έμφαση σε διαφορετικούς τρόπους διδασκαλίας.

Ως προς τις αξίες στη Μαθηματική εκπαίδευση, οι Seah και Bishop (2000) εστιάζουν σε πέντε συμπληρωματικά ζεύγη αξιών: Τα δύο πρώτα αφορούν στην παιδαγωγική πλευρά της μαθηματικής εκπαίδευσης με πρώτο τη φορμαλιστική άποψη έναντι της ενεργητικής άποψης. Η πρώτη θεωρεί ως κεντρικό ρόλο στη μάθηση των Μαθηματικών την εισαγωγή στον παραγωγικό συλλογισμό ενώ η δεύτερη δίνει βαρύτητα στη διαίσθηση, στην ανακαλυπτική μάθηση και τον επαγωγικό συλλογισμό. Στο δεύτερο δίπολο *Εργαλειακή/ Σχεσιακή (instrumental vs relational),* συναντάμε αξίες που αφορούν στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση των μαθηματικών. Η πρώτη σχετίζεται με τη μάθηση κανόνων, διαδικασιών και τύπων, ενώ η δεύτερη δίνει έμφαση στις σχέσεις μεταξύ των εννοιών.

Τα επόμενα τρία ζεύγη αφορούν στην πολιτισμική πλευρά της μαθηματικής εκπαίδευσης και απαντούν αντίστοιχα στα ερωτήματα όπως, ποια είναι η φύση της μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, γιατί διδάσκονται και μαθαίνονται τα Μαθηματικά και ποιος έχει δυνατότητα πρόσβασης σε μαθηματικές δραστηριότητες. Η αξία της *Συνάφειας (Relevance)* αναδεικνύει τη σημασία της μαθηματικής γνώσης στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής, ενώ η αξία της *Θεωρητικής γνώσης* (Theoretical knowledge) θεωρεί οτι τα μαθηματικά πρέπει να διδάσκονται σε θεωρητική βάση χωρίς να αναφέρονται σε ένα πλαίσιο της καθημερινής ζωής. Οι αξίες της *Προσβασιμότητας έναντι του Ειδικού (Accessibility vs spesial*) αναφέρονται στο κατά πόσον όλα τα άτομα έχουν προσβασιμότητα στη μαθηματική γνώση, εννοώντας ότι κάθε άτομο μπορεί να συμμετέχει σε μαθηματικές δραστηριότητες, σε αντίθεση με την αξία ότι τα μαθηματικά είναι μόνο για προικισμένα άτομα. Στο τελευταίο δίπολο *Αξιολόγηση - Συλλογισμός (Evaluating vs reasoning),* η πρώτη αναφέρεται στο πώς χρησιμοποιείται η μαθηματική γνώση για την αξιολόγηση μιας

άγνωστης απάντησης, ενώ η δεύτερη αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν μαθηματικές γνώσεις, για να επιλύσουν ένα πρόβλημα.

Οι αξίες των μαθητών σε μια τάξη μαθηματικών: Εκτός από τους εκπαιδευτικούς όμως και οι ίδιοι οι μαθητές έχουν αξίες σχετικά με την ίδια την εκπαιδευτική διαδικασία, η γνώση των οποίων μπορεί να ερμηνεύσει ορισμένες από τις πρακτικές στην τάξη των μαθηματικών, αλλά και την εμπλοκή των μαθητών στη διδακτική διαδικασία. Όπως οι εκπαιδευτικοί τονίζουν στη διδασκαλία τους αυτό που θεωρούν ως σημαντικό για τους μαθητές τους, ομοίως οι μαθητές φέρουν στο μάθημα τις δικές τους ατομικές αξίες για το τι αποτελεί π.χ ένα αποτελεσματικό μάθημα στα μαθηματικά βασισμένοι στις δικές τους γνώσεις και εμπειρίες, χωρίς αυτές οι αξίες να είναι πάντα σε συμφωνία με αυτές των εκπαιδευτικών. Οι αξίες αυτές στη μαθηματικά εκπαίδευση θεωρούνται ένα κοινωνικο - πολιτισμικό προϊόν, αντλώντας τη μορφή και τη σημασία τους από τις διαλογικές πρακτικές, τις πρακτικές και τις νόρμες των συμμετεχόντων και την αλληλεπίδραση τους (Seah & Wong, 2012). Έτσι, η τάξη θεωρείται ένας σημαντικός χώρος διαπραγμάτευσης αξιών (Lim, 2012).

Έρευνες σε μαθητές Δημοτικού έδειξαν ότι οι μαθητές θεωρούν ως σημαντικές αξίες για μια αποτελεσματική διδασκαλία στην τάξη των μαθηματικών την διασκέδαση (fun), την εμπειρία του εκπαιδευτικού, την εργασία στον πίνακα, την εξήγηση από τους μαθητές και τον εκπαιδευτικό και το να είναι κάτι ενδιαφέρον (Seah, 2007), αλλά και 'τα παραδείγματα', 'το μοίρασμα', 'τις πολλαπλές αναπαραστάσεις' 'την εξήγηση', και τη 'διασκέδαση' (Seah, 2010). Οι Law, Wong και Lee (2012) μελετώντας τις αξίες μαθητών και εκπαιδευτικών Γυμνασίου στο Hong Kong εντόπισαν τρεις κοινές αξίες: αυτή του νοήματος, την αυτονομία και τη θετική στάση, ενώ κοινή έρευνα μεταξύ Αυστραλίας και Σουηδίας σε μαθητές 11-14 ετών έδειξαν ότι οι κοινές τους αξίες για μια αποτελεσματική διδασκαλία είναι η εξήγηση, η ανταλλαγή και 'η διασκέδαση' (Seah & Peng, 2012).

Αξιοποιώντας το παραπάνω πλαίσιο για τις αξίες στη διδασκαλία των μαθηματικών, μελετάμε στην επόμενη ενότητα τις αξίες που αναδύθηκαν σε μια σχολική τάξη που διδάσκεται γεωμετρία με τεχνικές ΔΤΕ.

3. Η ΕΡΕΥΝΑ: ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Η εργασία αυτή έχει βασιστεί σε έρευνα που διεξήχθη στο πλαίσιο Διδακτορικής Διατριβής. Το ερώτημα που συζητάμε εδώ ήταν: *ποιες είναι οι αξίες που διαμορφώνονται σε μία τάξη μαθηματικών κατά τη διδασκαλία με τεχνικές ΔΤΕ της αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας και των μη Ευκλείδειων γεωμετριών και πώς αυτές επιδρούν στη μάθηση;*

Το πλαίσιο της έρευνας: Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε τμήμα 26 μαθητών-τριών Β΄Λυκείου (16 κορίτσια, 10 αγόρια) του Πειραματικού Λυκείου Ιλίου, σε διάρκεια τεσσάρων μηνών (σχολ. έτος 2010-201). Μέθοδος της έρευνας: για τη συλλογή των δεδομένων αξιοποιήσαμε τεχνικές εθνογραφικής έρευνας (παρατήρηση,

συνεντεύξεις), ενώ για την παρέμβασή μας στηριχτήκαμε στη λογική του διδακτικού πειράματος (Χρονάκη, 2008). Το διδακτικό πείραμα αφορούσε στη διδασκαλία με χρήση τεχνικών ΔΤΕ της αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας, της Υπερβολικής και Ελλειπτικής Γεωμετρίας και την ιστορία του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη και πραγματοποιήθηκε σε 25 διδακτικές ώρες. Το διδακτικό πείραμα αναπτύχθηκε σε τρεις άξονες –τις Μαθηματικές έννοιες, το ιστορικό και πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο αυτές γεννήθηκαν και αναπτύχθηκαν και τα πρόσωπα που συμμετείχαν στη γέννεσή τους—και πραγματοποιήθηκε με κύριους στόχους: α) Να κατανοήσουν οι μαθητές πώς θεμελιώνονται τα παραπάνω τρία μοντέλα Γεωμετριών, β) Να αντιληφθούν το ρόλο του αξιώματος και να επαναπροσδιορίσουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία, γ) να αλλάξουν τις στερεοτυπικές εικόνες για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους. Το διδακτικό πείραμα περιελάμβανε τις παρακάτω ενότητες. **1η: Τα στοιχεία του Ευκλείδη και η αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας.** Σχέση της αξιωματικής θεμελίωσης του Ευκλείδη με τη Λογική του Αριστοτέλη και μελέτη από το πρωτότυπο, των ορισμών, των κοινών εννοιών και των αξιωμάτων του Ευκλείδη. Ανακεφαλαιωτική παρουσίαση της αξιωματικής θεμελίωσης του Ευκλείδη, με την τεχνική *'Δάσκαλος σε ρόλο'*. Δραστηριότητες των μαθητών με τεχνικές Δράματος όπως: *παιχνίδι ρόλων, ρεπορτάζ* και *Alter-ego*. **2η: Ο Ευκλείδης και το ιστορικό, πολιτισμικό και πολιτικό πλαίσιο της εποχής του**. Δραματοποιημένη αφήγηση από τους μαθητές του κεφαλαίου 'Η έπαρση του Ευκλείδη' από το βιβλίο '' Η ράβδος του Ευκλείδη'' του Jean-Pierre Luminet. **3η: *'Η ιστορία στη σκιά'*. Η αμφισβήτηση του 5ου αιτήματος ως τον 18ο αι.** Γνωριμία των μαθητών με την ιστορία αμφισβήτησης του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη από τους διαδόχους του και παρουσίαση από τους μαθητές με τεχνικές *''θεάτρου σκιών''* των αποτυχημένων προσπαθειών απόδειξής του από τους Άραβες μαθηματικούς. **4η: Οι θεμελιωτές των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών, János Bolyai, Lobatscevski και Riemann**. Μετά από μελέτη των βιογραφιών τους: παρουσίαση του Lobatsefski, με την τεχνική *'Περίγραμμα ρόλου στον τοίχο'*, του Riemann με την τεχνική *''ένα πορτραίτο ζωντανεύει''*. Γνωριμία με τον János Bolyai μέσα από δραματοποιημένη ανάγνωση της αλληλογραφίας του πατέρα του με τον ίδιο και με τον Gauss και μέσα από τις τεχνικές της ΔΤΕ *'Διάδρομος της συνείδησης'* και *'Αντικρουόμενες συμβουλές'*. **5η: *' Αυτός ο κόσμος ο μικρός ο μέγας'***. Η Υπερβολική Γεωμετρία και το μοντέλο Poincaré για την υπερβολική Γεωμετρία. Αξιωματική θεμελίωση, βασικές έννοιες και προτάσεις της Υπερβολικής Γεωμετρίας μέσω του μοντέλου Poincaré.*''Ραδιοφωνικές εκπομπές''* για τη 'Δισκοχώρα'. **6η: Η Σφαιρική Γεωμετρία.** Βασικές έννοιες στη σφαίρα και αξιωματική θεμελίωση της Ελλειπτικής Γεωμετρίας. Δραστηριότητα με παιχνίδι ρόλων. 7η: Αναστοχασμός. 8η: Ταινία: 'Η ζωή μας με τον Ευκλείδη'.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ: ΑΞΙΕΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΠΕΙΡΑΜΑ

Γενικές εκπαιδευτικές αξίες: Αξίες όπως η συνεργασία, η συλλογικότητα και η αλληλεγγύη ανάμεσα στα μέλη μιας ομάδας, αξίες απαραίτητες σε έναν υπεύθυνο πολίτη σε μία δημοκρατική κοινωνία, προβλήθηκαν και καλλιεργήθηκαν κατά την εργασία των μαθητών σε ομάδες για τη δημιουργία δρώμενων, με τους ίδιους τους μαθητές να αντιλαμβάνονται ότι το πλαίσιο αυτό της διδασκαλίας πρόβαλε τις παραπάνω αξίες. *(«Στο πρότζεκτ έπρεπε να βοηθήσω τους συμμαθητές μου, να κάνω κάποια εργασία»).* Η δημιουργικότητα ήταν μια επίσης κοινωνική αξία η οποία καλλιεργήθηκε μέσα από τη διδασκαλία των μαθηματικών με τεχνικές ΔΤΕ *(«Ενώ στο πρότζεκτ έπρεπε να προσπαθήσω να είμαι δημιουργικός.»)*

Μαθηματικές αξίες: Θεωρούμε ότι στο διδακτικό μας πείραμα αναδείχθηκε η *αξία του Ορθολογισμού* (Rationalism). Δόθηκε έμφαση στην ίδια τη δομή της Γεωμετρίας ως αξιωματικού συστήματος. Οι μαθητές έπρεπε όχι μόνον να γνωρίσουν τα αξιώματα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία αλλά έπρεπε να επιχειρηματολογήσουν για την αναγκαιότητα και τη σημασία του κάθε αξιώματος ξεχωριστά. Με τη σύνδεση του 5ου αιτήματος με βασικά θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έγινε κατανοητό στους μαθητές ότι αυτά αποτελούν συνέπειες του αιτήματος αυτού και ότι δεν ισχύουν με την αντικατάσταση του, γεγονός που διαπίστωσαν στις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες. Η αξία του αντικειμενισμού (Objectism), συμπληρωματική του ορθολογισμού, αναδείχθηκε με τις αναπαραστάσεις των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών μέσω των μοντέλων τους. Η αφηρημένη έννοια της ευθείας στις μη Ευκλείδεις Γεωμετρίες έλαβε μέσα από τις αναπαραστάσεις της στα διάφορα μοντέλα, συγκεκριμένη μορφή. Οι αξίες του ελέγχου και της προόδου αναδείχθηκαν στο διδακτικό πείραμα, με αναφορές αντίστοιχα στην αξιοποίηση των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών για την ερμηνεία του σύμπαντος και την αθροιστική ανάπτυξη της γνώσης μέσα από την μακριά πορεία απόδειξης του 5ου αιτήματος.

Η αξιοποίηση στη διδασκαλία των τεχνικών ΔΤΕ υποστήριζε την ανοιχτότητα των μαθηματικών διότι οι μαθητές έπρεπε να παρουσιάσουν τα δρώμενά τους σε όλη την τάξη και να υπερασπιστούν τις απαντήσεις τους δημόσια. Όσον αφορά στο μυστήριο των Μαθηματικών προβλήθηκε, μέσα από τις ιστορίες για την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, ενώ η μαθηματική φαντασία των μαθητών κεντρίστηκε μέσα από την μαθηματική λογοτεχνία (Flatterland, τους πίνακες του Escher).

Ειδικές αξίες της Μαθηματικής εκπαίδευσης: Ως προς την παιδαγωγική πλευρά της μαθηματικής εκπαίδευσης οι αξίες που αναδείχθηκαν ήταν αυτή της *ενεργητικής (activist)* και *σχεσιακής (relational)* διδασκαλίας των Μαθηματικών. Αν και η διδασκαλία μας είχε ως θέμα τον παραγωγικό τρόπο σκέψης, ως αξία αναδείχθηκε η ενεργός μάθηση. Οι μαθητές στις ομάδες με τη βοήθεια των φύλλων εργασίας τη χρήση κατάλληλης βιβλιογραφίας και των εποπτικών μέσων μάθησης έπρεπε να ανακαλύψουν τη γνώση και να εικάσουν πολλές προτάσεις στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες (π.χ. άθροισμα γωνιών τριγώνου, η μη ύπαρξη ορθογωνίων).

Αναδείχτηκε, επίσης, ως αξία η εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών η οποία δίνει έμφαση στην κατανόηση των εννοιών και στις σχέσεις μεταξύ τους. Η διαρκής σύγκριση ανάμεσα στα αξιώματα και στις έννοιες των τριών Γεωμετριών καθώς και η σχέση μεταξύ του 5^{ου} αιτήματος και των βασικών θεωρημάτων που απορρέουν από αυτό τόνισαν ως αξία την εννοιολογική γνώση. Επίσης αναδείχθηκαν και οι δύο αξίες της συνάφειας και της θεωρητικής γνώσης. Η αμφισβήτιση του 5^{ου} αιτήματος και η ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών ήταν ένα καθαρά θεωρητικό πρόβλημα που απασχόλησε το μαθηματικό κόσμο για αιώνες. Το ερώτημα όμως που θέσαμε στην αρχή του διδακτικού πειράματος σχετικά με το ποια Γεωμετρία ερμηνεύει καλύτερα τον κόσμο έδειξε ότι όλη αυτή η θεωρητική γνώση αξιοποιείται στην επίλυση προβλημάτων που αφορούν τον υλικό μας κόσμο. Τέλος, αναδείχθηκε η αξία του συλλογισμού *(reasoning)*, η ικανότητα δηλ. να χρησιμοποιεί κανείς τη μαθηματική γνώση και τη λογική, ενώ αναδείχθηκε η αξία της προσβασιμότητας με τη συμμετοχή όλων των μαθητών, θεωρώντας ότι όλοι μπορούν να συμμετέχουν σε μαθηματικές δραστηριότητες και ότι αυτές δεν είναι μόνο για προικισμένα άτομα.

Οι αξίες των μαθητών: Όπως είδαμε στη βιβλιογραφία, οι αξίες που φέρουν οι μαθητές σε μια τάξη μαθηματικών συνδέονται με την ίδια τη μάθησή τους. Οι διάφορες αυτές αξίες άλλες φορές βρίσκονται σε συμφωνία με τις αξίες του μαθησιακού πλαισίου και των παιδαγωγικών έργων και άλλες φορές όχι, επηρεάζοντας με αυτόν τον τρόπο την εμπλοκή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία. Στις διηγήσεις τους οι μαθητές σχετικά με το project, πρόβαλαν τις αξίες που βρέθηκαν σε συμφωνία με τις αξίες του νέου γι' αυτούς μαθησιακού πλαισίου, της διδασκαλίας δηλαδή με τεχνικές ΔΤΕ, η συμφωνία δε με τις αξίες του πλαισίου έπαιξε ρόλο στην κινητοποίηση και εμπλοκή των μαθητών με τα έργα που τους δόθηκαν. Στις αφηγήσεις των μαθητών αναγνωρίσαμε ως αξίες τη δημιουργικότητα, τη συνεργατικότητα και κυρίως την ψυχαγωγία /διασκέδαση.

α) Η ψυχαγωγία/διασκέδαση ως αξία: Βασική αξία αναδείχθηκε η ψυχαγωγία, μέσα από το νέο μαθησιακό περιβάλλον.

> Βιργιάννα: Ήταν ένας συνδυασμός μαθήματος και ψυχαγωγίας, …εκτός από το ότι συνεργαζόμαστε, μπορείς να μάθεις πράγματα χωρίς να το καταλαβαίνεις. Δηλ. έπαιρνες γνώσεις με τρόπο, σαν ψυχαγωγία ήτανε. Ιδανικός τρόπος να περάσεις καλά και να πάρεις γνώσεις.

Η ευεξία (well-being) που έννοιωθαν οι μαθητές στο διδακτικό πείραμα, τους βοήθησε να εμπλακούν στη μαθησιακή διαδικασία, σε αντίθεση με το περιβάλλον του τυπικού μαθήματος που συνήθως τους προκαλούσε ανία.

> Τζίνα: Ήταν πάρα πολύ ωραία, ήταν κάτι ξεχωριστό…στην ώρα των Μαθηματικών που κάναμε αυτά τα σκετσάκια, ήταν πάρα πολύ ωραία, γιατί περνούσε πιο καλά η ώρα και μαθαίνεις κάποια πράγματα, περισσότερα πράγματα, γιατί άμα είναι βαρετό το μάθημα και ο καθηγητής, δε μαθαίνεις τόσα πράγματα.

Στην ευεξία των μαθητών συντελούσε το ότι το πλαίσιο διδασκαλίας με τεχνικές ΔΤΕ έδινε ευκαιρία στους μαθητές για χιούμορ, αστεία και γέλιο.

> Βίκυ: Αλλά έτσι όπως τα κάναμε εμείς εδώ πέρα με θέατρο και με τη συνεργασία, που συνεργαζόμασταν πολλά παιδιά μαζί και μας έβγαλε γέλιο..., και πέρναγε η ώρα πάρα πολύ γρήγορα, δηλ. εγώ κοίταζα το ρολόι και έλεγα καλά πέρασε η ώρα... ήθελα κι' άλλο.

Η ευεξία και η διασκέδαση πολλές φορές οφείλεται στο χαρακτήρα παιχνιδιού των τεχνικών ΔΤΕ. («*Και ειδικά όταν είναι σκετς, είναι πιο δημιουργικό και γενικότερα είναι σαν παιχνίδι, μέσα απ' το παιχνίδι το παιδί γενικότερα ο μαθητής κάνει περισσότερα πράγματα. »)*

β) Η συνεργασία ως αξία: Αρκετοί μαθητές θεωρούν τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών ως αξία, («*Και πιστεύω φυσικά και στη συνεργασία. Δύο παιδιά που συνεργάζονται μαζί στο ίδιο θρανίο μπορούν να φέρουν καλύτερα αποτελέσματα και φυσικά να γίνει πιο ενδιαφέρον το μάθημα»)* και θεωρούν ότι το πλαίσιο αυτό διδασκαλίας τους έδωσε την ευκαιρία να συνεργαστούν («*...συνεργαστήκαμε και βοηθηθήκαμε ο ένας με τον άλλον. Ξέρουμε ότι βρεθήκαμε ο ένας με τον άλλον, συζητήσαμε περισσότερα πράγματα ήρθαμε, σε επαφή.. »)*. Στο διδακτικό πείραμα διαπιστώθηκε ότι η αξία αυτή είχε θετική επίπτωση στη μάθηση («*ήταν ωραίο που συνεργαζόμαστε παιδιά από όλες τις κατευθύνσεις και ο καθένας έβαζε αυτό που ήξερε και έτσι όλοι μαζί βγάζαμε ένα αποτέλεσμα. »)*

γ) Η δημιουργικότητα ως αξία: Η διδασκαλία με τεχνικές ΔΤΕ αναγνωρίζει και καλλιεργεί ως αξία τη δημιουργικότητα, την οποία ορισμένοι μαθητές αποτιμούν ως αξία, αποτελώντας έτσι κίνητρο για να εμπλακούν ενεργά με τις δραστηριότητες του διδακτικού πειράματος («*Και ήταν πολύ ενδιαφέρον γιατί έπρεπε από κείμενα να δημιουργήσουμε, οπότε η δημιουργικότητα μου αρέσει πολύ…*»)

δ) Ενδιαφέρον θέμα: Οι μαθητές αποτιμούν ως αξία την ανάπτυξη ενός νέου και ενδιαφέροντος θέματος που διαφέρει από την τετριμένη ύλη: «*Ναι πιστεύω ότι έτσι πρέπει να γίνεται και ο καθηγητής να μη στέκεται μόνο στην ύλη του βιβλίου, αλλά ... να δώσει περισσότερες πληροφορίες για κάποια θέματα», «Ήταν κάτι πολύ διαφορετικό, ... και χρειαστήκαμε μέχρι τη Β Λυκείου για να μπορέσουμε να κάνουμε κάτι τέτοιο, μια δραστηριότητα που να σχετίζεται με κάτι διαφορετικό από την ύλη του σχολείου».*

Τελικές επισημάνσεις

Τόσο τα μαθηματικά, αυτά καθεαυτά, όσο και η διδασκαλία τους συνδέονται με το αντίστοιχο πλαίσιο και τις αξίες. Στο πλαίσιο της συγκεκριμένης τάξης, στην οποία οι μαθητές διδάχτηκαν αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας, Υπερβολικής και Ελλειπτικής Γεωμετρίας με χρήση τεχνικών ΔΤΕ διαμορφώθηκε μια διαφορετική κουλτούρα και αντίστοιχες αξίες. Από την ανάλυση των απαντήσεων που πήραμε από τους μαθητές κατά την καταγραφή της εμπειρίας τους φάνηκε να αναδείχθηκαν σημαντικές αξίες, συνδεδεμένες με τις συγκεκριμένες διδακτικές επιλογές. Όπως

επισημαίνει ο Bishop (2007), είναι σημαντικό για το δάσκαλο να έχει επίγνωση ότι οι αξίες είναι σύμφυτες με την εκπαιδευτική διαδικασία σε όλα τα επίπεδα: το μακροεπίπεδο (συστημικό, θεσμικό), το μεσο-επίπεδο (σχεδιασμός και διαχείριση των προγραμμάτων σπουδών), το μικρο-επίπεδο (αλληλεπιδράσεις στην τάξη) παίζοντας ένα σημαντικό ρόλο στην διαμόρφωση μιας αίσθησης προσωπικής και κοινωνικής ταυτότητας για το μαθητή. Η συνειδητοποίηση του δασκάλου για τις αξίες που εμπλέκονται στη διδασκαλία των μαθηματικών, μπορεί να συμβάλει στη διαμόρφωση μιας διδασκαλίας που θα είναι αποτελεσματική, αλλά παράλληλα και μια ευχάριστη διαδικασία επιτυχάνοντας την ευεξία (wellbeing) που σήμερα προβάλλεται ως σημαντικός εκπαιδευτικός στόχος.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Η ΔΤΕ αποτελεί μια αυστηρά δομημένη παιδαγωγική διαδικασία, η οποία χρησιμοποιεί τεχνικές της Δραματικής Τέχνης και μας παρέχει, μέσα από τη δημιουργία ενός φανταστικού κόσμου, το πλαίσιο για τη διδασκαλία μιας έννοιας, μιας ιδέας ή ενός γεγονότος, τη λύση προβλήματος καθώς και τη δυνατότητα καλλιέργειας προσωπικών και κοινωνικών δεξιοτήτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Atweh, B., Seah, W. T. (2007). Theorising Values and their Study in Mathematics Education. In Proceedings, Peter L. Jeffery (Ed.) AARE Conference. Fremantle, Western Australia.

Bishop, A. (2012). From culture to well-being: a partial story of values in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 44, 3-8.

Bishop, A. J. (2007). Values in mathematics and science education. In U.Gellert & E.Jablonka (Eds.), Mathematisation demathematisation: Social, philosophical and educational ramifications (pp. 123–139). Rotterdam: Sense.

Bishop, A. (2000). Critical challenges in researching cultural issues in Mathematics learning. In *proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Tucson, Az, October 7-10, v1-2.

Bishop, A. (1999). Mathematics Teaching and Values Education- An Intersection in Need of Research. In H. Köhler (Ed.), *Mathematics Teaching and Democratic Education*. Part 2. ZDM 31(1) 1-4.

Bishop, A.(1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education.* Dordrecht. The Netherlands: Kluwer.

Bishop, A., FitzSimons, G., Seah, W.T., Clarkson, Ph. (2001). Do teachers implement their intended values in Mathematics classrooms? *PME-25*, Utrecht, 12 - 17 July 2001.

Lim, Ch. S. (2012). Riding the third wave: Negotiating teacher and students' preferences relating to effective mathematics lesson. *12th International Congress on Mathematical Education*. COEX: Seoul, Korea.

Law, H. Y., Wong, N. Y., Lee N. Y. L. (2012). A study of espoused values in Hong Kong's mathematics classrooms, *ZDM*, 44, 45–57.

Presmeg, N. (2007). The role of culture in teaching and learning mathematics. In Lester, F. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 435-460. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Seah, W. T. (2008). Valuing Values in Mathematics Education. In P. Clarkson, N. Presmeg (eds.), *Critical Issues in Mathematics Education*. Springer Science+Business Media, LLC.

Seah, W. T. (2007). Qualities co-valued in effective mathematics lessons in Australia: Preliminary findings, Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, pp. 161-168. Seoul: PME.

Seah, W. T., Bishop, A. (2000). Values in Mathematics Textbooks: A view through two Australian regions. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Assosiation. New Orleans, LA, April, 24-28.

Seah, W. T. & Peng, A. (2012). What students outside Asia value in effective mathematics lessons: a scoping study. *ZDM* 44:71–82.

Seah, W. T. & Wong, N. Y. (2012). What students value in effective mathematics learning: a 'Third Wave Project' research study. *ZDM Mathematics Education*, 44:33–43.

Χρονάκη, Α. (2008). Το 'διδακτικό πείραμα': Μελετώντας τη διαδικασίαμάθησης και διδασκαλίας. Στο Β. Σβολόπουλος (επιμ.) *Σύνδεση εκπαιδευτικής έρευνας και πράξης,*Αθήνα. Ατραπός, 371–401.

ΔΙΑΣΧΙΖΟΝΤΑΣ ΤΑ ΣΥΝΟΡΑ ΜΕΤΑΞΥ ΚΟΙΝΟΤΗΤΩΝ ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΩΝ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ, ΜΕΣΩ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΩΝ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΒΟΛΟΓΡΑΦΟΥ

Ελισάβετ Καλογερία & Χρόνης Κυνηγός

Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Φ.Π.Ψ., ΕΚΠΑ

ekaloger@ppp.uoa.gr, kynigos@ppp.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα έρευνα, εστίασε στη μελέτη της ασύγχρονης ηλεκτρονικής επικοινωνίας που αναπτύχθηκε από τη συνεργασία ερευνητών με επιμορφωτές καθηγητών μαθηματικών για την παιδαγωγική αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων, με αντικείμενο τον σχεδιασμό ψηφιακών δομημάτων. Η ανάλυση έδειξε, ότι παράμετροι που κατά την ανάπτυξη του σχεδιασμού βοήθησαν τις επιμέρους κοινότητες να διεισδύσουν η μια στις πρακτικές ή θεωρητικές γνώσεις της άλλης, ήταν οι νόρμες αμφισβήτησης και αναζήτησης πρόσθετης αξίας στη χρήση της τεχνολογίας, ο θεωρητικός εμπλουτισμός των κατασκευών, η υποστασιοποίηση αφηρημένων αλγεβρικών εννοιών μέσω εργαλείων σύνδεσης άλγεβρας-γεωμετρίας και η ανταλλαγή καλών πρακτικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αντικείμενο της παρούσας έρευνας είναι η μελέτη της διαδικασίας, με την οποία ερευνητές και εκπαιδευτικοί (νέοι στο επάγγελμα του επιμορφωτή για την παιδαγωγική αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας στα μαθηματικά) επικοινωνώντας ηλεκτρονικά, κατασκεύασαν ψηφιακά δομήματα και αναζήτησαν την παιδαγωγική τους αξία. Οι συμμετέχοντες ήταν 6 μέλη της ακαδημαϊκής ομάδας (ομάδα Α) που είχε λάβει μέρος στην κατάρτιση των εκπαιδευτικών ως επιμορφωτές στα Πανεπιστημιακά Κέντρα Επιμόρφωσης (ΠΑΚΕ), 7 εκπαιδευτικοί που είχαν ασκήσει μια φορά το επάγγελμα του επιμορφωτή στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης (ΚΣΕ) (ομάδα Β1) και 11 εκπαιδευτικοί που επρόκειτο να το ασκήσουν για πρώτη φορά (ομάδα Β2). Η επικοινωνία οργανώθηκε μέσω λίστας emails και είχε ως στόχο την υποστήριξη των επιμορφωτών κατά το χρόνο άσκησης του νέου τους επαγγέλματος, την ανίχνευση ζητημάτων που αναδύονταν μέσα από την πράξη και την ανατροφοδότηση του σχεδιασμού της επιμόρφωσης σε ΠΑΚΕ-ΚΣΕ. Η συμμετοχή της ακαδημαϊκής ομάδας, είχε το νόημα της παρέμβασης στα ζητήματα αυτά και της συνέχισης των βασικών αρχών που διέπνεαν την επιμόρφωση στα ΠΑΚΕ, σημαντικότερη εκ των οποίων ήταν η εμπλοκή των εκπαιδευτικών με τον διδακτικό σχεδιασμό σεναρίων και μικρόκοσμων. Η παρούσα έρευνα, αποτελεί μέρος ευρύτερης, που μελετά τα χαρακτηριστικά αυτού του τύπου σχεδιασμού και τη δυναμική της εμπλοκής των εκπαιδευτικών με αυτόν, ως παράγοντα επαγγελματικής

τους εξέλιξης. Εδώ, η εστίαση γίνεται κυρίως στην ανίχνευση των παραμέτρων της επικοινωνίας, που συντελούν στην εξέλιξη του σχεδιασμού.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το γεγονός της μη συμπερίληψης των ευρημάτων της εκπαιδευτικής έρευνας στην καθημερινή διδακτική πρακτική των εκπαιδευτικών, έχει συχνά επισημανθεί από αντίστοιχες μελέτες (Hiebert et al, 2002), με αποτέλεσμα η έρευνα να μην έχει τη δυνατότητα παρέμβασης στη βελτίωση της διδασκαλίας. Η ακαδημαϊκή γνώση των ερευνητών για τη διδασκαλία είναι περισσότερο θεωρητική, ενώ η γνώση των εκπαιδευτικών είναι συνήθως πρακτική και προέρχεται κυρίως από την εμπειρία τους. Η σύνθεση αυτών των δυο εκφάνσεων της γνώσης, μπορεί να επιτευχθεί μέσω συνεργασίας ερευνητών-εκπαιδευτικών σε κοινότητες που πραγματεύονται ζητήματα μάθησης-διδασκαλίας (Cochran Smith & Lytle, 1999). Σε αυτές, οι μεν εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα, εξωτερικεύοντας τη γνώση τους, να τη θεωρητικοποιήσουν και να την εμπλουτίσουν με αυτή των ερευνητών (Putnam & Borko, 2000), οι δε ερευνητές να αποκτήσουν βαθύτερη επίγνωση της φύσης της συνεισφοράς τους, ώστε να μπορούν να έχουν μια πιο κριτική ματιά για το ρόλο τους στη μάθηση των εκπαιδευτικών (Potari et al, 2010). Με αυτό το σκεπτικό, η παρούσα έρευνα και μέσω μιας κλειστής λίστας e-mails που περιελάμβανε ομάδες με διαφορετικά χαρακτηριστικά, μελέτησε την μεταξύ τους επικοινωνία, η οποία είχε ως επίκεντρο τον σχεδιασμό σεναρίων και μαθηματικών μικρόκοσμων με χρήση ψηφιακών εργαλείων. Η εστίαση σε αυτού του τύπου το σχεδιασμό ήταν μια σκόπιμη επιλογή από πλευράς ερευνητικής ομάδας, καθώς θελήσαμε – με όχημα τον σχεδιασμό - να μελετήσουμε τη διαδικασία μέσω της οποίας μπορεί να γεφυρωθεί το κενό που περιγράψαμε ανάμεσα στην ακαδημαϊκή κοινότητα και στους επαγγελματίες της πράξης.

Κρίσιμο σημείο για την επίτευξη του στόχου αυτού, είναι το ‘πέρασμα των συνόρων’ που διαφοροποιούν την κάθε μια ξεχωριστά. Για να συμβεί αυτό, πρέπει πιο πριν να ανοιχθούν οι δίαυλοι μέσω των οποίων η μια κοινότητα να μπορεί να διεισδύει στους κόλπους της άλλης (boundary crossing). Τα αντικείμενα που επιτελούν τη γεφυροποιό αυτή λειτουργία, ονομάζονται «διασυνοριακά» (boundary objects) (Star, 1989) και μπορεί να είναι τεχνήματα, γραπτά κείμενα, εργαλεία, όροι, έννοιες ή οποιαδήποτε άλλη υποστασιοποιημένη μορφή προκύψει από τις αλληλεπιδράσεις των μελών μιας κοινότητας (Wenger, 1998). Η διαδικασία περάσματος συνόρων μπορεί να εμπεριέχει μάθηση μέσα από τέσσερις μηχανισμούς (Akkerman & Bakker, 2011): *Προσδιορισμός ταυτότητας:* οι ομάδες ορίζουν τις πρακτικές τους, δηλώνοντας ταυτόχρονα ανάγκη για συνύπαρξη. *Συντονισμός:* η επικοινωνία μεταξύ των κοινοτήτων σταδιακά αυτοματοποιείται και τα διασυνοριακά αντικείμενα ανταλλάσσονται χωρίς διαπραγμάτευση ή συνεργασία. *Αναστοχασμός:* οι οπτικές των δυο μερών συνθέτουν νέες κατανοήσεις. *Μετασχηματισμός*: οι ομάδες συσπειρώνονται γύρω από την επίλυση ενός προβλήματος και σταδιακά

μετασχηματίζουν γνώση και πρακτικές, δημιουργώντας νέα υβριδικά αντικείμενα (εργαλεία, μοντέλα, έννοιες, πρακτικές) τα οποία αποκρυσταλλώνουν, επενδύοντάς τα με νέα γνώση και εμπειρία. Ο μετασχηματισμός περιέχει την ανάδυση νέων πρακτικών εντός και μεταξύ των δυο μερών, επιτυγχάνεται δύσκολα και αποτελεί ζητούμενο για τις έρευνες παρέμβασης. Οι Kynigos & Kalogeria (2012) μελετώντας την ηλεκτρονική επικοινωνία επιμορφωτών - ερευνητών γύρω από τη βελτίωση σκόπιμα εύπλαστων (ή ημιτελών) αντικειμένων με τη μορφή σεναρίων και μισοψημένων μικρόκοσμων, διαπίστωσαν ότι μέσα από τη διαδικασία τροποποίησης και ανταλλαγής τους, τα αντικείμενα αυτά απέκτησαν διασυνοριακό ρόλο και συνέβαλαν στην μετεξέλιξη των συμμετεχόντων, διευκολύνοντας την ανάπτυξη συνεργατικών πρακτικών στα σύνορα των επιμέρους κοινοτήτων. Η αλλοιώσιμη φύση σεναρίων και μικρόκοσμων και η διαπραγμάτευση με επίκεντρο τη βελτίωσή τους, έδωσε τη δυνατότητα αναπαράστασης διαφορετικών μαθηματικών ιδεών ή επιστημολογιών και οδήγησε στην καθιέρωση νέων νορμών μεταξύ των συμμετεχόντων, κυρίως σε ότι αφορά στο ρόλο τους ως σχεδιαστές.

Το στοιχείο του σχεδιασμού, θεωρήθηκε κομβικής σημασίας κατά τη διάρκεια τόσο της επιμόρφωσης στα ΠΑΚΕ, όσο και της ασύγχρονης ηλεκτρονικής επικοινωνίας, κυρίως διότι σηματοδοτεί αλλαγή του ρόλου του εκπαιδευτικού (Κυνηγός, 2006) και είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για εμάς, να προσδιορίσουμε λεπτομερειακά, τις παραμέτρους που επηρεάζουν την ανάπτυξη του σχεδιασμού. Κατά τους Gueudet και Trouche (2009) η τεκμηρίωση ενός σχεδιασμού από τον εκπαιδευτικό, έχει ως έναυσμα ένα σύνολο από υπάρχοντες πόρους του Π.Σ. (όχι μόνο αυτούς που έχουν υλική υπόσταση, αλλά κάθε ερέθισμα πνευματικό ή υλικό), το θεσμικό πλαίσιο, καθώς και τις καταστάσεις στις οποίες πρόκειται να εφαρμοσθεί. Η εφαρμογή στην πράξη και οι αλληλεπιδράσεις που προκύπτουν μέσα από αυτήν, αναπτύσσουν σχήματα χρήσης του υλικού για συγκεκριμένες καταστάσεις και πλαίσια: *τεκμήριο = πόροι + σχήματα χρήσης τους*. Τα σχήματα χρήσης ενός πόρου του Π.Σ. περιλαμβάνουν παρατηρήσιμα μέρη, αλλά και μη ορατά στοιχεία, που οι Gueudet & Trouche ονομάζουν 'λειτουργικές σταθερές': *τεκμήριο = πόροι + τρόποι χρήσης + λειτουργικές σταθερές*. Η εφαρμογή ενός τεκμηρίου σε νέα πλαίσια και καταστάσεις οδηγεί σε πιθανή τροποποίηση της αρχικής του μορφής, που συμπεριλαμβάνει νέους πόρους και αποδίδει ένα νέο τεκμήριο. Η διαδικασία αυτή είναι συνεχής και ονομάσθηκε από τους παραπάνω ερευνητές «δημιουργία τεκμηρίωσης» (documentational genesis). Το δόμημα αυτό, βοήθησε να αναλύσουμε τον σχεδιασμό των επιμορφωτών και την επιχειρηματολογία που στήθηκε γύρω από αυτόν, ώστε να προσδιορίσουμε τις λειτουργικές σταθερές που συντέλεσαν στη δημιουργία και αποκρυστάλλωση των υβριδικών αντικειμένων του σχεδιασμού.

Ο βασισμένος στην αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων σχεδιασμός βλέπει τον εκπαιδευτικό σε δυο επίπεδα: στο πρώτο ως μαθητή, που αρχικά πρέπει να κατανοήσει τις δυνατότητες των εργαλείων και να φτιάξει δραστηριότητες με αυτά για τον εαυτό του, ώστε αφού τα οικειοποιηθεί, να περάσει στο δεύτερο και να τα

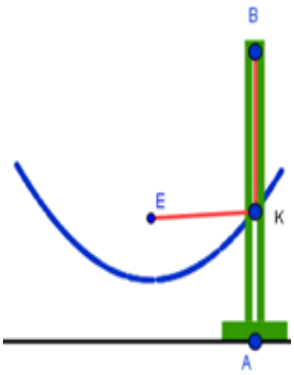
αξιοποιήσει επαγγελματικά, σχεδιάζοντας διδακτικές παρεμβάσεις με αυτά για τους μαθητές του. Αυτή τη διπλή διάσταση του σχεδιασμού περιγράφει το δόμημα της «διπλής δημιουργίας εργαλείων» (double instrumental genesis) (Haspekian, 2011). Ο προσδιορισμός των λειτουργικών σταθερών που συνεισφέρουν στη μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο, αποτέλεσε ένα ακόμα ζητούμενο της παρούσας εργασίας.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η παρούσα έρευνα *παρέμβασης* (Krainer, 2005), επιχειρεί να μελετήσει τις λειτουργικές σταθερές που πλαισίωσαν την ανάπτυξη μικρόκοσμων, μέσω συνεργασίας επιμορφωτών και ερευνητών με τη βοήθεια ασύγχρονης επικοινωνίας. Ο σχεδιασμός της επικοινωνίας ήταν *μινιμαλιστικός* (Wenger, 1998, σ.233), ώστε να αξιοποιούνται τα ζητήματα που αναδύονταν από τους ίδιους τους επιμορφωτές σχετικά με την καθημερινή τους πρακτική. Από τα μέλη της ακαδημαϊκής ομάδας προέβλεπε - πέραν του υποστηρικτικού τους ρόλου - την υιοθέτηση αναστοχαστικής στάσης στα θέματα που προέκυπταν από τη διδακτική πράξη σε σχολείο-ΚΣΕ και τη σύνδεσή τους με θεωρία και ευρήματα της έρευνας. Τα δεδομένα ήταν 643 μηνύματα και 312 συνημμένα αρχεία (κυρίως σενάρια, φύλλα εργασίας, μικρόκοσμοι και άρθρα), που ανταλλάχθηκαν σε 15 μήνες. Τα μηνύματα αριθμήθηκαν και από την ανάγνωσή τους, προέκυψαν 7 ευρείες θεματικές ενότητες, στις οποίες ταξινομήθηκαν. Επειδή ένα μήνυμα μπορεί να αναφερόταν σε διαφορετικά θέματα, τα μηνύματα χωρίσθηκαν σε θεματικές παραγράφους. Η συλλογή με χρονολογική σειρά, των παραγράφων για το ίδιο θέμα, δημιούργησε αντίστοιχες συζητήσεις, οι οποίες καταχωρίσθηκαν σε πίνακες, δομημένους έτσι ώστε να αποτυπώνουν την εξέλιξη της τεκμηρίωσης του σχεδιασμού. Η οριζόντια ανάγνωση ενός πίνακα έδειχνε την εξέλιξη των τεκμηρίων από τον κάθε συμμετέχοντα στη συζήτηση και την επιχειρηματολογία του για αυτά, ενώ η κάθετη ανάγνωσή του έδειχνε την εξέλιξη του σχεδιασμού μέσω της αλληλεπίδρασης. Επίσης, κατασκευάσθηκαν δείκτες για τους μηχανισμούς μάθησης της θεωρίας ‘περάσματος συνόρων’, με βάση τους οποίους χαρακτηρίσθηκαν οι θεματικές παράγραφοι. Η συζήτηση που αναλύεται στην παρούσα έρευνα, επιλέχθηκε ως ενδεικτική της ταξινόμησης σε δυο σημαντικούς μαθησιακούς μηχανισμούς: του αναστοχασμού και του μετασχηματισμού. Παρουσιάζεται με τη μορφή βινιέτας, ώστε να καταστεί εφικτή η περιγραφή της πολυμορφίας των δεδομένων.

Η ΒΙΝΙΕΤΑ

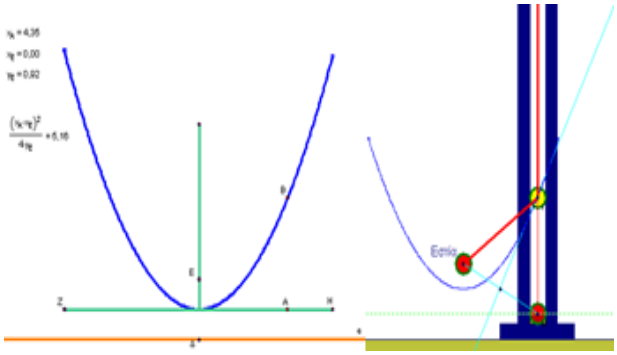
22/2/2010, 2.07πμ : Η Άννα (Β2, μην.102), με αφορμή δραστηριότητα από το διαδίκτυο, που δημιουργεί παραβολές με χρήση παραβολογράφου, κατασκευάζει με το Geogebra παραβολογράφο (εικ.1). Έχει σταθερά στοιχεία τη διευθετούσα (ε) και την εστία Ε και μεταβλητά σημείο Α της (ε), την κάθετη στην (ε) στο Α, τη μεσοκάθετη του ΕΑ και την τομή τους Κ. Το σύρσιμο του Α στην (ε) μετακινούσε τον παραβολογράφο ΑΒ και σε κάθε θέση του Κ αποτύπωνε ένα σημείο της παραβολής. Ζητούμενο της Άννας ήταν να τροποποιηθεί η κατασκευή, ώστε ο μαθητής σύροντας το Κ (και όχι το Α) να γράφει την παραβολή.



Εικόνα 1

23/2/2010, 12.23μμ: Ο Βαγγέλης (Α, μην.106) στέλνει αρχείο Sketchpad, με τις δυνατότητες που ζήτησε η Άννα. Κατασκεύασε παραβολή όπως η Άννα, την εμφάνισε ως γεωμετρικό τόπο, πήρε σημείο της Κ, έφτιαξε τον παραβολογράφο και έκρυψε την παραβολή. Το σύρσιμο του Κ μετακινούσε τον παραβολογράφο και το ίχνος του Κ έγραφε παραβολή.

24/2/2010, 1.50πμ και 2.43πμ: Η Μαρία (Β1, μην.109, 110) συνάπτει δυο αρχεία Sketchpad (εικ.2), που κατασκευάζουν παραβολές μέσω της εξίσωσής τους. Θεωρεί σύστημα συντεταγμένων με κορυφή την κορυφή της παραβολής και άξονα ψ΄ψ την κάθετη από την εστία Ε προς τη διευθετούσα. Ένα μεταβλητό σημείο Α του χ΄χ συνδέεται με σημείο Β της παραβολής ως εξής: $\chi_B=\chi_A$, $\psi_B=(\chi_A-\chi_E)^2/4\psi_E$. Με σύρσιμο του Α πάνω στον άξονα χ΄χ (πεδίο ορισμού το μεταβλητό τμήμα ΖΗ), το Β γράφει παραβολή.


Εικόνα 2

24/2/2010, 12.51μμ: Ο Βλάσσης (Β1, μην.114) θέτει πρόβλημα: «*Ωραίος ο παραβολογράφος, όμως ποια η διδακτική του αξία για τους μαθητές;;;… η άποψή μου είναι τελείως αρνητική για τα «ετοιματζίδικα» εργαλεία. Οι μαθητές πρέπει να εμπλακούν στην κατασκευή π.χ παραβολής (μέσα από ένα πραγματικό πρόβλημα) και να αναζητήσουν, διερευνήσουν κλπ. Μπορεί να κάνω λάθος αλλά νομίζω ότι προσπαθούμε να γίνουμε άσσοι στον χειρισμό των λογισμικών (γοητεία των λογισμικών) αντί να κάνουμε απλά πράγματα.*»

24/2/2010, 14.07μμ: Η Μαρία (Β1, μην.115) απαντά: «*Βλάσση μη ξεχνάς είμαστε και μαθηματικοί! Ήταν μεγάλη πρόκληση να το κατασκευάσω. Για τα παιδιά το εργαλείο θα μπορούσε να προσφέρει αν το έδινες και ζητούσες να το χρησιμοποιήσουν, να παρατηρήσουν και να βρουν τις σχέσεις της παραβολή*».

24/2/2010, 16.05μμ: Η Άννα (Β2, μην.117) συνεχίζει: «*Το ιδανικό θα ήταν οι μαθητές να χειριστούν έναν πραγματικό παραβολογράφο από ξύλο και να μελετήσουν την μηχανική του. Το όργανο τους μεταφέρει τον ορισμό και δεν τους τον λες εσύ. Μετά όπως λέει ο Βλάσσης μπορούν π.χ. να δημιουργήσουν την παραβολή από την διευθετούσα και την εστία (και η διευθετούσα να μην είναι οριζόντια ή κατακόρυφη όπως στα βιβλία τους). Ένας ακόμα λόγος για να γνωρίσουν (όχι να κατασκευάσουν) οι μαθητές τον παραβολογράφο: ότι δεν είναι μόνο ο κύκλος που σχεδιάζει καμπύλες, αλλά υπάρχουν και άλλα όργανα που σχεδιάζουν άλλες καμπύλες και χρησιμοποίησαν οι αρχαίοι για να επιλύσουν τα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας….*».

24/2/2010, 18.20μμ: Ο Θωμάς (Α, μην.118) συνάπτει άρθρο των Dennis & Confrey που «*.. ξεκινά τον παραβολογράφο από άλλο πλαίσιο.. Εμπλέκει την εμπειρική με την ιστορική πλευρά αλλά και το Sketchpad. Και αναρωτιέται: Η καμπύλη γεννά την εξίσωση ή η εξίσωση την καμπύλη της παραβολής*».

24/2/2010, 21.39μμ: Η Άννα (Β2, μην.119) εντυπωσιάζεται από το άρθρο, το μεταφράζει και το δίνει στους επιμορφούμενούς της στο ΚΣΕ.

25/2/2010, 14.22μμ: Ο Στάθης (Α, μην.120), τονίζει τη σημασία της εμπλοκής των μαθητών με κατασκευές και ενημερώνει για το περιεχόμενο project που υλοποίησε με μαθητές Β΄ Λυκείου: κατασκεύασαν παραβολή με 5 διαφορετικούς τρόπους (συνάπτει αρχεία Sketchpad) και στη συνέχεια απέδειξαν με μαθηματικό τρόπο ότι οι κατασκευές οδηγούν σε παραβολή.

Στα επόμενα μηνύματα η Άννα (27/2/2010, 23.40μμ, μην.123) συνάπτει τη μετάφραση του άρθρου των Dennis & Confrey και ο Θωμάς (28/2/2010, 9.39πμ, μην.124) στέλνει δυο ακόμα άρθρα από τη διεθνή βιβλιογραφία.

28/2/2010, 17.29μμ: Ο επικεφαλής της ακαδημαϊκής ομάδας (Α, μην.125) απαντά: «*Ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει σκεφτεί πολύ προσεκτικά τι ακριβώς δίνει στους μαθητές για να δουλέψουν, αν τους δώσει κάτι που να εμπεριέχει όλες τις ιδιότητες που το καθιστούν μαθηματικό αντικείμενο τους στερεί τη δυνατότητα να αναπτύξουν μόνοι τους κάποια κατανόηση (παραβολογράφοι). Μπορεί και πρέπει να χρησιμοποιεί ο ίδιος τα λογισμικά για να κάνει μαθηματικά για το κέφι του (πάλι παραβολογράφοι) όχι όμως να περιορίζεται μετά απλά στο να δείχνει στους μαθητές του τι έφτιαξε. Οι επιμορφωτές καλό είναι να δώσουν ημιτελή αντικείμενα (μισοψημένους μικρόκοσμους) στους καθηγητές ως παραδείγματα 'εργαλείων' που μπορούμε να δώσουμε στους μαθητές για να κάνουν μαθηματική διερεύνηση και στη συνέχεια να τους παρακινήσουν να σχεδιάσουν οι ίδιοι τέτοια ημιτελή εργαλεία*».

3/3/2010, 12.16πμ: Η Άννα (Β2, μην.130) ενημερώνει: «*είχα μια ώρα τους μαθητές μου στο εργαστήριο και παιδεύονταν να σχεδιάσουν ένα σημείο που να απέχει εξίσου από μια ευθεία που τους έδινα και ένα άλλο σημείο. Τελικά τα κατάφεραν και ήταν υπέροχο όταν κινήθηκε αυτό το σημείο και το ίχνος του σχημάτισε μια παραβολή….*».

ΑΝΑΛΥΣΗ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παραπάνω συζήτηση ξεκινά με την Άννα να θέλει να πειραματισθεί σε προσωπικό επίπεδο με την κατασκευή μοντέλου, ωστόσο, ο τρόπος κατασκευής του, δεν βοηθά ώστε να απορρεύσουν μέσα από τη χρήση του με φυσικό τρόπο οι ενσωματωμένες σε αυτό ιδιότητες. Οι κατασκευές των Βαγγέλη και Μαρίας, απαντούν στο πρόβλημα και κάνουν λειτουργικό το υβριδικό αντικείμενο της Άννας. Η συζήτηση αποκτά ενδιαφέρον όταν ο Βλάσσης αμφισβητεί τη διδακτική αξία των «ετοιματζίδικων» εργαλείων. Η Μαρία του υπενθυμίζει τη σημασία του να εμπλέκονται οι ίδιοι σε κατασκευές που να έχουν νόημα ή να αποτελούν πρόκληση για αυτούς, κάνοντας μαθηματικά για τους εαυτούς τους, ενώ παράλληλα υποδεικνύει πώς ο παραβολογράφος θα μπορούσε να αξιοποιηθεί διδακτικά. Ο Θωμάς δίνει νέα οπτική στη χρήση του (από τις καμπύλες στις εξισώσεις), την οποία τεκμηριώνει βιβλιογραφικά. Ο Στάθης αναφέρει παραδείγματα ‘καλών πρακτικών’ από το σχολείο του με θέμα την ιστορική διαδρομή της κατασκευής παραβολών και ο επικεφαλής της ακαδημαϊκής ομάδας θέτει ένα πλαίσιο μετάβασης από κατασκευές για την προσωπική εξοικείωση των επιμορφωτών με τα εργαλεία, σε αυτές που τις καθιστούν διδακτικά εργαλεία, περιγράφοντας τη μορφή των αντικειμένων που ο εκπαιδευτικός δίνει έτοιμα στο μαθητή, ώστε η χρήση τους να μην ταυτίζεται με την επίδειξη, αλλά να απαιτεί διερεύνηση και βελτίωση. Τέλος, η Άννα εμπλέκει τους μαθητές με την κατασκευή της παραβολής στο εργαστήριο, έτσι ώστε οι γεωμετρικές ιδιότητες να οδηγήσουν στις αλγεβρικές.

Τα παραχθέντα τεκμήρια, έχουν τη μορφή μικρόκοσμων - μοντέλων, που ενσωματώνουν μαθηματικά της παραβολής, χωρίς αρχικά να είναι ξεκάθαρη η διδακτική τους αξία. Η αμφισβήτηση του Βλάσση, ο θεωρητικός εμπλουτισμός του Θωμά, τα παραδείγματα ‘καλών πρακτικών’ του Στάθη και διδακτικών εργαλείων που προτείνει ο επικεφαλής της ακαδημαϊκής ομάδας, οδηγούν στην αποκρυστάλλωση των υβριδικών μικρόκοσμων, προσδίδοντάς τους νέα, διαφορετικά σχήματα χρήσης και διευρύνουν τη γνώση για τη διδασκαλία των κωνικών τομών. Η λειτουργική σταθερά που φαίνεται να επηρεάζει την τεκμηρίωση των ομάδων, είναι η αλληλεπίδραση με δυο κύριες συνιστώσες, που συνδέονται με την εγκαθίδρυση αντίστοιχων νορμών: (1) Την αντίληψη για αναπαράσταση αλγεβρικών εννοιών μέσα από αντικείμενα που η χρήση τους από το μαθητή οδηγεί στην ανακάλυψη των μαθηματικών που εμπεριέχονται σε αυτά: Οι απόψεις που εκφράζονται έχουν ως κοινό χαρακτηριστικό την εμπλοκή του μαθητή με κατασκευές, είτε έτοιμες, είτε ημιτελείς, είτε εξ ολοκλήρου από αυτόν. Ενώ η παραδοσιακή διδασκαλία της παραβολής περιλαμβάνει ορισμούς, εξισώσεις, πίνακες τιμών και οπτικοποιήσεις μέσω γραφημάτων, η χρήση της τεχνολογίας φαίνεται να μπορεί να αντιστρέψει τη διδακτική ατζέντα. Με κατάλληλο σχεδιασμό του εκπαιδευτικού, ο μαθητής μπορεί μέσω του παραβολογράφου να χειρισθεί εμπειρικά και να ανακαλύψει τα μαθηματικά της παραβολής με τη βοήθεια των εργαλείων. Η εξίσωση της παραβολής μπορεί να προσδιορισθεί μέσα από τις γεωμετρικές σχέσεις, αντίστροφα από την

παραδοσιακή διδασκαλία και ο μαθητής να ακολουθήσει την ιστορική εξέλιξη της έννοιας της παραβολής, που περιελάμβανε χρήση γεωμετρικών μεθόδων στην Άλγεβρα. Ο δυναμικός χειρισμός του μοντέλου και η εμπειρική διερεύνηση των εννοιών που βρίσκονται πίσω από την κατασκευή του, μπορεί να συντελέσει ώστε η Άλγεβρα να απορρεύσει με φυσικό τρόπο από τη Γεωμετρία και ο συνδυασμός τους να αποτελέσει το εμπειρικό υπόβαθρο για έννοιες του Απειροστικού λογισμού. (2) Την πρόσθετη παιδαγωγική αξία από τη χρήση του μοντέλου: το ζήτημα της αμφισβήτησης και αναζήτησης πρόσθετης αξίας στη χρήση της τεχνολογίας, εμπλέκει τους συμμετέχοντες σε μια διαδικασία εξεύρεσης επιχειρημάτων για τις επιλογές τους, κάτι που διαφοροποιεί σημαντικά τη διδασκαλία των μαθηματικών με χρήση ψηφιακών εργαλείων σε σχέση με την παραδοσιακή. Η ακαδημαϊκή ομάδα στηρίζει θεωρητικά τη χρήση της τεχνολογίας, προσφέροντας ταυτόχρονα μια εναλλακτική οπτική για τη διδασκαλία της παραβολής και παραδείγματα καλών πρακτικών, που αποτελούν σημαντικές παραμέτρους για τη μετάβαση των ομάδων Β από την προσωπική ενασχόληση με τα εργαλεία στην αξιοποίησή τους με πρόσθετη διδακτική αξία.

Με όρους ‘θεωρίας περάσματος συνόρων’, η συζήτηση που περιγράφηκε είχε κυρίως αναστοχαστικό και μετασχηματιστικό χαρακτήρα. Η χρήση των εργαλείων προκάλεσε την κατασκευαστική δραστηριότητα των επιμορφωτών και αυτή με τη σειρά της έθεσε μια σειρά από ζητήματα, που αφορούν στη διδασκαλία της παραβολής, αλλά και γενικότερα, στη χρήση της τεχνολογίας στα μαθηματικά. Οι επιμέρους ομάδες είχαν τη δυνατότητα να αναστοχασθούν, ανταλλάσσοντας τις οπτικές τους, αλλά και να εμπλακούν σε δράση μέσω των κατασκευών τους. Οι μικρόκοσμοι αποτέλεσαν το επίκεντρο της επικοινωνίας και έδωσαν το έναυσμα για ανταλλαγή θεωρητικών και πρακτικών επιχειρημάτων, που σχετίζονταν με τη διδακτική τους αξιοποίηση, ώστε να έχουν πρόσθετη διδακτική αξία. Το αρχικό υβριδικό τεκμήριο υπήρξε αντικείμενο διαδοχικών τροποποιήσεων και μέσα από την αλληλεπίδραση πλαισιώθηκε με διαφορετικά σχήματα χρήσης, που σηματοδοτούν την φάση της αποκρυστάλλωσης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των συζητήσεων γύρω από τη διδακτική αξιοποίηση του παραβολογράφου, επιχείρησε μέσα από μια ευκρινέστερη και οξύτερη περιγραφή τους, να φωτίσει εκείνες τις πτυχές που φαίνεται να έχουν ιδιαίτερη σημασία στη μετεξέλιξη γνώσεων και παραγόμενων των συμμετεχόντων. Οι λειτουργικές σταθερές που προσδιόρισε, συνδέονται με τις νόρμες που αναπτύχθηκαν μέσω της αλληλεπίδρασης: α) την αμφισβήτηση με άξονα την αναζήτηση πρόσθετης αξίας από τη χρήση της τεχνολογίας, β) την χρήση των εργαλείων ώστε να υποστασιοποιούν τις αφηρημένες αλγεβρικές έννοιες, καθιστώντας τις αντικείμενα εμπειρικού χειρισμού και συνεισφέροντας στη σύνδεση της άλγεβρας με τη γεωμετρία, γ) τον εμπλουτισμό ιδεών και σχεδιασμού με θεωρία και δ) την ανταλλαγή καλών πρακτικών από τις δυο

πλευρές του συνόρου. Η σχέση της εξέλιξης των τεκμηρίων του σχεδιασμού με τις νόρμες, δείχνει να είναι *αμφίδρομη*, καθώς η σκόπιμα εύπλαστη φύση των διασυνοριακών αντικειμένων ευνοεί την ανάπτυξη των νορμών αυτών (Kynigos & Kalogeria, 2012), αλλά και αντίστροφα, η εγκαθίδρυση των νορμών αυτών διαφοροποιεί και εξελίσσει την τεκμηρίωση, πλαισιώνοντας τα υβριδικά αντικείμενα με διαφορετικά σχήματα χρήσης, που μετασχηματίζουν τη γνώση των σχεδιαστών.

Ταυτόχρονα, οδηγεί σε μια νέα για τα ελληνικά δεδομένα μορφή επαγγελματισμού, που επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να επαναπροσδιορίσει το ρόλο του σε σχέση με το Π.Σ., καλλιεργώντας την ανάγκη συμμετοχής σε συλλογικότητες. Με αυτή την έννοια, ο βασισμένος στη χρήση της τεχνολογίας σχεδιασμός, συνιστά πρόταση για την εξ αποστάσεως επιμόρφωση εκπαιδευτικών, αλλά και για χρήση του μετά το πέρας επιμορφωτικών προγραμμάτων, ως μέσου διατήρησης των στόχων τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Akkerman, S., Bakker, A. (2011). Boundary Crossing and Boundary Objects, *Review of Educational Research*, v .81, n. 2, pp. 132–169

Cochran-Smith, L., Little, S. (1998). Teacher research: the question that persists. *International Journal of Leadership in Education*, 1(1), 19-36

Gueudet, G., Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71:199–218

Haspekian, M. (2011). The Co-construction of a mathematical and didactical instrument. In Pytlak, M., Rowland, T., Swoboda, E. (Eds*). Proceedings of the seventh congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. University of Rzeszow, Poland, 2298-2307

Hiebert, J, Gallimore, R., Stigler, W. (2002). A Knowledge Base for the Teaching Profession: What Would it Look Like and How Can We Get One? *Educational Researcher*, v.31, n.5, 3-15

Krainer, K. (2005). What is "Good" Mathematics Teaching, and How Can Research Inform Practice and Policy? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 75-81, Springer.

Κυνηγός, Χ. (2006). *Το μάθημα της διερεύνησης*. Αθήνα: Ελλ. Γράμματα

Kynigos, C., Kalogeria, E. (2012). Boundary Objects for in service Mathematics Teacher Education: the case of Scenarios and Half-baked Microworlds. M. Borba, & S. Llinares, (Eds.) *The International Journal of Mathematics Education (ZDM)*, v.44, n.6, 733-745, Springer.

Potari, D., Sakonidis, H., Chatzigoula, R., Manaridis, A. (2010). Teachers' and researchers' collaboration in analyzing mathematics teaching: A context for professional reflection and development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 473-485, Springer.

Putnam, R., Borko, H. (2000). What Do New Views of Knowledge and Thinking Have to Say About Research on Teacher Learning? *Educational Researcher*, v.29, n.1, 4-15

Star, S. L. (1989). The structure of ill-structured solutions: Boundary objects and heterogeneous distributed problem solving. In L. Gasser & M. Huhns (Eds.), *Distributed artificial intelligence*, pp. 37–54. San Mateo, CA: Morgan

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning meaning and identity*. Cambridge: Cambridge University Press

ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΟΝΤΑΣ 'ΝΕΑ' ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ

***Ελισάβετ Καλογερία, * Χρόνης Κυνηγός, **Ειρήνη Περυσινάκη**

*Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Φ.Π.Ψ., ΕΚΠΑ

** Πρότυπο Πειραματικό Γεν. Λύκειο Ηρακλείου

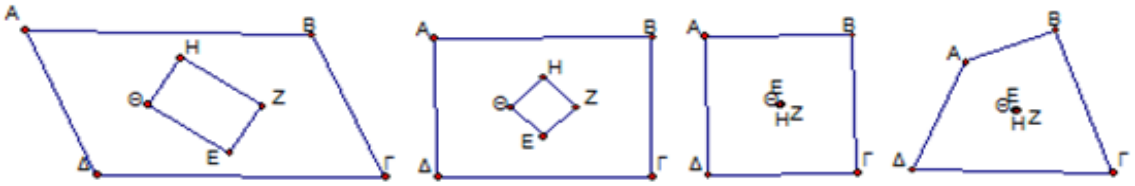
*ekaloger@ppp.uoa.gr, *kynigos@ppp.uoa.gr, **iriniper@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε επίπεδο σχολικών μαθηματικών, υπάρχει περιθώριο ανακάλυψης; Μπορεί ο μαθητής να σκεφθεί έξω από το πλαίσιο του κατακερματισμού του μαθηματικού περιεχομένου και να 'ανακαλύψει' σχέσεις σύνδεσης των επιμέρους περιοχών; Ποιες διαδικασίες ή εργαλεία μπορούν να ευνοήσουν κάτι τέτοιο; Η 'ανακάλυψη' από εμάς, μιας σχέσης που συνδέει περιγράψιμα τετράπλευρα με κωνικές τομές, σε δραστηριότητα με χρήση περιβάλλοντος δυναμικής γεωμετρίας (ΠΔΓ), έδωσε το έναυσμα, ώστε με την παρούσα έρευνα, να προσεγγίσουμε τα ερωτήματα αυτά. Έτσι, μελετήσαμε τη μαθησιακή διαδικασία που προέκυψε, καθώς οι μαθητές ενεπλάκησαν με χρήση του Geogebra, στη διερεύνηση της δραστηριότητας αυτής.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

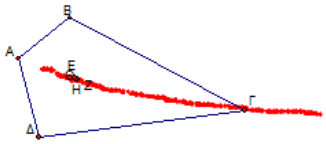
Υπάρχουν κάποιες δραστηριότητες, που έχουν θεωρηθεί ως υποδειγματικές για μαθηματικές διερευνήσεις με αξιοποίηση ΠΔΓ και έχουν συχνά μελετηθεί από σχετικές έρευνες της διδακτικής μαθηματικών. Μια τέτοιου τύπου δραστηριότητα, είναι η ακόλουθη: «*Έστω ΕΖΗΘ το τετράπλευρο που ορίζεται από τις διχοτόμους των γωνιών ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Διερευνείστε το είδος του ΕΖΗΘ σε σχέση με αυτό του ΑΒΓΔ*». Πρόκειται για μια σειρά παραδοσιακών ασκήσεων των σχολικών εγχειριδίων, που σε ένα περιβάλλον δυναμικού χειρισμού αποκτούν 'ανοιχτή' μορφή και μπορούν να προσεγγισθούν από τον μαθητή ως διαδοχικοί μετασχηματισμοί του ίδιου αντικειμένου (του ΑΒΓΔ) (εικ.1).



Εικόνα 1

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου οι διχοτόμοι συντρέχουν και το ΕΖΗΘ εκφυλίζεται σε σημείο. Αρχικά φαίνεται ότι αυτό συμβαίνει όταν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Σύροντας προσεκτικά μια από τις τέσσερις κορυφές του ΑΒΓΔ, έτσι ώστε οι διχοτόμοι να εξακολουθούν να συντρέχουν, οι μαθητές μπορούν να διαπιστώσουν ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει και σε άλλα τετράπλευρα και να οδηγηθούν

μέσω των μετρήσεων στα περιγράψιμα. Στο επίπεδο της προσωπικής μας ενασχόλησης με ΠΔΓ, ανακαλύψαμε μια σχέση που συνδέει περιγράψιμα τετράπλευρα (που έχουν άνισες πλευρές) με τις κωνικές τομές: βάζοντας ίχνος και σύροντας την τέταρτη κορυφή ώστε οι διχοτόμοι να συντρέχουν, διαπιστώσαμε και δείξαμε θεωρητικά, ότι η κορυφή αυτή κινείται σε υπερβολή (εικ.2). Η εμπειρία αυτή, ανέδειξε τις δυνατότητες που παρέχουν τα ψηφιακά εργαλεία για διεύρυνση και εμπλουτισμό των σχολικών μαθηματικών και μας δημιούργησε το ερώτημα αν - και κάτω από ποιες προϋποθέσεις - οι μαθητές μπορούν να οδηγηθούν σε αυτού του είδους την 'ανακάλυψη'.



Εικόνα 2

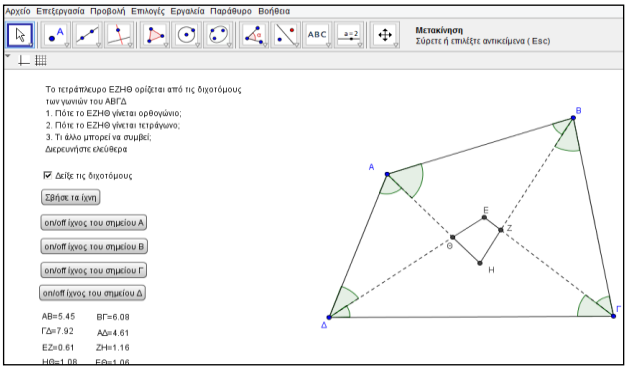
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, η γεωμετρία έχει μάλλον περιφερειακό χαρακτήρα εντός του Προγράμματος Σπουδών (ΠΣ) των μαθηματικών. Η διδασκαλία της εξελίσσεται παράλληλα με αυτήν της άλγεβρας, έτσι ώστε στον μαθητή να δημιουργείται η εντύπωση ότι πρόκειται για δυο ανεξάρτητους τομείς των μαθηματικών. Οι παραδοσιακές διδακτικές πρακτικές, περισσότερο αποσκοπούν στην παρουσίαση της γνώσης στον μαθητή, παρά στην κατασκευή της από αυτόν μέσω της εμπλοκής του σε δραστηριότητες που του παρέχουν αυτονομία (Kynigos et al, 2009). Ειδικότερα στη γεωμετρία, οι μαθητές καλούνται να αποδείξουν μια πρόταση που τους δίνεται έτοιμη, μέσω μιας διαδικασίας που σπάνια περιλαμβάνει δράση ή παραγωγή εικασιών. Η απόδειξη έχει κυρίως το νόημα της επικύρωσης αυτής της πρότασης, χωρίς να δίνεται έμφαση σε άλλες σημαντικές λειτουργίες, όπως της επαλήθευσης, της επεξήγησης, της ανακάλυψης, της επικοινωνίας, της συστηματοποίησης και της διανοητικής πρόκλησης (de Villiers, 1999). Παράλληλα, η διττή φύση της γεωμετρίας, ως θεωρητικού σώματος γνώσεων και ως εργαλείου μοντελοποίησης, αποτελεί συχνά πηγή προβλημάτων για τους μαθητές, που συγχέουν το θεωρητικό επίπεδο με το οπτικό-αντιληπτικό και με τις απαντήσεις τους τείνουν να ικανοποιήσουν κυρίως οπτικούς περιορισμούς (Laborde, 2005). Τα παραπάνω προβλήματα, καθώς και κάποια από αυτά που οι μαθητές αντιμετωπίζουν στην άλγεβρα με την κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής (και ευρύτερα της μεταβολής) η διδασκαλία μπορεί να τα προσεγγίσει μέσα από την αξιοποίηση ΠΔΓ (Laborde, 2005). Η ΔΓ που έχει να κάνει με απτά, μεταβλητά αντικείμενα, μπορεί να αποτελέσει ένα ισχυρό εργαλείο για τον εκπαιδευτικό και μέσα από τη χρήση ανοιχτών προβλημάτων, να εισάγει τους μαθητές σε αυτή τη βαθειά και ουσιαστική φύση των μαθηματικών αντικειμένων. Η ύπαρξη εργαλείων σύνδεσης άλγεβρας με γεωμετρία, συνεισφέρει στην προσέγγιση του μαθηματικού περιεχομένου ως ολότητας, καθώς δίνει τη δυνατότητα αναπαράστασης αφηρημένων αλγεβρικών εννοιών με μορφή γεωμετρικών αντικειμένων και εύρεσης συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ στοιχείων μιας γεωμετρικής κατασκευής. Η δραστηριότητα προσδιορισμού των σχέσεων αυτών απαιτεί μια διαδικασία μπρος – πίσω, με εικασίες που βασίζονται στην οπτικοποίηση και τους ελέγχους στο διάγραμμα, η παρατήρηση των

οποίων οδηγεί σε πιθανές αφαιρέσεις (Laborde et al, 2006). Η πλέον σημαντική λειτουργία των ΠΔΓ είναι το σύρσιμο. Οι Arzarello et al (2002) προσδιόρισαν 7 είδη συρσίματος των μαθητών, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας: *Περιπλανητικό*: με τυχαίο τρόπο μετακινούν βασικά σημεία του σχήματος, για να ανακαλύψουν κανονικότητες. *Δεσμευμένο*: μετακινούν σημείο που είναι συνδεδεμένο με ένα άλλο αντικείμενο. *Καθοδηγούμενο*: μετακινούν σημεία ενός σχήματος, ώστε να πάρει μια συγκεκριμένη μορφή. *Κρυφού γεωμετρικού τόπου* (γτ): μετακινούν ένα σημείο ώστε το σχήμα να διατηρεί μια ιδιότητα που έχει ανακαλυφθεί. Το σημείο που μετακινείται ακολουθεί ένα μονοπάτι, ακόμα και αν οι χρήστες δεν το συνειδητοποιούν. Ωστόσο, οι μαθητές σπάνια χρησιμοποιούν αυθόρμητα το σύρσιμο αυτό (Baccaglini-Frank and Mariotti, 2010). Τα είδη αυτά, αντιστοιχούν σε φάσεις δημιουργίας εικασιών, ενώ τα υπόλοιπα 3 είδη συρσίματος (*γραμμής, συνδεδεμένο, ελέγχου*) σηματοδοτούν τη μετάβαση προς την τυπική απόδειξη. Οι δραστηριότητες μπορεί ανάλογα με τη στοχοθεσία του εκπαιδευτικού να περιλαμβάνουν: α) Την εξερεύνηση μιας κατασκευής που δίνεται έτοιμη στους μαθητές, ώστε να ανακαλύψουν τα ενσωματωμένα σε αυτήν μαθηματικά. Η κατασκευή αυτή, εάν έχει συμπεριλάβει με σωστό τρόπο τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων, μέσω του συρσίματος ελέγχου διατηρεί τις ιδιότητες αυτές και θεωρείται ως '*ανθεκτική*' στο σύρσιμο. Οι ανθεκτικές κατασκευές βοηθούν τον μαθητή να διακρίνει τις ιδιότητες που είναι συμπτωματικές (οπτικές) από αυτές που είναι απαραίτητες, καθώς και τις ιδιότητες που είναι πάντα αληθείς, από άλλες πιο ειδικές (Laborde, 2005). β) Την κατασκευή ενός γεωμετρικού αντικειμένου από τους ίδιους τους μαθητές, άλλοτε καθοδηγώντας τους και άλλοτε όχι. Το αντικείμενο αυτό, ανάλογα με τη διαδικασία κατασκευής του, μπορεί να αποτελεί μια '*ανθεκτική*' ή μια '*εύπλαστη*' κατασκευή. Η διάκριση των κατασκευών σε αυτά τα δυο είδη, έγινε αρχικά από την Healy (2000), και ενώ μέχρι τότε δινόταν ιδιαίτερη έμφαση στις 'ανθεκτικές', οι οποίες θεωρούνταν το βασικό πλεονέκτημα των ΠΔΓ, σταδιακά άρχισε να αναδεικνύεται η σημασία των 'εύπλαστων', της συμπληρωματικότητάς τους με τις ανθεκτικές και της ανάγκης διδακτικής τους αξιοποίησης. Κατά τη διάρκεια του συρσίματος ελέγχου μιας ανθεκτικής κατασκευής, η προσοχή μετακινείται από το γενικό προς το ειδικό, καθώς παράγεται μια οικογένεια σχημάτων με την ίδια γεωμετρική 'αμφίεση' (πχ αν Μ σημείο κύκλου διαμέτρου ΑΒ, τότε για κάθε θέση του Μ, οι μετρήσεις δείχνουν ότι η γωνία AMB=90^{O}). Σε μια εύπλαστη κατασκευή, το σύρσιμο δεν χρησιμοποιείται απλά ως εργαλείο ελέγχου, αλλά αποτελεί μέρος της κατασκευής. Οι μαθητές παρατηρούν πώς η υπο διαπραγμάτευση ιδιότητα γίνεται εμφανής, μέσω μιας άλλης ιδιότητας που ικανοποιείται χειρονακτικά ή οπτικά. Έτσι, το γενικό προκύπτει από το ειδικό, μέσα από αναζήτηση του συνόλου των σημείων που ικανοποιούν τις δοσμένες συνθήκες (πχ αν στο επίπεδο κύκλου διαμέτρου ΑΒ, θεωρήσουμε σημείο Μ, διερευνώντας το είδος της γωνίας ΑΜΒ για τις διαφορετικές θέσεις του Μ προκύπτουν τρεις περιπτώσεις).

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Στους μαθητές δόθηκε έτοιμο αρχείο (εικ.3), με τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ και τρία ερωτήματα: «*1. Πότε το ΕΖΗΘ γίνεται ορθογώνιο; 2. Πότε το ΕΖΗΘ γίνεται τετράγωνο; 3. Τι άλλο μπορεί να συμβεί; Διερευνείστε ελεύθερα*». Λαμβάνοντας υπόψη ευρήματα και ορολογία ερευνών των Baccaglini - Frank & Mariotti (2010) η διερεύνηση αναμενόταν να ακολουθήσει τις εξής φάσεις: 1) Αρχικά, περιπλανητικό και στη συνέχεια καθοδηγούμενο σύρσιμο, ώστε το ΕΖΗΘ να πάρει συγκεκριμένη μορφή (παραλ/γραμμο, ορθογώνιο, τετράγωνο) και να διατυπωθούν αντίστοιχες εικασίες. Η διδακτική μας εστίαση ήταν στην περίπτωση της ταύτισης των Ε, Ζ, Η, Θ. Η διατήρησή της μέσω συρσίματος κρυφού γ.τ., αναμέναμε να τους οδηγήσει στα περιγράψιμα τετράπλευρα. Το σημείο τομής τους, θεωρείται ως μια νέα σταθερά, που ταυτόχρονα αποτελεί μια εύπλαστη κατασκευή. Για αυτού του τύπου τις σταθερές, που δεν ανήκουν στα δεδομένα του προβλήματος, αλλά δημιουργούνται κατά τη διερεύνηση σε ΠΔΓ, οι Baccaglini-Frank και Mariotti (2010) εισήγαγαν τον όρο '*σκόπιμα προκληθείσα σταθερά*' (ΣΠΣ), ενώ το σύρσιμο που έχει ως στόχο την διατήρηση της ΣΠΣ, το ονόμασαν '*σύρσιμο διατήρησης*' (ΣΔ), όρο τον οποίο θα χρησιμοποιούμε από εδώ και στο εξής. Στην περίπτωσή μας, μέσω του ΣΔ οι μαθητές αναμένεται να οδηγηθούν στη διαπίστωση ότι όταν η μια από τις τέσσερις κορυφές κινείται έτσι ώστε οι διχοτόμοι να συντρέχουν, τότε η κίνηση αυτή γίνεται πάνω σε μια σταθερή γραμμή. Οι Baccaglini-Frank και Mariotti ονομάζουν αυτού του τύπου τις σταθερές ως '*σταθερές παρατηρούμενες κατά το σύρσιμο*' (ΣΠΚΣ). 2) Η ΣΠΚΣ πρέπει να εκφρασθεί με γεωμετρική ορολογία. Η κορυφή φαίνεται να κινείται κατά μήκος ενός μονοπατιού: ευθείας; καμπύλης; 3) Στη συνέχεια αναμένεται η ενεργοποίηση του ίχνους, ώστε να εκφρασθεί η πρόταση που περιγράφει γεωμετρικά το μονοπάτι, με επιχείρημα βασισμένο στην οικειοποίηση των εργαλείων (instrumented argument): η τέταρτη κορυφή κινείται σε υπερβολή. 5) Σύρσιμο ελέγχου και διατύπωση υποθετικής σχέσης ανάμεσα σε ΣΠΣ και ΣΠΚΣ.



Εικόνα 3

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η παραπάνω δραστηριότητα δόθηκε από την καθηγήτρια (Κ) σε 12μελές τμήμα γενικής παιδείας Β΄ Λυκείου, ωστόσο η ερευνητική εστίαση έγινε σε 3 διμελείς ομάδες μαθητών τεχνολογικής κατεύθυνσης, εξοικειωμένους με τη χρήση λογισμικού ΔΓ (Ο1: Βάλια -Νανά, Ο2: Τίνα - Χαρά, Ο3: Τέλης-Νίκος). Πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο στη λήξη της σχολικής χρονιάς, ώστε οι μαθητές να έχουν ολοκληρώσει τη διδακτέα ύλη της γεωμετρίας και τις κωνικές τομές. Μαγνητοφωνήθηκαν οι συνομιλίες των μαθητών και από τις οθόνες

φωτογραφήθηκαν στιγμιότυπα. Μέσα από ποιοτική ανάλυση των δεδομένων, θελήσαμε να μελετήσουμε τη διαδικασία μέσω της οποίας προσδιορίζεται στο συγκεκριμένο πρόβλημα από τους μαθητές μια ΣΠΣ, πώς η διατήρησή της τους οδηγεί σε μια ΣΠΚΣ, τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούν για να την εκφράσουν με μαθηματικό τρόπο και αν τελικά είναι εφικτή η 'ανακάλυψη' της σχέσης που συνδέει ΣΠΣ και ΣΠΚΣ.

ΑΝΑΛΥΣΗ

Η Ο1 χρησιμοποιώντας διαδοχικά περιπλανητικό και καθοδηγούμενο σύρσιμο απάντησε σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα τις δυο πρώτες ερωτήσεις του φύλου εργασίας. Οι πρώτες δυσκολίες παρατηρούνται στην απάντηση του τρίτου ερωτήματος «*τι άλλο μπορεί να συμβεί;*».

Βάλια: Εντάξει, ν' απαντήσω πότε γίνεται σημείο; Όταν είναι τετράγωνο. Αυτό δεν είναι; Τι άλλο θέλετε να πούμε;

Κ: Μόνο όταν είναι τετράγωνο γίνεται σημείο; Για κάντε το πάλι.

Βάλια: Κι όταν είναι… κι όταν είναι και ρόμβος, διότι οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες (επεξήγηση για τον ρόμβο).

Κ: (προς ομάδα 1) Να σας το δυσκολέψω λίγο. Τα ΑΒ και ΒΓ να μην είναι ίσα. Μπορείτε να το κάνετε σημείο κινώντας μόνο το Δ; Το κάνω λίγο πιο μικρό… Εδώ που έγινε σημείο υπάρχει κάποια σχέση στα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ;

Βάλια: Τι σχέση να υπάρχει; Α! αριστερά εννοείτε τις μετρήσεις των μηκών;

Τα μέλη της Ο1 φαίνεται να αρκούνται στη διαπίστωση αυτή, ωστόσο αντιλαμβάνονται ότι η Κ ζητά κάτι παραπάνω. Η Βάλια πλαισιώνει θεωρητικά με ιδιαίτερη ευκολία το εύρημά της (για τον ρόμβο), ενώ την ίδια χρονική στιγμή οι υπόλοιπες ομάδες δεν έχουν ακόμα απαντήσει τα δυο πρώτα ερωτήματα. Το επιχείρημά της, προκύπτει μάλλον από τη γνώση της θεωρίας και λιγότερο από το σύρσιμο των Α, Β, Γ, Δ. Το ΣΔ ακόμα δεν έχει χρησιμοποιηθεί. Η Κ κατευθύνει την προσοχή της Ο1 στην περίπτωση το ΑΒΓΔ να μην είναι κάποια από τα γνωστά είδη τετραπλεύρου, 'χαλώντας' τις πλευρικές ιδιότητες του ρόμβου και παρακινεί να βρουν σχέση ανάμεσα στις πλευρές του ΑΒΓΔ.

Κ: Πότε είναι ορθογώνιο; πότε τετράγωνο; (απευθυνόμενη στις άλλες ομάδες)

Τίνα: Νομίζω, όταν είναι παραλληλόγραμμο γίνεται ορθογώνιο. Κι όταν γίνει ορθογώνιο, γίνεται τετράγωνο το από μέσα

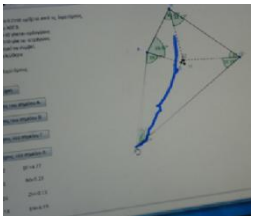
Κ: Μάλιστα. Μπορείς να εμφανίσεις το πλέγμα, Προβολή, Πλέγμα,… φτιάξε ένα παραλληλόγραμμο να δούμε αν είναι ορθογώνιο πραγματικά. Βάλτε τα σημεία στο πλέγμα, στα κομβικά σημεία. Κάθονται καλύτερα εκεί. …..

Χαρά: Σωστότατο είναι.

Η Τίνα δεν φάνηκε να είναι σίγουρη για τη διαπίστωσή της και η Κ της πρότεινε να χρησιμοποιήσει ένα εργαλείο που θα βοηθούσε στην ισχυροποίησή της (πλέγμα), όπως και έγινε.

Βάλια: Εγώ κάνω το σημείο τώρα. Κυκλική δεν είναι αυτή η γραμμή (εικ.4);

Κ: Κάπως καμπύλη φαίνεται ε;



Εικόνα 4

Η Βάλια, έχει ήδη αναγνωρίσει την ΣΠΣ, δηλαδή ότι το ΕΖΗΘ γίνεται σημείο και σε άλλου είδους τετράπλευρα και ότι όταν αυτό συμβαίνει, τότε το Δ κινείται σε κάποιο μονοπάτι (ΣΠΚΣ). Ενεργοποιεί το ίχνος και με ΣΔ, προσπαθεί να αναπαραστήσει οπτικά την ΣΠΚΣ.

Τέλης: Κυρία, έχετε πρόχειρο χαρτί να αποδείξουμε ότι όταν το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο;

Τίνα και Χαρά: Α! Σημείο! Α, α, α, α! Γίνεται σημείο! Τελειώσαμε!

Και ενώ τα μέλη της Ο3 αποφάσισαν εγκαταλείψουν το υπολογιστικό περιβάλλον και να λύσουν την περίπτωση του ορθογωνίου παραδοσιακά, τα μέλη της Ο2, όπως και προηγουμένως της Ο1, φαίνεται να αρκούνται στην εύρεση της ΣΠΣ ('*τελειώσαμε*').

Κ (στην Ο1): Τι καμπύλη θα μπορούσε να είναι;

Βάλια: Είναι κύκλος με κέντρο το Α και ακτίνα μέχρι το Δ; (μετακινεί το Δ)

Όσο είναι μέσα στο τρίγωνο όμως… (εννοεί το ΑΒΓ)

Κ: Φαίνεται να είναι κάτι με κέντρο το Α, ε;

Το μη προφανές είδος της καμπύλης, δυσκολεύει τα μέλη της Ο1 στην περιγραφή με γεωμετρικούς όρους της ΣΠΚΣ. Η καμπυλότητα, φαίνεται να συνδέεται στο μυαλό των μαθητών κυρίως με την έννοια του κύκλου. Παράλληλα, η Ο3 συνεχίζει στο χαρτί, ενώ τα μέλη της Ο2 δεν έχουν κατανοήσει για ποιο λόγο πρέπει να συνεχίσουν τη διερεύνηση:

Τίνα: Κυρία τι κάνουν οι άλλοι; Μα τι θέλετε άλλο να κάνουμε;

Κ: Το σημείο, να δείτε μήπως κάτι συμβαίνει. Αυτό που είπα στη Βάλια, είναι ότι το κρατάμε σταθερό… Μην κουνάς τις τρεις κορυφές, κούνα μόνο το Γ ας πούμε! Και δες πότε παραμένει σημείο όμως.

Κ: (προς την Βάλια) Καμιά ιδέα; Βλέπεις και τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αν έχουν σχέση; (περιμένει)…. Να σας μαρτυρήσω ποιες; Οι απέναντι πλευρές…

Βάλια: Είναι το διπλάσιο; Και η μία είναι το διπλάσιο και η άλλη είναι το μισό;

Κ: Μοιάζει να είναι αλλά… Για κίνησέ το κι άλλο… Αφού δεν αλλάζουν τα ΑΒ, ΒΓ. Για πήγαινε να το κάνουμε ακέραια… ε… περίπου. Όχι-όχι δεν χρειάζεται να είναι ακέραια. Για άστο κει, για άστο κει! Έχουν σχέση;

Τίνα: Όταν το Γ κινείται.

Χαρά: Ναι, είναι σημείο τα Ε, Ζ, Η, και είναι σε ευθεία το Γ.

Τέλης: Κυρία, το φτιάξαμε τώρα το τετράγωνο.

Η Βάλια δεν έχει ακόμα προσδιορίσει με ακρίβεια την ΣΠΚΣ, ωστόσο προσπαθεί να βρει τη συνθήκη διατήρησης της ΣΠΣ. Παράλληλα, η Ο2 προσπαθεί να προσδιορίσει την ΣΠΚΣ και η Ο3 το ερώτημα 2.

Βάλια: Τι είναι; κλάσμα;

Κ: Μπορείτε και να κάνετε και άλλες πράξεις, εκτός από λόγους που παίρνεις.

Τίνα: Τι ψάχνουμε καταρχήν; (παρακολουθεί τη συνομιλία Κ και Βάλιας)

Κ: Λέμε, όταν γίνει σημείο, αυτό ψάχνει, τι σχέση έχουν οι πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Βάλια. Α! Το άθροισμα είναι σταθερό; Οι δύο απέναντι. Το άθροισμά τους είναι σταθερό.

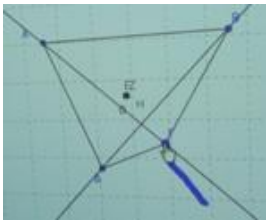
Κ: Για επιβεβαίωσέ το.

Βάλια: Κυρία, το άθροισμά τους είναι ίδιο (με ΣΔ παρατηρεί τις μετρήσεις).

Κ: Άρα η καμπύλη σου αυτή τι είναι Βάλια;

Τίνα: Ποια καμπύλη; (παρακολουθεί τη συνομιλία Κ και Βάλιας)

Κ: Έχει βάλει ίχνος, σ' αυτό το σημείο το ένα, το Γ για σένα, το Δ γι' αυτήν που μετακινεί, έχει βάλει ίχνος.



Εικόνα 5

Τίνα: Σε ευθεία πάντα δε μετακινείται;

Κ: Για να δούμε, βάλε ίχνος!

Χαρά: Σε ευθεία μετακινείται (εικ.5)

Η περιγραφή με γεωμετρικούς όρους της ΣΠΚΣ δημιουργεί δυσκολίες στην Ο2, καθώς δεν μπορούν να διακρίνουν ιδιότητες που συμβαίνουν σε ειδικές περιπτώσεις (ευθεία όταν ΑΒ=ΑΔ), από άλλες γενικότερες. Παράλληλα, αναδεικνύεται το ζήτημα της μη εξοικείωσής τους με την αξιοποίηση των εργαλείων για διερεύνηση και αλλοίωση των συμπτωματικών ιδιοτήτων του σχήματος με στόχο την εύρεση μιας πιο γενικεύσιμης ιδιότητας.

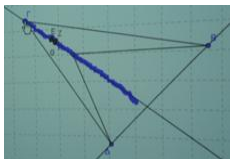
Βάλια: Παραβολή είναι, τι είναι; Έλλειψη δεν είναι το άθροισμα σταθερό;

Κ: Εδώ έχουμε το άθροισμα των απέναντι σταθερό. Οι δύο διαδοχικές; Ας πούμε, οι ΑΒ και οι ΑΔ τι σχέση έχουν; Για βάλ' τα κάτω σ' ένα χαρτί, άθροισμα σταθερό... Κι ένα στυλό…

Η ανακάλυψη της σχέσης των πλευρών περιγράψιμου τετραπλεύρου από τη Βάλια, ήλθε ως αποτέλεσμα διδακτικής καθοδήγησης. Η μετατροπή της σε μορφή διαφορών, ώστε να καταστεί αναγνωρίσιμη η καμπύλη που γράφει η τέταρτη

κορυφή, φαίνεται να δυσκολεύει τους μαθητές, καθώς εκτός από την μετατροπή, απαιτείται και η μετάβαση σε ένα 'άλλο πλαίσιο' (ως προς την παραδοσιακή διδασκαλία), αυτό της αναλυτικής γεωμετρίας.

Χαρά: Κυρία που βλέπετε την καμπύλη (εικ.6);



Εικόνα 6

Κ: Μου αρέσει!

Χαρά -Τίνα: Τι σας αρέσει κυρία; είναι λάθος!

Κ: Κινήστε το λίγο ακόμα… Έτσι πάει! Σε ξεγελάει στην αρχή… Μήπως είναι σχεδόν ίσα τα ΑΒ, ΑΔ; για κάντε τα πιο άνισα.



Εικόνα 7

Χαρά: Ωραία, άνισα; Δηλαδή έτσι;

Κ: Τι θα μπορούσε να 'ναι; Κοιτάζετε καθόλου τα μεγέθη των πλευρών;

Βάλια: Είναι υπερβολή! Η αφαίρεσή τους είναι σταθερή! (εικ.7)

Κ: Είσαι σίγουρη; Γιατί;

Χαρά: Τι σταθερό χέρι που έχεις! Εμάς δεν μας βγήκε έτσι!

Η περιγραφή με γεωμετρικούς όρους της ΣΠΚΣ από την Ο1, ήλθε μετά από την εύρεση της σχέσης διατήρησης της ΣΠΣ και φάνηκε ότι συνδέεται με το επίπεδο γνώσεων της Βάλιας, καθώς και με κιναισθητικές της δεξιότητες.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας, διαπιστώνουμε ότι οι τρεις ομάδες, έφτασαν σε διαφορετικό σημείο σε σχέση με την αναμενόμενη από εμάς πορεία: Η Ο1, ολοκλήρωσε τα προβλεπόμενα, με τρία κρίσιμα σημεία που απαίτησαν την καθοδήγηση της καθηγήτριας: τον προσδιορισμό της ΣΠΣ, της ΣΠΚΣ και της εύρεσης της μεταξύ τους σχέσης. Για την ΣΠΣ, οι μαθητές φαίνεται να αρκούνται στον προσδιορισμό μιας ειδικής περίπτωσης και δεν αναζητούν περισσότερες που θα τους οδηγούσαν σε ένα πιο γενικευμένο συμπέρασμα. Η ΣΠΚΣ, έδειξε ότι απαιτεί ένα συνδυασμό κιναισθητικών δεξιοτήτων με δυνατότητες σύνδεσης του μαθηματικού περιεχομένου διαφορετικών γνωστικών περιοχών, ενώ η εξεύρεση της σχέσης, ανέδειξε τα προβλήματα της παρατήρησης και αξιοποίησης των μετρήσεων σε περιπτώσεις σύνθετων σχέσεων (όπως της ισότητας αθροισμάτων των απέναντι πλευρών), που δεν φαίνεται να είναι μια διαδικασία εύκολη για τους μαθητές. Η εξεύρεση διδακτικών μεθόδων με μικρότερο βαθμό καθοδήγησης, αποτελεί ζητούμενο. Παράγοντες που φαίνεται να συνετέλεσαν στην ολοκλήρωση της προσπάθειας από την Ο1, ήταν το επίπεδο των γεωμετρικών γνώσεων της Βάλιας και οι δεξιότητές της κατά το σύρσιμο. Η Ο2, έφτασε μέχρι τον προσδιορισμό της ΣΠΚΣ. Ωστόσο, τα μέλη της δεν αξιοποίησαν τις δυνατότητες των εργαλείων, παρά μόνο μετά από υπόδειξη της Κ, ενώ δεν έδειξαν να κατανοούν το λόγο για τον οποίο έπρεπε να

συνεχίσουν τη διερεύνηση. Τέλος, η Ο3 δεν κατάφερε να φτάσει στην εισαγωγή της ΣΠΣ.

Τα παραπάνω ευρήματα, μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η συμπερίληψη αντίστοιχων δραστηριοτήτων στις σχολικές τάξεις, εντός του υπάρχοντος εκπαιδευτικού συστήματος, δεν είναι ούτε εύκολες, ούτε αυτονόητες. Αυξάνουν την πολυπλοκότητα της διδασκαλίας, καθώς ο εκπαιδευτικός απαιτείται να διαχειρισθεί τους διαφορετικούς ρυθμούς των ομάδων ή των μελών των ομάδων, ενώ ταυτόχρονα, οι ίδιοι οι μαθητές δεν αισθάνονται την ανάγκη της διερεύνησης, αποζητώντας από τον εκπαιδευτικό να τους 'καθοδηγήσει' και να τους αποκαλύψει 'τι ακριβώς έχει στο μυαλό του'. Σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο, η μετάβαση από το 'γεωμετρικό' στο 'αλγεβρικό' πλαίσιο και η μεταξύ τους σύνδεση, εμφάνισε ιδιαίτερα υψηλό βαθμό δυσκολίας, καθώς οι μαθητές δεν έχουν εξοικειωθεί με αυτό.

Η παρούσα έρευνα βασίσθηκε στην παραδοχή ότι οι συγκεκριμένες δραστηριότητες έχουν πρόσθετη μαθησιακή αξία και προσδιόρισε σε ένα πρώτο επίπεδο τις δυσκολίες εφαρμογής τους, οι οποίες - πέραν των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με αυτό καθαυτό το μαθηματικό περιεχόμενο - εστιάζονται στο πώς αντιλαμβάνονται τη διδασκαλία των μαθηματικών, στο βαθμό εξοικείωσής τους με τα εργαλεία και σε ζητήματα διδακτικής διαχείρισης.

Οι διαπιστώσεις αυτές, επιβάλλουν τον επαναπροσδιορισμό μιας σειράς παραμέτρων που αφορούν στη διδασκαλία των μαθηματικών, όπως την συχνότητα ένταξης αντίστοιχων δραστηριοτήτων στο ΠΣ, καθώς και την δυνατότητα σχεδιασμού - διδακτικής υποστήριξής τους από τον εκπαιδευτικό. Οι ανωτέρω παράμετροι, παραπέμπουν στο ζήτημα του επανασχεδιασμού του ΠΣ - κυρίως σε ότι αφορά στην έκταση και το περιεχόμενό του - και στο ζήτημα της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, ώστε να είναι σε θέση να σχεδιάσουν και να υποστηρίξουν αντίστοιχες δραστηριότητες, καλλιεργώντας κουλτούρα μύησης των μαθητών σε αυτές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arzarello, F., Olivero, Paola, D., Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments, ZDM, 34 (3), pp.66-72.

Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M.A. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model, *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 15, pp.225-253

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. Excerpt from Introduction to de Villiers, M. (1999). *Rethinking Proof with Sketchpad*, Key Curriculum Press.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometric relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions. In *Proceedings of the 24th conference of the IGPME*, v.1, pp.103–117, Hiroshima, Japan.

Kynigos, C., Philippou, G., Potari, D. Sakonidis, H. (2009). Research in mathematics education in Greece and Cyprus. In Proceedings of the PME33, v.1, 303-322.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions. In *Proceedings of the 10th Asian technology conference in mathematics*, pp.22–35, Korea, National University of Education.

Laborde C., Kynigos, C., Hollebrands, K., Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez, P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, Sense Publishers, 2

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗΣ ΜΕΣΩ ΜΟΤΙΒΩΝ

Αγγελική Ζούπα & Γιώργος Ψυχάρης
Μαθηματικό Τμήμα ΕΚΠΑ
mekkapsaki@hotmail.com gpsych@math.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζεται μια έρευνα που εστιάζεται στη διερεύνηση της κατασκευής νοημάτων για τη μαθηματική γενίκευση από μαθητές της Α' γυμνασίου κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες ελέγχου και κατασκευής μοτίβων σε ειδικά σχεδιασμένο υπολογιστικό περιβάλλον. Στα αποτελέσματα καταγράφεται η εννοιολογική εμπλοκή των μαθητών σε αφαιρετικές διαδικασίες που ευνοήθηκαν από τις δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν για τους μαθητές και την ανατροφοδότηση του υπολογιστικού περιβάλλοντος.

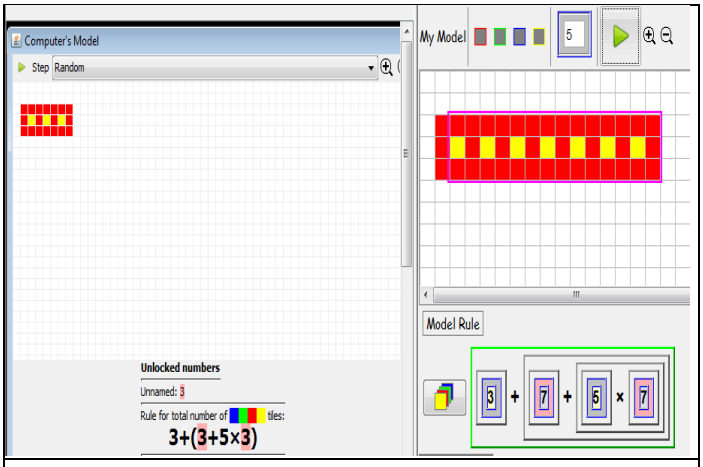
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε αποτελέσματα από μια μικρής έκτασης έρευνα που στόχευε στη διερεύνηση της νοηματοδότησης της μαθηματικής γενίκευσης από μαθητές της Α' γυμνασίου κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες ελέγχου και κατασκευής μοτίβων (patterns). Οι μαθητές συνεργάστηκαν σε ομάδες των δύο ατόμων χρησιμοποιώντας το διερευνητικό λογισμικό eXpresser (Noss et al., 2009) που παρέχει τη δυνατότητα κατασκευής μοτίβων με τετραγωνάκια διαφορετικών χρωμάτων. Το eXpresser επιτρέπει στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν εικονικές μεταβλητές για να αναπαράγουν τις κατασκευές τους για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων, να εκφράζουν σχέσεις γενίκευσης και να ελέγχουν την ορθότητά τους μέσα από κατάλληλη ανατροφοδότηση. Με αυτό τον τρόπο, το λογισμικό έχει ενσωματωμένο ένα είδος 'άλγεβρας' που στοχεύει στο να κάνει περισσότερο χειροπιαστή την έννοια της γενίκευσης προκαλώντας την εστίαση των μαθητών στη δομή της. Η προσέγγιση αυτή βρίσκεται στον αντίποδα της συνήθους διδασκαλίας της γενίκευσης στο σχολείο που βασίζεται στην εκμάθηση τεχνικών ή μεθόδων για την εύρεση του γενικού κανόνα μιας ακολουθίας με χρήση αριθμητικών ή εικονικών αναπαραστάσεων (π.χ. εύρεση συνολικού αριθμού στοιχείων σε διαφορετικές θέσεις της ακολουθίας), χωρίς δυνατότητα αιτιολόγησης της σύνδεσης ειδικού-γενικού αλλά και της ισχύος του γενικού κανόνα (Sutherland & Mason, 2005).

Η έννοια της γενίκευσης βρίσκεται στο επίκεντρο της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών στο σχολείο, καθώς η εύρεση και η έκφραση γενικευμένων σχέσεων και κανόνων διατρέχει μεγάλο μέρος της διδασκαλίας των μαθηματικών – ιδιαίτερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι δραστηριότητες με μοτίβα έχει υποδειχτεί ότι προσφέρουν πλαίσια πρόσφορα για την μελέτη της γενίκευσης μέσω της άλγεβρας,

αλλά και των αντίστοιχων δυσκολιών που αναμένεται να έχουν οι μαθητές (Morelli, 1992). Η αλγεβρική γενίκευση ενός μοτίβου περιλαμβάνει τρία στάδια: την αναγνώριση μιας ομοιότητας, την επέκταση και γενίκευσή της για όλους τους επακόλουθους όρους και την έκφραση του αντίστοιχου αλγεβρικού τύπου (Radford, 2003). Οι συνήθεις δυσκολίες των μαθητών αφορούν στην αναγνώριση και έκφραση γενικευμένων μοτίβων, τη σύνδεση των αντίστοιχων αναπαραστάσεων, τη μετάβαση από τη φυσική στη συμβολική γλώσσα και την ανάπτυξη λανθασμένων επαγωγών αντί αλγεβρικών γενικεύσεων (Zazkis & Liljedahl, 2002; Rivera & Becker, 2008). Η έρευνα των Rivera και Becker (2008) έδειξε ότι μόνο το ένα πέμπτο των μαθητών Γυμνασίου μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν άλγεβρα για να εκφράσουν τις γενικεύσεις μοτίβων που δίνονταν σε εικονική μορφή και μορφή πίνακα.

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήσαμε το λογισμικό eXpresser προκειμένου να εμπλέξουμε τους μαθητές στην κατασκευή και τον έλεγχο μοτίβων επιδιώκοντας ταυτόχρονα την εστίασή τους στη δομή της γενίκευσης και στην διάκριση του γενικού μέσω του ειδικού. Υιοθετήσαμε τη θεωρία δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών (Constructionism, Harel & Papert, 1991) και εστιαστήκαμε στους τρόπους με τους οποίους η κατασκευή νοημάτων για τη γενίκευση από τους μαθητές διαμεσολαβήθηκε από τα διαθέσιμα ψηφιακά εργαλεία ως διαδικασία μαθηματικής αφαίρεσης. Για τη μελέτη των αφαιρετικών διαδικασιών χρησιμοποιήσαμε τη θεωρία αφαίρεση εντός πλαισίου (Abstraction in Context, Hershkowitz et al., 2001) σύμφωνα με την οποία η κατασκευή νέας μαθηματικής γνώσης περιγράφεται μέσα από τρεις εννοιολογικές δράσεις των μαθητευομένων: *αναγνώριση (recognizing)* μιας μαθηματικής δομής ως κατάλληλης στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας, *συγκερασμός (building-with)* στοιχείων της υπάρχουσας γνώσης για την επίτευξη ενός στόχου (π.χ. λύση ενός προβλήματος), *κατασκευή (constructing)* μιας νέας δομής και *παγιοποίηση (consolidation)* της νέας δομής στο πλαίσιο μιας νέας εφαρμογής. Στην παρούσα εργασία ο κεντρικός μας ερευνητικός στόχος ήταν να διερευνήσουμε τη νοηματοδότηση της γενίκευσης και τη συμβολική της έκφραση ως αφαιρετική διαδικασία που έλαβε χώρα κατά την αλληλεπίδραση των μαθητών με τα ψηφιακά εργαλεία για την κατασκευή και τον έλεγχο μοτίβων.



Σχ. 1 Μοτίβο στο eXpresser με 3 κόκκινα σταθερά τετράγωνα (1η στήλη) και μια δομική μονάδα με 5 κόκκινα τετράγωνα και 1 κίτρινο.

ΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Το eXpresser αποτελείται από δύο κύριες περιοχές: (α) μια περιοχή εργασίας (My Model, Σχ. 1 δεξιά στην οθόνη) για την κατασκευή και αναπαραγωγή (‘κίνηση’) μοτίβων για τυχαίο αριθμό επαναλήψεων και (β) μια περιοχή προβολής της αναπαραγωγής του μοτίβου που κατασκευάζεται στο My Model για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων (Computer’s Model, Σχ. 1 αριστερά στην οθόνη). Στην περιοχή My Model οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα μέσα από την επανάληψη μιας σύνθεσης από τετράγωνα διαφορετικών χρωμάτων που ονομάζεται δομική μονάδα (building block) (Σχ. 1). Μέσα από την επιλογή τετραγώνων διαφορετικών χρωμάτων οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ορίσουν τη δομική μονάδα ενός μοτίβου και να καθορίσουν τις ιδιότητές της (π.χ. ο αριθμός των τετραγώνων ανά χρώμα). Σημειώνουμε ότι οι ποσότητες στο eXpresser (π.χ. ο αριθμός των επαναλήψεων του μοτίβου, ο συνολικός αριθμός τετραγώνων ανά χρώμα) μπορεί να είναι σταθεροί αριθμοί, που εμφανίζονται μέσα σε γκρι ορθογώνιο πλαίσιο, ή εικονικές μεταβλητές, η τρέχουσα τιμή των οποίων εμφανίζεται σε ροζ ορθογώνιο πλαίσιο. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να μετατρέψουν ένα σταθερό αριθμό (γκρι πλαίσιο) σε εικονική μεταβλητή (ροζ πλαίσιο) ‘ξεκλειδώνοντάς’ τον με την εντολή Ξεκλείδωμα. Με το πάτημα του κουμπιού Play το πρόγραμμα αποδίδει τυχαίες τιμές στις εικονικές μεταβλητές που έχει ορίσει ο χρήστης.

Ένα μοτίβο κατασκευάζεται για πρώτη φορά μόνο για ένα συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων. Σε αυτή την περίπτωση το μοτίβο εμφανίζεται χρωματισμένο στο My Model και στο Computer’s Model μόνο όταν οι μαθητές συμπληρώσουν σωστά στα ειδικά εικονίδια με ‘?’ (σχ. 3α) τον συνολικό αριθμό τετραγώνων από κάθε χρώμα για το συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων. Σε αντίθετη περίπτωση και ως ένδειξη της ύπαρξης λάθους, το μοτίβο εμφανίζεται χωρίς χρώμα. Η δυναμική αναπαραγωγή

του μοτίβου (δηλ. η 'κίνησή' του) εξασφαλίζεται με την μετατροπή του αριθμού των επαναλήψεων του μοτίβου από σταθερό αριθμό σε εικονική μεταβλητή 'ξεκλειδώνοντας' τον αριθμό των επαναλήψεων στις Ιδιότητες Μοτίβου. Η μετατροπή αυτή σηματοδοτείται από το περιβάλλον με την αλλαγή του χρώματος του εικονιδίου που περιέχει την εκάστοτε τιμή της μεταβλητής από γκρι σε ροζ (σχ. 3β). Επομένως, η χρήση εικονικής μεταβλητής είναι αναγκαίος όρος για να μπορεί να αναπαραχθεί το μοτίβο για τυχαίους (και διαφορετικούς) αριθμούς επανάληψης στο My Model και στο Computer's Model αντίστοιχα με το πάτημα του κουμπιού Play. Όπως θα δούμε και στα αποτελέσματα, για να εμφανιστεί το μοντέλο σωστά στο My Model (δηλ. χρωματισμένο) θα πρέπει οι μαθητές να κατασκευάσουν στις Ιδιότητες Μοτίβου κατάλληλες 'αλγεβρικές' εκφράσεις για το συνολικό αριθμό των τετραγώνων ανά χρώμα με χρήση της (ανεξάρτητης) εικονικής μεταβλητής που εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων (σχ. 3στ). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ακόμη κι αν το μοντέλο εμφανίζεται σωστά στο My Model, αναπαράγεται για διαφορετικές τιμές επανάληψης χωρίς χρώμα στο Computer's Model. Για να εμφανιστεί το μοτίβο σωστά για κάθε τυχαία επανάληψη στο My Model και στο Computer's Model, θα πρέπει οι μαθητές να κατασκευάσουν μια 'αλγεβρική' έκφραση που αντιστοιχεί στον συνολικό αριθμό των τετραγώνων του μοτίβου στο ειδικό πλαίσιο Model Rule (σχ. 1 κάτω δεξιά)'. Τέλος, για τη συμμεταβολή δύο μοτίβων θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η ίδια εικονική (ροζ) μεταβλητή για την έκφραση του συνολικού αριθμού των τετραγώνων σε κάθε μοτίβο.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

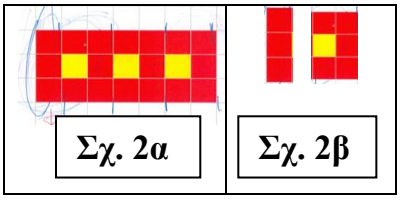
Οι δραστηριότητες διαρθρώθηκαν σε 5 φάσεις. Στην πρώτη φάση των δραστηριοτήτων ο μικρόκοσμος eXpresser αξιοποιήθηκε ως εργαλείο προβολής έτοιμων μοτίβων και οι μαθητές κλήθηκαν να εντοπίσουν τους μαθηματικούς τύπους που εκφράζουν τα συγκεκριμένα μοτίβα. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης οι μαθητές παρατήρησαν τις διάφορες λειτουργίες του λογισμικού (π.χ. εικονικές μεταβλητές, κίνηση του μοτίβου) και δόθηκαν λαβές για συζητήσεις σχετικά με τον τρόπο λειτουργίας του. Στη φάση αυτή χρησιμοποιήθηκαν γραμμικά μοτίβα $1^{ου}$ βαθμού της μορφής ax (δηλ. μοτίβα με ένα επαναλαμβανόμενο μέρος) και ax+b (δηλ. μοτίβα με σταθερό και επαναλαμβανόμενο μέρος). Στη δεύτερη φάση οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν τα δικά τους μοτίβα της μορφής ax+b. Στην τρίτη φάση δόθηκαν στους μαθητές αλγεβρικοί τύποι της μορφής ax και ax+b και τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν στον eXpresser μοτίβα που αντιστοιχούν στους συγκεκριμένους τύπους. Στην τέταρτη φάση οι μαθητές κλήθηκαν να μετατρέψουν έτοιμα μοτίβα δοσμένα από τους ερευνητές σε άλλα μοτίβα τα οποία δίνονταν σε στατική εικόνα στο φύλλο εργασίας. Τέλος, στην πέμπτη φάση οι μαθητές παρατήρησαν και κατασκεύασαν γραμμικά μοτίβα δευτέρου βαθμού (π.χ. x^2+4x+4).

ΜΕΘΟΔΟΣ

Στην έρευνα συμμετείχαν έξι 13χρονοι μαθητές που μόλις είχαν αποφοιτήσει από την Α' Γυμνασίου από δύο διαφορετικά Γυμνάσια της Κέρκυρας. Οι μαθητές εργάστηκαν συνολικά 12 ώρες (60λ) με το υπολογιστικό περιβάλλον eXpresser σε ομάδες των δύο. Η ακολουθούμενη μέθοδος αντιστοιχεί σε μελέτη περίπτωσης με στοιχεία έρευνας σχεδιασμού (Cobb et al., 2003). Καθώς γνωρίζαμε ότι η επαφή των μαθητών με μοτίβα ήταν από ανύπαρκτη έως αποσπασματική μέχρι εκείνη τη στιγμή, αναμέναμε να δούμε αν και με ποιο τρόπο η αλληλεπίδρασή τους με τα διαθέσιμα ψηφιακά εργαλεία θα επηρέαζε τα νοήματα που θα δημιουργούσαν για τη γενίκευση. Η συλλογή δεδομένων έγινε με τη βοήθεια ψηφιακού μαγνητόφωνου και κάμερας. Για την ανάλυση των δεδομένων απομαγνητοφωνήθηκαν πλήρως οι διάλογοι των μαθητών. Μονάδα ανάλυσης αποτέλεσε το θεματικό επεισόδιο, το οποίο ορίστηκε ως ένα απόσπασμα διαλόγων και πράξεων των μαθητών γύρο από ένα συγκεκριμένο θέμα. Τα επεισόδια επιλέχτηκαν έτσι ώστε, σε πρώτο επίπεδο, να αναδεικνύονται οι διαδικασίες αναγνώρισης και έκφρασης της γενίκευσης από τους μαθητές και, σε δεύτερο επίπεδο, να περιγράφεται η εξέλιξη των εννοιολογικών δράσεων των μαθητών με όρους μαθηματικής αφαίρεσης. Στο παρόν άρθρο αναλύουμε επεισόδια από την εργασία μιας ομάδας δύο μαθητριών (Ομάδα 1: Αλεξάνδρα, Ιωάννα).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

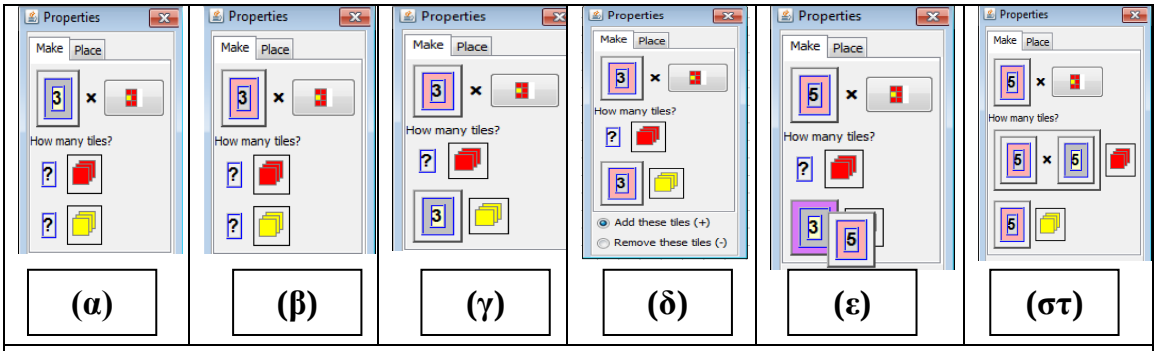
Νοηματοδότηση της γενίκευσης μέσω της διάκρισης σταθερών και μεταβλητών


Σχ. 2α

Σχ. 2β

Το επεισόδιο αυτό έλαβε χώρα κατά τη δεύτερη φάση των δραστηριοτήτων όταν οι μαθητές έφτιαξαν τα πρώτα τους μοτίβα στο λογισμικό. Μέχρι τότε είχαν επεξεργαστεί έτοιμα (κατασκευασμένα από τους ερευνητές) μοτίβα μέσω των οποίων είχαν ανακαλύψει πολλές λειτουργίες του λογισμικού, όπως για παράδειγμα τη δημιουργία εικονικών μεταβλητών (‘ξεκλειδώνοντας’ ένα σταθερό αριθμό) αλλά και το ότι ένα μοτίβο μπορεί να αναπαραχθεί (‘κινηθεί’) για τυχαίες τιμές μόνο μέσω της χρήσης εικονικής μεταβλητής. Σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν στο λογισμικό το πρώτο τους μοτίβο που εμφανίζεται στο σχ. 2α. Αρχικά οι δύο μαθήτριες της ομάδας 1 αναγνώρισαν ότι αποτελείται από δύο μέρη: 3 σταθερά κόκκινα τετράγωνα και μια δομική μονάδα με 5 κόκκινα τετράγωνα και 1 κίτρινο (σχ. 2β). Αφού επέλεξαν τα 6 συγκεκριμένα τετράγωνα και τα όρισαν ως δομική μονάδα επέλεξαν το 3 ως αρχική τιμή των επαναλήψεών της και στο My model εμφανίστηκε το μοτίβο του σχ. 2α. Με το πάτημα του κουμπιού Play, το μοτίβο παρέμεινε ακίνητο καθώς δεν είχε χρησιμοποιηθεί εικονική μεταβλητή. Ως απάντηση, οι μαθήτριες ξεκλείδωσαν τον αριθμό των επαναλήψεων στο ειδικό ορθογώνιο εικονίδιο στο οποίο εμφανίζονται οι αντίστοιχες τιμές της επανάληψης δημιουργώντας έτσι μια (ροζ) εικονική μεταβλητή (σχ. 3β πάνω). Για τον σωστό χρωματισμό του μοτίβου κατά την κίνησή του, έπρεπε στη συνέχεια να εκφραστούν

με την συγκεκριμένη μεταβλητή ο αριθμός των κόκκινων και κίτρινων τετραγώνων και οι αντίστοιχες εκφράσεις να τοποθετηθούν στις κενές θέσεις με ένδειξη '?' δίπλα από κάθε χρώμα στις Ιδιότητες Μοτίβου (σχ. 3β κάτω). Πιο συγκεκριμένα, στη θέση των κίτρινων έπρεπε να τοποθετηθεί (με σύρσιμο και αντικατάσταση) η ίδια εικονική μεταβλητή, ενώ στη θέση των κόκκινων η συγκεκριμένη μεταβλητή επί τον αριθμό 5. Αρχικά η Αλεξάνδρα έδωσε την σταθερή τιμή 3 για τα κίτρινα τετραγωνάκια (όσο ήταν και η τρέχουσα τιμή της εικονικής μεταβλητής εκείνη τη στιγμή) (σχ. 3γ).



Σχ. 3 Ιδιότητες Μοτίβου για την κατασκευή και κίνηση του μοτίβου του σχ. 2α.

Πατώντας Play για την αναπαραγωγή του μοτίβου οι μαθήτριες διαπίστωσαν ότι το μοτίβο δεν χρωματίζεται σωστά καθώς άλλαζε συνεχώς τιμές η εικονική μεταβλητή ενώ ο αριθμός των κίτρινων τετραγώνων παρέμενε σταθερός. Η Ιωάννα αμέσως αναγνώρισε ότι χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν την ίδια εικονική μεταβλητή και για τον αριθμό των κίτρινων τετραγώνων. Αυτό όμως δεν ήταν προφανές για την Αλεξάνδρα η οποία δημιούργησε καινούρια εικονική μεταβλητή ξεκλειδώνοντας τον σταθερό (γκρι) αριθμό των κίτρινων τετραγώνων (σχ. 3δ). Όταν οι μαθήτριες κίνησαν εκ νέου το μοτίβο πατώντας Play παρατήρησαν και πάλι ότι δεν χρωματιζόταν σωστά καθώς οι δύο εικονικές μεταβλητές μεταβάλλονταν ανεξάρτητα η μια από την άλλη. Τότε η Ιωάννα πρότεινε να χρησιμοποιηθεί η ίδια εικονική μεταβλητή του αριθμού των επαναλήψεων του μοτίβου και για τον αριθμό των κίτρινων τετραγώνων (σύρσιμο και επιλογή 'αντικατάσταση' από το αναδυόμενο μενού, σχ. 3ε).

Κ: Τι αριθμό πρέπει να βάλεις στα κίτρινα;

Α: 5, το ίδιο.

Ι: Μπορείς να βάλεις το ροζέ [*ενν. το ροζ εικονίδιο της εικονικής μεταβλητής*].

Α: Ωραία για να πατήσουμε το Play να δούμε τι θα γίνει.

Ι: Ωχ εδώ είναι παραπάνω, έπρεπε να βάλεις τον ίδιο αριθμό, τώρα έχουν διαφορετικά ροζ. Γιατί δεν παίρνεις απλά αυτό και να το βάλεις εδώ; Πάρε αυτό και βάλτο εδώ.

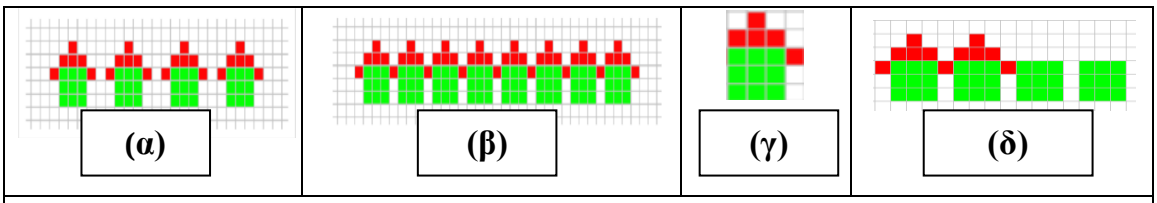
Στη συνέχεια οι μαθήτριες ακολούθησαν την ίδια διαδικασία και για την έκφραση του αριθμού των κόκκινων τετραγώνων. Συγκεκριμένα, έσυραν την εικονική

μεταβλητή του αριθμού των επαναλήψεων στο αντίστοιχο πλαίσιο και την πολλαπλασίασαν με τον σταθερό γκρι αριθμό 5 (σχ. 3στ).

Όπως φαίνεται στο παραπάνω επεισόδιο η αλληλεπίδραση των μαθητριών με τα διαθέσιμα εργαλεία περιστράφηκε γύρω από τη διάκριση σταθερών και μεταβλητών προκειμένου να επιτευχθεί η σωστή αναπαραγωγή ('χρωματισμός') του μοτίβου για τυχαίες τιμές επανάληψης. Οι μαθήτριες αρχικά νοηματοδότησαν τον ορισμό της εικονικής μεταβλητής για τον αριθμό των επαναλήψεων της δομικής μονάδας. Η χρήση σταθερών τιμών για τον αριθμό των κίτρινων τετραγώνων, ο ορισμός νέας (εικονικής) μεταβλητής για τον αριθμό τους και η περαιτέρω διερεύνηση του ρόλου των σταθερών και των εικονικών μεταβλητών για την σωστή αναπαραγωγή του μοτίβου αντιστοιχούν στο στάδιο της αναγνώρισης των δομών του λογισμικού από την πλευρά των μαθητριών με βάση τις υπάρχουσες γνώσεις τους για την μεταβλητή και το ρόλο της. Ωστόσο, οι ειδικά σχεδιασμένες δομές του περιβάλλοντος φαίνεται ότι διευκόλυναν τον συγκερασμό της υπάρχουσας και της αναδυόμενης γνώσης για τη μεταβολή και τις σχέσεις αλληλεξάρτησης μεταξύ των ποσοτήτων που περιγράφουν την δομή του κατασκευαζόμενου μοτίβου. Η χρήση της ίδιας εικονικής μεταβλητής για τον αριθμό των κίτρινων και ακολούθως των κόκκινων τετραγώνων μέσα από σύρσιμο του αντίστοιχου εικονιδίου («για να έχουν το ίδιο ροζ») και η χρήση αντίστοιχων σχέσεων αλληλεξάρτησης («ο αριθμός των κίτρινων ισούται με τον αριθμό επαναλήψεων, ενώ ο αριθμός των κόκκινων με το πενταπλάσιό του») σηματοδοτεί τη φάση συγκερασμού μεταξύ της υπάρχουσας και της νέας γνώσης των μαθητριών για να χρωματίσουν σωστά το μοτίβο τους. Έτσι, οι μαθήτριες κατασκεύασαν μια νέα δομή σχέσεων και εξαρτήσεων που διέπουν το μοτίβο τους για την ορθή αναπαραγωγή του για τυχαίες τιμές.

Νοηματοδότηση της συμμεταβολής μοτίβων με 'ενοποίηση' μεταβλητών

Το επεισόδιο που ακολουθεί έλαβε χώρα κατά την τέταρτη φάση όταν δόθηκε στους μαθητές το μοτίβο του σχ. 4α και τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν το μοτίβο του σχ. 4β.



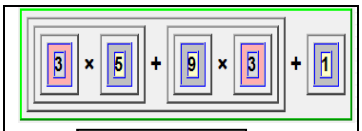
Σχ. 4 Κατασκευή και αναπαραγωγή μοτίβων με σπιτάκια.

Αρχικά οι μαθήτριες της ομάδας 1 αναγνώρισαν πως έπρεπε να κρατήσουν σταθερό το κόκκινο τετράγωνο στο αριστερό άκρο του σχήματος και να ορίσουν ως δομική μονάδα το μοτίβο του σχ. 4γ. Με τη διαδικασία που ακολούθησαν και στο προηγούμενο επεισόδιο έφτιαξαν στο λογισμικό δύο νέα (επαναλαμβανόμενα) μοτίβα-δομικές μονάδες: ένα με 9 πράσινα τετράγωνα (για τη βάση) και ένα με 5 κόκκινα (για τη σκεπή). Σε καθένα από τα συγκεκριμένα μοτίβα χρησιμοποίησαν ως εικονική μεταβλητή τον αντίστοιχο αριθμό των επαναλήψεων. Όταν η Ιωάννα

μετέφερε με το ποντίκι τις σκεπές πάνω στο σώμα του σπιτιού και πάτησε Play, είδε ότι το σχήμα του σπιτιού αλλοιωνόταν κατά την αναπαραγωγή του καθώς οι δύο εικονικές μεταβλητές έπαιρναν διαφορετικές τυχαίες τιμές, δηλ. μεταβάλλονταν ανεξάρτητα η μια από την άλλη (σχ. 4δ).

I: Ναι άλλα τώρα θα πρέπει να έχουμε τον ίδιο αριθμό από σκεπές και σπίτια, άρα να βάλουμε τον ίδιο ροζ αριθμό και στις σκεπούλες.

Η Ιωάννα σε αυτό το σημείο χρησιμοποιεί τη στρατηγική του αρχικού επεισοδίου με τη διαφορά ότι εδώ η 'ενοποίηση' των μεταβλητών γίνεται για να επιτευχθεί συμμεταβολή μεταξύ μοτίβων. Πιο συγκεκριμένα, ενώ στο επεισόδιο 1 η Ιωάννα έκανε σύρσιμο/αντικατάσταση της εικονικής μεταβλητής στο πλαίσιο των Ιδιοτήτων του ίδιου μοτίβου, εδώ έκανε την ίδια διαδικασία σέρνοντας και αντικαθιστώντας μια εικονική μεταβλητή από τις Ιδιότητες Μοτίβου της μιας δομικής μονάδας (σκεπής) στις Ιδιότητες μοτίβου της άλλης (βάσης). Στη συνέχεια, και ενώ το μοτίβο (σχ. 4β) αναπαραγόταν σωστά και εμφανιζόταν χρωματισμένο στο My Model, οι μαθήτριες θέλησαν να το χρωματίσουν και στο Computer's Model. Γι' αυτό κατασκεύασαν μια 'αλγεβρική' έκφραση (σχ. 5) που αντιστοιχεί στον συνολικό αριθμό των τετραγώνων του μοτίβου στο ειδικό πλαίσιο Model Rule σέρνοντας από τις Ιδιότητες και των δύο μοτίβων τους (σκεπή και βάση) τις εικονικές εκφράσεις που αντιστοιχούσαν στον αριθμό των τετραγώνων ανά χρώμα και επιλέγοντας στο εμφανιζόμενο μενού 'πρόσθεση'. Η Αλεξάνδρα αμέσως πρότεινε την πρόσθεση και η Ιωάννα διάβασε την αντίστοιχη έκφραση αναφέροντας μόνο αριθμούς καθώς στη θέση της εικονικής μεταβλητής διάβασε την τρέχουσα τιμή της (το 3). Μετά από διόρθωση της Αλεξάνδρας, η Ιωάννα συνέδεσε τα δομικά στοιχεία στην εικονική έκφραση του μοτίβου με τον αντίστοιχο αλγεβρικό τύπο.



Σχ. 5

A: Ποιος είναι ο τύπος λοιπόν;

I: 3 επί 5, συν 9 επί 3, συν 1.

A: (Διορθώνει). Δεν είναι αυτός ο τύπος! Με το χ δεν πρέπει; 1 + 9 επί χ…

I: χ επί 5, συν 9 επί χ, συν 1!

Στο επεισόδιο αυτό φαίνεται ότι οι μαθητές χτίζουν στην προηγούμενη εμπειρία τους με τα εργαλεία του eXpresser και νοηματοδοτούν τη μαθηματική γενίκευση μέσα από την εφαρμογή της γνώσης τους για τα μοτίβα και τη δομή τους σε ένα επόμενο μοντέλο που προέκυψε ως σύνθεση δύο δομικών μονάδων. Την ίδια στιγμή είναι σε θέση να εκφράσουν και συμβολικά την γενίκευση κάνοντας περισσότερο εμφανείς τις συνδέσεις της αναδυόμενης με την σχολική γνώση. Με όρους μαθηματικής αφαίρεσης έχουμε την παγιοποίηση της προηγούμενης δομής αναφορικά με τις προϋποθέσεις επίτευξης της ορθής αναπαραγωγής του μοντέλου για τυχαίες τιμές. Ωστόσο, στο επεισόδιο οι μαθητές φαίνεται να διευρύνουν τη νέα δομή καθώς η παρούσα αντικατάσταση αφορά αλληλεξάρτηση μεταξύ δύο δομικών μονάδων –

μοτίβων και άρα εννοιολογικά αποτελεί συνέχεια της κατασκευής στο πλαίσιο της αφαιρετικής διαδικασίας.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Στην παρούσα έρευνα, η δυνατότητα πρόσβασης στη δομή των μοτίβων μέσω των προσφερόμενων συμβολικών και εικονικών αναπαραστάσεων του eXpresser φάνηκε να ευνόησε την εννοιολογική εμπλοκή των μαθητριών σε αφαιρετικές διαδικασίες αναγνώρισης, συγκερασμού, κατασκευής και παγιοποίησης αναφορικά με τη νοηματοδότηση της γενίκευσης. Οι διαδικασίες αυτές περιελάμβαναν την σταδιακή εξοικείωση των μαθητριών με τη χρήση των εικονικών μεταβλητών στην έκφραση σχέσεων αλληλεξάρτησης στο ίδιο μοτίβο αλλά και μεταξύ διαφορετικών μοτίβων. Οι συγκεκριμένες διαδικασίες ενισχύθηκαν από την ανατροφοδότηση του περιβάλλοντος σχετικά με την ορθή εμφάνιση ενός μοτίβου κατά την αναπαραγωγή του για τυχαίες τιμές (δηλ. μέσω της απουσίας χρωματισμού). Η ανατροφοδότηση του περιβάλλοντος και η δυνατότητα αναπαραγωγής του μοτίβου για τυχαίες τιμές επαναλήψεων προσέφερε ένα μηχανισμό που διευκόλυνε τις μαθήτριες στο να αναγνωρίσουν την ανάγκη για γενίκευση και να καθορίσουν το ρόλο της ανεξάρτητης (εικονικής) μεταβλητής στις αντίστοιχες αλγεβρικές σχέσεις. Με τη συμπληρωματική χρήση της θεωρίας δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών και της θεωρίας της αφαίρεσης εντός πλαισίου, η νοηματοδότηση της γενίκευσης εμφανίστηκε ως μια δυναμική διαδικασία κατασκευής νοημάτων που οριοθετήθηκε από τα χαρακτηριστικά των διαθέσιμων εργαλείων και την δυνατότητα των μαθητών να αλληλεπιδρούν με τις προσφερόμενες αναπαραστάσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, v.32, 9-13.

Harel, I., & Papert, S. (1991*). Constructionism: Research reports and essays*. Norwood, US: Ablex Publishing Corporation.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195-222.

Morelli, L. (1992). A visual approach to algebra concepts. *Mathematics Teacher*, vol. 85, September, 434-437.

Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S. & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of 'dynamic': a microworld to support students' generalization. *ZDM*, 41, pp. 493-503.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Rivera, F. & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, 40(1), 65-82.

Sutherland, R., & Mason, J. (2005). *Key aspects of teaching algebra in schools*. London: QCA.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49: 379-402.

ΥΛΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΚΥΚΛΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Αρετή Ευσταθίου, Αθανασία Ιγγλέζου, Βασίλειος Καραγιάννης, Διονυσία Μπακογιάννη, Χρυσή Παπαδάκη, Ευαγγελία Χλέτσου

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

ma7888th@yahoo.gr, igglezou88@yahoo.com, vasilis_karagiannis@yahoo.gr, dbakogianni@math.uoa.gr, evichletsou@hotmail.com, chrissapap88@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο Στατιστικός Κύκλος Έρευνας (ΣΚΕ) αποτελεί ένα ιδιαίτερα σημαντικό διδακτικό εργαλείο στη διδασκαλία της Στατιστικής και μπορεί να λειτουργήσει ως μια υψηλών γνωστικών απαιτήσεων δραστηριότητα για την τάξη των μαθηματικών. Παρόλα αυτά, η υλοποίηση του ΣΚΕ φαίνεται να αποτελεί πρόκληση για τον καθηγητή των μαθηματικών. Η παρούσα μελέτη προσπαθεί να εμβαθύνει στα χαρακτηριστικά και τις γνωστικές απαιτήσεις μιας δραστηριότητας που εμπλέκει τους μαθητές με το ΣΚΕ, καθώς επίσης και να διερευνήσει διαφοροποιήσεις αυτών ανάμεσα στο σχεδιασμό και την υλοποίηση.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια η ανάπτυξη στατιστικού τρόπου σκέψης αποτελεί βασική επιδίωξη στη σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση (π.χ NCTM, 2000). Ο *στατιστικός τρόπος σκέψης* συνίσταται στην ικανότητα αναγνώρισης της ανάγκης για δεδομένα και στη σημασία παραγωγής τους, καθώς και στη συνειδητοποίηση της πανταχού παρουσίας της μεταβλητότητας και στην ανάγκη ποσοτικοποίησης, ελέγχου και περιορισμού της (Moore, 1997).

Πολλές μελέτες έχουν δείξει ότι προκειμένου οι μαθητές να αναπτύξουν στατιστικό τρόπο σκέψης είναι ανάγκη να αντιμετωπίσουν πραγματικά δεδομένα, να κληθούν να απαντήσουν σε ερωτήματα βασιζόμενοι σε δεδομένα και να είναι σε θέση να αξιολογούν και να επικοινωνούν τα αποτελέσματα μιας στατιστικής έρευνας (Gal, 2002). Στην κατεύθυνση αυτή θεωρείται σημαντικό οι μαθητές να εμπλακούν σε έναν στατιστικό κύκλο έρευνας (ΣΚΕ) και να μάθουν μέσα σε ένα πραγματικό πλαίσιο (Wild & Pfannkuch, 1999).

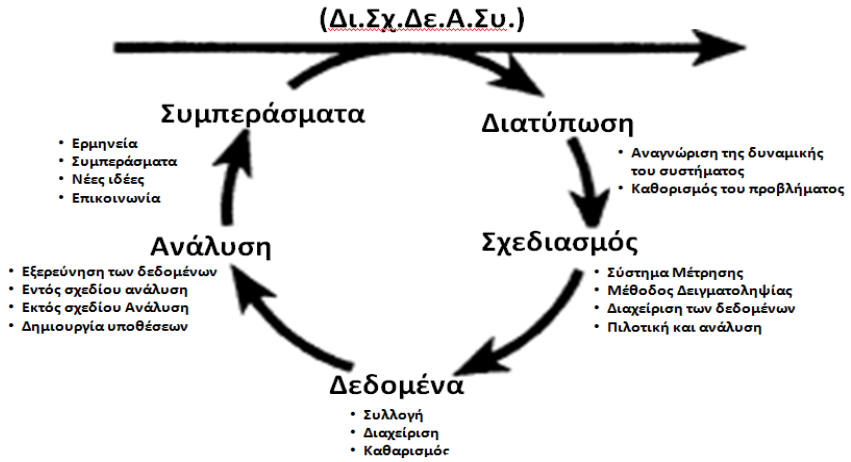
Παρά τις νέες κατευθύνσεις που δίνονται από τα αναμορφωμένα προγράμματα σπουδών για εμπλοκή των μαθητών με το ΣΚΕ, η στατιστική στο σχολείο εξακολουθεί να αντιμετωπίζεται με φορμαλιστικό τρόπο. Δίνεται έμφαση κυρίως σε υπολογισμούς, σε διαδικασίες και σε διαγράμματα (Makar, 2008). Η βιβλιογραφία έχει αναδείξει δυσκολίες σε σχέση με την εφαρμογή του ΣΚΕ στην τάξη των μαθηματικών, όπως η ελλιπής κατάρτιση των εκπαιδευτικών στο περιεχόμενο της

στατιστικής, η περιορισμένη εμπειρία τους στη διδασκαλία της στατιστικής, η διαφορετική διδακτική προσέγγιση που απαιτείται σε σχέση με τα υπόλοιπα μαθηματικά και η δυσκολία διαχείρισης μη αναμενόμενων αποτελεσμάτων (π.χ. Heaton & Mickelson, 2002).

Παρά τις δυσκολίες που έχουν αναδειχθεί σε σχέση με την εφαρμογή του ΣΚΕ στην τάξη των μαθηματικών, υπάρχει ένα κενό στην έρευνα σχετικά με τη διαδικασία της μετάβασης από το σχεδιασμό μιας δραστηριότητας που εμπλέκει τους μαθητές στον ΣΚΕ, στην υλοποίησή της μέσα στην τάξη. Η παρούσα έρευνα διεξήχθη από πέντε εκπαιδευτικούς και έναν ερευνητή (βλ. συγγραφική ομάδα), οι οποίοι σχεδίασαν και υλοποίησαν τον ΣΚΕ στην τάξη των μαθηματικών. Κοιτώντας από τη σκοπιά του εκπαιδευτικού, στόχος μας είναι να διερευνήσουμε τα χαρακτηριστικά και τις γνωστικές απαιτήσεις ενός ΣΚΕ και να προσδιορίσουμε πιθανές διαφοροποιήσεις αυτών κατά την διαδικασία της υλοποίησης.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι Wild και Pfannkuch (1999) περιγράφουν τις φάσεις του ΣΚΕ (βλ. Εικόνα 1.) και αναλύουν τύπους συλλογισμού που αναπτύσσονται μέσα από την υλοποίηση του ΣΚΕ: τύποι γενικοί (ανάπτυξη στρατηγικών, αναζήτηση εξηγήσεων, μοντελοποίηση, εφαρμογή τεχνικών), αλλά και ειδικοί που συνδέονται με το στατιστικό τρόπο σκέψης (αναγνώριση της ανάγκης για δεδομένα, μετα-αρίθμηση (transnumeration), αναγνώριση της διακύμανσης, αιτιολόγηση με στατιστικά μοντέλα, ενσωμάτωση του πλαισίου). Μια επιπλέον διάσταση, σχετική με την υλοποίηση του ΣΚΕ, είναι ο συνεχής προβληματισμός μέσα από την αναζήτηση, την ερμηνεία, την κριτική αντιμετώπιση και τη λήψη αποφάσεων.



Εικόνα 1: Οι φάσεις του στατιστικού κύκλου έρευνας (μετ. Wild & Pfannkuch, 1999)

Όμως, ο ΣΚΕ δεν έχει αποκλειστικό στόχο την εννοιολογική κατανόηση στατιστικών εργαλείων και μεθόδων αλλά και τη σύνδεση με τη θεωρία πιθανοτήτων. Οι πιθανότητες και η στατιστική είναι στενά συνδεδεμένοι τομείς. Για να εξάγει κανείς ένα συμπέρασμα από τα παρατηρούμενα δεδομένα χρειάζεται να χρησιμοποιήσει μοντέλα πιθανοτήτων. Προκειμένου λοιπόν ο μαθητής να εξάγει συμπεράσματα από

τα δεδομένα, χρειάζεται πρώτα να αντιληφθεί τη σχέση ανάμεσα στις πιθανότητες και τη στατιστική συμπερασματολογία. Ο στόχος αυτός μπορεί να υποστηριχθεί μέσω της προσομοίωσης και της προσπάθειας γενίκευσης των αποτελεσμάτων (Pfannkuch, 2005).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μια δραστηριότητα που εμπλέκει τους μαθητές με το ΣΚΕ μπορεί να αποτελέσει μια υψηλού γνωστικού επιπέδου δραστηριότητα (Stein & Lane, 1996). Οι Stein και Lane διακρίνουν δύο διαστάσεις σε μια μαθηματική δραστηριότητα: τα χαρακτηριστικά (χρήση πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης, χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, απαίτηση αιτιολογήσεων) και τις γνωστικές απαιτήσεις (η χρήση σύνθετου και μη αλγοριθμικού τρόπου σκέψης, η χρήση των μαθηματικών με σκοπό την επίλυσης ενός προβλήματος και η προσπάθεια σύνδεσης των διαδικασιών με μαθηματικές έννοιες και ιδέες). Για δραστηριότητες που αφορούν τον ΣΚΕ, η βιβλιογραφία (π.χ. Wild & Phannkuch 1999) έχει αναδείξει και κάποια επιπλέον χαρακτηριστικά και γνωστικές απαιτήσεις. Έτσι, στη μελέτη μας λαμβάνουμε υπόψη και την ενεργή εμπλοκή των μαθητών στα διάφορα στάδιά του. Δηλαδή επιχειρούμε να διερευνήσουμε σε ποιο βαθμό απαιτείται από τους μαθητές εξερεύνηση των δεδομένων και ερμηνεία των αποτελεσμάτων και σε ποιο βαθμό οι μαθητές αυτενεργούν και λαμβάνουν αποφάσεις, χαρακτηριστικά με αυξημένη βαρύτητα για την περίπτωση του ΣΚΕ. Επίσης, μια ιδιαίτερα σημαντική γνωστική απαίτηση είναι η αναγνώριση των χαρακτηριστικών του στοχαστικού πλαισίου και η σύνδεση με το πλαίσιο του προβλήματος. Η χρήση σύνθετου και μη αλγοριθμικού τρόπου σκέψης που αναφέρουν οι Stein & Lane (1996), στην περίπτωση του ΣΚΕ αφορά στη χρήση στατιστικού τρόπου σκέψης, ενώ η χρήση μαθηματικών για την επίλυση ενός προβλήματος αφορά στη χρήση στατιστικών εννοιών και διαδικασιών.

Στην παρούσα μελέτη επιχειρούμε να απαντήσουμε σε δύο ερωτήματα:

1 Μέσα από ποια χαρακτηριστικά υποστηρίζεται ο ΣΚΕ και ποιες γνωστικές απαιτήσεις αναδεικνύονται;

2 Ποιές διαφοροποιήσεις παρατηρούνται στα χαρακτηριστικά και τις γνωστικές απαιτήσεις από τη φάση του σχεδιασμού στη φάση της υλοποίησης και που οφείλονται;

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας. Για την έρευνα αυτή χρησιμοποιείται ως πλαίσιο μια ομάδα μελέτης (study group) (Arbaugh, 2003), η οποία διερευνά το περιεχόμενο και τη διδασκαλία της στατιστικής αλλά και την αποτελεσματική ενσωμάτωσή της στα σχολικά μαθηματικά. Η παρούσα μελέτη αφορά ένα μέρος αυτής της έρευνας όπου η ομάδα πειραματίστηκε με τον ΣΚΕ.

3.1. Συμμετέχοντες.

Στη μελέτη συμμετείχαν πέντε εκπαιδευτικοί (Ε1, Ε2,…,Ε5), εκ των οποίων ο Ε1 υπηρετεί στη δημόσια εκπαίδευση, και μία ερευνήτρια της Διδακτικής των

Μαθηματικών (βλ. συγγραφική ομάδα). Τρεις από τους εκπαιδευτικούς έχουν πτυχίο Μαθηματικών και οι δύο είναι απόφοιτοι της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών. Όλοι οι εκπαιδευτικοί έχουν ολοκληρώσει μεταπτυχιακές σπουδές στη Διδακτική των Μαθηματικών. Η διδακτική τους εμπειρία και η εξοικείωσή τους με το περιεχόμενο της στατιστικής ποικίλει.

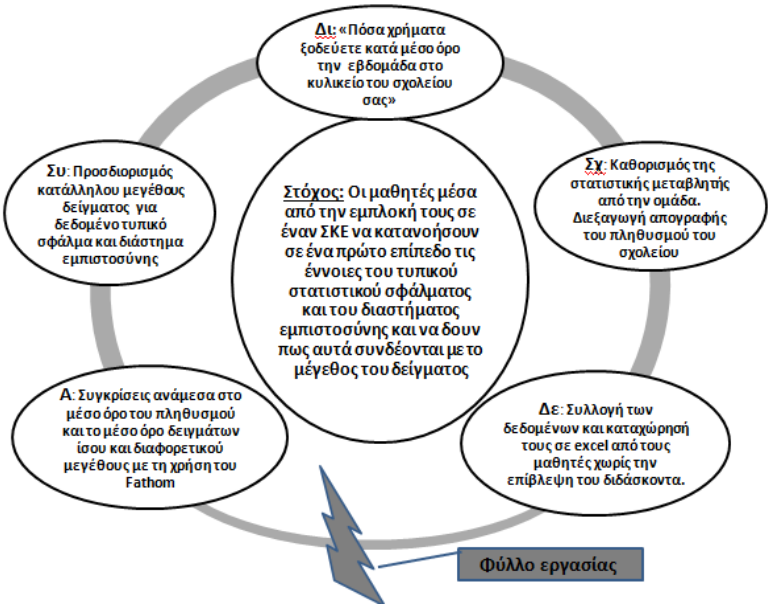
3.2. Διαδικασία Συλλογής Δεδομένων.

Η ομάδα δούλεψε πάνω σε τέσσερις άξονες:

(α) Διερεύνηση του περιεχομένου της στατιστικής (3 δίωρες συναντήσεις). (β) Σχεδιασμός μιας δραστηριότητας με στόχο την εμπλοκή των μαθητών με το ΣΚΕ (7 δίωρες συναντήσεις) (γ) Πειραματισμός μέσα στην τάξη σε ένα τμήμα της Β΄ Γυμνασίου (21 μαθητές) και σε ένα της Γ΄ Γυμνασίου (18 μαθητές), στα οποία την αρμοδιότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών είχε ο Ε1. Την εφαρμογή της δραστηριότητας στην τάξη την έκανε ο Ε1, ενώ τα άλλα μέλη της ομάδας ήταν παρατηρητές και κρατούσαν σημειώσεις πεδίου. (5 διδακτικές ώρες για κάθε τμήμα) (δ) Αναστοχασμός (2 δίωρες συναντήσεις).

3.3. Η δραστηριότητα.

Στην Εικόνα 2 περιγράφονται οι στόχοι και τα βήματα της δραστηριότητας που σχεδίασε και υλοποίησε η ομάδα.



Εικόνα 2: Τα βήματα και οι στόχοι της δραστηριότητας

Μεταξύ των βημάτων (Δε) και (Α) παρενεβλήθη, διακόπτοντας τη ροή του ΣΚΕ, η ενασχόληση των μαθητών με τα ερωτήματα ενός φύλλου εργασίας, διάρκειας δύο διδακτικών ωρών. Στόχος της παρέμβασης ήταν οι μαθητές, μέσα από τη συζήτηση και τον πειραματισμό πάνω σ' ένα μικρό πληθυσμό πέντε ατόμων, να προσεγγίσουν διαισθητικά τις έννοιες του μέσου όρου, του δείγματος, του τυπικού στατιστικού σφάλματος και του διαστήματος εμπιστοσύνης.

3.4. Δεδομένα.

Τα δεδομένα είναι οι μαγνητοφωνήσεις και βιντεοσκοπήσεις των 12 συναντήσεων της ομάδας, η ηχητική καταγραφή και οι σημειώσεις πεδίου από τον πειραματισμό μέσα στην τάξη, τα ημερολόγια που ενημέρωναν οι εκπαιδευτικοί μετά από κάθε συνάντηση και οι ατομικές αναφορές που συνέγραψαν μετά την ολοκλήρωση του πειραματισμού.

3.5. Ανάλυση.

Αρχικά, διερευνήσαμε ποια από τα χαρακτηριστικά και τις γνωστικές απαιτήσεις μιας υψηλού γνωστικού επιπέδου δραστηριότητας στο ΣΚΕ εμφανίζονται στο σχεδιασμό της εν λόγω δραστηριότητας και σε ποιο βαθμό υποστηρίζονται. Μελετώντας τα δεδομένα των συναντήσεων της ομάδας, διερευνήσαμε τους λόγους στους οποίους οφείλονται οι επιλογές της ομάδας κατά το σχεδιασμό. Καταγράψαμε τις διαφοροποιήσεις των χαρακτηριστικών και των γνωστικών απαιτήσεων κατά την υλοποίηση του ΣΚΕ στην τάξη και εντοπίσαμε τους παράγοντες στους οποίους φαίνεται να οφείλονται οι διαφοροποιήσεις αυτές.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην εικόνα 3 παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση. Στην πρώτη στήλη φαίνονται τα χαρακτηριστικά και οι γνωστικές απαιτήσεις της δραστηριότητας. Η δεύτερη στήλη δείχνει κατά πόσο αυτά υποστηρίζονται από το σχεδιασμό της δραστηριότητας (τα Μ, m εκφράζουν αντίστοιχα μεγάλο ή μικρό βαθμό υποστήριξης), ενώ η τελευταία στήλη δείχνει τις διαφοροποιήσεις τους από το σχεδιασμό στη φάση υλοποίησης (√: δεν υπήρξε διαφοροποίηση, -: ο βαθμός απαίτησης μειώθηκε κατά την υλοποίηση, +: ενισχύθηκε κατά την υλοποίηση).

	Χαρακτηριστικά και γνωστικές απαιτήσεις μιας δραστηριότητας που εμπλέκει τους μαθητές στο ΣΚΕ (επέκταση του πλαισίου των Stein & Lane, 1996)	**ΒΑΘΜΟΣ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ ΣΤΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΣΕ ΚΑΘΕ ΣΤΑΔΙΟ ΤΟΥ ΣΚΕ (Εικ. 1)**					**ΔΙΑΦ/ΣΕΙΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΚΑΘΕ ΣΤΑΔΙΟ ΤΟΥ ΣΚΕ (Εικ. 1)**				
		Δι	**Σχ**	**Δε**	**Α**	**Συ**	**Δι**	**Σχ**	**Δε**	**Α**	**Συ**
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης										
	πολλαπλές αναπαραστάσεις				M					√	
	αιτιολογήσεις	M	M	M	M	M	√	√	√	−	−
	ενεργή εμπλοκή (αυτενέργεια, λήψη αποφάσεων, εξερεύνηση, ερμηνεία)	m	m	M	m	m	√	√	+	−	−
ΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ	χρήση των στατιστικών εννοιών και διαδικασιών με σκοπό την επίλυσης ενός προβλήματος				M	M				√	−
	σύνδεση των διαδικασιών με μαθηματικές έννοιες και ιδέες				M	M				√	−
	αναγνώριση των χαρακτηριστικών του στοχαστικού πλαισίου		M	M	M	M		√	+	√	√
	σύνδεση με το πλαίσιο του προβλήματος	M	M	M	M	M	√	√	√	−	−
	χρήση στατιστικού τρόπου σκέψης			M	m	m			√	−	−

Εικόνα 3: Τα χαρακτηριστικά και οι γνωστικές απαιτήσεις της δραστηριότητας στη φάση του σχεδιασμού και οι αντίστοιχες διαφοροποίηση στη φάση της υλοποίησης

4.1 Τα χαρακτηριστικά της δραστηριότητας.

Τα μέλη της ομάδας, αφού μελέτησαν ερευνητικά άρθρα σχετικά με τον ΣΚΕ, έθεσαν τους στόχους της δραστηριότητας και αποφάσισαν σε ποια βήματα και διαδικασίες θα δοθεί έμφαση.

Πολλαπλές στρατηγικές. Απόφαση της ομάδας ήταν οι πολλαπλές στρατηγικές να μην αποτελέσουν άμεσο στόχο της δραστηριότητας. Στη λήψη αυτής της απόφασης συνετέλεσαν δύο παράγοντες. Το ότι οι μαθητές δεν είχαν καμία προηγούμενη εμπειρία με το περιεχόμενο της στατιστικής και το ότι ο διαθέσιμος διδακτικός χρόνος για την υλοποίηση της δραστηριότητας ήταν αρκετά περιορισμένος.

Χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Το χαρακτηριστικό αυτό ενθαρρύνθηκε κυρίως στο στάδιο (Α) του ΣΚΕ, και υποστηρίχθηκε στον ίδιο βαθμό και κατά την υλοποίηση. Επίσης, αποτέλεσε κυρίαρχο χαρακτηριστικό στο φύλλο εργασίας που δόθηκε στους μαθητές. Οι μαθητές χειρίστηκαν αριθμητικά δεδομένα, δημιούργησαν πίνακες, διάβασαν ραβδογράμματα και πειραματίστηκαν με τις κατανομές δειγμάτων μέσα από σημειογράμματα.

Αιτιολογήσεις. Από τη διαπραγμάτευση μεταξύ των μελών της ομάδας για το βαθμό υποστήριξης αυτού του χαρακτηριστικού, φάνηκε να υπάρχει ένα αίσθημα ανασφάλειας ως προς τη διαχείρισή του. Το παρακάτω απόσπασμα δείχνει την ανάγκη που αισθάνονται κάποια μέλη της ομάδας να είναι αυστηρά καθορισμένη η ακολουθία των βημάτων, όχι μόνο για να βοηθηθούν οι μαθητές, αλλά και για να είναι πιο εύκολη η διαχείριση από τους ίδιους.

Ε3: Εδώ όμως χρειάζεται πολύ καθοδήγηση. Δεν θα γράψουμε και τα ερωτήματα για κάθε βήμα;

Ε4: Εντάξει εκεί θα το χειριστεί ο Ε1, δεν χρειάζεται να τα γράψουμε όλα.

Ε2: Ας γράψουμε όμως τα βήματα για να βοηθηθούμε εμείς που θα είμαστε εκεί.

Η αλληλεπίδραση και η αλληλοϋποστήριξη των μελών και το γεγονός ότι ο Ε1 είναι εξοικειωμένος με το περιεχόμενο της στατιστικής, λειτούργησε θετικά στη διατήρηση υψηλού βαθμού απαίτησης αιτιολογήσεων από τους μαθητές. Παρόλα αυτά, στα στάδια (Α) και (Συ) της υλοποίησης, το χαρακτηριστικό αυτό δεν υποστηρίχθηκε σύμφωνα με το σχεδιασμό. Μια αιτία φαίνεται να είναι ο περιορισμένος διαθέσιμος διδακτικός χρόνος. Όμως η Ε5 στην αναφορά της λέει χαρακτηριστικά «Επομένως ένας εκπαιδευτικός είναι σημαντικό να είναι ικανός να ανασχηματίζει διαρκώς τους στόχους του και το πλάνο του στη διδασκαλία» και συνεχίζει «κάτι τέτοιο προϋποθέτει όχι μόνο γνώση αλλά και εμπειρία». Πιστεύουμε λοιπόν ότι, ακόμα και υπό τον περιορισμό του διδακτικού χρόνου, θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε καλύτερα το χαρακτηριστικό αυτό αν ήμασταν διδακτικά πιο έμπειροι σε δραστηριότητες στατιστικής τέτοιας φύσης.

Ενεργή εμπλοκή. Δεδομένου ότι το αναλυτικό πρόγραμμα δεν υποστηρίζει τη διδασκαλία της στατιστικής, που συνεπάγεται ότι οι μαθητές δεν έχουν το απαραίτητο υπόβαθρο σε στατιστικές έννοιες και διαδικασίες, το χαρακτηριστικό αυτό ήταν δύσκολο να απαιτηθεί σε υψηλό βαθμό κατά το σχεδιασμό της δραστηριότητας. Έτσι, συχνά χρειάστηκε κάποιες αποφάσεις να ληφθούν από την ομάδα χωρίς τη συμμετοχή των μαθητών (π.χ. ποια μεταβλητή θα μελετηθεί και πως). Παρόλα αυτά, στο στάδιο (Δε), όπου οι μαθητές διενήργησαν απογραφή χωρίς την επίβλεψη του διδάσκοντα, φάνηκε να αυτενεργούν λαμβάνοντας την πρωτοβουλία καθαρισμού των δεδομένων. Για παράδειγμα, στην απάντηση 80€ καταχώρησαν την τιμή 0,8€, ενώ την απάντηση 100000€ δεν την καταχώρησαν καθόλου. Στα στάδια (Α) και (Συ) του σχεδιασμού, αν και είχαμε την πρόθεση ο βαθμός εμπλοκής των μαθητών να είναι υψηλός, τελικά ήταν περιορισμένος λόγω έλλειψης δυνατότητας πρόσβασης σε αίθουσα με Η/Υ. Στην υλοποίηση, αν και υποστηρίχθηκε η εμπλοκή των μαθητών μέσα από ερωτήσεις, δεν υπήρχε επαρκής διδακτικός χρόνος ώστε οι μαθητές να εμβαθύνουν και να ερμηνεύσουν, με αποτέλεσμα ο βαθμός εμπλοκής τους στα στάδια αυτά να είναι χαμηλότερος από αυτόν που σχεδιάσαμε.

4.2. Οι γνωστικές απαιτήσεις της δραστηριότητας.

Όπως παρατηρούμε και από τον πίνακα οι γνωστικές απαιτήσεις υποστηρίχθηκαν σε υψηλό επίπεδο στη φάση του σχεδιασμού.

Χρήση των στατιστικών εννοιών και διαδικασιών με σκοπό την επίλυσης ενός προβλήματος. Η χρήση στατιστικών εννοιών και διαδικασιών για την επίλυση του προβλήματος, αλλά και η σύνδεση με την έννοια της πιθανότητας, ήταν πολύ υψηλά στους στόχους της ομάδας. Στο απόσπασμα που ακολουθεί, φαίνεται ο προβληματισμός των μελών της ομάδας σχετικά με την υποστήριξη αυτών των απαιτήσεων.

Ε1: Ωραία, τα κάνουμε εμείς αυτά όλα. Η δυσκολία είναι τι μαθηματικά θα κάνουμε εμείς εκεί πέρα. Πώς θα καταλάβουν γιατί πέφτουμε από τόσο έως τόσο μέσα;

Ε2: Αυτό είναι ανάγκη να το καταλάβουν;

Ε1: Ε βέβαια, αλλιώς τι; Αλλιώς είναι μαύρο κουτί.

Σύνδεση των διαδικασιών με μαθηματικές έννοιες και ιδέες. Για να προσεγγίσουν οι μαθητές τις έννοιες του τυπικού στατιστικού σφάλματος και του διαστήματος εμπιστοσύνης, θα έπρεπε να δουν την κατανομή όλων των δυνατών συνδυασμών του πληθυσμού. Όμως, για τον πληθυσμό των 315 ατόμων του σχολείου αυτό ήταν ανέφικτο χωρίς τη χρήση Η/Υ. Γι' αυτό κρίναμε αναγκαίο να διακόψουμε τη ροή του ΣΚΕ, πραγματοποιώντας μια παρέμβαση με τη βοήθεια ενός φύλλου εργασίας, πριν το στάδιο (Α). Στην παρέμβαση οι μαθητές θα πειραματιζόταν με μικρό πληθυσμό ώστε να μπορούν να εντοπίσουν και να διαχειριστούν τους δυνατούς συνδυασμούς των δειγμάτων. Προβληματισμός υπήρξε για το πόσο ομαλά θα γίνει η σύνδεση του

προβλήματος με το φύλλο εργασίας της παρέμβασης. Διαπιστώσαμε ότι μαθητές ανταποκρίθηκαν καλά στο φύλλο εργασίας και στη συνέχεια συμμετείχαν ενεργά στο στάδιο (Α). Όμως, στο στάδιο (Συ) όπου το πλαίσιο άλλαξε και δεν ήταν πια μαθηματικό, δυσκολεύτηκαν να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις με τις μαθηματικές έννοιες.

Αναγνώριση των χαρακτηριστικών του στοχαστικού πλαισίου. Ο σχεδιασμός της δραστηριότητας υποστήριξε σε μεγάλο βαθμό την αναγνώριση των χαρακτηριστικών του στοχαστικού πλαισίου μέσα από ερωτήματα όπως: «Ποιες θα μπορούσαν να είναι οι πιθανές αιτίες σφαλμάτων σε μια στατιστική έρευνα?», «Πως μπορείτε να κρίνετε αν μια δειγματοληψία είναι 'καλή' ή 'κακή'?» κ.α. Κατά την υλοποίηση, οι μαθητές, αν και δεν είχαν διδαχθεί τα κεφάλαια της στατιστικής και των πιθανοτήτων, φάνηκε να είναι εξοικειωμένοι με το στοχαστικό πλαίσιο. Οι απαντήσεις τους στα σχετικά ερωτήματα ήταν ιδιαίτερα εύστοχες. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την απάντηση ενός μαθητή για τις πιθανές αιτίες σφαλμάτων σε μια έρευνα: «μπορεί να ρωτάς διαφορετικά άτομα ή περισσότερα άτομα». Ο μαθητής αυτός φαίνεται να διακρίνει ποιοτικές αλλά και ποσοτικές παραμέτρους που επηρεάζουν τα αποτελέσματα μιας στατιστικής έρευνας.

Σύνδεση με το πλαίσιο του προβλήματος. Στο σχεδιασμό, επιδιώξαμε σε μεγάλο βαθμό τη σύνδεση με το πλαίσιο του προβλήματος. Πρόθεσή μας ήταν οι αριθμοί να αποκτήσουν νόημα μέσα στο συγκεκριμένο πλαίσιο ώστε οι μαθητές να προχωρήσουν σε ερμηνεία και όχι απλή ανάγνωση της στατιστικής πληροφορίας. Παρόλα αυτά, κατά την υλοποίηση υπήρχε μια δυσκολία διατήρησης του υψηλού επιπέδου σύνδεσης με το πλαίσιο του προβλήματος. Στο στάδιο (Α) δινόταν έμφαση σε μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες και συχνά η σύνδεση με το πλαίσιο του προβλήματος δεν ήταν ισχυρή. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα οι μαθητές, να λειτουργούν διαδικαστικά αναζητώντας «τη σωστή απάντηση» ή απλά να εκτελούν τα βήματα του αλγορίθμου. Στο στάδιο (Συ) οι μαθητές φάνηκε να δυσκολεύονται να συνδέσουν τις έννοιες και τις διαδικασίες που είχαν εστιάσει σε προηγούμενα στάδια, με το πλαίσιο του προβλήματος. Γενικά, η συνεχής σύνδεση με το πλαίσιο του προβλήματος, καθώς πραγματοποιούνται τα βήματα του ΣΚΕ, φάνηκε να έχει αυξημένη δυσκολία στην πράξη και αποτελεί ένα σημείο που χρειάζεται εμπειρία στη διαχείριση.

Χρήση στατιστικού τρόπου σκέψης. Η χρήση στατιστικού τρόπου σκέψης ήταν επίσης πολύ ψηλά στις επιδιώξεις μας. Όμως, για να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές στατιστικό τρόπο σκέψης χρειάζεται να πειραματιστούν οι ίδιοι με τα δεδομένα, να παρατηρήσουν σχέσεις και μεταβολές και να κάνουν εικασίες. Εξαιτίας της αδυναμίας πρόσβασης σε αίθουσα με Η/Υ, η εμπλοκή των μαθητών στα στάδια (Α) και (Συ) ήταν περιορισμένη εμποδίζοντας την απαίτηση χρήσης στατιστικού τρόπου σκέψης σε υψηλό βαθμό. Κατά την υλοποίηση, υπήρξε επιπλέον δυσκολία στη χρήση στατιστικού τρόπου σκέψης από τους μαθητές, λόγω του περιορισμένου χρόνου που αφιερώθηκε στα στάδια αυτά, αλλά και λόγω έλλειψης εμπειρίας στη

διδασκαλία της στατιστικής. Για παράδειγμα, η χρήση αναλογικού τρόπου σκέψης από τους μαθητές ήταν κυρίαρχη σε πολλά σημεία. Οι μαθητές μετά από τον πειραματισμό τους με δείγματα 3 ατόμων από το μικρό πληθυσμό μεγέθους 5 ατόμων, συμπέραναν σκεπτόμενοι αναλογικά, ότι για πληθυσμό 500 ατόμων χρειαζόμαστε δείγμα 300 ατόμων. Κατά το σχεδιασμό προβλέψαμε τη λανθασμένη χρήση της αναλογίας (Rubin et.al., 1991) και προσπαθήσαμε να την ανατρέψουμε μέσα από κατάλληλα ερωτήματα και συζήτηση. Όμως, μόλις οι μαθητές απέρριπταν τη χρήση της αναλογίας, απαντούσαν με τυχαίο τρόπο χωρίς να φαίνεται να υπάρχει κάποιο σκεπτικό πίσω από τις απαντήσεις τους.

5. ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα μελέτη επιχείρησε να φωτίσει τη διαδικασία σχεδιασμού και υλοποίησης ενός ΣΚΕ στην τάξη. Οι καθηγητές μαθηματικών δεν είναι εξοικειωμένοι με το περιεχόμενο της στατιστικής, δεν έχουν εμπειρία στη διδασκαλία της, ενώ η γνώση τους για τους μαθητές είναι κυρίως διαισθητική, γεγονός που επιβεβαιώνεται και στην παρούσα μελέτη. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ο σχεδιασμός και η υλοποίηση μιας δραστηριότητας που εμπλέκει τους μαθητές στο ΣΚΕ, μπορεί να επηρεαστεί θετικά από δύο παράγοντες. Πρώτον, από την ενίσχυση του υπόβαθρου των διδασκόντων σε θέματα περιεχομένου και διδασκαλίας της στατιστικής και από την επαφή τους με την έρευνα. Δεύτερον, η αλληλεπίδραση μεταξύ των εκπαιδευτικών και η δράση τους μέσα στο πλαίσιο μιας ομάδας φάνηκε να αποτελεί επίσης σημαντικό παράγοντα.

Από την άλλη, αναδείχθηκαν τέσσερις παράγοντες που επηρεάζουν αρνητικά το βαθμό υποστήριξης των χαρακτηριστικών και των γνωστικών απαιτήσεων: η ελλιπής υποστήριξη της διδασκαλίας της στατιστικής από το αναλυτικό πρόγραμμα, ο περιορισμένος χρόνος που μπορεί να αφιερωθεί σε μια τέτοια δραστηριότητα, η ανασφάλεια του διδάσκοντα να διαχειριστεί μια συζήτηση γύρω από στατιστικές έννοιες και διαδικασίες και η αδυναμία πρόσβασης σε αίθουσα με Η/Υ.

Η υλοποίηση ενός ΣΚΕ μέσα στην τάξη φάνηκε να είναι μια πολύ ενδιαφέρουσα και πλούσια δραστηριότητα για τους μαθητές. Το ότι μελέτησαν ένα πρόβλημα που τους ενδιέφερε, τους κινητοποίησε. Διαπιστώσαμε ότι μπορεί κανείς να δουλέψει, ακόμα και με μαθητές Γυμνασίου, αρκετά προχωρημένες έννοιες της στατιστικής όπως το διάστημα εμπιστοσύνης, όχι με τυπικό τρόπο αλλά ενθαρρύνοντας μια άτυπη συμπερασματολογία. Ο ΣΚΕ δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να συνδέσουν μαθηματικές έννοιες που έχουν διδαχθεί, με πραγματικές καταστάσεις (Wild & Pfannkuch, 1999). Για την αποτελεσματική υλοποίηση ενός ΣΚΕ χρειάζεται εξοικείωση με τις στατιστικές έννοιες και διαδικασίες, τόσο από την πλευρά των μαθητών όσο και από την πλευρά του διδάσκοντα. Η σύνδεση μεταξύ των διαφόρων σταδίων του ΣΚΕ, η διατύπωση κατάλληλων ερωτημάτων, η σωστή διαχείριση του χρόνου και η αποτελεσματική διαχείριση της τάξης στο πλαίσιο συζήτησης και διερεύνησης, απαιτούν εμπειρία από το διδάσκοντα και μπορούν να ενισχύσουν σε

μεγάλο βαθμό τους στόχους του ΣΚΕ. Τέλος, ο πειραματισμός των μαθητών με τα δεδομένα μέσω κατάλληλου λογισμικού, μπορεί να αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο για την εννοιολογική κατασκευή του τυπικού στατιστικού σφάλματος και του διαστήματος εμπιστοσύνης.

Το πλαίσιο των Stein και Lane (1996), αν και αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση δραστηριοτήτων υψηλών απαιτήσεων, χρειάζεται επέκταση προκειμένου να εφαρμοστεί στην περίπτωση του ΣΚΕ. Η παρούσα μελέτη έδειξε ότι τα διδακτικά μέσα και οι γνωστικές απαιτήσεις σε έναν ΣΚΕ, διαφέρουν σε σχέση με τις υψηλών απαιτήσεων δραστηριότητες σε άλλους τομείς των μαθηματικών. Η επέκταση του πλαισίου των Stein και Lane ήταν έξω από τους στόχους της έρευνάς μας. Παρόλα αυτά, ορισμένα χαρακτηριστικά όπως η λήψη αποφάσεων από τους μαθητές και η διαρκής σύνδεση με το πλαίσιο του προβλήματος, τα οποία δεν συμπεριλαμβάνονται στο πλαίσιο των Stein & Lane, φαίνεται να παίζουν καθοριστικό ρόλο για τον ΣΚΕ. Μια πιο συστηματική έρευνα σε αυτήν την κατεύθυνση ενδέχεται να αναδείξει επιπλέον στοιχεία ή διαφοροποιήσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arbaugh, F. (2003). Study groups as a form of professional development for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6(2), 139-163

Finzer, W., Erickson, T., & Binker, J. (2000). *Fathom: Reference manual and learning guide*. Key Curriculum Press

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-51

Heaton, R. M. & Mickelson, W. T. (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 35-59

Makar, K. (2008). A model of learning to teach statistical inquiry. Paper presented at the *Joint ICMI/IASE Study, Statistics Education in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education*, Monterrey, Mexico, 30 June-4 July 2008

Moore, D. (1997). New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics. *International Statistical Review*, 65, 123-165

National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000

Pfannkuch, M. (2005). Probability and statistical inference: How can teachers enable learners to make the connection? In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 267-294). New York: Springer

Rubin, A., Bruce, B., & Tenney, Y. (1991). Learning about sampling: Trouble at the core of statistics. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International*

Conference on Teaching Statistics. v.1. School and General Issues (pp. 314-319). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2(1), 50–80

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223–265

«CREATIVEMATHPATHWAYS.SCH.GR» : ΜΙΑ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΕ «ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» ΣΤΗ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΗ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑ ΜΑΘΗΣΗΣ

Δρ Δεληκανάκη, Νίκη[1], Δρ Περικλειδάκης, Γεώργιος[2], MSc Γαλανάκης, Ιωάννης[3], Τζαγκαράκης, Ελευθέριος[4]

1:Σχολική Σύμβουλος 19ης Περιφέρειας Προσχολικής Αγωγής, 2:Σχολικός Σύμβουλος Π.Ε., Προϊστάμενος Επιστημονικής & Παιδαγωγικής Καθοδήγησης Περιφερειακής Δ/νσης Εκπαίδευσης Κρήτης, 3:Δ/ντής 12ου Δ.Σ. Ηρακλείου, Επιμορφωτής Β΄ Επιπέδου ΤΠΕ, 4:Πληροφορικός στην Περιφερειακή Δ/νση Εκπαίδευσης Κρήτης

n_delikanaki@yahoo.gr και nsymboulos9@gmail.com, gperiklidakis@gmail.com, igalanakis@gmail.com, eltzaster@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ανακοίνωση αφορά στη δημιουργία ιστοσελίδας με δημιουργικό περιεχόμενο Μαθηματικών (μαθηματικά παραμύθια, ταινίες animation, κλπ), κατασκευασμένων κατά το μεγαλύτερο μέρος στη σχολική τάξη, η οποία απευθύνεται σε παιδιά νηπιαγωγείου, Α΄ και Β΄ τάξεων δημοτικού σχολείου, με σκοπό την υποστήριξη τους μέσα από εναλλακτικούς δημιουργικούς τρόπους και με έμφαση στις νέες τεχνολογίες (ΤΠΕ), την καλλιέργεια σχετικών θετικών στάσεων και την ανάπτυξη μιας διαδικτυακής κοινότητας μάθησης, προβληματισμού και ψυχαγωγίας στα Μαθηματικά.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εισαγωγή των ΤΠΕ στην εκπαίδευση άλλαξε ριζικά τη φιλοσοφία της μάθησης, καθώς και τη διδακτική πράξη, η οποία λαμβάνει χώρα με την ενεργή συμμετοχή τόσο του εκπαιδευτικού όσο και ακόμα περισσότερο του μαθητή. Οι τεχνολογικές καινοτομίες έχουν αλλάξει ριζικά την καθημερινότητά μας, τον τρόπο που σκεφτόμαστε, που μαθαίνουμε και ενεργούμε ως άτομα. Η διαρκής και ολοένα αυξανόμενη ενσωμάτωση των νέων εργαλείων στο χώρο της εκπαίδευσης οδηγεί σε συνεχείς και ολοένα αυξανόμενες αλλαγές στην εκπαιδευτική διαδικασία. Τα τελευταία χρόνια έχουν εισχωρήσει νέα μέσα, όπως είναι τα web 2.0 εργαλεία, τα οποία προσφέρουν ποικίλες δυνατότητες σε εκπαιδευτές και εκπαιδευόμενους, αλλά και νέα περιβάλλοντα μάθησης, τα οποία ενισχύουν τη νέα φιλοσοφία μάθησης και εγκαθιδρύουν ένα νέο πλέγμα σχέσεων μεταξύ των εμπλεκόμενων. Πλέον, τα τεχνολογικά μέσα, ως διδακτικά και μαθησιακά εργαλεία, συνιστούν μια αναγκαιότητα στις εκπαιδευτικές δράσεις.

Ο όρος Web 2.0 άρχισε να εμφανίζεται κατά τη διάρκεια ενός συνεδρίου μεταξύ της O'Reilly Media και της MediaLive International όπου προτείνονταν ιδέες για την αναβάθμιση του παγκόσμιου ιστού. Ο όρος Web 2.0 (Ιστός 2.0), χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη νέα γενιά του Παγκόσμιου Ιστού, μιας δεύτερης γενιάς υπηρεσιών διαθέσιμων σε αυτό, η οποία βασίζεται στην όλο και μεγαλύτερη δυνατότητα των χρηστών του Διαδικτύου να μοιράζονται πληροφορίες και να συνεργάζονται online. Αυτές οι υπηρεσίες υποστηρίζουν την εύκολη συγκέντρωση και το διαμοιρασμό πόρων, τη συνεργατική συγκέντρωση και ταξινόμηση πληροφοριών, αλλά και την ενεργή και συνεχή παρακολούθηση στην ροή πληροφοριών από διάφορες πηγές. Η χρήση αυτών των υπηρεσιών δεν περιορίζεται μόνο στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, αλλά και στα κινητά τηλέφωνα κτλ. Αυτή η νέα γενιά είναι μια δυναμική διαδικτυακή πλατφόρμα στην οποία μπορούν να αλληλεπιδρούν χρήστες χωρίς εξειδικευμένες γνώσεις σε θέματα υπολογιστών και δικτύων.

Με την εμπλοκή εργαλείων Web 2.0 στην εκπαιδευτική πρακτική αλλάζει τόσο η διδακτική όσο και η μαθησιακή διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός δεν μεταφέρει απλώς γνώσεις στους εκπαιδευόμενους, αλλά μπορεί να εφαρμόσει ένα διαφορετικό πλαίσιο μάθησης, το οποίο εμπλέκει εκτός από τα ψηφιακά εργαλεία και τη συνεργατική μάθηση στην εκπαιδευτική διαδικασία.

2. Η ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ

Σύμφωνα με την παραπάνω κατεύθυνση, σχεδιάστηκε η ιστοσελίδα **creativemathpathways.sch.gr** (Δημιουργικά Μαθηματικά), στα τέλη Οκτωβρίου 2013 από ομάδα σχολικών συμβούλων και εκπαιδευτικών προσχολικής, πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης του Ηρακλείου, όπως αναφέρονται στον άνωθεν τίτλο. Η ιστοσελίδα χρησιμοποίησε την πλατφόρμα του Σχολικού Δικτύου, το οποίο παρείχε το όνομα του ιστότοπου και παράλληλα αποτελεί το επίσημο εκπαιδευτικό ενδοδίκτυο για τα σχολεία της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ελλάδα, διασυνδέοντας σχολεία και εκπαιδευτικούς.

Ο γενικότερος σκοπός της ιστοσελίδας είναι η υποστήριξη των παιδιών από τις μικρές ηλικίες εκπαίδευσης κατά την ενασχόληση τους με τα Μαθηματικά, σύμφωνα με τα Νέα Προγράμματα Σπουδών (ΝΠΣ), μέσα από δημιουργικούς τρόπους και με έμφαση στις νέες τεχνολογίες (ΤΠΕ), η καλλιέργεια εξαρχής θετικών στάσεων στην κατεύθυνση της πρόληψης ως προς την αποτυχία και το φόβο των Μαθηματικών, η δημιουργία μέσα από ανταλλαγές και σύνθεση ποικίλων εκπαιδευτικών και επιστημονικών δράσεων μιας διαδικτυακής κοινότητας προβληματισμού, μάθησης και ψυχαγωγίας στο χώρο των Μαθηματικών.

Το περιεχόμενο της, που συνίσταται σε πρωτότυπο υλικό Μαθηματικών, απευθύνεται σε παιδιά 4-8 ετών. Η επιλογή του εύρους ηλικίας έγινε σύμφωνα με το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών, το οποίο αναπτύσσεται με καινοτόμο εξελικτική οργάνωση σε *Τροχιές Μάθησης και Διδασκαλίας*, σε 3 ηλικιακούς κύκλους κατά την υποχρεωτική εκπαίδευση, από τους οποίους ο πρώτος κύκλος είναι 5-8 ετών. (Τζεκάκη, 2010, 2011, ΝΠΣ, 2011). Το μαθηματικό περιεχόμενο έχει κατασκευαστεί στο μεγαλύτερο μέρος του στη σχολική τάξη από μαθητές νηπιαγωγείων και δημοτικών σχολείων σε συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς και με τους αντίστοιχους Σχολικούς Συμβούλους στην κατεύθυνση συνεργατικών κονστρουκτιβιστικών μαθησιακών διαδικασιών ή ακόμα και με την υποστήριξη ερευνητικών και επιμορφωτικών δράσεων των τελευταίων (Δεληκανάκη, 2012). Ένα μεγάλο μέρος του μπορεί να χαρακτηριστεί ως *μεταγνωστική δημιουργία* των μαθητών στο πεδίο των Μαθηματικών, αφού έχει προκύψει από κατασκευαστικές και αναστοχαστικές διαδικασίες και μπορεί ως τέτοιο να αποτελέσει πεδίο ερευνών, όπως υπάρχει σχετικό ενδιαφέρον (Τζεκάκη, & Παπαδοπούλου, 2009, Δεληκανάκη, 2009). Ακόμα, στην ιστοσελίδα περιλαμβάνεται επιλεγμένο υλικό εκπαιδευτικών (γρίφοι, κόμικς), οι οποίοι το έχουν διαθέσει πρωτότυπο στην ιστοσελίδα.

Στις προϋποθέσεις θεωρητικής ανάπτυξης της ιστοσελίδας ελήφθησαν υπόψη οι άξονες της εποικοδομητικής, διερευνητικής, συνεργατικής και διαφοροποιημένης μάθησης, της διαδραστικής αλληλεπίδρασης με το χρήστη των ΤΠΕ, της διαθεματικής σύνδεσης με άλλα γνωστικά αντικείμενα. Το περιεχόμενο παρουσιάζεται με ποικίλες δημιουργικές μορφές (Κουλαϊδής, 2007), έτσι ώστε να είναι φιλικό και ελκυστικό στη χρήση του από τα παιδιά, να εξάπτει τη φαντασία τους, να προσφέρει διαθεματικές συνδέσεις των Μαθηματικών (Τζεκάκη, Οικονόμου, Καλδρυμίδου, Τρέσσου, Λεμονίδης, 2005,) με άλλες περιοχές γνώσης, π.χ. γλώσσα-λογοτεχνία και Μαθηματικά (Παπανδρέου, 2005, Κολέζα, 2007, Χασάπης, 2007,), ζωγραφική-τέχνες και μαθηματικά (Λεμονίδης, 2007) κλπ., να υποστηρίζει, σύμφωνα με τις απόψεις για τη διαφοροποίηση των διδακτικών παρεμβάσεων, τις διαφορετικές ανάγκες μάθησης των παιδιών, ειδικότερα αυτών που αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Αγαλιώτης, 2000, Περικλειδάκης, 2006, Δεληκανάκη, 2008), να δίνει κίνητρα σε παιδιά μέσα από το παιχνίδι για ενασχόληση με τα Μαθηματικά, να συνδέει δυναμικά τα Μαθηματικά με τις ΤΠΕ, όπως συνεχώς διερευνάται η χρήση τους (Κόμης & Παπαδημητρίου 2003, Ζαράνης & Οικονομίδης, 2008, Kalogiannakis, 2008, EAITY, 2010, CRDP, 2011). Ορισμένες κατηγορίες και αρχεία παρουσιάζονται σε δίγλωσση μορφή, στα ελληνικά και αγγλικά, στο πλαίσιο διάχυσης του περιεχομένου της ιστοσελίδας στη διεθνή εκπαιδευτική κοινότητα διαμέσου του διαδικτύου, ενώ ένα σημαντικό μέρος των αρχείων μπορούν να γίνονται κατανοητά, ως παγκόσμια γλώσσα συμβόλων στο πεδίο των Μαθηματικών.

Περιλαμβάνονται προς το παρόν 6 κατηγορίες περιεχομένου με τα εξής αρχεία και αντίστοιχες επισκέψεις (Ε) σε διάστημα 2 μηνών περίπου: α)Μαθηματικά παραμύθια (Ε:1276): 12 παραμύθια, από τα οποία 8 αναφέρονται στα *Γεωμετρικά Σχήματα*, 3 στον *Αριθμό* και 1 σε σύνθετες έννοιες *Χώρου/Αριθμού,* β)Ταινίες animation (Ε:1339): 18 ταινίες, από τις οποίες 7 για *Γεωμετρικά Σχήματα*, 8 για *Αριθμό* και 3 για *Κανονικότητες*, γ)Παζλ διαδραστικά (770): 15 (πεδίο *Χώρος)*, δ)Βάλε στη σωστή σειρά (εκτυπώσιμα αρχεία με προοπτική να αλλάξουν σε διαδραστικής μορφής) (Ε:552): 4 αρχεία, ε)Προσωπικότητες Μαθηματικών (Ε:400): 6, στ)Γρίφοι, χιούμορ (Ε:543): 9 αρχεία, από τα οποία 6 για *Αριθμό*, 2 για *Χώρο* και 1 *γρίφος λογικής*.

Το μαθηματικό περιεχόμενο της ιστοσελίδας ελέγχεται ως προς την εγκυρότητα του σε σχέση με τα διεθνή ερευνητικά δεδομένα στο πεδίο των Μαθηματικών (π.χ. NCTM, 2000, Ofsted, 2002, NAEYC, 2004, Clements & Sarama, 2004, Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005) και ως προς τη συμβατότητα με τα ΠΣ Μαθηματικών της χώρας μας (ΝΠΣ, 2011) από τους Σχολικούς Συμβούλους Δημοτικής Εκπαίδευσης και Προσχολικής Αγωγής Γεώργιο Περικλειδάκη και Νίκη Δεληκανάκη αντίστοιχα, καθώς και για την καταλληλότητα του με ποιοτικά κριτήρια από όλα τα μέλη της ομάδας. Μπορεί μάλιστα να αξιοποιείται ανάλογα: α)από τους εκπαιδευτικούς στη σχολική τάξη του νηπιαγωγείου και του δημοτικού σχολείου σε όφελος της εκπαιδευτικής διαδικασίας ως προς τα Μαθηματικά και της σύνδεσης τους με τις νέες τεχνολογίες (ΤΠΕ), β) από τους γονείς σε όφελος των παιδιών τους, ως ευκαιρία δημιουργικής-μαθησιακής ενασχόλησης στο σπίτι, αφού είναι εύκολη και ασφαλής η πρόσβαση, γ)η ιστοσελίδα είναι ανοιχτή σε συνεργασίες με πανεπιστημιακά τμήματα, σχολεία της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και εκπαιδευτικούς (προσχολικής, δημοτικού), ερευνητές, έτσι ώστε να επιδιωχθεί να δημιουργηθεί μια μεγάλη διαδικτυακή κοινότητα προβληματισμού, μάθησης και ψυχαγωγίας στο χώρο των Μαθηματικών.

3. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

3.1. Έρευνα δράσης: Μαθηματικά παραμύθια

Κατά το διάστημα Φεβρουαρίου-Μαΐου 2012 υλοποιήθηκε από την ομιλήτρια έρευνα δράσης σε 11 προσχολικές τάξεις του Ηρακλείου, με συμμετοχή 14 εκπαιδευτικών (Δεληκανάκη, 2012). Σκοπός ήταν να διερευνηθούν: α)η υποστήριξη στόχων του ΝΠΣ των Μαθηματικών στα *Γεωμετρικά Σχήματα* και *Αριθμό*, μέσα από έργα *μαθηματικής λογοτεχνίας* (Μηλιώνης, 2001), β)η υποστήριξη της κριτικής, δημιουργικής και μεταγνωστικής σκέψης των παιδιών διαμέσου κατασκευής αυθεντικών μαθηματικών ιστοριών, με το συντονισμό των εκπαιδευτικών.

Η έρευνα συμπεριέλαβε δυο παράλληλες εφαρμογές, η μια αφορούσε πλαίσιο επιμορφωτικών δράσεων προς τους εκπαιδευτικούς με περιεχόμενα από το ΝΠΣ Μαθηματικών και η άλλη διδακτική παρέμβαση από εκείνους στις προσχολικές τάξεις. Καθ' έκαστη επιμορφωτική συνάντηση (1 ανά μήνα), γινόταν επεξεργασία ενός θεωρητικού μέρους, μετέπειτα οι εκπαιδευτικοί εφάρμοζαν στις τάξεις τους αντίστοιχους εκπαιδευτικούς σχεδιασμούς, ενώ κατά την επόμενη συνάντηση παρουσίαζαν προς συζήτηση (εννοιολογική αποσαφήνιση, δυσκολίες) τις υλοποιημένες δράσεις. Για το σχεδιασμό δραστηριοτήτων: α)εννοιών γεωμετρίας (χαρακτηριστικά, ιδιότητες, ανάλυση/σύνθεση, ταξινόμηση γεωμετρικών επίπεδων/στερεών σχημάτων) αξιοποιήθηκαν τα έργα μαθηματικής λογοτεχνίας *Η Οικογένεια Τρίγωνου*, της Σ. Ζαραμπούκα και *Περιπέτεια στο Μουσείο Σχηματοτέχνης*, της Ν. Δεληκανάκη, β)αριθμητικών πράξεων πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού αξιοποιήθηκαν τα *Άρης ο τσαγκάρης* του Ε. Τριβιζά και *Ο λύκος, η κατσίκα και τα 7 κατσικάκια*, του G. de Pennart.

Ο σχεδιασμός και η υλοποίηση των μαθηματικών δραστηριοτήτων στις προσχολικές τάξεις συμπεριέλαβε τους κοινούς άξονες διδακτικής μεθοδολογίας των Μαθηματικών για Νηπ/γείο και Α΄ Δημοτικού (ΔΕΠΠΣ, 2003, Τύπας, 2005, Λεμονίδης & συν., 2006): α)λαμβάνονται υπόψη οι προηγούμενες γνώσεις, β)επιδιώκεται η διαθεματική προσέγγιση της γνώσης, γ)ενθαρρύνεται η βιωματική μάθηση στην κατεύθυνση του εποικοδομητισμού, δ)ενθαρρύνεται κλίμα επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης σε μικρές ομάδες, ε)χρησιμοποιείται το παιχνίδι ως σημαντικός τρόπος μάθησης, στ)υποστηρίζεται η προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων, ζ)επιδιώκεται η χρήση τεχνολογίας, η)η αξιολόγηση της εκπαιδευτικής διαδικασίας είναι αρχική, διαμορφωτική και τελική, θ)επιδιώκεται συμμετοχή γονέων στη μαθησιακή διαδικασία, ι)αξιοποιούνται ποικίλοι τρόποι αναπαράστασης, πραξιακή, εικονιστική, συμβολική αναπαράσταση.

Στη συνέχεια, ως αναστοχαστική διαδικασία των νέων συγκροτημένων μαθηματικών γνώσεων, επιδιώχθηκε η κατασκευή *μαθηματικών παραμυθιών* από τα παιδιά με το συντονισμό εκπαιδευτικών, ενώ τέθηκαν *κριτήρια, όπως*: να κινητοποιούν τη διερευνητική μάθηση και την κριτική σκέψη παρουσιάζοντας μαθηματικές γνώσεις σε μυθοπλαστικό περιεχόμενο με επίλυση προβλήματος, να αξιοποιούν τη διαθεματικότητα και τη δημιουργική σκέψη, επίσης άλλες καινοτόμες διαστάσεις, πχ. ΤΠΕ, χειραπτικό υλικό, να ενσωματώνουν αρχές διαφοροποιημένης διδασκαλίας, να προάγουν διαδικασίες αυθεντικής εναλλακτικής αξιολόγησης, να καλλιεργούν μεταγνωστικές ικανότητες. Κατασκευάστηκαν 15 *μαθηματικά παραμύθια*, 12 αναφερόμενα στα γεωμετρικά σχήματα και 3 στον αριθμό, από τα οποία 9 είναι αναρτημένα στην ιστοσελίδα και 1 υπό ανάρτηση.

Το υλικό αυτό αναλύθηκε και παρουσιάζεται παρακάτω συνοπτικά:

1.Σε όλα που αναφέρονται στη γεωμετρία, αναδεικνύεται η διαπραγμάτευση μαθηματικών εννοιών σχετικά με χαρακτηριστικά και ιδιότητες επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων, ενώ έννοιες σχετικές με ανάλυση/σύνθεση περιέχονται σε 5 από αυτά και ταξινόμησης γεωμετρικών επίπεδων και στερεών σχημάτων σε 4.

2.Σε εκείνα που αναφέρονται στον αριθμό αναδεικνύεται η διαπραγμάτευση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών σχετικά με απαρίθμηση και αριθμητικές πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

3.Αναδείχθηκε η χρήση στρατηγικών κριτικής σκέψης: όλα τα παραμύθια σχεδιάστηκαν και κατασκευάστηκαν (επιλογή ηρώων, συγγραφή σεναρίου, εικονογράφηση) ως μια σύνθετη διαδικασία επίλυσης προβλήματος, την οποία ανατροφοδοτούσαν ερωτήματα των παιδιών και του εκπαιδευτικού (*ποια η δομή της ιστορίας, ποιοι οι ήρωες, πότε, που, ποιο το πρόβλημα, πώς θα χρησιμεύσουν οι νέες μαθηματικές έννοιες για την επίλυση, πώς θα φαίνονται ίδια τα σχήματα, πώς θα φτιάξουμε το γαμπρό-ρόμβο να φαίνεται πιο μεγάλος από τη νύφη-τρίγωνο; κλπ).* Ως έναυσμα, εφευρέθηκαν είτε κρίσιμα προβλήματα για τους ήρωες, είτε γεγονότα ή καταστάσεις που κινητοποίησαν ή οδήγησαν σε σύντομη ή μεγαλύτερη περιπέτεια, όπου ενεπλάκησαν οι νέες μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες.

4.Υποστηρίχθηκε η χρήση στρατηγικών δημιουργικής σκέψης, αφού επετεύχθη η σύνδεση της Γλώσσας με τα Μαθηματικά, διαμέσου της συγγραφής νέων μαθηματικών πρωτότυπων ιστοριών.

5.Υποστηρίχθηκε η χρήση στρατηγικών μεταγνωστικής σκέψης, με τη γνωστική διεργασία γενίκευσης και εφαρμογής των νέων συγκροτημένων μαθηματικών γνώσεων σε λεκτική διατύπωση με νόημα.

6.Τα λάθη που εντοπίστηκαν κατά τη διάρκεια της κατασκευής των παραμυθιών, αναδεικνύουν σημαντική πληροφόρηση για τις μαθηματικές γνώσεις, δεξιότητες αλλά και δυσκολίες παιδιών και εκπαιδευτικών, όπως: λάθη/δυσκολίες ταξινόμησης και αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων (πχ, τετράγωνο υπό περιστροφή, πώς προσδιορίζεται ο ρόμβος), λάθη σε σχέση με αποσαφήνιση εννοιών, λάθη σε σχέση με σχεδίαση σχημάτων ως προς τη διατήρηση των χαρακτηριστικών τους. Αδυναμία της έρευνας αποτελεί ότι δεν διακρίνεται αν είναι λάθη παιδιών ή εκπαιδευτικών ή και των δυο μαζί.

7.Σύμφωνα με την εκτίμηση των εκπαιδευτικών οι μαθηματικές ιστορίες α)ενθουσίασαν τα παιδιά καλλιεργώντας θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά, β)διευκόλυναν την κατανόηση των Μαθηματικών, τα παιδιά έφτιαξαν «δικά τους Μαθηματικά», ως

εφαρμογή της νέας γνώσης, γ)έδωσαν ανατροφοδότηση ως προς τις δυσκολίες της αντίστοιχης μάθησης.

8.Η έρευνα δράσης, μέσα από την αλληλεπίδραση και τον αναστοχασμό των εκπαιδευτικών, συνετέλεσε σε αποσαφήνιση μαθηματικών εννοιών, αναθεώρηση λανθασμένων πρακτικών, επαναπροσδιορισμό μεθοδολογικών προσεγγίσεων διδακτικής των Μαθηματικών, ενώ οι ίδιοι δήλωσαν πώς αναθεώρησαν τη στάση τους προς τα Μαθηματικά.

3.2. Ερευνητικά δεδομένα: Ταινίες animation μαθηματικού περιεχομένου

Animation είναι η κατασκευή ταινίας κινουμένων σχεδίων, διαμέσου της φωτογράφησης διαδοχικών θέσεων μοντέλων σε πλαίσιο σεναρίου (storyboard) και της εισαγωγής αυτών σε λογισμικό μοντάζ. Έτσι, άψυχα στοιχεία μπορεί να ζωντανεύουν και να κινούνται, σύμφωνα με τις ιδέες και τα νοήματα των δημιουργών, ανατρέποντας τη γνωστή πραγματικότητα. Ανήκει στο πλαίσιο του διευρυμένου γραμματισμού και στους νέους τρόπους επικοινωνίας με σύγχρονα τεχνολογικά μέσα, χαρακτηρίζεται από πολυτροπικότητα, ενώ ως καλλιτεχνικό μέσο οπτικο-ακουστικής έκφρασης διεγείρει τα συναισθήματα και τη φαντασία (Σιάκας, 2008, Κουλούρη, 2010). Η μεθοδολογία αξιοποιεί τη γλώσσα (σχεδιασμός σεναρίου), τα μαθηματικά (επίλυση προβλήματος, έννοιες χρονικής διάρκειας/διαδοχής), τις φυσικές επιστήμες (κινούμενες εικόνες), τις ΤΠΕ.

Οι 18 ταινίες μαθηματικού περιεχομένου της ιστοσελίδας έχουν κατασκευαστεί σε 14 τάξεις νηπιαγωγείου και 1 σε Α΄ τάξη δημ. σχολείου κατά το παρόν σχολικό έτος. 16 νηπιαγωγοί, που είχαν επιμορφωθεί στη μεθοδολογία animation και είχαν κατασκευάσει ταινίες κατά το περασμένο σχολικό έτος, απάντησαν σε ερωτηματολόγια, με τα εξής αποτελέσματα:

1.Οι νηπιαγωγοί ανήκουν στη νεώτερη γενιά εκπαιδευτικών, οι 15 έχουν από 4-15 έτη υπηρεσίας, ενώ μια μόνο έχει 22 έτη.

2.Στην πλειοψηφία τους δηλώνουν ότι είναι καλά εξοικειωμένες με τον Η/Υ, 75% δηλώνουν καλή χρήση, 25% μέτρια χρήση, ενώ διαθέτουν πιστοποίηση στις ΤΠΕ κατά 75%. Πιστεύουν ότι τα μέσα τεχνολογίας υποστηρίζουν πάρα πολύ την εκπαιδευτική διαδικασία (75% πάρα πολύ, 25% πολύ). Σε 12 νηπιαγωγεία έχουν τοποθετήσει τον Η/Υ στην τάξη και σε 2 άλλα βρίσκεται στο γραφείο. Σε όλες τις τάξεις έχουν έτσι διαμορφώσει το μαθησιακό περιβάλλον, ώστε να προάγει τα Μαθηματικά.

3.Με τη διαδικασία κατασκευής των ταινιών ενεπλάκησαν σε σημαντικές μαθηματικές διαδικασίες: α)διαπραγμάτευσης μαθηματικών στόχων του ΝΠΣ Μαθηματικών

(ιδιότητες, χαρακτηριστικά, ταξινόμηση γεωμετρικών σχημάτων, απαρίθμηση, διαδοχή αριθμών, μετρήσεις, δημιουργία κανονικοτήτων κλπ), β)σύνδεσης των Μαθηματικών με τη γλώσσα ως προς τη μυθοπλασία σεναρίου με μαθηματικό περιεχόμενο, γ)κατασκευής χειραπτικού μαθηματικού υλικού (σχήματα, αριθμοί, σύμβολα) και χειρισμού αυτών, και τέλος ψηφιακού πρωτότυπου μαθηματικού υλικού.

4. Σε ποσοστό 50% των ταινιών (3 με μοτίβα, 6 με αριθμό) αξιοποιήθηκε η διαθεματική προσέγγιση (πχ, μοτίβο σημαίας κατά την 28^{η} Οκτώβρη, μετρήσεις δεινοσαύρων, απαρίθμηση φρούτων φθινοπώρου, κλπ), ενώ στο υπόλοιπο 50% δεν υπήρξε αντίστοιχη (7 με σχήματα, 2 με αριθμό).

5.Η εκπαιδευτική διαδικασία κατασκευής τους διευκόλυνε σύγχρονες μεθοδολογίες, όπως συνεργασία σε μικρές ομάδες παιδιών (το δηλώνει ποσοστό 75%), επίλυση προβλήματος, αναστοχασμός, αξιοποίηση πραξιακής, εικονιστικής, συμβολικής, ψηφιακής αναπαράστασης.

6. Τα παιδιά εξοικειώθηκαν με τις τεχνικές animation, έδειξαν περιέργεια για τη διαδικασία, έκπληξη, ενθουσιασμό και υπηρηφάνεια για το αποτέλεσμα (*καλά, δεν πιστεύω ότι το φτιάξαμε εμείς),* κατανόησαν τη σπουδαιότητα των τεχνολογικών μέσων, ενώ ενίσχυσαν σημαντικά τις μαθηματικές γνώσεις τους διασκεδάζοντας.

7.Καλλιεργήθηκε η δημιουργικότητα, με την κατασκευή αυθεντικού χειραπτικού και ψηφιακού μαθηματικού υλικού.

8.Καλλιεργήθηκε η μεταγνωστική σκέψη των παιδιών, αφού στις ταινίες αποτύπωσαν τις νέες μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες, ως σενάριο δικών τους πρωτότυπων ιδεών.

9.Στους γονείς δείχνει να φάνηκε πολύ ενδιαφέρουσα η κατασκευή ταινίας μαθηματικού περιεχομένου, όπως δηλώνουν οι εκπαιδευτικοί (87,5% πολύ ενδιαφέρουσα, 12,5% μετρίου ενδιαφέροντος), επίσης εξέφρασαν έκπληξη.

4. ΤΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΤΗΣ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑΣ

Τα εργαλεία Web 2.0 της ιστοσελίδας επιμελήθηκαν ο Ιωάννης Γαλανάκης, εκπαιδευτικός και Επιμορφωτής ΤΠΕ Β΄ Επιπέδου και ο Ελευθέριος Τζαγκαράκης, εκπαιδευτικός Πληροφορικής. Για την ιστοσελίδα χρησιμοποιήθηκε το **Joomla**, το οποίο είναι ένα ελεύθερο και ανοικτού κώδικα σύστημα διαχείρισης περιεχομένου και τα δεδομένα του αποθηκεύτηκαν σε βάση δεδομένων στο Σχολικό Δίκτυο.

Τα **Web 2.0 εργαλεία** που χρησιμοποιήθηκαν στην πρώτη φάση δημιουργίας της ιστοσελίδας είναι:

Δημιουργία online παζλ: στο www.jigsawplanet.com, έχουν δημιουργηθεί online παζλ με ζωγραφιές μαθητών σχολείων με διαφορετικό βαθμό δυσκολίας. Μπορεί να

αυξάνεται ή να μειώνεται ο αριθμός κομματιών, να περιστρέφονται (αυξάνοντας το βαθμό δυσκολίας), ενώ μπορούν να ενσωματώνονται σε άλλο ιστολόγιο ή ιστοσελίδα ή τέλος να διαμοιράζεται ο υπερσύνδεσμος σε άλλα μέσα.

Δημιουργία χρονογραμμής: με τη χρήση του web 2.0 εργαλείου http://www.tiki-toki.com/. Το Tiki-Toki επιτρέπει να δημιουργηθούν εντυπωσιακές, διαδραστικές χρονογραμμές. Είναι ιδανικό ως εργαλείο παρουσίασης με χρονολογική σειρά βιογραφιών μεγάλων Μαθηματικών που αναφέρονται στις τάξεις του Δημοτικού. Μπορεί να ενσωματωθεί video, φωτογραφίες, υπερσύνδεσμοι και κείμενο. Κάθε χρονογραμμή έχει το δικό της, μοναδικό URL και μπορεί να ενσωματωθεί σε άλλα ιστολόγια ή ιστοσελίδες. Η χρήση του γίνεται αποκλειστικά διαδικτυακά.

Η ιστοσελίδα είναι ελεύθερης πρόσβασης και ασφαλούς πλοήγησης από τα παιδιά, οι επιλογές πλοήγησης είναι τέτοιες ώστε διασφαλίζεται η παραμονή στην ιστοσελίδα, χωρίς να αναδύονται παράθυρα διαφημίσεων ή άλλων ακατάλληλων ιστοχώρων, π.χ. ενώ οι ταινίες είναι αναρτημένες στο youtube, έχει διασφαλιστεί μετά την προβολή τους, τα παιδιά να παραμένουν στην ιστοσελίδα και να μην ανοίγουν άλλα βίντεο του youtube.

5. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Τέλος, θεωρώντας την παρούσα εισαγωγική ερευνητική ανακοίνωση, αναφέρουμε ότι στο μέλλον θα υπάρξουν περισσότερα ερευνητικά δεδομένα που θα αφορούν τη χρήση της ιστοσελίδας καθώς και την αξιοποίηση της από τους εκπαιδευτικούς. Στους συνεργάτες της ιστοσελίδας, προς τους οποίους απευθύνονται ευχαριστίες, συμπεριλαμβάνονται όλοι οι ερευνητές, οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές των νηπιαγωγείων και δημοτικών σχολείων, οι οποίοι ενισχύουν τον επιστημονικό προβληματισμό στο χώρο, καλλιεργούν θετικές στάσεις για τα Μαθηματικά και διαμοιράζονται τις γνώσεις τους μέσα από την παγκόσμια κοινότητα μάθησης του διαδικτύου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αγαλιώτης, Ι. (2000). *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά*. Αθήνα: Ε.

Γράμματα.

CRDP. (2011). *50 Activite´s pour inte´grer les TICE a la maternelle*. SCEREN. Midi-Pyrenees: CRDP.

Clements, D. & Sarama, J. (2004). *Engaging Young Children in Mathematics*. N.J., London: Lawrence Erlbaum.

Δεληκανάκη, Ν. (2008). Πρώιμη ανίχνευση διαταραχών γνωστικής ανάπτυξης: η περίπτωση δυσκολιών λογικομαθηματικής σκέψης κατά την προσχολική ηλικία. Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Δεληκανάκη, Ν. (2009). Υποστήριξη μαθηματικών και μεταγνωστικών δεξιοτήτων νηπίων με μέθοδο επίλυσης προβλήματος: -Αγαπητέ Άγιε Βασίλη για να φτιάξεις ένα κουτί-κύβο… Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ *Μαθηματική Εκπαίδευση και οικογενειακές πρακτικές*, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος, σ.229-236.

Δεληκανάκη, Ν. (2010). Μαθηματικά και Λογοτεχνία: κατανόηση εννοιών πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού μέσα από την επίλυση προβλημάτων εντός πλαισίου έργων παιδικής λογοτεχνίας. Πρακτικά 7ου Συνεδρίου ΠΕΕ, Ρέθυμνο.

Δεληκανάκη, Ν. (2012). Μαθηματικά και Λογοτεχνία: μια εναλλακτική διδακτική προσέγγιση σε νέα μονοπάτια. *Σύγχρονο Νηπιαγωγείο*, 90, σ.104-110.

ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, ΦΕΚ τεύχος Β΄ 303 /13-3-2003, 304/13-3-2003.

Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών. (2010). Επιμορφωτικό υλικό για την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών στα ΚΣΕ: *Αξιοποίηση και Εφαρμογή των ΤΠΕ στη διδακτική πράξη. Τόμ.* 1, Γενικό μέρος. (1η εκδ.). Πάτρα: ΕΑΙΤΥ.

Ζαράνης, Ν. & Οικονομίδης, Β. (2008). *Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών στην Προσχολική Εκπαίδευση. Θεωρητική επισκόπηση και εμπειρική διερεύνηση*. Αθήνα: Γρηγόρης.

Kalogiannakis, M. (2008). From Learning to Use ICT to Use ICT for Learning: Technological Capabilities and Pedagogical Principles, In R. Kobayashi (ed.) *New Educational Technology*, 13-42, New York: Nova Publishers.

Κολέζα, Ε. (2007). Τα Μαθηματικά μέσα από τον καθρέφτη της Λογοτεχνίας: ένα ταξίδι στη χώρα των θαυμάτων, *Πρακτικά 6ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών,* Θεσσαλονίκη.

Κόμης, Β. και Παπαδημητρίου, Ι. (2003). Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά εκπαιδευτικών λογισμικών για την προσχολική ηλικία: μελέτη ενδεικτικών εφαρμογών. 2ο Συνέδριο *Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση*. Σύρος.

Κουλαϊδής Βασίλης (επιμ.). (2007). Σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις για την ανάπτυξη της Κριτικής - Δημιουργικής Σκέψης. Για Α/θμια Εκπ/ση. Αθήνα: ΟΕΠΕΚ.

Κουλούρη, Π. (2010). *Το animation σε τάξεις των μικρών παιδιών*. Αθήνα: Παπαδόπουλος.

Λεμονίδης, Θεοδώρου, Καψάλης, Πνευματικός. (2006). Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού, Μαθηματικά της φύσης και της ζωής, βιβλίο δασκάλου. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Λεμονίδης, Χ. **(**2007). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής – Β΄ Δημοτικού- βιβλίο δασκάλου,* Αθήνα, Ελ. Γράμματα.

Μηλιώνης, Χ. (2001). Μαθηματική Λογοτεχνία: ένα εργαλείο για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, *18ο Παν/νιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας,* σ.586-596, Ρόδος. Ανασύρθηκε από την Ελληνική ψηφιακή μαθηματική βιβλιοθήκη http://karydis.ionio.gr/hdml.gr/el/

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Standards for Grades Pr-K-2. Reston, VA: Author.

NAEYC (2004). Guidelines for Appropriate Curriculum Content and Assessment in Programs Serving Children Ages 3 Through 8.

Νέα Προγράμματα Σπουδών. (ανασύρθηκε το Σεπτέμβ. 2011). http://digitalschool.minedu.gov.gr

Ofsted: *National Numeracy Strategy: the first three years 1999-2002*. www.Ofsted.gov.uk

Παπανδρέου, Μ. (2005). Η νοηματοδότηση των μαθηματικών δραστηριοτήτων στο νηπιαγωγείο μέσα από τη λογοτεχνία. *Η Διαθεματική προσέγγιση της διδασκαλίας και της μάθησης στην προσχολική και την πρώτη σχολική ηλικία*, πρακτικά συνεδρίου Αθήνα, Ελ. Γράμματα.

Περικλειδάκης, Γ. (2006). Η διδασκαλία των απλών πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης σε μαθητές δημοτικού με μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά, Επιστήμες της Αγωγής, 1/2006, 99-111.

Τζεκάκη, Οικονόμου, Καλδρυμίδου, Τρέσσου, Λεμονίδης (2005). Ομάδα εργασίας: Τα Μαθηματικά στη διαθεματική προσέγγιση. Στο *Η Διαθεματική προσέγγιση της διδασκαλίας και της μάθησης στην προσχολική και την πρώτη σχολική ηλικία*, πρακτικά συνεδρίου Θεσσαλονίκη, 30/5-1/6/2003. Αθήνα: Ελ. Γράμματα.

Τζεκάκη, Μ. & Παπαδοπούλου, Δ. (2009). Αναστοχαστικός συλλογισμός στην Προσχολική Ηλικία. Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ *Μαθηματική Εκπαίδευση και οικογενειακές πρακτικές*, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος, σ.219-228.

Τζεκάκη, Μ. (2010). Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία: Αλλάζοντας την τάξη των Μαθηματικών. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματικά για την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Επιμόρφωση Εκπαιδευτών Εκπαιδευτικών. Αθήνα.

Σιάκας, Σ. (2008). *Μεθοδολογία δημιουργίας παραδοσιακού τρισδιάστατου animation με κούκλες.* Αθήνα: Νεανικό Πλάνο.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 37 (4), 287-307.

Χασάπης, Δ. (2007). Μαθηματικά και Λογοτεχνία: Μια αιτούμενη σχέση, *Πρακτικά 6ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών,* Θεσσαλονίκη, 3-14.

Kalogiannakis, M. (2008). From Learning to Use ICT to Use ICT for Learning: Technological Capabilities and Pedagogical Principles, In R. Koboyashi (ed.), *New Educational Technology*, 13-42, New York: Nova Publishers.

Κουλαϊδής, Β. (επιμ.) (2007). *Σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις για την ανάπτυξη της Κριτικής – Δημιουργικής σκέψης. Για την Α/θμια Εκπαίδευση.* Αθήνα: ΟΕΠΕΚ.

http://web20erc.eu/sites/default/files/Pedagogy2.0-GR.pdf Η Παιδαγωγική του Ιστού 2.0 (Web 2.0)

http://digilib.lib.unipi.gr/dspace/bitstream/unipi/3094/1/Tzortzakis.pdf Αξιοποίηση Web 2.0 εργαλείων στη σχολική εκπαίδευση.

https://www.academia.edu/1889905/_Web_2.0_ Η χρήση του Web 2.0 για τη διεξαγωγή μαθήματος Διδακτικής της Πληροφορικής και των ΤΠΕ.

ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗ Β΄ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΤΙΣ ΤΠΕ: ΔΑΣΚΑΛΟΙ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κλιάπης Πέτρος, Κασσώτη Όλγα
Σχολικός Σύμβουλος Π.Ε., Διευθύντρια 2ου Δ.Σ. Τριανδρίας
kliapis@sch.gr, kassoti@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το υψηλό επίπεδο διείσδυσης της τεχνολογίας στην εκπαιδευτική διαδικασία, αποτελεί πρόκληση για την εκπαίδευση των υποψηφίων και την επιμόρφωση των εν ενεργεία εκπαιδευτικών αναφορικά με την ικανότητά τους να αξιοποιήσουν παραγωγικά αυτή την τεχνολογία στο μάθημά τους. Η παρούσα έρευνα διερευνά την αποτελεσματικότητα της επιμόρφωσης Β΄ επιπέδου (96 ωρών) στη βελτίωση της ικανότητας των δασκάλων να ενσωματώσουν τεχνολογικά εργαλεία στη διδασκαλία των μαθηματικών στην τάξη τους. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η επιμόρφωση δεν άλλαξε τη στάση τους στη διδασκαλία των μαθηματικών, αλλά βελτίωσε τη γενικότερη άνεσή τους στη χρήση ΤΠΕ στο μάθημα, άρα και στο μάθημα των μαθηματικών.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αυξανόμενη ένταξη των Τεχνολογιών διαχείρισης της Πληροφορίας και Επικοινωνιών (ΤΠΕ) στο σχολείο, έχει σε γενικές γραμμές αυξήσει την αντίληψη των εκπαιδευτικών ότι ο ΗΥ ως το κύριο εργαλείο των ΤΠΕ μπορεί να γίνει ένα παραγωγικό εργαλείο για την αλλαγή της μεθοδολογίας της εκπαιδευτικής διαδικασίας στη σχολική τάξη και ένα μέσο για την αλλαγή του μαθησιακού περιβάλλοντος, με ανάλογη απαίτηση για αύξηση της επιμόρφωσης για την αξιοποίησή τους.

Ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι οι ΗΥ, όταν χρησιμοποιηθούν κατάλληλα, μπορούν να εμπλουτίσουν την εκπαιδευτική διαδικασία στην τάξη και να βελτιώσουν σημαντικά την επίδοση των μαθητών. Ειδικότερα στη μαθηματική εκπαίδευση, η χρήση διαφορετικών μεθόδων, περιλαμβανομένης και της χρήσης τεχνολογικών εργαλείων, ώστε να κινητοποιηθούν οι μαθητές είναι πολύ σημαντική (MT21, 2007; Κλιάπης, 2011). Συγκεκριμένα, έχει βρεθεί ότι τα πλεονεκτήματα από τη χρήση λογισμικών και διαδικτυακών τεχνολογικών εργαλείων περιλαμβάνουν την ανάπτυξη υψηλών νοητικών λειτουργιών, δεξιοτήτων συλλογής και επεξεργασίας δεδομένων, ανάπτυξη και διατήρηση δεξιοτήτων και στρατηγικών επίλυσης προβλήματος, διευκόλυνσης της ανάπτυξης αλγεβρικής και γεωμετρικής σκέψης και κατανόησης ότι τα μαθηματικά αποτελούν εργαλείο σε πολλές επιστημονικές περιοχές (Kerrigan, 2002; Purcell, Heaps, Buchanan, & Friedrich, 2013).

Ωστόσο, η επιτυχής ενσωμάτωση της χρήσης των ΤΠΕ στο μάθημα, ως εργαλείο για την επίτευξη του μαθησιακού στόχου, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη στάση του

εκπαιδευτικού για τη μαθησιακή διαδικασία και τη χρήση της τεχνολογίας σε αυτή (Goos & Soury-Lavergne, 2010).

Η έρευνα αποκαλύπτει ότι η διαφοροποίηση της διδακτικής πρακτικής ώστε να περιλάβει το νέο μέσο είναι κάτι που δεν αποτελεί εύκολο στόχο για τους δασκάλους (Laborde, 2008). Εκτός από την εκμάθηση των ποικίλων δυνατοτήτων που προσφέρουν τα ψηφιακά εργαλεία στα μαθηματικά, οι εκπαιδευτικοί βρίσκονται αντιμέτωποι με την ανάγκη να επαναδιαπραγματευτούν τη διαχείριση της τάξης τους, τους ρόλους των εμπλεκομένων στην εκπαιδευτική διαδικασία, τις νέες μορφές αλληλεπίδρασης, να πάρουν έναν επιπλέον ρόλο που αφορά στο σχεδιασμό των δραστηριοτήτων και να προσαρμόσουν όλο το εκπαιδευτικό στυλ τους.

Στην ελληνική πραγματικότητα, ακόμη και σε σχολεία που διαθέτουν επαρκή εξοπλισμό, οι εκπαιδευτικοί δεν χρησιμοποιούν τον εξοπλισμό αυτόν, καθώς δεν διαθέτουν τις απαραίτητες γνώσεις (έχουν δαπανηθεί μεγάλα ποσά στα σχολεία με Ενιαίο Αναμορφωμένο Πρόγραμμα για την αγορά φωριαμού με 10 φορητούς ΗΥ χωρίς να έχει γίνει η απαραίτητη επιμόρφωση στη χρήση τους).

Όπως έχει καταγραφεί ερευνητικά, το ιδανικό πρόγραμμα επιμόρφωσης που θα εξασφάλιζε την βέλτιστη αξιοποίηση της τεχνολογίας στην εκπαίδευση, δεν έχει ακόμη βρεθεί (Drijvers, Kieran, & Mariotti, 2010). Τα περισσότερα προγράμματα επιμόρφωσης στη χρήση των ΗΥ είναι προσανατολισμένα προς την παροχή γνώσεων για τη χρήση όσο το δυνατόν περισσότερων λογισμικών, βασισμένα στην παραδοχή ότι οι επιμορφούμενοι ‘θα ξέρουν τι να κάνουν με αυτά’. Ωστόσο, το πρόγραμμα επιμόρφωσης Β΄ επιπέδου ήταν βασισμένο στην παραδοχή ότι θα πρέπει οι επιμορφούμενοι να εστιάσουν στη δική τους παιδαγωγική θεώρηση για τη μαθησιακή διαδικασία, ώστε να είναι σε θέση να επιλέξουν το κατάλληλο από την πληθώρα υπολογιστικών εργαλείων για την τάξη τους. Στην επίσημη ιστοσελίδα του προγράμματος (http://b-epipedo2.cti.gr/el-GR/) περιγράφεται «*η επιμόρφωση 27.500 εκπαιδευτικών στις αρχές παιδαγωγικής αξιοποίησης των ΤΠΕ, καθώς και στην απόκτηση δεξιοτήτων, κατά κλάδο εκπαιδευτικών, για την παιδαγωγική αξιοποίηση εκπαιδευτικού λογισμικού και εργαλείων γενικής χρήσης*» και αναφέρεται ανάμεσα στους στόχους «*η καλλιέργεια νέων στάσεων απέναντι στη διαδικασία της μάθησης*».

2. ΣΚΟΠΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Σε αυτή την έρευνα μελετάται η αλλαγή στάσης των δασκάλων οι οποίοι συμμετείχαν σε επιμορφωτικό πρόγραμμα (96 ωρών) για την παιδαγωγική αξιοποίηση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία αναφορικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών με τη χρήση τεχνολογικών εργαλείων και η άνεση με την οποία θα χρησιμοποιήσουν όσα έμαθαν στην επιμόρφωση. Εξετάζονται επίσης οι αντιλήψεις τους για τα μαθηματικά και ο αντίκτυπος των ανωτέρω στην προετοιμασία της διδασκαλίας τους και στις διδακτικές πρακτικές τους.

2.1. Ερευνητικά ερωτήματα

Ποιες είναι οι αντιλήψεις των δασκάλων μετά την επιμόρφωση για τις ΤΠΕ και τη χρήση τους στην εκπαιδευτική διαδικασία;

Ποιες είναι οι αντιλήψεις τους για τα Μαθηματικά και τη διδασκαλία τους;

Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις παραπάνω αντιλήψεις και τον τρόπο οργάνωσης της διδασκαλίας στην τάξη τους;

3. ΤΟ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ

Από τους ερευνητές κατασκευάστηκε ερωτηματολόγιο που περιείχε ερωτήσεις «κλειστού τύπου» διαβαθμισμένης επιλογής βασισμένες στα θέματα και τις θεματικές ενότητες του «χάρτη» των στάσεων και αντιλήψεων των δασκάλων για τις ΤΠΕ και τα Μαθηματικά, όπως προέκυψαν από τη μελέτη της βιβλιογραφίας. Το ερωτηματολόγιο χωρίζεται σε τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος περιλαμβάνονται ερωτήσεις σχετικές με τα δημογραφικά χαρακτηριστικά του πληθυσμού. Στο δεύτερο μέρος περιλαμβάνονται ερωτήσεις σχετικές με τις στάσεις των εκπαιδευτικών μετά την επιμόρφωση (διάρκειας 96 ωρών) για τη χρήση και αξιοποίηση των ΤΠΕ στην τάξη. Στο τρίτο μέρος οι ερωτήσεις αφορούν τις αντιλήψεις τους για τα Μαθηματικά και κυρίως τη σύνδεση των Μαθηματικών με τις ΤΠΕ στη διδακτική πράξη.

Το ερωτηματολόγιο εφαρμόστηκε πιλοτικά σε δείγμα 10 εκπαιδευτικών και επέτρεψε να διαπιστωθεί ότι: α) η αναγνωσιμότητά του ήταν σε πολύ καλό επίπεδο β) η συμπλήρωσή του έγινε πρόθυμα γ) ο απαιτούμενος χρόνος συμπλήρωσής του ήταν 5-10 λεπτά.

4. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΣΥΛΛΟΓΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Στην έρευνα συμμετείχαν 205 εκπαιδευτικοί από 20 τμήματα επιμόρφωσης κατά την τελευταία εβδομάδα της επιμόρφωσής τους (Νοέμβρης 2013). Ο σχεδιασμός και η προπαρασκευή της έρευνας έγιναν κατά το χρονικό διάστημα Σεπτέμβρη έως Νοέμβρη του 2013, ενώ η συμπλήρωση των ερωτηματολογίων έγινε on-line κατά τη διάρκεια της επιμόρφωσης καθώς το ερωτηματολόγιο ήταν αναρτημένο στο διαδίκτυο ως «διαδικτυακό έγγραφο της google» (google document) την εβδομάδα 18-22 Νοέμβρη 2013.

5. ΔΗΜΟΓΡΑΦΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Το δείγμα αποτελείται από 62 (30,2%) άνδρες και 143 (69,8%) γυναίκες. Σχετικά με την ηλικία, οι εκπαιδευτικοί 46-55 ετών αποτελούν την κυρίαρχη ομάδα (49,3%) με την ομάδα 36-45 ετών να ακολουθεί με 42,0% και την ομάδα 26 έως 35 ετών να καταγράφει ποσοστό 8,8%. Αξιοσημείωτο είναι ότι κανείς από τους συμμετέχοντες δεν ανήκε στην ηλικιακή ομάδα κάτω των 26 ούτε και άνω των 55 ετών.

Στα έτη υπηρεσίας των εκπαιδευτικών η κυρίαρχη ομάδα καταγράφεται στα 11 ως 15 έτη υπηρεσίας με ποσοστό 35,6%, με την ομάδα 16 ως 20 έτη να ακολουθεί με 27,3%, την ομάδα 21 ως 25 έτη με 18,5% ενώ περισσότερα από 24 έτη υπηρεσίας έχει το 12,7% και μέχρι 10 έτη το 5,9%.

Όσον αφορά τις τάξεις που οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν, ποσοστό 51,2% διδάσκει Γ΄ και Δ΄ 23,9% διδάσκει Α΄ και Β΄ ενώ ποσοστό 21,5% διδάσκει στην Ε΄ και Στ΄ τάξη.

5.1. Εξοπλισμός που διαθέτει το σχολείο και η τάξη τους

Τα σχολεία στα οποία οι εκπαιδευτικοί του δείγματος εργάζονται διαθέτουν εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών σε ποσοστό 82,5%, ενώ σε κατάσταση καλής λειτουργίας βρίσκεται το 76,5% από αυτά. Ωστόσο μόνο το 58,5% των εκπαιδευτικών έχει στη διάθεσή του το εργαστήριο όταν το χρειάζεται ενώ το 20,5% των υπόλοιπων εκπαιδευτικών δεν έχει πρόσβαση σε αυτό.

Οι τάξεις των εκπαιδευτικών σε ποσοστό 68,9% έχουν πρόσβαση στο διαδίκτυο και σε ποσοστό 75,6% διαθέτουν έναν ή περισσότερους υπολογιστές ενώ το 81,9% έχει βιντεο-προβολέα όποτε τον χρειάζεται με το 39,5% να έχει στην τάξη του μόνιμα εγκατεστημένο προβολέα.

6. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

Μετά τη συλλογή ακολούθησε στατιστική επεξεργασία των δεδομένων, με το πρόγραμμα SPSS η οποία περιέλαβε μελέτη συχνοτήτων και παραγοντική ανάλυση (factor analysis) του συνόλου των μεταβλητών, εξαιρούμενων των ονομαστικών (nominal). Στην παραγοντική ανάλυση, η οποία γίνεται με τη μέθοδο της περιστροφής (rotation) γίνονται δεκτοί παράγοντες με τιμή χαρακτηριστικής ρίζας (eigenvalue) μεγαλύτερη του 1,00, ενώ συμμετέχουν μεταβλητές με φορτίο μεγαλύτερο του 0,30.

6.1 Παραγοντική ανάλυση

Οι στάσεις των εκπαιδευτικών απέναντι στις ΤΠΕ και τα Μαθηματικά

Δείκτης KMO: (Kaiser-Meyer-Olkin) = 0,523

Από την παραγοντική ανάλυση μεταξύ των μεταβλητών προέκυψαν 6 παράγοντες, οι οποίοι ερμηνεύουν το 69,2% της συνολικής διακύμανσης (α 18,0%, β 11,5%, γ 11,1%, δ 10,6%, ε 9,5% και στ 8,4%).

Μεταβλητές	Παράγοντες					
	1	2	3	4	5	6
Χρόνια διδασκαλίας	**,341**	-,277	,048	**,579**	-,264	-,102
Αισθάνομαι πολύ άνετα όταν πρέπει να χρησιμοποιήσω υπολογιστή	**,803**	**-,320**	-,150	-,122	,090	,113
Έχω μεγάλη αυτοπεποίθηση όσον αφορά τη χρήση υπολογιστή	**,903**	-,064	-,024	,102	-,028	,028

Όταν αντιμετωπίζω κάποιο πρόβλημα στον υπολογιστή, καταφέρνω να το λύσω μόνος μου	**,829**	-,025	,003	,111	-,013	-,199
Πιστεύω ότι οι υπολογιστές είναι βαρετοί	-,175	,235	,074	**,582**	**-,315**	**,406**
Πολύ συχνά με τους υπολογιστές πηγαίνουν πάρα πολλά πράγματα λάθος	**-,321**	**,364**	-,017	-,070	-,131	**,544**
Πρέπει να είσαι νέος για να μάθεις να χρησιμοποιείς έναν υπολογιστή	-,036	-,278	-,201	-,009	**-,735**	,134
Μπορώ να κάνω πολύ δύσκολες εργασίες με έναν υπολογιστή	,074	-,092	-,018	**,832**	,299	-,067
Οι υπολογιστές δε με φοβίζουν καθόλου	**,695**	-,092	-,124	,295	**,393**	-,060
Πιστεύω ότι οι υπολογιστές είναι δυσνόητοι	**-,612**	-,164	-,001	-,138	**,347**	,234
Δεν είμαι καλός/ή με τους υπολογιστές	-,170	,052	,250	**-,614**	-,049	,145
Νομίζω ότι κάθε δάσκαλος μπορεί να χρησιμοποιήσει έναν υπολογιστή	,013	-,119	**-,334**	,077	**,745**	,157
Σε αντίθεση με τα περισσότερα μαθήματα, στα μαθηματικά τα πράγματα είναι πιο ξεκάθαρα. Κάτι ή θα είναι σωστό ή θα είναι λάθος.	,025	**,759**	**,310**	,016	,112	**,305**
Τα μαθηματικά αποτελούνται κυρίως από κανόνες, ορισμούς, τύπους και τεχνικές.	-,195	**,400**	**,648**	-,218	-,034	,154
Δε μπορούν όλοι οι άνθρωποι να τα καταφέρουν με τα μαθηματικά.	-,185	-,012	**,791**	,044	-,047	,117
Τα Μαθηματικά του σχολείου δίνουν ιδιαίτερη σημασία στην ακρίβεια και στην ορθότητα.	,004	,096	,009	-,105	,088	**,864**
Τα μαθηματικά προσφέρουν τρόπους σκέψης για την επίλυση προβλημάτων στην καθημερινή ζωή.	,170	**-,484**	**,326**	-,058	**-,350**	,037
Τα μαθηματικά είναι μία ανθρώπινη επινόηση.	,130	-,200	**,762**	-,102	-,034	-,237
Η μαθηματική αλήθεια δεν αμφισβητείται	-,105	**,817**	-,149	-,204	-,048	,100

Πίνακας 1: Οι παράγοντες με τις μεταβλητές και τα φορτία τους

Η ανάλυση των παραγόντων αποτυπώνει 6 παράγοντες, δηλαδή 6 διακριτές ομάδες στάσεων και αντιλήψεων των εκπαιδευτικών.

Ο πρώτος παράγοντας (πιν. 1 στήλη 1) εκφράζει μια τεχνολογικά θετική στάση των έμπειρων δασκάλων χωρίς να αποτυπώνει συγκεκριμένες στάσεις και αντιλήψεις για τα Μαθηματικά. Έτσι οι δάσκαλοι εκφράζουν άνεση και αυτοπεποίθηση στη χρήση υπολογιστή, δεν δυσκολεύονται να καταλάβουν ούτε φοβούνται τους υπολογιστές ενώ έχουν τη δυνατότητα να λύσουν προβλήματα που μπορεί να εμφανιστούν στον υπολογιστή.

Ο δεύτερος παράγοντας (πιν. 1 στήλη 2) εκφράζει μια αρνητική στάση των δασκάλων απέναντι στην τεχνολογία η οποία συνδυάζεται με μια φορμαλιστική αντίληψη για τα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα: οι δάσκαλοι δεν αισθάνονται πολύ άνετα όταν πρέπει να χρησιμοποιήσουν υπολογιστή και πιστεύουν πως πολύ συχνά με τους υπολογιστές πηγαίνουν πάρα πολλά πράγματα λάθος. Για τα Μαθηματικά πιστεύουν πως η μαθηματική αλήθεια δεν αμφισβητείται καθώς στα μαθηματικά τα

πράγματα είναι πιο ξεκάθαρα, κάτι ή θα είναι σωστό ή θα είναι λάθος. Η αντίληψή τους είναι πως τα Μαθηματικά αποτελούνται κυρίως από κανόνες, ορισμούς, τύπους και τεχνικές και δεν προσφέρουν τρόπους σκέψης για την επίλυση προβλημάτων στην καθημερινή ζωή.

Ο τρίτος παράγοντας (πιν. 1 στήλη 3) επίσης εκφράζει μια επιφυλακτική στάση απέναντι στην τεχνολογία και τα Μαθηματικά καθώς: Δεν μπορεί κάθε δάσκαλος να χρησιμοποιήσει έναν υπολογιστή, ούτε όλοι οι άνθρωποι να τα καταφέρουν με τα μαθηματικά. Επίσης αποτυπώνεται μια φορμαλιστική αντίληψη και μια χρηστική αντιμετώπιση των μαθηματικών καθώς στα Μαθηματικά κάτι ή θα είναι σωστό ή θα είναι λάθος, και παρά το ότι αποτελούνται κυρίως από κανόνες, ορισμούς, τύπους και τεχνικές και είναι μία ανθρώπινη επινόηση ωστόσο προσφέρουν τρόπους σκέψης για την επίλυση προβλημάτων στην καθημερινή ζωή.

Ο τέταρτος και ο πέμπτος παράγοντας (πιν. 1 στήλη 4&5) δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερο ερμηνευτικό ενδιαφέρον πέραν των επιφυλάξεων οι οποίες καταγράφονται από τους εκπαιδευτικούς στη χρήση του υπολογιστή ενώ δεν αποτυπώνονται ιδιαίτερες στάσεις για τα Μαθηματικά.

Ο έκτος παράγοντας (πιν. 1 στήλη 6) παρουσιάζει ιδιαίτερο ερμηνευτικό ενδιαφέρον καθώς αποτυπώνει τις αντιλήψεις για τους υπολογιστές ως βαρετούς με τους οποίους συχνά πηγαίνουν πάρα πολλά πράγματα λάθος ενώ στα Μαθηματικά τα πράγματα είναι πιο ξεκάθαρα. Κάτι ή θα είναι σωστό ή θα είναι λάθος. Για το λόγο αυτό τα Μαθηματικά του σχολείου δίνουν ιδιαίτερη σημασία στην ακρίβεια και στην ορθότητα.

7. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Βιβλιογραφικά, τρεις παράγοντες φαίνεται να επηρεάζουν την ένταξη των ψηφιακών τεχνολογιών στη διδασκαλία των μαθηματικών: (1) τα χαρακτηριστικά των εκπαιδευτικών (οι μαθηματικές και παιδαγωγικές γνώσεις τους, οι πεποιθήσεις και οι στάσεις τους, οι δεξιότητες και η άνεση στη χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών), (2) το θεσμικό πλαίσιο (η πρόσβαση σε διαθέσιμους πόρους, η διοικητική στήριξη και η ευελιξία του Προγράμματος Σπουδών), και (3) η επαγγελματική κατάρτιση και οι προοπτικές εξέλιξης (Goos & Soury-Lavergne, 2010). Οι παράγοντες αυτοί ανιχνεύονται από τα ευρήματα της παρούσας έρευνας και στους εκπαιδευτικούς του δείγματος.

Όπως φαίνεται, η έλλειψη εμπιστοσύνης των εκπαιδευτικών στις γνώσεις τους για τις νέες τεχνολογίες και στην ικανότητά τους να χειρισθούν ηλεκτρονικό υπολογιστή, τους οδηγούν σε επιφυλάξεις για την υιοθέτηση του νέου μέσου στην τάξη τους. Σχετικά με την εφαρμογή των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών, σημαντικός αποδεικνύεται ο ρόλος της διδακτικής κουλτούρας του εκπαιδευτικού, δηλαδή οι πρακτικές δράσης που αναπτύσσει ο εκπαιδευτικός με βάση τις πεποιθήσεις και τις αξίες του.

Προηγούμενες αντίστοιχες μελέτες, όπως αναφέρουν οι Hartsell κ.ά., σχετικά με τα αποτελέσματα εντατικών προγραμμάτων επιμόρφωσης στους εκπαιδευτικούς, καταλήγουν ότι η επιμόρφωση μπορεί να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να αναπτύξουν τις απαραίτητες δεξιότητες για να διδάξουν μαθηματικά στην τάξη. Με τη μάθηση διαφόρων λογισμικών, οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί αυξάνουν τις δεξιότητες τους ώστε να είναι σε θέση να ενσωματώσουν αποτελεσματικά τις ΤΠΕ. Επιπλέον, η εκμάθηση των ίδιων των λογισμικών συμβάλλει σε καλύτερη κατανόηση του πώς τα μαθηματικά μπορούν να διδαχθούν με διαφορετικούς τρόπους (Hartsell, Herron, Fang, & Rathod, 2009).

Ωστόσο στην παρούσα έρευνα καταγράφηκαν ασυμφωνίες με τα παραπάνω ευρήματα οι οποίες χρειάζονται περεταίρω διερεύνηση. Ένας από τους λόγους που υπάρχουν οι ασυμφωνίες αυτές θα μπορούσε να είναι ότι οι συμμετέχοντες μπορούν να δουν τις πιθανές χρήσεις της τεχνολογίας, κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, αλλά ότι η πραγματική εμπειρία στην τάξη μπορεί να τους αποθαρρύνει από τη χρήση της τεχνολογίας. Όπως καταγράφηκε στην έρευνα αυτή, οι εκπαιδευτικοί έχουν περιορισμένη δυνατότητα πρόσβασης στην τεχνολογία, δεν υπάρχει διαθέσιμη η τεχνολογία στην τάξη τους για όλους τους μαθητές ή μπορεί να μην υπάρχει τεχνική υποστήριξη στο σχολείο τους. Ένας άλλος λόγος θα μπορούσε να είναι το ότι οι εκπαιδευτικοί αμφισβητούν τις ικανότητες τους να διδάξουν μαθηματικά αποτελεσματικά έξω από τις παραδοσιακές μεθόδους χρησιμοποιώντας το βιβλίο και τον πίνακα.

Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε προκύπτουν οι εξής διαπιστώσεις:

Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα φαίνεται να έχουν πολύ συγκεκριμένες απόψεις σχετικά με την τεχνολογία τη χρήση της και τα Μαθηματικά.

Οι εκπαιδευτικοί με μεγάλη διδακτική εμπειρία, όπως καταγράφεται από τα έτη υπηρεσίας τους, είναι εξοικειωμένοι με τον ΗΥ και δεν αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη χρήση του. Η συμμετοχή τους στο πρόγραμμα επιμόρφωσης φαίνεται να επιβεβαίωσε την ικανότητα χρήσης του ΗΥ καθώς αισθάνονται άνετα με τη χρήση και εκφράζουν αυτοπεποίθηση ότι μπορούν να ελέγξουν το νέο μέσο. Ωστόσο οι διδακτικές πρακτικές που εφαρμόζουν στα μαθηματικά δεν φαίνεται να επηρεάζονται ούτε από τον ΗΥ ούτε και από τα εξειδικευμένα λογισμικά τα οποία έμαθαν να χρησιμοποιούν στο πρόγραμμα επιμόρφωσης (Cabri, Geogebra, Logo, Scratch κ.λπ).

Αντίθετα, ένα ποσοστό δασκάλων εμφανίζονται επιφυλακτικοί, με λιγότερη εμπιστοσύνη στον εαυτό τους όσον αφορά τη χρήση του ΗΥ καθώς αναγνωρίζουν τις δυσκολίες τους να αντιμετωπίσουν αποτελεσματικά τις όποιες δυσλειτουργίες του νέου μέσου. Οι εκπαιδευτικοί αυτοί αισθάνονται αδυναμία να ελέγξουν τον ΗΥ ενώ, αντίθετα, αισθάνονται πως έχουν τον έλεγχο της διδασκαλίας των μαθηματικών καθώς έχουν υιοθετήσει μια φορμαλιστική και τυποποιημένη αντίληψη για τα μαθηματικά προσφέροντας στους μαθητές «μαθηματικά – έτοιμο προϊόν». Έτσι η διδασκαλία των Μαθηματικών γίνεται διδάσκοντας κανόνες, τύπους και τεχνικές που

δεν αμφισβητούνται, με τελικό στόχο να γίνουν οι μαθητές τους ικανοί να σκέφτονται και να λύνουν προβλήματα στην καθημερινή τους ζωή.

Ακόμα, μέρος των εκπαιδευτικών ενστερνίζεται την αντίληψη πως οι άνθρωποι έχουν εγγενείς ικανότητες και αδυναμίες. Ατό αποτυπώνεται μέσω της πεποίθησης πως αφενός οι δάσκαλοι δεν τα καταφέρνουν στη χρήση του ΗΥ και, αφετέρου, κάποιοι άνθρωποι, δεν θα τα καταφέρουν με τα μαθηματικά. Η εδραιωμένη φορμαλιστική αντίληψη για τα μαθηματικά στην περίπτωση αυτών των εκπαιδευτικών, εκφράζεται με την απλή «εργαλειακή» χρήση των μαθηματικών τα οποία επινοήθηκαν από τον άνθρωπο, μπορούν να διδαχτούν ως εκμάθηση κανόνων και τεχνικών ώστε να λειτουργήσουν ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων της καθημερινής ζωής τα οποία προβλήματα επιδέχονται μια μόνο λύση.

Όλη η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι οι στάσεις και οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για την τεχνολογία είναι καθοριστικές στην απόφασή τους να υιοθετήσουν και να χρησιμοποιούν την τεχνολογία στην τάξη. Ενώ μέσα από μια εντατική επιμόρφωση είναι εφικτή η αλλαγή στάσης των εκπαιδευτικών σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα, η πραγματική εφαρμογή στις τάξεις είναι μια πιο χρονοβόρα διαδικασία, ιδίως όταν η εφαρμογή αφορά τη χρήση διαρκώς εξελισσόμενου τεχνολογικού εξοπλισμού και απευθύνεται στα παιδιά, τα οποία θεωρούνται πιο εξοικειωμένα από τους δασκάλους τους στα θέματα χρήσης της τεχνολογίας (Κλιάπης, 2010).

8. ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η έρευνα στηρίχθηκε σε μία πηγή – τα ερωτηματολόγια τα οποία συμπλήρωσαν οι επιμορφούμενοι εκπαιδευτικοί – από τα οποία άντλησε τις πληροφορίες. Είναι εύλογο ότι οι απαντήσεις των δασκάλων μπορεί να έχουν περιορισμένη αξιοπιστία. Το μέγεθος του δείγματος, αν και επαρκές για τις αναλύσεις, θα μπορούσε να είναι μεγαλύτερο, ενώ η δειγματοληψία να περιλαμβάνει άτομα όχι μόνο από τη συγκεκριμένη φάση επιμόρφωσης αλλά και από τις προηγούμενες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M.-A. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*. New York: Springer

Goos, M., & Soury-Lavergne, S. (2010). Teachers and Teaching: Theoretical Perspectives and Issues Concerning Classroom Implementation. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*. New York: Springer.

Hartsell, T., Herron, S., Fang, H., & Rathod, A. (2009). Effectiveness of professional development in teaching mathematics and technology applications. *Journal of Educational Technology Development and Exchange, 2*(1), 53-64.

Kerrigan, J. (2002). Powerful software to enhance the elementary school mathematics program. *Teaching Children Mathematics, 8*(6), 364-377.

Laborde, C. (2008). Technology as an instrument for teachers. Proceedings of Working Group 4: Resources and Technology Throughout the History of ICMI. Paper presented at the Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI, Rome, Italy. http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG4/Papers/LABORD.pdf.

MT21. (2007). MSU study finds that U.S. middle school math teachers are ill-prepared. East Lansing, Michigan: Michigan State University.

Purcell, K., Heaps, A., Buchanan, J., & Friedrich, L. (2013). How Teachers Are Using Technology at Home and in Their Classrooms. Washington: Pew Research Center.

Κλιάπης, Π. (2010). *Οι Νέες Τεχνολογίες στη Σχολική Βιβλιοθήκη*. Θεσσαλονίκη: University Studio Press.

Κλιάπης, Π. (2011). Η δημιουργία Τεχνολογικά Εμπλουτισμένου Μαθησιακού Περιβάλλοντος με υπέρβαση του σχολικού χώρου και εφαρμογή σε νέα διδακτική προσέγγιση των Μαθηματικών. Διδακτορική διατριβή, ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη.

ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΕΣ ΤΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΤΗΣ ΠΡΑΞΗΣ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ

Χαράλαμπος Λεμονίδης, Αναστασία Μουράτογλου
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
xlemon@uowm.gr, nantiamouratoglou@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός αυτής της έρευνας είναι να διερευνηθούν οι γνώσεις των Ελλήνων εκπαιδευτικών σχετικά με τη υπολογιστική εκτίμηση. Ογδόντα εν ενεργεία εκπαιδευτικοί αξιολογούνται είτε με προσωπικές συνεντεύξεις, είτε με τη συμπλήρωση ερωτηματολογίων. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, οι εν ενεργεία εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν μέτρια επίδοση στις υπολογιστικές εκτιμήσεις. Οι Έλληνες εκπαιδευτικοί δείχνουν ότι δεν γνωρίζουν τις διάφορες στρατηγικές της υπολογιστικής εκτίμησης, όπως τη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου και τη στρατηγική των συμβατών αριθμών. Σύμφωνα με τα ευρήματα, φαίνεται αναγκαία η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών πάνω στο θέμα της υπολογιστικής εκτίμηση.

Λέξεις κλειδιά: *υπολογιστική εκτίμηση, χρήση στρατηγικών, εν ενεργεία εκπαιδευτικοί.*

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εκτίμηση είναι μια πολύ σημαντική διαδικασία στη ζωή τόσο των παιδιών, όσο και των ενηλίκων. Χωρίς τη δυνατότητα της εύλογης και ακριβούς εκτίμησης, η ζωή θα ήταν πολύ πιο δύσκολη (Star, Rittle–Johnson, Lynch, & Perova, 2009). Δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις που καθημερινά απαιτούνται γρήγοροι υπολογισμοί ή κρίσεις αριθμητικών μεγεθών χωρίς τη βοήθεια του υπολογιστή ή του χαρτιού και μολυβιού. Ο όρος «εκτίμηση» λοιπόν χρησιμοποιείται για μια ποικιλία διεργασιών. Μπορεί να αναφέρεται σε μια προσέγγιση αρίθμησης ή μέτρου ή ακόμα και σε μια υποθετική απάντηση που δίνεται κατά την επίλυση ενός προβλήματος (Rubenstein, 1983). Πιο συγκεκριμένα όμως, η υπολογιστική εκτίμηση είναι το συνηθέστερα χρησιμοποιούμενο είδος εκτίμησης και είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με την αίσθηση του αριθμού (Tsao, & Pan, 2004).

Σύμφωνα με την Rubenstein (1983) η υπολογιστική εκτίμηση ορίζεται, ως η «*εύρεση μιας κατά προσέγγισης απάντησης σε ένα προφορικό ή γραπτό αριθμητικό πρόβλημα, χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής ή άλλων υποστηρικτικών εργαλείων, χρησιμοποιώντας νοερούς υπολογισμούς που εφαρμόζονται γρήγορα, για να βρεθεί μία επαρκής απάντηση για τη λήψη αποφάσεων.*»

Η εκτίμηση είναι ένα σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο και επισημαίνεται στα προγράμματα σπουδών πολλών χωρών όπως η Αγγλία, οι Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής, η Ιαπωνία, κ.ά. Στα Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) των Ηνωμένων Πολιτειών αναγνωρίζεται η σημασία στο να

αναπτυχθεί η ικανότητα των μαθητών στην εκτίμηση. Στην Ελλάδα η εκτίμηση εμφανίστηκε το 2003 στα προγράμματα σπουδών των Δ.Ε.Π.Π.Σ. (Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2003) και το 2006 εφαρμόστηκε στις σχολικές τάξεις με τα καινούργια σχολικά εγχειρίδια.

Παρά τη σημασία της εκτίμησης, τόσο στην τάξη, όσο και στην καθημερινή ζωή, πολύ λίγα πράγματα είναι γνωστά για την ανάπτυξή της, σε σχέση με την ανάπτυξη άλλων βασικών ποσοτικών ικανοτήτων, όπως η καταμέτρηση και η πρόσθεση.

Στην παρούσα έρευνα λοιπόν, βασικός σκοπός είναι να μελετηθούν οι γνώσεις και οι ικανότητες Ελλήνων εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την υπολογιστική εκτίμηση.

2. ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ

Σύμφωνα με έρευνα των Reys, Reys και Penafiel (1991 & 1982) τρεις ήταν οι ομάδες στρατηγικών που εντοπίστηκαν μεταξύ των καλών εκτιμητών: (α) η αναδιατύπωση/αναδόμηση (reformulation), (β) η μετάφραση (translation) και (γ) η αντιστάθμιση (compensation). Η αναδιατύπωση/αναδόμηση αφορά τη μετατροπή των αριθμητικών δεδομένων σε πιο διαχειρίσιμη μορφή, η μετάφραση αφορά την αλλαγή της μαθηματικής δομής του προβλήματος σε νοερή διαχειρίσιμη δομή και η αντιστάθμιση αφορά τη ρύθμιση της εκτίμησης ανάλογα με την αναδιατύπωση ή τη μετάφραση.

Ο Lemonidis (2013) με βάση τη σχετική βιβλιογραφία (Reys et al., 1982; Sowder & Wheeler, 1989; Reys et al., 1991b; Dowker, 1992; LeFevre et al., 1993) συνθέτει μια λίστα με 12 στρατηγικές που παρουσιάζονται στην υπολογιστική εκτίμηση: 1. Στρογγυλοποίηση (Rounding), 2. Στρατηγική εμπρόσθιου άκρου (Front – end strategy), 3. Περικοπή (Truncating), 4. Συσσώρευση ή Μέσος όρος (Clustering or averaging), 5. Προγενέστερη αντιστάθμιση (Prior compensation), 6. Επακολουθούμενη αντιστάθμιση (Post compensation), 7. Στρατηγική συμβατών αριθμών (Compatible numbers strategy), 8. Στρατηγική ειδικών αριθμών (Special numbers strategy), 9. Αλλαγή μορφής ενός αριθμού (Change number format), 10. Παραγοντοποίηση (Factorization), 11. Επιμεριστικότητα (Distributivity), 12. Με αλγοριθμικό τρόπο (Algorithm) (Βλέπε Πίνακα 2).

Οι Castro και Castro (2002), σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία (Segovia et al., p. 152, 1989) στην ομάδα των στρατηγικών *αναδόμησης* εντάσσουν τις στρατηγικές: (1) της στρογγυλοποίησης (rounding), (3) της περικοπής (truncation), (9) την αλλαγή της μορφής ενός αριθμού σε συμβατές ισοδύναμες δομές και τη στρατηγική της ανασύνθεσης (decomposition). Στην ομάδα των στρατηγικών της *μετάφρασης* εντάσσουν τις στρατηγικές (4) του μέσου όρου (averaging) και των σημείων αναφοράς (benchmarks). Στην ομάδα των στρατηγικών της *αντιστάθμισης* διαχωρίζουν (6) την τελική (final) και (5) την ενδιάμεση (intermediate) αντιστάθμιση.

Στην παρούσα εργασία τέθηκαν ερωτήσεις υπολογιστικής εκτίμησης, οι οποίες ως καταλληλότερη στρατηγική εκτίμησης έχουν μια από τις εξής πέντε στρατηγικές: τη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου (front – end strategy), τη στρατηγική της συσσώρευσης ή του μέσου όρου (clustering or averaging), τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης (rounding), τη στρατηγική των συμβατών αριθμών (compatible numbers strategy) και τη στρατηγική των ειδικών αριθμών (special numbers strategy).

3. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Οι έρευνες που ασχολούνται με τις επιδόσεις των εκπαιδευτικών και των υποψήφιων εκπαιδευτικών στην υπολογιστική εκτίμηση είναι σχετικά περιορισμένες (Tsao, & Pan, 2012; Alajmi, 2009; Mindenhall, Hackling, & Swan, 2009; Goodman, 1991; Lemonidis, & Kaimakami, 2011). Στην παρούσα έρευνα το ενδιαφέρον επικεντρώθηκε κυρίως σε τρία βασικά σημεία που αποτέλεσαν και την πηγή του προβληματισμού για την εκπόνηση της έρευνας. Τα σημεία αυτά ήταν: (α) η γνώση των εκπαιδευτικών σχετικά με τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς, (β) οι προτιμώμενες στρατηγικές εκτίμησης και (γ) τα συνηθέστερα λάθη στην εκτίμηση.

Οι Tsao & Pan (2012) στην έρευνά τους μελέτησαν την κατανόηση και τη γνώση των εν ενεργεία εκπαιδευτικών πάνω στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς, αλλά και τις διδακτικές πρακτικές που χρησιμοποιούνται. Το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα ήταν η συνέντευξη. Τα ευρήματα έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί ήταν σε θέση να εξηγήσουν τη σημασία της υπολογιστικής εκτίμησης, αλλά και να χρησιμοποιήσουν τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς για να λύσουν σχετικά προβλήματα. Οι στρατηγικές εκτίμησης που χρησιμοποίησαν, ήταν η στρατηγική εμπρόσθιου άκρου, η στρογγυλοποίηση, η χρήση των κλασμάτων, η χρήση συμβατών αριθμών, η χρήση ειδικών αριθμών και η στρατηγική της επιμεριστικότητας. Διαπιστώθηκε ακόμα, ότι οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών σχετίζονταν άμεσα με τη σχέση που είχαν με τα μαθηματικά.

Ενώ ο Alajmi (2009) ο οποίος εξέτασε 59 εκπαιδευτικούς των μαθηματικών από τη στοιχειώδη και μέση εκπαίδευση στο Κουβέιτ για να διερευνήσει τη κατανόηση της σημασίας των κατ' εκτίμηση υπολογισμών από τους εκπαιδευτικούς διαπίστωσε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των εκπαιδευτικών προσεγγίζει τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς κάνοντας χρήση της στρογγυλοποίησης. Υπάρχει επίσης ένα 5% που δεν γνωρίζει τίποτα γύρω από τους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς. Οι Mindenhall, Hackling & Swan (2009) πραγματοποιώντας μελέτη περίπτωσης σε έναν εκπαιδευτικό βρήκαν ότι αυτός πριν την έρευνα, πίστευε ότι η υπολογιστική εκτίμηση λειτουργεί αποκλειστικά ως μία «συσκευή» ελέγχου ενός αποτελέσματος.

Οι Lemonidis & Kaimakami (2013) μελέτησαν τις επιδόσεις, τα λάθη και τις στρατηγικές εκτίμησης που χρησιμοποίησαν 50 φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος, αλλά και τους παράγοντες που επηρέασαν όλα τα παραπάνω. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν έδειξαν ότι οι εν δυνάμει εκπαιδευτικοί ήταν μέτριοι και κακοί εκτιμητές.

Βρήκαν ότι τα προβλήματα εκτίμησης που περιείχαν πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ήταν πιο δύσκολα από τα προβλήματα με προσθέσεις. Σχετικά με τη χρήση των στρατηγικών εκτίμησης, διαπιστώθηκε ότι όχι μόνο δεν ήταν εξοικειωμένοι με τις στρατηγικές αυτές, αλλά δε γνώριζαν να χρησιμοποιούν στρατηγικές όπως του μέσου όρου και των συμβατών αριθμών. Όσον αφορά τα λάθη που έκαναν οι φοιτητές, οι ερευνητές τα ταξινόμησαν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: (α) τα λάθη υπολογισμού των πράξεων και (β) τα λάθη στον τρόπο εκτίμησης.

4. ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην παρούσα έρευνα εξετάζονται οι συμπεριφορές εν ενεργεία Ελλήνων εκπαιδευτικών σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Συγκεκριμένα οι στόχοι της παρούσας έρευνας είναι οι ακόλουθοι:

1. Ποιες είναι οι επιδόσεις των Ελλήνων εκπαιδευτικών στα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης;
2. Ποιες δυσκολίες συναντούν και τι λάθη κάνουν;
3. Γνωρίζουν να χρησιμοποιούν τις διάφορες στρατηγικές στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς;

5. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σε αυτή την έρευνα εξετάστηκαν 80 εκπαιδευτικοί του νομού Πέλλας. Ο μέσος όρος της προϋπηρεσίας των εκπαιδευτικών αυτών ήταν 16,51 χρόνια και ο μέσος όρος της ηλικίας τους ήταν 40,86 χρόνια. Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην έρευνα δεν είχαν προηγουμένως διδαχτεί τις στρατηγικές εκτίμησης.

6. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ

Οι εκπαιδευτικοί εξετάστηκαν με ένα ερωτηματολόγιο που περιείχε 10 προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα αντιστοιχούσε και σε μια συγκεκριμένη στρατηγική εκτίμησης, που σύμφωνα με τη βιβλιογραφία ήταν και η καταλληλότερη για τη λύση αυτού του προβλήματος. Το ερωτηματολόγιο αυτό απαντήθηκε παρουσία του ερευνητή από 70 υποκείμενα. Ενώ με το ίδιο ερωτηματολόγιο διενεργήθηκαν και 10 συνεντεύξεις (με το κάθε υποκείμενο ξεχωριστά) για επιπλέον και σε βάθος μελέτη του θέματος.

6.1. ΟΙ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Για τις ανάγκες της έρευνας τέθηκαν οι παρακάτω 10 ερωτήσεις:

1. *Εκτιμήστε περίπου το άθροισμα των πιο κάτω ποσών:*
   1,26 €, 4,79 €, 0,99 €, 1,37 €, 2,58 €

2. *Ένας μαθητής που ξεκίνησε σκι έκανε 75 ώρες μάθημα και κάθε ώρα κόστιζε 36 €. Πόσο πρέπει περίπου να πληρώσει;*

3. *Στα 816 ml μιας ουσίας το 9,84% είναι αλκοόλη. Πόση περίπου αλκοόλη έχει η ουσία;*
4. *Υπολογίστε περίπου τον αριθμό μαθητών των τριών σχολείων*

   ***Α' Λύκειο**: 1.378 μαθητές, **Β' Λύκειο** :236 μαθητές, **Γ' Λύκειο**: 442 μαθητές*
5. *Έξι ανεξάρτητες μετρήσεις, σε πόδια, έγιναν από μια ομάδα για την εύρεση του ύψους του βουνού Έβερεστ: 28.990, 28.991, 28.994, 28.998, 29.001, 29.026. Με βάση αυτές τις μετρήσεις πόσο περίπου μπορούμε να πούμε ότι είναι το ύψος του Έβερεστ;*
6. *Η Μαρία έτρεξε 1/2 km το πρωί και 3/8 km το απόγευμα. Έτρεξε τουλάχιστον 1km;*
7. *Το αποτέλεσμα ισούται περίπου με 200;*
   35+ 42 + 40 +38 +44
8. *Ένας εργάτης δούλεψε 28 ημέρες για 56 € τη μέρα. Πόσο περίπου θα πληρωθεί;*
9. *Έξι ομάδες μαθητών έκαναν με λουλούδια ανθοδέσμες για τη σχολική γιορτή. Κάθε ομάδα έκανε 27, 49, 38, 65, 56, 81 ανθοδέσμες. Πόσες ανθοδέσμες έχουμε περίπου συνολικά;*
10. *Ένα τρένο νέας τεχνολογίας διανύει 25.889 χιλιόμετρα σε 52 ώρες. Πόσα χιλιόμετρα διανύει περίπου σε μία ώρα;*

7. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι επιδόσεις και τα λάθη των εκπαιδευτικών

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι επιδόσεις των δασκάλων στα 10 προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Στον πίνακα 1 παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας με εκτίμηση, τα λάθη, τα ποσοστά των δασκάλων που υπολόγισαν με ακριβή υπολογισμό και αυτοί που δεν έδωσαν καμία απάντηση.

	Ερ.1	**Ερ.2**	**Ερ.3**	**Ερ.4**	**Ερ.5**	**Ερ.6**	**Ερ.7**	**Ερ.8**	**Ερ.9**	**Ερ. 10**
Επιτυχία με εκτίμηση	75 93,8%	43 53,8%	59 73,8%	75 93,8%	62 77,5%	58 72,5%	68 85%	54 67,5%	73 91,3%	69 86,2%
Ακριβής υπολογισμός	1 1,3%	2 2,5%	2 2,5%	1 1,3%	5 6,3%	11 13,8%	1 1,3%	2 2,5%	1 1,3%	2 2,5%
Λάθος απάντηση	4 4,9%	33 41,2%	13 16,2%	2 2,4%	13 16,2%	2 2,4%	2 2,4%	23 28,7%	4 4,9%	7 8,8%
Καμία απάντηση	-	2 2,5%	6 7,5%	2 2,5%	-	9 11,3%	9 11,3%	1 1,3%	2 2,5%	2 2,5%
Σύνολο	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Πίνακας 1: Ποσοστά επιτυχίας και χρήσης της εκτίμησης

Σύμφωνα λοιπόν, με τα ποσοστά επιτυχίας των δασκάλων στους υπολογισμούς με εκτίμηση, μπορούμε να κατατάξουμε τα προβλήματα σε τρεις ομάδες δυσκολίας:

Δύσκολα (<67,5%]: Ε2 (53,8%), Ε8 (67,5%).

Μεσαίας δυσκολίας [72,5% < % < 77,5%]: Ε3 (73,8%), Ε5 (77,5%) και Ε6 (72,5%).

Εύκολα [85% < % < 93,8%]: Ε1 (93,8%), Ε4 (93,8%), Ε9 (91,3%), Ε10 (86,2%) και Ε7 (85%).

Παρατηρούμε ότι δύσκολα είναι τα προβλήματα τα οποία εμπεριέχουν μια πράξη πολλαπλασιασμού με αριθμούς που είναι σχετικά δύσκολοι για τους νοερούς υπολογισμούς (Ε2:75x36, Ε8:28x56).

Μεσαίας δυσκολίας φαίνεται να είναι τα προβλήματα που εμπεριέχουν τον υπολογισμό ενός ποσοστού κοντά στο 10% (Ε3:9,84% του 816) το οποίο δεν μπορεί να υπολογιστεί νοερά με αλγόριθμο, την εύρεση μέσου όρου από 6 μετρήσεις του όρους Everest (Ε5), ένα άθροισμα απλών κλασμάτων με ένα όρο το ½ (Ε6).

Εύκολα είναι τα προβλήματα που περιλαμβάνουν ένα άθροισμα δεκαδικών αριθμών (Ε1:1,26+4,79+0,99+1,37+2,58), ένα άθροισμα τριών όρων (Ε4:1.378+236+442), ένα άθροισμα με έξι όρους (Ε9:27+49+38+65+56+81) και μια πράξη διαίρεσης (Ε10:25.889÷52) και προσθέσεις με 5 όρους (Ε7:35+42+40+38+44).

Αν εξετάσουμε την επίδοση του κάθε εκπαιδευτικού στα 10 προβλήματα βρίσκουμε ότι, ο μέσος όρος των σωστών απαντήσεων των εκπαιδευτικών ήταν 7,950 με τυπική απόκλιση 1,439.

Η χρήση των στρατηγικών

Στρατηγικές	**Περιγραφή στρατηγικών**	**Ερωτήσεις**									
		1η	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**8η**	**9η**	**10η**
Στ. εμπρόσθιου άκρου	1+4+1+1+2=9 και 0,30+0,80+0,40+0,60≈ 2 άρα 9+2=11	**24 30%***	8 10%	-	**9 11,2%***	-	-	2 2,5%	4 5%	2 2,5%	-
Στ. στρογγυλοποίησης	75x36≈80 x40=3200 και με	44 45%	**34 42,5%***	-	64 80%	14 17,5%	-	23 28,7%	**46 57,5%***	53 66,3%	24 30%

	αντιστάθμιση										
Στ. ειδικών αριθμών	Το ½ είναι μισό, το 3/8 είναι λιγότερο από μισό	-	-	**59 73,8 %***	-	-	**57 71,2 %***	-	-	-	-
Στ. συσσώρευσης ή μέσου όρου	35+42+40+38+44 όλα κοντά στο 40, άρα 40x5=200	-	-	-	-	**42 52,5 %***	-	**38 47,5 %***	-	-	-
Στ. συμβατών αριθμών	27+81≈100 38+65≈100 49+56≈100 Σύνολο 300	6 7,5%	-	-	1 1,3%	1 1,3%	-	4 5%	3 3,7%	**18 22,5 %***	**43 53,7 %***
Άλλη στρατηγική	Οποιοσδήποτε άλλος τρόπος	1 1,3%	1 1,3%	-	1 1,3%	5 6,2%	1 1,3%	1 1,3%	1 1,3%	-	2 2,5%

Πίνακας 2: Ποσοστά χρήσης των στρατηγικών στις σωστές απαντήσεις με κατ' εκτίμηση υπολογισμό

***Ποσοστά χρήσης των καταλληλότερων, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, στρατηγικών**

Στρατηγική εμπρόσθιου άκρου: Η στρατηγική αυτή είναι κατάλληλη για τις ερωτήσεις 1 και 4. Συγκεκριμένα στην ερώτηση 1, μόνο το 30% των εκπαιδευτικών χρησιμοποίησε σωστά τη στρατηγική αυτή, ενώ στην ερώτηση 4 μόλις το 11,2% των εκπαιδευτικών.

Στρατηγική συσσώρευσης ή μέσου όρου: Η στρατηγική αυτή είναι κατάλληλη για τις ερωτήσεις 5 και 7. Συγκεκριμένα, το 52,5% των εκπαιδευτικών χρησιμοποίησε σωστά τη στρατηγική αυτή στην ερώτηση 5, και το 47,5% των εκπαιδευτικών τη χρησιμοποίησε σωστά στην ερώτηση 7.

Στρατηγική στρογγυλοποίησης: Η στρατηγική αυτή είναι κατάλληλη για τις ερωτήσεις 2 και 8. Συγκεκριμένα, στην ερώτηση 2, το 42,5% των εκπαιδευτικών χρησιμοποίησε σωστά τη στρατηγική αυτή και στην ερώτηση 8 το 57,5% τη χρησιμοποίησε σωστά.

Στρατηγική συμβατών αριθμών: Η στρατηγική αυτή είναι κατάλληλη για τις ερωτήσεις 9 και 10. Συγκεκριμένα, στην ερώτηση 9, μόνο το 22,5% των εκπαιδευτικών χρησιμοποίησε σωστά τη στρατηγική αυτή, ενώ στην ερώτηση 10 το 53,7%.

Στρατηγική ειδικών αριθμών: Η στρατηγική αυτή είναι κατάλληλη για τις ερωτήσεις 3 και 6. Συγκεκριμένα στην ερώτηση 3, το 73,8% των εκπαιδευτικών έκανε σωστή χρήση της στρατηγικής αυτής και στην ερώτηση 6, το 71,2%.

Συμπερασματικά για τη χρήση των στρατηγικών μπορούμε να πούμε ότι: μικρά ποσοστά εκπαιδευτικών χρησιμοποιούν τη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου (Ε1: 30% και Ε4: 11,2%) και τη στρατηγική των συμβατών αριθμών (Ε9: 22,5% και Ε10: 53,7%). Γύρω στους μισούς εκπαιδευτικούς γνωρίζουν και χρησιμοποιούν τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης με αντιστάθμιση (Ε2: 42,5% και Ε8: 57,5%) και τη στρατηγική του μέσου όρου (Ε5: 52,5% και Ε7: 47,5%). Οι περισσότεροι (γύρω στο 70%) χρησιμοποίησαν τη στρατηγική των ειδικών αριθμών (Ε3: 73,8% και Ε6: 71,2%).

Τα λάθη

	Ερωτήσεις									
Τύπος λάθους	**1η**	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**8η**	**9η**	**10η**
Λάθη υπολογισμού των πράξεων	4,9%	7,5%	16,2%	2,4%	8,1%	2,4%	1,2%	7,5%	4,9%	8,8%
Λάθη στην επακολουθούμενη αντιστάθμιση	-	33,7%	-	-	-	-	1,2%	21,2%	-	-
Απάντηση χωρίς λογική	-	-	-	-	8,1%	-	-	-	-	-
Συνολικό ποσοστό λαθών	4,9%	**41,2%**	16,2%	2,4%	16,2%	2,4%	2,4%	28,7%	4,9%	8,8%

Πίνακας 3: Ποσοστά λαθών που πραγματοποίησαν οι εκπαιδευτικοί

Εξετάζοντας τα λάθη που έκαναν οι εκπαιδευτικοί στις διάφορες ερωτήσεις διαπιστώνεται ότι αυτά διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: α) *Τα λάθη υπολογισμού των πράξεων* και β) *τα λάθη στον τρόπο εκτίμησης*.

Όσον αφορά την πρώτη ομάδα λαθών, τα λάθη υπολογισμού των πράξεων, είναι λάθη κυρίως των ιδιοτήτων του συστήματος αρίθμησης που υπάρχουν μέσα στους μηχανισμούς (ή αλγορίθμους) των πράξεων, π.χ. στην ερώτηση 10 όπου ζητήθηκε η

εκτίμηση της διαίρεσης 25.889 : 5, παρατηρήθηκαν λάθη στον αριθμό των ψηφίων του τελικού αποτελέσματος. Ορισμένοι εκπαιδευτικοί παρέλειπαν ή πρόσθεταν κάποιο επιπλέον μηδενικό στο αποτέλεσμα, π.χ. αντί για 500, έδιναν ως τελική απάντηση 5000 ή 50. Παρατηρούμε ότι μεγάλο ποσοστό αυτού του είδους των λαθών παρατηρείται στην ερώτηση Ε3 (16,2%) όπου πρέπει να υπολογιστεί το 9,84% των 816 ml. Εδώ οι αριθμοί είναι μεγάλοι και όσοι κάνουν αυτού του είδους τα λάθη προσπαθούν να υπολογίσουν το αποτέλεσμα ακριβώς. Παρατηρούμε επίσης ότι λάθη υπολογισμού των πράξεων γίνονται στις ερωτήσεις με πολλαπλασιασμό (Ε2: 75x36 και Ε8: 28x56), τη διαίρεση (Ε10: 25.889:52) και την πρόσθεση με μεγάλους αριθμούς Ε5 (ύψος Έβερεστ).

Στην δεύτερη ομάδα λαθών, στα λάθη στον τρόπο εκτίμησης, οι εκπαιδευτικοί πραγματοποιούν μια εκτίμηση αλλά με λάθος τρόπο, δηλαδή δεν είναι λάθη των πράξεων αλλά της διαδικασίας της εκτίμησης. Πιο χαρακτηριστικό λάθος είναι η λάθος εφαρμογή της στρατηγικής της στρογγυλοποίησης. Σε πολλές περιπτώσεις ακολουθήθηκε μια χοντροειδής στρογγυλοποίηση με αποτέλεσμα η εκτίμηση να απέχει πολύ από το ακριβές αποτέλεσμα. π.χ. στη δεύτερη ερώτηση που αναφέρεται στον πολλαπλασιασμό δύο διψήφιων αριθμών, συγκεκριμένα των 75 x 36, ορισμένοι εκπαιδευτικοί έκαναν αρχικά σωστά την πράξη 3x7=21→2100, αλλά στη συνέχεια έκαναν λάθος την επακολουθούμενη αντιστάθμιση. Κάποιοι από αυτούς έκαναν την πράξη 5x6=30→300 και τελικά κατέληγαν 2100+300=2400 και κάποιοι έκαναν την πράξη 5x6=30 και τελικά κατέληγαν 2100+30=2130. Πολλοί ήταν οι εκπαιδευτικοί που στην ερώτηση αυτή δεν έκαναν καμία αντιστάθμιση του αποτελέσματος.

8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας μπορούμε να πούμε ότι οι δάσκαλοι της πράξης παρουσιάζουν επιδόσεις και συμπεριφορές στα προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης που επιδέχονται σημαντική βελτίωση.

Για τους εκπαιδευτικούς που εξετάστηκαν ήταν δύσκολα (επιτυχία <67,5%) τα προβλήματα που εμπεριείχαν πράξεις πολλαπλασιασμού με διψήφιους όρους (Ε2:75x36, επιτ. 53,8%), Ε8:28x56, επιτ. 67,5%) γιατί πραγματοποιούσαν χονδρικά τους πολλαπλασιασμούς υπολογίζοντας μόνο με τα ψηφία των δεκάδων χωρίς να πραγματοποιούν μια διόρθωση (αντιστάθμιση).

Μεσαίας δυσκολίας (72,5% < επιτ. < 77,5%) ήταν τα προβλήματα που εμπεριείχαν τον υπολογισμό ενός ποσοστού κοντά στο 10% (Ε3:9,84% του 816) το οποίο δεν μπορεί να υπολογιστεί νοερά με αλγόριθμο, την εύρεση μέσου όρου από 6 μετρήσεις του όρους Everest (Ε5) και ένα άθροισμα απλών κλασμάτων με ένα όρο το ½ (Ε6).

Εύκολα (85% < επιτ. < 93,8%) ήταν τα προβλήματα που περιελάμβαναν αθροίσματα, όπως άθροισμα δεκαδικών αριθμών (Ε1:1.26+4.79+0.99+1.37+2.58), ή άθροισμα τριών όρων με τριψήφιους και τετραψήφιο ακέραιο (Ε4:1.378+236+442), ή άθροισμα με έξι (Ε9:27+49+38+65+56+81) ή 5 (Ε7: 35+42+40+38+44) όρους και τέλος την πράξη της διαίρεσης (Ε10:25.889 ÷52).

Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν εν μέρει με αυτά της έρευνας των Lemonidis & Kaimakami (2013) σε υποψήφιους δασκάλους που βρήκαν ότι τα προβλήματα εκτίμησης που περιέχουν πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις είναι πιο δύσκολα από αυτά που περιέχουν προσθέσεις. Αν και εδώ, για τους εν ενεργεία εκπαιδευτικούς, το πρόβλημα με διαίρεση (Ε10: 25.889÷52) ήταν στην κατηγορία των εύκολων προβλημάτων, το ίδιο πρόβλημα για τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς ήταν στην κατηγορία των δύσκολων προβλημάτων.

Μια διαπίστωση είναι ότι οι εκπαιδευτικοί δεν γνωρίζουν την ποικιλία των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται στην υπολογιστική εκτίμηση. Έτσι λίγοι χρησιμοποίησαν τη στρατηγική του εμπρόσθιου άκρου και των συμβατών αριθμών, γύρω στους μισούς χρησιμοποίησαν τη στρατηγική της στρογγυλοποίησης με αντιστάθμιση και τη στρατηγική του μέσου όρου και γύρω στο 70% χρησιμοποίησαν τη στρατηγική των ειδικών αριθμών. Στο συμπέρασμα αυτό της μη γνώσης της ποικιλίας των στρατηγικών στην υπολογιστική εκτίμηση καταλήγουν και οι άλλες έρευνες με εκπαιδευτικούς (Alajmi, 2009; Mindenhall, et al. 2009; Lemonidis & Kaimakami, 2013).
Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα διαφαίνεται η αναγκαιότητα μιας ειδικής επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών στο θέμα της υπολογιστικής εκτίμησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Castro, C. & Castro, I. (2002). An alternative model for the description of computational estimation strategies. In A. D. Cockburn, & E. Nardi, (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. *Vol.2*, 193-200. Norwick, UK.

Lemonidis, Ch. & Kaimakami, A. (2013). Prospective elementary teachers' knowledge in computational estimation. Menon: *Journal of Educational Research*. Issue 3. (in press).

Liu, W. & Neber, H. (2012). Estimation skills of Chinese and Polish Grade 6 Students on Pure Fraction tasks. *Journal of mathematics education. 5*(1), 1-14.

Liu, W. & Neber, H. (2012). Estimation skills of Chinese and Polish Grade 6 Students on Pure Fraction tasks. *Journal of mathematics education. 5*(1), pp. 2.

Mindenhall, P., Hackling, M. & Swan, P. (2009). Computational Estimation in the Primary School: A single case study of one teacher's involvement in a professional learning intervention. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 407-413.* Fremantle: MERGA.

Reys, B. J. (1986). Teaching computational estimation: concepts and strategies. In, *Estimation & Mental Computation-1986 Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics.*

Reys, B. J., Reys, R. W., & Penafiel, A., F., (1991a). Estimation performance and strategies use of Mexican fifth- and eighth-grade student sample. *Educational Studies in Mathematics, 22, 353-375.*

Rubenstein, R. N. (1983). Mathematical variables related to computational estimation. *Dissertation Abstracts International, 44*, 695A.

Segovia, I. & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(1), 499-513.

Star, J., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., & Perova, N. (2009). The role of prior knowledge in the development of strategy flexibility: The case of computational estimation. *ZDM Mathematics Education, 41*, 569–579.

Tsao, Y.-L. (2004). Exploring the Connections among Number Sense, Mental Computation Performance, and the Written Computation Performance of Elementary Preservice School Teachers. *Journal of College Teaching & Learning*, *1*(12), 71-90.

Tsao, Y. L., Pan, T. R. (2012). The computational estimation and instructional perspectives of elementary school teachers. *Journal of Instructional Pedagogies*, *11*, 1-15.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Νοεροί Υπολογισμοί. Λογαρέζω με το τσιμίδι μ'*. Θεσσαλονίκη. Εκδόσεις Ζυγός.

ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΚΑΙ ΕΥΕΛΙΞΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄ ΤΑΞΗΣ ΣΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ ΜΕ ΡΗΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Χαράλαμπος Λεμονίδης, Ιωάννα Καϊάφα
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
xlemon@uowm.gr , j.kaiafa@windowslive.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία τα βασικά ερωτήματα που τίθενται είναι κατά πόσο οι μαθητές κατανοούν τις πράξεις που εκτελούν με ρητούς αριθμούς και κατά πόσο μπορούν να εκτελούν τις πράξεις αυτές με διαφορετικές στρατηγικές. Για το σκοπό αυτό αναλύθηκαν οι απαντήσεις 266 μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου, σε πράξεις με κλάσματα, δεκαδικούς και ποσοστά, στις οποίες μπορούν να εφαρμοστούν διαφορετικοί τρόποι επίλυσης. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι οι μαθητές του δείγματος πραγματοποιούν πολλά λάθη στις πράξεις των ρητών, τα οποία οφείλονται στα σχήματα που έχουν διαμορφώσει για τους ακέραιους αριθμούς, ενώ φαίνεται πως δεν διαθέτουν μεγάλο ρεπερτόριο νοερών στρατηγικών υπολογισμού.

Λέξεις κλειδιά: *κατανόηση πράξεων με ρητούς αριθμούς, νοεροί υπολογισμοί, ευελιξία στις στρατηγικές υπολογισμού.*

Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύγχρονες έρευνες και θεωρίες σχετικά με την ανάπτυξη του αριθμητισμού, στην προσπάθειά τους να ερμηνεύσουν τις δυσκολίες στους ρητούς αριθμούς, υποστηρίζουν ότι η μάθηση των ακεραίων αριθμών εμποδίζει τη μάθηση των ρητών (π.χ., Geary, 2006; Leslie, Gelman, & Gallistel, 2008; Wynn, 2002). Οι θεωρίες *της εννοιολογικής αλλαγής,* από την άλλη πλευρά, επικεντρώνονται στις διαφορές που παρατηρούνται στις διαδικασίες μάθησης των ακεραίων αριθμών και των κλασματικών, καθώς και στον τρόπο με τον οποίο τα σχήματα που έχουν αναπτύξει οι μαθητές για τους ακέραιους αριθμούς αποτελούν εμπόδιο στη μάθηση των κλασμάτων (Ni & Zhou, 2005; Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeiliti, 2008).

Οι Caney, A., και Watson, J. M. (2003) διεξήγαγαν μία έρευνα με 24 μαθητές, με σκοπό να καταγράψουν τις στρατηγικές που αυτοί χρησιμοποιούσαν εκτελώντας νοερούς υπολογισμούς με κλάσματα, δεκαδικούς και ποσοστά. Παρά το γεγονός ότι το δείγμα της έρευνας ήταν σχετικά μικρό, ωστόσο καταγράφηκε πλήθος νοερών στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, προκειμένου να ανταποκριθούν στις δοκιμασίες. Οι συγκεκριμένοι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι στις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς οι περισσότερες απαντήσεις των μαθητών χαρακτηρίζονται ως εργαλειακές, σε αντίθεση με τις πράξεις που αφορούν κλάσματα και ποσοστά στις οποίες οι απαντήσεις των μαθητών χαρακτηρίζονται ως εννοιολογικές.

Το 2004 οι Callingham και Watson διεξήγαγαν μία έρευνα (με δείγμα 5.535 μαθητές από την Τρίτη Δημοτικού μέχρι την Πρώτη Λυκείου), με σκοπό να περιγράψουν μια αναπτυξιακή κλίμακα σχετικά με την επάρκεια των μαθητών στην εκτέλεση νοερών υπολογισμών με κλάσματα, δεκαδικούς και ποσοστά. Τα έξι επίπεδα της αναπτυξιακής κλίμακας, στην οποία κατέληξαν, φαίνεται να υποδεικνύουν μια αυξανόμενη κατανόηση της δομής των συγκεκριμένων αριθμών. Στο πρώτο επίπεδο, οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίσουν το ½ τόσο ως αριθμό όσο και ως τελεστή, π.χ. το ½ του 62, ενώ, όταν φτάνουν στο έκτο επίπεδο, φαίνεται ότι αποκτούν μια καλή κατανόηση των δομών του αριθμού και είναι σε θέση να εφαρμόζουν τις στρατηγικές που έχουν μάθει σε μια σειρά από λιγότερο γνωστούς αριθμούς και σε πιο σύνθετες πράξεις (π.χ. 20:5, 0,3x0,3).

Αντικείμενο μελέτης σε πολλές έρευνες αποτελούν οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε έργα σχετικά με τους ρητούς αριθμούς. Οι στρατηγικές αυτές διακρίνονται σε εννοιολογικές και διαδικαστικές (Clarke & Roche, 2009; Λεμονίδης, 2013; Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993; Yang, Reys, & Reys, 2007). Οι Yang et al. (2007) αναφέρονται σε στρατηγικές που στηρίζονται σε απομνημονευμένους κανόνες (rule-based strategies), καθώς και σε στρατηγικές που στηρίζονται στα εννοιολογικά χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού (number sense-based strategies). Στην παρούσα έρευνα υιοθετούνται οι όροι εννοιολογικές και εργαλειακές ή διαδικαστικές στρατηγικές. Συγκεκριμένα:

Εννοιολογικές στρατηγικές. Χαρακτηρίζονται από την κατανόηση των πράξεων και των αριθμών, που χρησιμοποιούνται σε αυτές, και προκύπτουν από την ικανότητα των μαθητών να αντιμετωπίζουν τους ρητούς αριθμούς ολιστικά, στηριζόμενοι στα εννοιολογικά χαρακτηριστικά της αίσθησης του αριθμού. Στις εννοιολογικές στρατηγικές περιλαμβάνονται η χρήση του «αριθμού αναφοράς», η αξιοποίηση συμπληρωμάτων της μονάδας (π.χ. στη σύγκριση των κλασμάτων $\frac{4}{5}$ και $\frac{4}{7}$, το $\frac{4}{5}$ είναι πιο κοντά στη μονάδα από το $\frac{4}{7}$, άρα είναι μεγαλύτερο), η σχηματική αναπαράσταση (π.χ. στην αφαίρεση $\frac{3}{4}$ - $\frac{1}{2}$, φαντάζομαι ή σχηματίζω ένα κύκλο με σκιασμένα τα $\frac{3}{4}$ και αφαιρώ το $\frac{1}{2}$) και το πέρασμα από μία μορφή ρητού σε μία άλλη (π.χ. στον πολλαπλασιασμό 0,3 x 0,3 μετατρέπω τους δεκαδικούς σε κλάσματα και έχω $\frac{3}{10}$ x$\frac{3}{10}$ = $\frac{9}{100}$).

Εργαλειακές ή διαδικαστικές στρατηγικές. Οι μαθητές, όταν κάνουν χρήση εργαλειακών στρατηγικών, στηρίζονται σε απομνημονευμένους κανόνες, οι οποίοι δεν συνδέονται απαραίτητα με βαθιά εννοιολογική κατανόηση. Στις διαδικαστικές στρατηγικές περιλαμβάνονται η μετατροπή σε ομώνυμα για τη σύγκριση δύο κλασμάτων, η εφαρμογή του «χιαστί» και η χρήση απομνημονευμένων κανόνων (π.χ. για να διαιρέσω δύο κλάσματα μεταξύ τους, αντιστρέφω τους όρους του δεύτερου κλάσματος και κάνω πολλαπλασιασμό).

II. Η ΕΡΕΥΝΑ

II.1. Τα ερωτήματα της έρευνας

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στη συγκεκριμένη εργασία είναι τα εξής:

- Κατά πόσο τα σχήματα που έχουν αναπτύξει οι μαθητές για τους ακέραιους επηρεάζουν την επίδοσή τους στην εκτέλεση πράξεων στους ρητούς αριθμούς.
- Ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν οι μαθητές αυτοί, όταν εκτελούν νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς, και πόσες από αυτές τις στρατηγικές είναι εννοιολογικές ή διαδικαστικές.
- Αν οι συγκεκριμένοι μαθητές είναι ευέλικτοι κατά την εκτέλεση των πράξεων, αν δηλαδή γνωρίζουν και είναι ικανοί να χρησιμοποιούν ποικίλες στρατηγικές κατά την εκτέλεση νοερών υπολογισμών με ρητούς αριθμούς.

II.2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το δείγμα

Το δείγμα της έρευνας αποτελούν 266 μαθητές της Ε' και Στ' τάξης, οι οποίοι έλαβαν μέρος στον 9ο Διαγωνισμό των «Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής», που διεξήχθη το Μάιο του 2013, και προέρχονται από Δημοτικά σχολεία της Φλώρινας και των Σερρών. Από αυτούς οι 122 φοιτούσαν στην Ε΄ τάξη και οι 144 στη Στ΄. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι αρκετοί εκπαιδευτικοί και γονείς των σχολείων, όπου φοιτούσαν οι μαθητές, δέχτηκαν κάποια επιρροή αναφορικά με τους νοερούς υπολογισμούς και τις στρατηγικές τους, μέσα από τα θέματα του διαγωνισμού προηγούμενων ετών, αλλά και από επιμορφωτικές εκδηλώσεις, όπως ομιλίες ή φυλλάδια σχετικά με νοερούς υπολογισμούς. Οπότε μπορεί να θεωρηθεί ότι οι μαθητές δεν ήταν εντελώς ανεπηρέαστοι σχετικά με τους νοερούς υπολογισμούς με ρητούς αριθμούς.

Διαδικασία εξέτασης

Ο διαγωνισμός πραγματοποιήθηκε εκτός σχολικού προγράμματος, ημέρα Σάββατο, σε ένα σχολείο, όπου συγκεντρώθηκαν όλοι οι διαγωνιζόμενοι μαθητές από τους νομούς της Φλώρινας και των Σερρών. Η εξέταση διεξήχθη γραπτά, ενώ οι ασκήσεις νοερών υπολογισμών με ρητούς αποτελούσαν μέρος ενός ευρύτερου φύλλου αξιολόγησης, το οποίο περιελάμβανε και αριθμητικά προβλήματα.

Οι ερωτήσεις

Θεωρήθηκε ότι ο καταλληλότερος τρόπος, για να εξεταστεί η κατανόηση των μαθητών στις πράξεις και κατ' επέκταση στους ρητούς αριθμούς, ήταν να ζητηθεί από τους μαθητές να υπολογίσουν νοερά τις πράξεις και να καταγράψουν τον τρόπο, με τον οποίο σκέφτηκαν. Η καταγραφή από τους μαθητές του τρόπου σκέψης τους

θα έδινε στην έρευνα τη δυνατότητα να εξετάσει ποιες και πόσες στρατηγικές χρησιμοποίησαν. Για να μην υπάρχει περιορισμός στους τρόπους υπολογισμού, ζητήθηκε από τους μαθητές να απαντήσουν σε κάθε πράξη με όσους περισσότερους τρόπους μπορούσαν. Οι ερωτήσεις που τέθηκαν στους μαθητές είναι οι εξής:

Ε΄ ΤΑΞΗ

Υπολογίζω με το μυαλό πόσο κάνει: α) ¾ - ½, β) 0,3x0,3 και γ) συγκρίνω τα κλάσματα 4/7 και 4/5, με όσους περισσότερους τρόπους μπορώ. Κάθε φορά γράφω τον τρόπο που σκέφτηκα.

ΣΤ΄ ΤΑΞΗ

Υπολογίζω με το μυαλό: α) πόσο είναι το ½ του ¼, β) πόσο κάνει 20:0,5 και γ) πόσο κάνει το 25% του 80, με όσους περισσότερους τρόπους μπορώ. Κάθε φορά γράφω τον τρόπο που σκέφτηκα.

II.3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

II.3.α. Οι επιδόσεις των μαθητών

Στον πίνακα 1 που ακολουθεί παρατίθενται στοιχεία για τα ποσοστά επιτυχίας και αποτυχίας σε κάθε άσκηση ξεχωριστά και για τον αριθμό των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές γενικά, αλλά και ειδικά στους νοερούς υπολογισμούς. Όσον αφορά την επίδοση των μαθητών σε κάθε άσκηση, ανεξάρτητα από την στρατηγική, την οποία χρησιμοποιούν, παρατηρήθηκε ότι στην Ε' τάξη η άσκηση με το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας (87%) είναι η σύγκριση κλασμάτων ($\frac{4}{7}$ & $\frac{4}{5}$). Τα τρία τέταρτα περίπου των μαθητών (73,5%) πετυχαίνουν την αφαίρεση $\frac{3}{4}$ - $\frac{1}{2}$ και μόνο το 40% των μαθητών πετυχαίνει τον πολλαπλασιασμό των δεκαδικών 0,3x0,3. Στην Έκτη τάξη η άσκηση με το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας (78%) είναι αυτή που ζητά την εύρεση του ποσοστού (το 25% του 80). Σχεδόν οι μισοί μαθητές (52%) πετυχαίνουν τη διαίρεση 20:0,5 και η δυσκολότερη άσκηση με ποσοστό επιτυχίας μόνο 32% είναι να βρουν το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{4}$.

Στην άσκηση με τον πολλαπλασιασμό των δεκαδικών 0,3x0,3 στην Ε' τάξη το σημαντικότερο λάθος είναι η απάντηση 0,9, που παρουσιάζεται στο 46% των μαθητών. Το λάθος αυτό δείχνει αδυναμία ελέγχου της αξίας θέσης των αριθμών σε δεκαδικούς αριθμούς και μάλιστα εδώ φαίνεται να μεταφέρεται λανθασμένα από τους ακεραίους αριθμούς η αντίληψη ότι ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει τον αριθμό. Στη Στ΄ τάξη στη διαίρεση 20:0,5 ένα μαζικό λάθος (27,3%) ήταν η απάντηση 10, όπου φαίνεται να μεταφέρεται η αντίληψη από τους ακεραίους ότι η διαίρεση μικραίνει τον αριθμό. Με παρόμοιο τρόπο στο ερώτημα ποιο είναι το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{4}$ οι μαθητές πραγματοποιούν διαίρεση αντί για πολλαπλασιασμό, επηρεασμένοι από τη

λογική των ακεραίων ότι η διαίρεση μικραίνει τον αριθμό. Έτσι, ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών (37,2%) πραγματοποιεί τη διαίρεση $\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$ και βρίσκει το λάθος αποτέλεσμα $\frac{2}{4}$ ή $\frac{1}{2}$.

	Ε΄ ΤΑΞΗ			**ΣΤ΄ ΤΑΞΗ**		
	$\frac{3}{4}$ - $\frac{1}{2}$	**0,3 x 0,3**	**Συγκρίνω $\frac{4}{7}$ & $\frac{4}{5}$**	**Το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{4}$**	**20:0,5**	**Το 25% του 80**
Επιτυχία	**90 (73,7%)**	**49 (40,1%)**	**106(86,9%)**	**46 (31,9%)**	**75 (52%)**	**112 (77,8%)**
Τρεις στρατηγικές	4 (3,3%)	0 (0%)	3 (2,5%)	2 (1,4%)	1 (0,7%)	2 (1,4%)
Δύο στρατηγικές	46 (37,7%)	15 (12,3%)	37 (30,3%)	9 (6,3%)	18 (12,5%)	35 (24,3%)
Μία στρατηγική	40 (32,8%)	34 (27,9%)	66 (54,1%)	35 (24,3%)	56 (38,9%)	75 (52,1%)
Μια στρατηγική νοερών υπολογ.	42 (34,4%)	26 (21,3%)	64 (52,4%)	31 (21,5%)	40 (27,8%)	65 (45,1%)
Τουλάχιστον δύο στρατ. νοερ υπολ	9 (7,4%)	0 (0%)	25 (29,5%)	6 (4,2%)	11 (7,6%)	8 (5,5%)
Σωστή απάν μόνο με γραπτό αλγόρ	39 (32%)	23 (18,8%)	17 (13,9%)	9 (6,3%)	24 (16,7%)	39 (27,1%)
Αποτυχία	32 (26,2%)	73 (59,8%)	16 (13,1%)	98 (68%)	69 (47,9%)	32 (22,2%)
ΣΥΝΟΛΟ	122 (100%)	122 (100%)	122 (100%)	144 (100%)	144 (100%)	144 (100%)

Πίνακας 1: Οι απαντήσεις των μαθητών Ε' και Στ' τάξης στις πράξεις

Όσον αφορά τον αριθμό των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές, ανεξάρτητα αν υπολογίζουν με γραπτούς αλγόριθμους ή νοερές στρατηγικές, παρατηρεί κανείς ότι είναι πολύ περιορισμένος, καθώς φτάνει μέχρι τις δύο στρατηγικές, ενώ ελάχιστοι μαθητές, όπως φαίνεται στον πίνακα 1, χρησιμοποιούν επιτυχώς τρεις στρατηγικές. Συνεπώς, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι το ρεπερτόριο των στρατηγικών για τον υπολογισμό των ρητών αριθμών στους μαθητές

αυτούς είναι πολύ περιορισμένο, δηλαδή δεν υπάρχουν οι προϋποθέσεις στους μαθητές αυτούς για να είναι ευέλικτοι στους υπολογισμούς τους.

Όπως προκύπτει από τον πίνακα 1, ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό που κυμαίνεται από το 6,3% έως το 32% μπορεί να λύσει τις προτεινόμενες ασκήσεις μόνο με την εφαρμογή του γραπτού αλγόριθμου. Η πλειοψηφία των μαθητών που απαντούν σωστά μπορεί να χρησιμοποιήσει μόνο μία στρατηγική νοερών υπολογισμών. Τα ποσοστά των μαθητών αυτών κυμαίνονται από το 21,3% έως το 52,4% του συνολικού πληθυσμού. Τέλος, τα ποσοστά των μαθητών που είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν τουλάχιστον δύο στρατηγικές νοερών υπολογισμών κινούνται σε πολύ χαμηλά επίπεδα, καθώς μόνο στην σύγκριση των κλασμάτων $\frac{4}{7}$ & $\frac{4}{5}$, στην Ε' τάξη, εμφανίζεται ένα σημαντικό ποσοστό (29,5%) μαθητών που μπορούν να χρησιμοποιούν σωστά τουλάχιστον δύο στρατηγικές νοερών υπολογισμών.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται με τρόπο πιο διεξοδικό, το είδος των νοερών στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές.

ΙΙ.3.β. Στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές

Στον πίνακα 2 που ακολουθεί συνοψίζονται οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για να απαντήσουν στις ερωτήσεις που τους τέθηκαν.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	ΠΡΑΞΗ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ
Εκτέλεση του γραπτού αλγόριθμου (διαδικαστική στρατηγική)	Αφαίρεση κλασμάτων	Μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα και πραγματοποίηση αφαίρεσης. ¾ - ½ = ¾ - 2/4 = ¼
	Σύγκριση κλασμάτων	Μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα και σύγκριση των αριθμητών. 4/7 & 4/5 = 20/35 & 28/35. Άρα μεγαλύτερο είναι το 28/35, δηλαδή το 4/5.
	Πολλαπλασιασμός δεκαδικών	Τοποθέτηση των δεκαδικών σε κάθετη διάταξη και πραγματοποίηση του πολλαπλασιασμού
	Το ½ του ¼	Πραγματοποίηση πολλαπλασιασμού. ½ x ¼ = 1/8
	Διαίρεση ακεραίου με δεκαδικό	Πραγματοποίηση κάθετης διαίρεσης
	Εύρεση ποσοστού	25/100 x 80 = 2000/100 = 20
Νοερή ή σχηματική αναπαράσταση	Αφαίρεση κλασμάτων	Φαντάζομαι ή σχηματίζω ένα κύκλο με σκιασμένα τα ¾ και αφαιρώ το ½

(εννοιολογική στρατηγική)	Σύγκριση κλασμάτων	Φαντάζομαι ή σχηματίζω δύο πίτσες, η μία χωρισμένη σε 7 κομμάτια και η άλλη σε 5 και παίρνω τα 4.
	Το ½ του ¼	Χωρίζω έναν κύκλο σε τέσσερα κομμάτια και μετά το ένα από αυτά το χωρίζω στη μέση.
	Αφαίρεση κλασμάτων	Μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικό και πραγματοποίηση αφαίρεσης. ¾ - ½ =. 0,75-0,5=0,25.
		Μετατροπή των κλασμάτων σε ποσοστό και πραγματοποίηση αφαίρεσης. ¾ = 75%, ½=50%, 75%-50%-25%.
	Πολλαπλασιασμός δεκαδικών	Μετατροπή των δεκαδικών σε κλάσμα και πραγματοποίηση πολλαπλασιασμού. 3/10x3/10 = 9/100.
Πέρασμα από μία μορφή του ρητού σε άλλη (εννοιολογική στρατηγική)	Σύγκριση κλασμάτων	Μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικό και σύγκρισή τους. 4/7 = 0,57 & 4/5=0,8. Άρα, 4/7<4/5.
	Το ½ του ¼	Μετατροπή των κλασμάτων σε δεκαδικό. Το 0,5 του 0,25 = 0,125.
		Μετατροπή των κλασμάτων σε ποσοστά. Το 50% του 25% είναι το 12,5%.
	Διαίρεση ακεραίου με δεκαδικό	Μετατροπή του δεκαδικού σε κλάσμα και πραγματοποίηση διαίρεσης. 20:0,5 = 20: ½= 40
	Εύρεση ποσοστού	Μετατροπή του ποσοστού σε κλάσμα. Το 25%=1/4. Το ¼ του 80 είναι το 20.
		Μετατροπή του ποσοστού σε δεκαδικό. 0,25 x 80 = 20
Ίδιος αριθμητής, σύγκριση παρονομαστή (εννοιολογική στρατηγική)	Σύγκριση κλασμάτων	Αφού τα δύο κλάσματα έχουν κοινό αριθμητή, μεγαλύτερο είναι αυτό με τον μικρότερο παρονομαστή.
Σημείο αναφοράς η μονάδα (εννοιολογική	Σύγκριση κλασμάτων	Το 4/5 είναι πιο κοντά στη μονάδα από το 4/7.
	Διαίρεση	20:1 κάνει 20, άρα 20: 0,5= 40

στρατηγική)	ακεραίου με δεκαδικό	
Αναφορά στο μισό (εννοιολογική στρατηγική)	Το ½ του ¼	Σκέφτομαι ότι το 1/2 του 1/4 είναι το μισό του ¼. Ποια είναι δύο μισά που αν τα ενώσω βρίσκω το 1/4; Είναι το 1/8. Ή το μισό του ¼ το βρίσκω αν διπλασιάσω τον παρονομαστή δηλαδή το κάνω 1/8.
	Διαίρεση ακεραίου με δεκαδικό	Πόσα μισά έχει το 20;
Πολλαπλασιάζω με το 10 διαιρέτη και διαιρετέο (εννοιολογική στρατηγική)	Διαίρεση ακεραίου με δεκαδικό	200:5=40
Απλή μέθοδος των τριών (διαδικαστική στρατηγική)	Εύρεση ποσοστού	Στα 100 είναι 25, στα 80 είναι x.

Πίνακας 2: Οι διάφορες στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές

Στους πίνακες 3 και 4 που ακολουθούν, παρουσιάζονται τα ποσοστά των μαθητών που επέλεξαν κάθε στρατηγική σε κάθε άσκηση χωριστά.

	Ε΄ ΤΑΞΗ		
ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	**¾ - ½**	**0,3 x 0,3**	**Συγκρίνω 4/7 και 4/5**
Εκτέλεση του γραπτού αλγόριθμου	79 (64,8%)	39 (32%)	35 (28,7%)
Νοερή ή σχηματική αναπαράσταση	21 (17,2%)		37 (30,3%)
Πέρασμα από μία μορφή του ρητού σε άλλη	46 (37,7%)	27 (22,1%)	30 (24,6%)
Ίδιος αριθμητής, σύγκριση παρονομαστή			36 (29,5%)
Σημείο αναφοράς η μονάδα			13 (10,7%)

Πίνακας 3: Ποσοστά των μαθητών της Ε΄ Τάξης που επέλεξαν την κάθε στρατηγική

	ΣΤ΄ ΤΑΞΗ		
ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	**Το ½ του ¼**	**20:0,5**	**Το 25% του 80**
Εκτέλεση του γραπτού αλγόριθμου	15 (10,4%)	34 (23,6%)	57 (39,6%)
Νοερή ή σχηματική αναπαράσταση	16 (11,1%)		
Πέρασμα από μία μορφή του ρητού σε άλλη	16 (11,1%)	9 (6,2%)	60 (41,7%)
Σημείο αναφοράς η μονάδα		16 (11,1%)	
Αναφορά στο μισό	12 (8,3%)	11 (7,6%)	19 (13,2%)
Πολλαπλασιάζω με το 10 διαιρέτη και διαιρετέο		23 (16%)	
Απλή μέθοδος των τριών			15 (10,4%)

Πίνακας 4: Ποσοστά των μαθητών της ΣΤ΄ Τάξης που επέλεξαν την κάθε στρατηγική

Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, στις τέσσερις από τις έξι ασκήσεις, η στρατηγική που συγκεντρώνει τα μεγαλύτερα ποσοστά είναι εκείνη της εκτέλεσης του γραπτού αλγόριθμου. Μια άλλη στρατηγική που εμφανίζεται συχνά, σε όλες τις ασκήσεις της Ε' τάξης και στην άσκηση του ποσοστού της Στ' τάξης, είναι το πέρασμα από μία μορφή ρητού αριθμού σε μια άλλη. Δηλαδή, για να συγκρίνουν τα κλάσματα οι μαθητές, τα μετατρέπουν σε δεκαδικούς και για να υπολογίσουν το ποσοστό το μετατρέπουν σε κλάσμα ($\frac{1}{4}$) ή σε δεκαδικό (0,25). Η στρατηγική της προσφυγής στη σχηματική αναπαράσταση εμφανίζεται σε λίγες ασκήσεις και κυρίως στη σύγκριση των κλασμάτων. Τέλος, η στρατηγική της χρήσης της μονάδας ή του μισού ως σημεία αναφοράς εμφανίζεται σε πολύ μικρά ποσοστά.

Συμπεραίνει, λοιπόν, κανείς από τα παραπάνω ότι οι μαθητές γνωρίζουν πολύ λίγες νοερές στρατηγικές, όπως αυτή του περάσματος από τη μια μορφή του ρητού σε άλλη και τη σχηματική αναπαράσταση, τις οποίες χρησιμοποιούν σε μικρό ποσοστό.

ΙΙΙ. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι διαφορές στα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στις διάφορες ασκήσεις που δόθηκαν και η ανάλυση των λαθών οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι αντιλήψεις: *«ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει»* και *«η διαίρεση μικραίνει»*, που προέρχονται από την ενασχόληση με τους ακεραίους, είναι η κύρια αιτία για το χαμηλό ποσοστό επιτυχίας στις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς 0,3x0,3 και 20:0,5 και τον υπολογισμό του ½ του ¼ στα κλάσματα. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται και από τις άλλες έρευνες που υποστηρίζουν ότι η μάθηση των ακεραίων αριθμών εμποδίζει τη μάθηση των ρητών (π.χ., Geary, 2006; Leslie, Gelman & Gallistel, 2008; Wynn, 2002).

Επιβεβαιώνεται επίσης από τις αναπτυξιακές θεωρίες (Geary, 2006) και τις θεωρίες εννοιολογικής αλλαγής (Ni & Zhou, 2005; Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeiliti, 2008). Σε παρόμοια συμπεράσματα, ως προς τη δυσκολία των πράξεων κατάληξαν και οι έρευνες στην Αυστραλία των Callingham & Watson (2008, 2004) οι οποίοι προσδιόρισαν έξι επίπεδα συμπεριφοράς με ρητούς αριθμούς. Την πράξη ¾ - ½ την κατέταξαν στο δεύτερο επίπεδο δυσκολίας, την πράξη το 25% του 80 στο τρίτο επίπεδο δυσκολίας και τις πράξεις 0,3x0,3 και 20:0,5 τις κατέταξαν στο έκτο και μεγαλύτερο επίπεδο δυσκολίας. Επίσης, σε έρευνα των Clarke και Roche (2009) σε μαθητές Στ' τάξης του Δημοτικού στη Βικτώρια της Αυστραλίας, στην σύγκριση των κλασμάτων 4/7και 4/5, βρίσκουν ποσοστό επιτυχίας με νοερές στρατηγικές 37,2% ενώ στην εν λόγω έρευνα οι μαθητές της Ε' τάξης πετυχαίνουν με ποσοστό 73%. Η σύγκριση με τα αποτελέσματα των ερευνών της Αυστραλίας δείχνει ότι οι επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών στις πράξεις με νοερούς υπολογισμούς στους ρητούς αριθμούς δεν υπολείπονται από εκείνες των Αυστραλών και μάλιστα σε μερικές περιπτώσεις υπερτερούν.

Παρατηρήθηκε, επίσης, ότι στις ασκήσεις που προτάθηκαν και περιείχαν αριθμούς τέτοιους που επιδέχονταν κατανόηση και χρήση εννοιολογικών στρατηγικών, ένας αριθμός μαθητών μπορούσε να χρησιμοποιήσει μόνο τους γραπτούς αλγορίθμους. Γενικά, οι μαθητές, στο σύνολό τους, διέθεταν περιορισμένο αριθμό στρατηγικών στο ρεπερτόριό τους. Ο περιορισμένος αυτός αριθμός στρατηγικών δείχνει χαμηλό βαθμό ευελιξίας στις πράξεις με ρητούς αριθμούς. Διαπιστώθηκε, επίσης, ότι οι μαθητές που απάντησαν σωστά στις πράξεις, χρησιμοποιώντας μία μόνο στρατηγική, στην πλειοψηφία τους επέλεξαν τις διαδικαστικές στρατηγικές στις πράξεις ¾ - ½ και 0,3x0,3. Αντίθετα, στις πράξεις της σύγκρισης των κλασμάτων 4/7και 4/5, της εύρεσης του ½ του ¼ , της διαίρεσης 20:0,5 και της εύρεσης του ποσοστού, η πλειοψηφία των μαθητών χρησιμοποίησε εννοιολογικές στρατηγικές.

Δηλαδή, θα μπορούσε να διατυπωθεί ο ισχυρισμός ότι, αν και η διδασκαλία των πράξεων με ρητούς αριθμούς στην Ελλάδα δεν συμπεριλαμβάνει τη συστηματική διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και των εννοιολογικών διαδικασιών, παρόλα αυτά οι μαθητές χρησιμοποιούν αρκετά τις εννοιολογικές στρατηγικές. Επομένως, πιθανόν μια συστηματική διδασκαλία των νοερών υπολογισμών και των εννοιολογικών στρατηγικών στις πράξεις με ρητούς αριθμούς θα ενίσχυε την ευελιξία των μαθητών και θα επέφερε μεγαλύτερη κατανόηση.

IV. ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Το δείγμα της συγκεκριμένης έρευνας αποτελούν μαθητές οι οποίοι έλαβαν μέρος, οικειοθελώς, σε έναν μαθηματικό διαγωνισμό. Αυτό σημαίνει ότι, ίσως, οι μαθητές αυτοί να συνιστούν ένα δείγμα που έχει καλλίτερες επιδόσεις από το συνήθη μαθητικό πληθυσμό αλλά και από το συνολικό πληθυσμό των σχολείων από τα οποία

προέρχονται. Επομένως, τα αποτελέσματα ενδέχεται να μην γενικεύονται στο γενικό πληθυσμό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Callingham, R.A., & Watson, J.M. (2004). A developmental scale of mental computation with part-whole numbers. *Mathematics Education Research Journal*, 16(2), 69-86.

Callingham, R., & Watson, J. (2008). *Research in Mental Computation: Multiple Perspectives.* Post Pressed. ISBN:978-1-921214-36-3.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003, December). *Mental computation for part-whole number operations*. Paper presented at the joint conferences of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education, Auckland. Retrieved September 3, 20011, from http://www.aare.edu.au/03pap/alpha.htm

Clarke, D. M., & Roche A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72* (1) (June 12): 127-138.

Geary, D. C. (2006). Development of mathematical understanding. In W. Damon, et al. (Eds.), *Handbook of child psychology: Cognition, perception, and language* (Vol. 2, pp. 777-810). Hoboken, NH: Wiley.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Νοεροί υπολογισμοί. Λογαρέζω με το τσιμίδι μ'.* Εκδόσεις Ζυγός. Θεσσαλονίκη.

Leslie, A. M., Gelman, R., & Gallistel, C. R. (2008). The generative basis of natural number concepts. *Trends in Cognitive Sciences*, *12*(6), 213-218.

Ni, Y., & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of research on conceptual change* (pp. 3–34). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Yang. D., C., Reys, R., & Reys, B. (2007). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*, 383-403.

Wynn, K. (2002). Do infants have numerical expectations or just perceptual preferences? *Developmental Science, 2*, 207-209.

Η ΜΕΛΕΤΗ ΜΙΑΣ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ/ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ ΥΠΟ ΤΗΝ ΟΠΤΙΚΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Νίκα Στέλλα[1], **Κολέζα Ευγενία**[2]
Πανεπιστήμιο Πατρών
[1]snika@upatras.gr, [2]ekoleza@upatras.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία μελετά μια κοινότητα πρακτικής/διερεύνησης, ως μορφή επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης στα Μαθηματικά. Η σύσταση της κοινότητας πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο μιας πρωτοβουλίας, η οποία ξεκίνησε στα τέλη του ακαδημαϊκού έτους 2009-2010 και αναπτύσσεται τα τελευταία τέσσερα έτη. Τα χρόνια αυτά πραγματοποιήθηκαν διάφορες δράσεις, οι οποίες συνέβαλαν στην 'ανάδυση' της κοινότητας, ενός δυναμικού περιβάλλοντος που επέτρεψε την ανάπτυξη των εκπαιδευτικών και την εξέλιξη κρίσιμων πτυχών της διδακτικής τους πράξης. Στην εργασία υιοθετείται η οπτική της Θεωρίας Δραστηριότητας και ιχνηλατείται η εξέλιξη μιας δευτερογενούς αντίφασης στο Σύστημα Δραστηριότητας της κοινότητας, που προώθησε τις διαδικασίες της επεκτατικής μάθησης των μελών της.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών των μαθηματικών στο πλαίσιο των κοινοτήτων πρακτικής/διερεύνησης

Οι νέες προκλήσεις που αναδείχθηκαν στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης επέβαλαν την ανάγκη για μια εναλλακτική προσέγγιση της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών, η οποία προσδιορίζεται από θεωρητικές κατασκευές που προσεγγίζουν την αντίληψη της μάθησης ως "συμμετοχή" (Sfard, 1998), αντιμετωπίζουν τις μαθησιακές δραστηριότητες στο πλαίσιο που λαμβάνουν χώρα και συνδέονται στενά με τις θεωρίες "πλαισιοθετημένης μάθησης". Η μάθηση, σύμφωνα με αυτή την προοπτική, συγκροτείται μέσα από μια διαδικασία "νόμιμης περιφερειακής συμμετοχής σε κοινότητες πρακτικής" (Lave & Wenger, 1991, σελ. 29). Ο όρος "πρακτική" αναφέρεται σε "πόρους, πλαίσια και προοπτικές ιστορικού και κοινωνικού χαρακτήρα που είναι από κοινού αποδεκτά από τα άτομα που συμμετέχουν σε μια δράση, αξιοποιούνται κατά την ενεργοποίησή της και τη συντηρούν και περιλαμβάνουν όσα στοιχεία διατυπώνονται με ρητό τρόπο (γλώσσα,

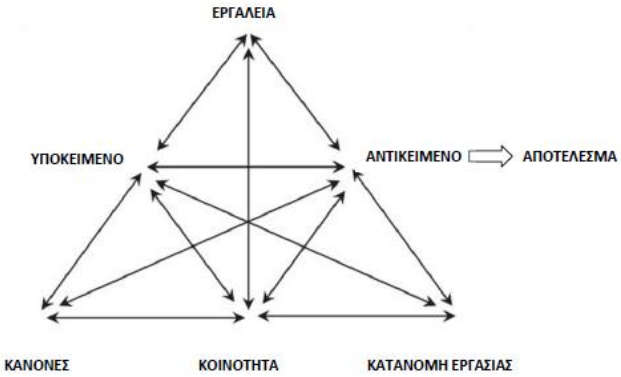
τεχνουργήματα, εργαλεία, σύμβολα, κανόνες), αλλά και αυτά που υπονοούνται (άρρητες συμβάσεις, κανόνες, υποθέσεις και απόψεις για τον κόσμο" (Wenger, στο Σακονίδης, 2007, σελ. 7). Η θεώρηση της μάθησης ως νόμιμη περιφερειακή συμμετοχή εμπεριέχει την έννοια της "μαθητείας" (Lave & Wenger, 1991), που αποδίδει στη συμμετοχή μια εξελισσόμενη μορφή. Τα μέλη μιας κοινότητας αναπτύσσονται, διαμορφώνοντας την ταυτότητά τους και αλλάζοντας τις μορφές συμμετοχής τους και, μέσα από διαδικασίες 'γίγνεσθαι', καθίστανται πλήρεις συμμέτοχοι στις κοινωνικοπολιτισμικές πρακτικές της κοινότητας.

Διακριτικό γνώρισμα μιας αυθεντικής κοινότητας πρακτικής αποτελεί το πνεύμα της διερεύνησης που αναπτύσσουν τα μέλη της (Wenger, et al., 2002), στοιχείο που συντελεί στο μετασχηματισμό μιας κοινότητας πρακτικής σε "κοινότητα διερεύνησης". Η έννοια της διερεύνησης δεν γίνεται αντιληπτή ως μια πρακτική της κοινότητας, αλλά ως ένα εργαλείο (inquiry as a tool) για την ανάπτυξη της πρακτικής, με στόχο την προώθηση μιας διερευνητικής στάσης των μελών της κοινότητας, ως τρόπο ύπαρξής τους μέσα στην πρακτική (inquiry as a way of being: Jaworski, 2004a). Η εμπλοκή των εκπαιδευτικών στην έρευνα αναμένεται ότι θα προωθήσει την ανάπτυξη της διδασκαλίας και ταυτόχρονα την επαγγελματική τους εξέλιξη. Η δέσμευση, ωστόσο, των εκπαιδευτικών στον αναστοχασμό και τη διερεύνηση, μπορεί να επιτευχθεί σε ένα υποστηρικτικό πλαίσιο που συγκροτείται στη βάση της συνεργασίας εκπαιδευτικών και εκπαιδευτών/ερευνητών. Οι όροι μιας τέτοιας συνεργασίας καθορίζονται από τη 'συνεργατική συμφωνία μάθησης' (co-learning agreement: Wagner, 1997), σύμφωνα με την οποία οι εταίροι της συνεργασίας θεωρούνται ως επαγγελματίες, έχουν τη δυνατότητα να είναι ταυτόχρονα και ερευνητές, εμπλέκονται από κοινού στη δράση και τον αναστοχασμό και καλούνται να συνεισφέρουν διαφορετικές γνώσεις και δεξιότητες στη συνεργασία τους. Με τη συγκρότηση, λοιπόν, μιας κοινότητας πρακτικής/διερεύνησης και τη συνεργασία εκπαιδευτών/ερευνητών και εκπαιδευτικών, διαμορφώνεται ένα γόνιμο και δυναμικό μαθησιακό περιβάλλον, το οποίο παρέχει πολλές ευκαιρίες για την επαγγελματική ανάπτυξη και των δυο πλευρών της συνεργασίας. Ο προσανατολισμός αυτός είναι συμβατός με τις σύγχρονες εκπαιδευτικές θεωρήσεις και παρέχει την ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς των μαθηματικών να εμπλακούν σε μια ουσιαστική επαγγελματική μάθηση, να αναπτύξουν νέες παιδαγωγικές πρακτικές στη διδασκαλία τους και να παρακολουθήσουν οι ίδιοι τη μάθηση και την ανάπτυξή τους.

1.2. Η Θεωρία Δραστηριότητας ως πλαίσιο για τη μελέτη μιας κοινότητας πρακτικής/διερεύνησης

Οι Lave & Wenger (1991, σελ. 98) αναφέρουν ότι "ο όρος 'κοινότητα' υπονοεί τη συμμετοχή σε ένα Σύστημα Δραστηριότητας. Οι συμμετέχοντες σ' αυτό αναπτύσσουν μια κοινή κατανόηση για το ίδιο το σύστημα, τη δραστηριότητα στην

οποία εμπλέκονται και τη σημασία της για τη ζωή τους και την κοινότητά τους". Η παραπάνω ιδέα επιτρέπει τη θεώρηση μιας κοινότητας πρακτικής με τη χρήση του πλαισίου της Θεωρίας Δραστηριότητας (ΘΔ). Η έννοια της "δραστηριότητας" αναφέρεται σε μια συλλογική συστημική διαμόρφωση, με μια σύνθετη διαμεσολαβητική δομή, που προσανατολίζει ένα υποκείμενο στον κόσμο των αντικειμένων (Leont'ev, αναφ. στους Roth & Radford, 2011). Η παρούσα εργασία χρησιμοποιεί τη "ΘΔ της 2ης γενιάς", που αναφέρεται σε ένα διευρυμένο 'Σύστημα Δραστηριότητας' (ΣΔ). Το μοντέλο αυτό περιλαμβάνει το πάνω μέρος του τριγώνου (μοντέλο της 1ης γενιάς) με τρεις επιπλέον κόμβους: τους κανόνες, την κοινότητα και την κατανομή της εργασίας. Οι κόμβοι αυτοί προσθέτουν τις κοινωνικοϊστορικές πλευρές της διαμεσολάβησης οι οποίες παραλείπονται από τον Vygotsky (Engeström, 1999).



Σχήμα 1.1. Το μοντέλο 2ης γενιάς της Θεωρίας Δραστηριότητας (Engeström & Cole 1997, σελ. 304)

Οι ερευνητές προσδίδουν στην έννοια της δραστηριότητας μία δυναμική και εξελικτική μορφή, δίνοντας έμφαση στις "αντιφάσεις" που προκύπτουν σε ένα ΣΔ και αποδίδοντας σ' αυτές τον καθοριστικό ρόλο της αλλαγής και της εξέλιξής του. Οι αντιφάσεις δεν ταυτίζονται με τα καθημερινά επιλύσιμα προβλήματα. Αποτελούν μακροχρόνιους και συστηματικούς σχηματισμούς, που εκδηλώνονται ως θεμελιώδεις εντάσεις και ρήξεις στη λειτουργία του ΣΔ. Λειτουργούν ως κινητήριοι πόροι ανάπτυξης της κεντρικής δραστηριότητας και η υπέρβασή τους είναι καθοριστική για την αλλαγή του συστήματος. Τέσσερα επίπεδα αντιφάσεων εντοπίζονται. Τα δυο πρώτα αφορούν στη μελέτη ενός συγκεκριμένου Σ.Δ. Έτσι, οι πρωτογενείς αντιφάσεις παρουσιάζονται εντός της κάθε συνιστώσας ενός ΣΔ και οι δευτερογενείς εμφανίζονται μεταξύ των συνιστωσών ενός κεντρικού ΣΔ. Ο Engeström (1999) αναδεικνύει τους μηχανισμούς της 'εσωτερίκευσης' και 'εξωτερίκευσης' ως πρωταρχικούς για τη διαδικασία επίλυσης των αντιφάσεων: "Καθώς οι διαταραχές και οι αντιφάσεις της δραστηριότητας γίνονται πιο απαιτητικές, η εσωτερίκευση παίρνει τη μορφή του κριτικού αναστοχασμού και η εξωτερίκευση, δηλαδή η

αναζήτηση λύσεων, αυξάνεται. Η εξωτερίκευση φτάνει στο αποκορύφωμά της, όταν σχεδιάζεται και υλοποιείται ένα νέο μοντέλο για τη δραστηριότητα. Καθώς το νέο μοντέλο σταθεροποιείται, η εσωτερίκευση των εγγενών του τρόπων και μέσων γίνεται η κυρίαρχη μορφή μάθησης και ανάπτυξης (σελ. 33-34). Η εξέλιξη αυτή ονομάζεται επεκτατική μάθηση (expansive learning).

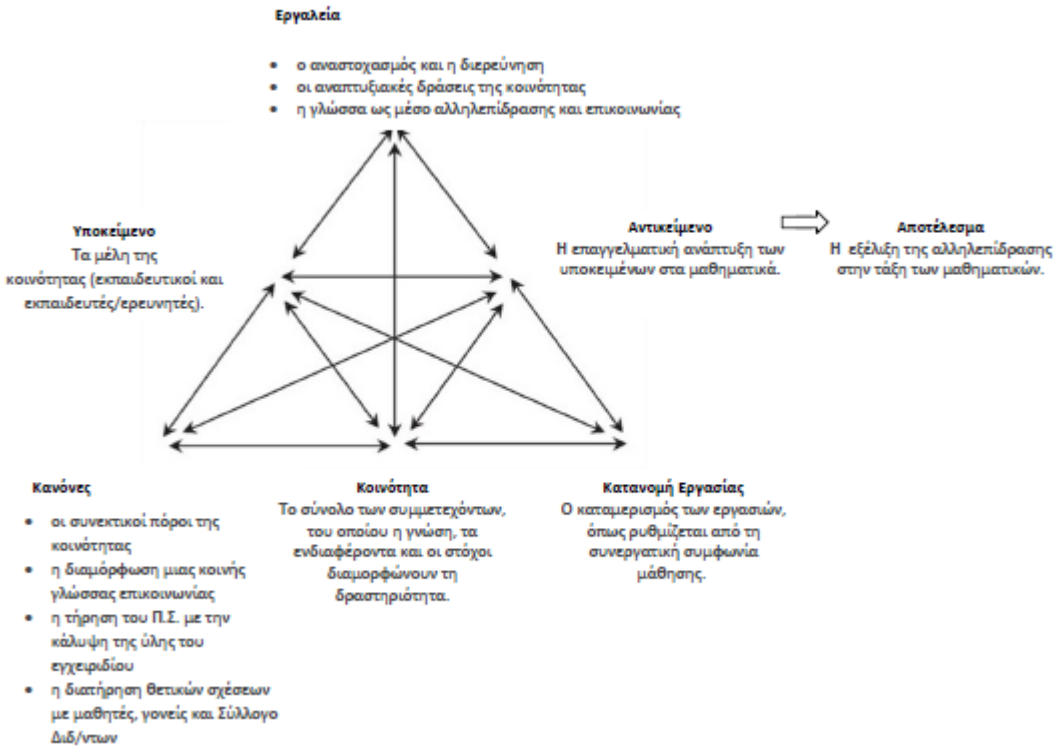
2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα αυτή αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης προσπάθειας που στοχεύει στη μελέτη της ανάπτυξης μιας κοινότητας πρακτικής/διερεύνησης υπό την οπτική της ΘΔ. Συγκεκριμένα, ιχνηλατεί την εξέλιξη των πρωτογενών και δευτερογενών αντιφάσεων, που αναδύθηκαν στο ΣΔ της κοινότητας και προώθησαν τις διαδικασίες επεκτατικής μάθησης. Η παρούσα εργασία εστιάζεται στη μελέτη μιας δευτερογενούς αντίφασης που παρουσιάστηκε ανάμεσα σε δυο συνιστώσες του ΣΔ.

Η σύσταση της κοινότητας έγινε από δυο ερευνητές (Ε1: μέλος της ακαδημαϊκής κοινότητας και Ε2: εκπαιδευτικός πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης). Στα μέσα του δεύτερου έτους διαμορφώθηκε ένα σταθερό σώμα έξι εκπαιδευτικών, που συγκροτούν την ομάδα των πρώτων μελών και αποτελούν το δείγμα αυτής της μελέτης. Οι αναπτυξιακές δράσεις του 1^{ου} έτους στόχευαν στην οικοδόμηση της βάσης για μια επαγγελματική συνεργασία και ανταλλαγή απόψεων και εμπειριών. Οι δράσεις του 2^{ου} έτους είχαν ποικίλα θέματα, τα οποία αποτέλεσαν το πλαίσιο για αναστοχαστικές συζητήσεις. Κάποια από αυτά αφορούσαν στη διερεύνηση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά, τη διδασκαλία και τη μάθησή τους, τη σχέση των πεποιθήσεων και των πρακτικών των εκπαιδευτικών, την εννοιολογική κατανόηση που αναπτύσσουν οι μαθητές για διάφορα μαθηματικά θέματα, τη διερεύνηση ‘περιπτώσεων’ (σκηνών αλληλεπίδρασης μιας τάξης), το σχολιασμό και την ανάλυση μαθηματικών έργων και το σχεδιασμό, την υλοποίηση και την ανάλυση διδασκαλιών. Κατά το 3^{ο} και 4^{ο} έτος, η δραστηριότητα στην κοινότητα και την τάξη ήταν παράλληλη, καθώς οι εκπαιδευτικοί πραγματοποιούσαν έρευνα-δράση για θέματα σχετικά με τη διερεύνηση (διερεύνηση των εκπαιδευτικών, μοτίβα αλληλεπίδρασης στην τάξη των μαθηματικών και πιθανοί τρόποι διαφοροποίησής τους, διερεύνηση των μαθητών). Μια συνάντηση εστιάστηκε στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών και μια σειρά δράσεων αφορούσε στο συνεργατικό σχεδιασμό, την εφαρμογή και την αξιολόγηση μαθημάτων (μελέτη μαθήματος).

Τα δεδομένα της μελέτης αφορούν τα τέσσερα πρώτα έτη ανάπτυξης, κατά τα οποία πραγματοποιήθηκαν συνολικά σαρανταπέντε τυπικές συναντήσεις, διπλάσιες συναντήσεις των δυο ερευνητών και πολλές άτυπες συναντήσεις λιγότερων μελών στον ‘ιδιωτικό χώρο’ της κοινότητας (προσωπικές συναντήσεις, τηλεφωνική ή ηλεκτρονική επικοινωνία). Η διαδικασία συλλογής των δεδομένων ήταν συνεχόμενη

προκειμένου να αποτυπωθούν πτυχές της εξέλιξης και της ανάπτυξης. Τα δεδομένα ήταν ποικίλα: οι απομαγνητοφωνημένες συναντήσεις της κοινότητας, οι συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών, τα ημερολόγια των εκπαιδευτικών στο τέλος του 2ου και 3ου έτους, οι σημειώσεις των ερευνητών, οι απομαγνητοφωνημένες διδασκαλίες των εκπαιδευτικών, οι συνεντεύξεις των μαθητών τεσσάρων εκπαιδευτικών. Ως προς τη διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων, χρησιμοποιήθηκε η 'ανάλυση περιεχομένου'. Η μονάδα ανάλυσης προσδιορίστηκε από τη συμπληρωματικότητα του συστήματος και του υποκειμένου (Engestrom, 1999). Έτσι, ο προσδιορισμός της μονάδας ανάλυσης ενσωμάτωσε τις σκέψεις και ενέργειες των υποκειμένων καθώς και τις πολιτισμικά συγκεκριμένες και σαφείς δραστηριότητές τους που κατευθύνονται προς το στόχο της επαγγελματικής τους ανάπτυξης. Οι συνιστώσες του ΣΔ της κοινότητας παρουσιάζονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 2. Το διαμεσολαβητικό τρίγωνο με τις συνιστώσες του ΣΔ της κοινότητας πρακτικής

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η δυναμική της ΘΔ ανέδειξε διάφορες αντιφάσεις. Οι πρωτογενείς εμφανίστηκαν εντός κάποιων κόμβων (υποκειμένου, αντικειμένου, εργαλείων και κατανομής της εργασίας) και οι δευτερογενείς ανάμεσα σε κάποιες συνιστώσες. Στην πραγματικότητα, πολλές συνιστώσες εμπλέκονταν στη διαδικασία εξέλιξης των

αντιφάσεων, οι οποίες μετέτρεπαν τις πρωτογενείς αντιφάσεις σε δευτερογενείς και μετακινούσαν τις εντάσεις στις δευτερογενείς, ανάμεσα και σε άλλα συστατικά του συστήματος. Η δευτερογενής αντίφαση που μελετάται στην παρούσα εργασία εντοπίστηκε ανάμεσα στο διαμεσολαβητικό εργαλείο της διερεύνησης και κάποιους κανόνες της δραστηριότητας.

3.1. Ο προσδιορισμός και η εκδήλωση της αντίφασης

Οι κύριοι κανόνες, που ήρθαν σε αντιπαράθεση με το εργαλείο της διερεύνησης και προκάλεσαν την αντίφαση, ήταν η τήρηση του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών, η διατήρηση θετικών σχέσεων με τους γονείς των μαθητών και η διαμόρφωση του 'λόγου' της κοινότητας, δηλαδή, μιας συλλογικής γλώσσας επικοινωνίας των υποκειμένων. Η πραγμάτωση του προτεινόμενου διαμεσολαβητικού εργαλείου της διερεύνησης ως 'τρόπου ύπαρξης', απαιτούσε την τροποποίηση της μαθηματικής δραστηριότητας στην τάξη και την εισαγωγή διερευνητικών προσεγγίσεων, όπως την επιλογή μαθηματικών έργων που να επιτρέπουν τη διερεύνηση καθώς και τη διευκόλυνση της διερεύνησης των μαθητών, με την παροχή των κατάλληλων ευκαιριών και του απαραίτητου χρόνου. Η προϋπόθεση αυτή σηματοδότησε την ανάδυση διάφορων εξελισσόμενων στο χρόνο εντάσεων. Οι εκπαιδευτικοί θεώρησαν ότι η προτεινόμενη χρήση της διερεύνησης δεν ήταν συμβατή με τον κανόνα της 'τήρησης του Προγράμματος Σπουδών', καθώς απαιτούσε περισσότερο διδακτικό χρόνο σε σύγκριση με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας, στον οποίο συνήθιζαν να 'απαγγέλλουν' τη μαθηματική γνώση ή να καθοδηγούν τους μαθητές, ώστε να φτάσουν γρήγορα στο μαθηματικό προϊόν. Το πρόβλημα επιδεινωνόταν από τον τρόπο χρήσης του σχολικού εγχειριδίου. Οι εκπαιδευτικοί είχαν την πεποίθηση ότι η εφαρμογή του κανόνα της 'τήρησης του Προγράμματος Σπουδών' μπορούσε να επιτευχθεί μόνο με την κάλυψη της ύλης του σχολικού εγχειριδίου, το οποίο είχε μετατραπεί σε εργαλείο πίεσης, με στόχο την ολοκλήρωση της αντίστοιχης ενότητας στον απαιτούμενο χρόνο. *"Θεωρώ ότι αυτό με έχει βάλει η πολιτεία να κάνω. Δεν είμαι ελεύθερη. Έχω το βιβλίο μου που πρέπει να βγάλω, έχω τη συγκεκριμένη ώρα που πρέπει να το κάνω οπότε υπάρχει καθοδήγηση και εγώ εκτελώ ευσυνειδήτως τα καθήκοντά μου". (Μαριάννα, Συνέντευξη, τέλος β΄ έτους).* Κάποιοι άλλοι λόγοι που αιτιολογούσαν την εξάρτηση από το εγχειρίδιο και τη δυσκολία αποδοχής των διερευνητικών προσεγγίσεων (όπως ανέφεραν οι εκπαιδευτικοί) ήταν ο περιορισμένος διδακτικός χρόνος, η πεποίθηση ότι το πλήθος των ασκήσεων διασφαλίζει την κατανόηση των μαθητών, η ανασφάλεια απέναντι στο μαθηματικό περιεχόμενο και η δυσκολία επιλογής και σχεδιασμού μαθηματικών έργων.

Η προσπάθεια τήρησης του 'κειμένου' του βιβλίου τροποποιούσε το στόχο της μαθηματικής δραστηριοτητας στην τάξη, δηλαδή, την παροχή κατάλληλων ευκαιριών στους μαθητές για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και την

ανάπτυξη βασικών μαθηματικών ικανοτήτων. Οι εκπαιδευτικοί προσανατολίζονταν στην κάλυψη της ύλης και όχι στην κατανόηση και μάθηση των μαθητών. Περιόριζαν, έτσι, τη μαθηματική γνώση στο μαθηματικό προϊόν, εστιάζονταν στην απομνημόνευση πράξεων και κανόνων και κατέληγαν να κάνουν μια καθοδηγούμενη διδασκαλία. *"Πριν μπω στην κοινότητα, η διδασκαλία μου δεν ξέφευγε από το παραδοσιακό πρότυπο, όπου η μάθηση αποτελεί συχνά μια παθητική, ατομική και σιωπηλή διαδικασία. Η διδακτική μου προσέγγιση βασιζόταν μόνο στο να δείξει στους μαθητές, πώς θα κάνουν τις προσδιορισμένες ασκήσεις του βιβλίου. Δημιουργούσα ένα περιβάλλον ασφυκτικής καθοδήγησης, όπου η προσοχή των μαθητών στρεφόταν στις οδηγίες μου και όχι σε διερεύνηση μαθηματικών ιδεών". (Δέσποινα, Ημερολόγιο, τέλος γ΄έτους).* Οι εκπαιδευτικοί επέλεγαν να ακολουθούν το διδακτικό εγχειρίδιο και όχι τη σκέψη των μαθητών που συχνά έδινε άλλες κατευθύνσεις στο μάθημα των μαθηματικών: *"... έχει εναλλακτική σκέψη αυτός ο μαθητής...αλλά ακύρωσε το μάθημα δυο φόρες, καθώς ήταν να διδάξεις ένα συγκεκριμένο τρόπο για να κάνεις πολλαπλασιασμό" (Βάσω,Συνάντηση Κοινότητας, τέλος β΄ έτους).* Η εξέλιξη της αντίφασης συνδέθηκε και με έναν άλλο κανόνα του ΣΔ, τη διατήρηση θετικών σχέσεων με τους γονείς των μαθητών, οι οποίοι αξιολογούσαν την καθημερινή εργασία στην ταξη, με βάση της πρόοδο που σημειωνόταν στο σχολικό βιβλίο των μαθητών. Γι' αυτό το λόγο, οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονταν να διδάσκουν, επιλέγοντας μαθηματικά έργα εκτός του σχολικού εγχειριδίου.

Οι εντάσεις οξύνθηκαν όταν οι εκπαιδευτικοί σχεδίασαν σε ατομικό επίπεδο τις πρώτες διδασκαλίες που βιντεοσκοπήθηκαν και αναλύθηκαν, επιλέγοντας έργα εκτός σχολικού βιβλίου. Η απομάκρυνση από τις αποδεκτές και οικείες πρακτικές συνεπαγόταν τη λήψη υψηλού ρίσκου από τους εκπαιδευτικούς: *"Το γεγονός ότι δουλεύουμε με τα βιβλία μας έχει δώσει και μια σιγουριά. Όταν παίρνω το βιβλίο ξέρω πού πατάω, ελέγχω. Από εμπειρία... σε κάτι καινούριο νιώθω ότι διδακτικά δεν έχω πετύχει. Νιώθω την ασφάλεια του βιβλίου, όταν επιλέγω ή φτιάχνω άλλες δραστηριότητες είναι σα να φτιάχνω εγώ δικό μου βιβλίο και έχω ελλιπείς γνώσεις για να στηρίξω κάτι τέτοιο" (Βάσω, Συνάντηση Κοινότητας, τέλος, β΄ έτους).* Ως αποτέλεσμα, αναγνωρίστηκε από τους εκπαιδευτικούς η δυσκολία επιλογής και διαχείρισης των μαθηματικών έργων, γεγονός που επιδείνωνε την εκδήλωση της αντίφασης.

3.2. Κινήσεις υπέρβασης της αντίφασης

Αναζητώντας τρόπους για την αντιμετώπιση των εντάσεων, οι εκπαιδευτικοί ανέπτυξαν μια διαφορετική κατανόηση για το εργαλείο της διερεύνησης, χρησιμοποιώντας τις διερευνητικές προσεγγίσεις, ως συμπληρωματικές στην καθημερινή τους διδασκαλία. Αυτή η διαχείριση, όμως, καθυστερούσε την πρόοδό τους στο σχολικό εγχειρίδιο, γεγονός που συντελούσε στην όξυνση της αντίφασης: *"Αυτό θα το κάνω όταν έχω διδάξει το βιβλίο, έχω κάνει τα βασικά πράγματα. [...]*

Προσπαθούσα να συνδυάσω και αυτά που μαθαίναμε με αυτό το τυπικό. Και εκεί είχα και άγχος χρόνου" (Δέσποινα, Συνέντευξη, τέλος β΄ έτους). Η έννοια της 'διερεύνησης' άρχισε σταδιακά να επιδέχεται διαφορετικές ερμηνείες μέσα από τις δράσεις που αφορούσαν στα μαθηματικά έργα. Ωστόσο, ο 'ατομικός' λόγος των υποκειμένων, διαμορφωμένος από τα ποικίλα τους βιώματα, προκαλούσε εντάσεις, σχετικά με τις διαφορετικές σημασίες που δίνονταν σε όρους όπως: 'διερευνητικά έργα' ή 'αποτελεσματική διδασκαλία μαθηματικών'. Η δυσκολία αυτή ενέπλεκε και έναν άλλο κανόνα του ΣΔ, κάνοντας επιτακτική τη διαμόρφωση του 'λόγου' της κοινότητας, ώστε να διευκολυνθεί η κατανόηση του εργαλείου της διερεύνησης και η ανάπτυξη της δραστηριότητας.

Στα μέσα του τρίτου έτους, τροποποιώντας την κατανομή της εργασίας, οι εκπαιδευτικοί ζήτησαν την πραγματοποίηση μιας δράσης σχετικά με το νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ). Δόθηκε, έτσι, η ευκαιρία να συζητηθούν τα μαθηματικά έργα που προτείνονται σε αυτό και οι δυνατότητες σύνδεσης των διερευνητικών προσεγγίσεων με την εφαρμογή του ΠΣ. Οι εκπαιδευτικοί συνειδητοποίησαν ότι το νέο ΠΣ παρέχει την ελευθερία σχεδιασμού της διδασκαλίας πέρα από το σχολικό εγχειρίδιο. Διαπίστωσαν, ακόμα, ότι είναι περισσότερο προετοιμασμένοι από τους εκπαιδευτικούς εκτός κοινότητας, μπροστά στην πρόκληση της επιλογής και του σχεδιασμού μαθηματικών έργων, κατάλληλων για τους στόχους του ΠΣ. Η δράση αυτή λειτούργησε ως διαμεσολαβητικό εργαλείο για μια μορφή υπέρβασης της αντίφασης. Ενθάρρυνε τους εκπαιδευτικούς να σχεδιάσουν τη διδασκαλία τους πέρα από το σχολικό βιβλίο, καθώς ένας λόγος που στήριζαν την εργασία τους στο εγχειρίδιο ήταν η πεποίθηση ότι ευθυγραμμιζόταν με το ΠΣ: *"Η συμμετοχή μου στην ομάδα με βοήθησε να τολμήσω να υπερβώ το σχολικό βιβλίο και να σχεδιάσω το μάθημά μου" (Μαριάννα, Ημερολόγιο, τέλος γ΄ έτους).* Έτσι, οι εκπαιδευτικοί καθίστανται περισσότερο 'ανοικτοί' και δημιουργικοί στην ευέλικτη και κριτική διαχείριση του εγχειριδίου και νιώθουν επαρκείς να αναλάβουν πρωτοβουλίες στη διδασκαλία τους: *"Ένα από τα θέματα που απασχόλησαν την κοινότητα ήταν και αυτό της επιλογής σωστών δραστηριοτήτων, δραστηριοτήτων που να ανταποκρίνονται στους στόχους που η κοινότητα είχε θέσει με βάση τις μαθησιακές τροχιές και το επίπεδο που θα έπρεπε να έχουν οι δραστηριότητες. Είναι γεγονός ότι πολύ πιο εύκολα υποστηρίζεις διδακτικά στην τάξη κάτι που εσύ έχεις σχεδιάσει από ένα έτοιμο υλικό που πολλές φορές το κρίνεις ανεπαρκές ή και ακατάλληλο για την τάξη σου" (Βάσω, Ημερολόγιο, τέλος γ΄έτους).* Στο τέλος του τρίτου έτους και έπειτα από τις δράσεις της 'μελέτης μαθήματος', στις οποίες αναλύθηκαν με διερευνητικό τρόπο μαθηματικά έργα, αναδείχθηκε από τους εκπαιδευτικούς μια μορφή υπέρβασης της αντίφασης, με την πρόταση αποδέσμευσης από τους επίσημους θεσμικούς φορείς, ώστε να υπάρξει η δυνατότητα επιλογής διδακτικού εγχειριδίου και σχεδιασμού μαθηματικών έργων, σύμφωνα με τους στόχους του ΠΣ. *"Θα' θελα να είχα την άδεια από το Υπουργείο ότι 'έχεις να διδάξεις αυτό και αυτό στην τάξη, σου δίνω τη δυνατότητα να έχεις δέκα βιβλία ή μια τράπεζα θεμάτων και δούλεψε'. Θα προτιμούσα να μην έχω βιβλία και να κάνω ελεύθερα το μάθημα" (Δέσποινα, Συνέντευξη, τέλος γ΄ έτους).* Όπως γίνεται

φανερό, σημειώθηκε μια εξέλιξη στον τρόπο χρήσης του διδακτικού εγχειριδίου, καθώς οι εκπαιδευτικοί άρχισαν να πειραματίζονται με διερευνητικό τρόπο και συνειδητοποίησαν την ανάγκη 'εναλλακτικών' μαθηματικών έργων. Ανέλαβαν πρωτοβουλίες αναδιάρθρωσης του περιεχομένου των μαθημάτων τους, επέλεξαν και σχεδίασαν μαθηματικά έργα.

Μέσα από τη διαδικασία που περιγράφηκε, τροποποιήθηκαν οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για το θέμα του διδακτικού χρόνου και της διαχείρισής του, το οποίο αποτελούσε ένα κύριο πρόβλημα που συνέτεινε στην προσκόλληση στο σχολικό εγχειρίδιο και την υιοθέτηση μιας καθοδηγητικής διδασκαλίας. Με την έρευνα-δράση στην τάξη και τις διερευνητικές δράσεις της κοινότητας, οι εκπαιδευτικοί συνειδητοποίησαν ότι η 'γνώση' της επιλογής των κατάλληλων έργων, που είχε κατακτηθεί στο πλαίσιο της κοινότητας, τους παρείχε το χρόνο που χρειάζονταν, καθώς επέλεγαν λιγότερα έργα για την εκπλήρωση των στόχων του μαθήματος. Επιπρόσθετο χρόνο τους παρείχε και η μείωση του δικού τους προσωπικού χρόνου ομιλίας στο μάθημα των μαθηματικών, τον οποίο εκχωρούσαν στους μαθητές, παρέχοντάς τους την ευκαιρία να διερευνήσουν: *" πλέον έχουμε μάθει να επιλέγουμε τις δραστηριότητες, να βάζουμε λιγότερες δραστηριότητες και να χρησιμοποιούμε σωστά το χρόνο μας. Γι' αυτό και είναι σημαντικό να αφήνεις χρόνο στα παιδιά να διερευνήσουν. Άμα θες χρόνο για να μιλάς μόνο εσύ, τότε τα 45 λεπτά δε σου φτάνουν" (Χρήστος, Συνέντευξη, τέλος γ΄ έτους).* Η ρύθμιση των εντάσεων και η επίλυση της αντίφασης πραγματοποιήθηκε ταυτόχρονα με την άμβλυνση της έντασης ανάμεσα στο εργαλείο της διερεύνησης και τον κανόνα του κοινού κώδικα επικοινωνίας. Ο 'λόγος' της κοινότητας διαμορφώθηκε σε συνάρτηση με τις άλλες κοινωνικές πρακτικές, μέσα από μια συλλογική διαδικασία που εξελίχθηκε στο πλαίσιο του ιστορικοπολιτισμικού γίγνεσθαι. Η φράση που ειπώθηκε από ένα μέλος της κοινότητας: *"...σκεφτόμουν με 'παλιούς' όρους ενώ τώρα με 'νέους'..."*, φανερώνει τις νέες σημασίες και ερμηνείες που διαμορφώθηκαν με την εξέλιξη του τρόπου σκέψης και το μετασχηματισμό της διδακτικής πρακτικής. Η σημασία φράσεων, όπως 'αποτελεσματική διδασκαλία μαθηματικών' ή 'διερευνητικά μαθηματικά έργα', ακολούθησε μια ιστορική εξέλιξη, η οποία αποτελεί στην πραγματικότητα, μια οριοθέτηση και λεκτικοποίηση του συλλογικά διαμορφούμενου νοήματος μεσα από τις δράσεις της κοινότητας. *"Μου φάνηκαν 'αποτελεσματικές διδασκαλίες', αυτές στις οποίες για πρώτη φορά τα παιδιά διερεύνησαν και φτάσαν μόνα τους σε συμπεράσματα". (Δέσποινα, Συνέντευξη, τέλος γ΄ έτους). "Πολύ σημαντικές είναι οι δραστηριότητες που θα δώσεις, δραστηριότητες που θα προάγουν τη διερεύνηση, δηλαδή θα βάζουν το μαθητή να ψάξει μόνος του, δε θα δώσουν έτοιμη τη λύση, δε θα δώσουν έτοιμο ένα ναι ή ένα όχι, ένα σωστό ή ένα λάθος που θα τον βάλουν να σκεφτεί, θα τον βάλουν στη διαδικασία να ερευνήσει, να ψάξει" (Βάσω, Συνέντευξη, τέλος γ΄ έτους).* Ως αποτέλεσμα, ο 'λόγος' της κοινότητας, που είχε τεθεί ως κανόνας του ΣΔ, έπαιξε το ρόλο του διαμορφωτικού εργαλείου, διαμόρφωσε και διαμορφώθηκε από τον εξελισσόμενο τρόπο σκέψης και συνέβαλε με αυτό τον τρόπο στην επίλυση της αντίφασης.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η μελέτη της εξελισσόμενης αντίφασης ανάμεσα στο εργαλείο της διερεύνησης και τους κανόνες του ΣΔ συνέβαλε στον εντοπισμό και την επίλυση κάποιων παραγόντων που παρεμπόδιζαν την ανάπτυξη των υποκειμένων και του συστήματος και προσανατόλισε τις προσπάθειες υπέρβασης που πραγματοποιήθηκαν. Επέτρεψε την ιχνηλάτιση των στοιχείων της καινοτομίας που εσωτερικεύθηκαν στο πλαίσιο της πρωτοβουλίας ΕΑ και θεμελίωσε την κατανόηση της αλληλεπίδρασης της ατομικής και συστημικής ανάπτυξης. Η αντίφαση αποτέλεσε πηγή 'επεκτατικής μάθησης' για τα υποκείμενα, καθώς η επίλυσή της πραγματώθηκε μέσα από αναπτυξιακούς μετασχηματισμούς, που συνετέλεσαν στις εναλλακτικές ερμηνείες του εργαλείου της διερεύνησης και οδήγησαν στην κατασκευή και εφαρμογή νέων τρόπων λειτουργίας του ΣΔ. Μια παρόμοια αντίφαση (ανάμεσα στις διερευνητικές προσεγγίσεις και τις απαιτήσεις του ΠΣ) εντοπίζεται και σε ένα άλλο πρόγραμμα ΕΑ (Goodchild, 2007), στο οποίο οι εκπαιδευτικοί θεωρούσαν ότι η ανάπτυξη της διερεύνησης, ως προσέγγιση για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, δεν ευθυγραμμίζεται με το ΠΣ. Στην παρούσα μελέτη, η εξέλιξη της αντίφασης συνδέθηκε με δυο ακόμα κανόνες του ΣΔ: τη διατήρηση μιας θετικής σχέσης με τους γονείς των μαθητών και τη διαμόρφωση ενός κοινού κώδικα επικοινωνίας των υποκειμένων. Ως αποτέλεσμα, οι εκπαιδευτικοί άρχισαν να 'σκέφτονται με νέους όρους' και η εξέλιξη του τρόπου σκέψης τους συνέβαλε στη μετάβαση από τις 'παλαιές' στις 'νέες' σημασίες και την ανάπτυξη μιας κοινής γλώσσας κατανόησης της εργασίας της κοινότητας και της τάξης. Οι εκπαιδευτικοί κατανόησαν την αξία του εργαλείου της διερεύνησης, καθώς συνειδητοποίησαν ότι οι απαιτήσεις του ΠΣ μπορούν να εκπληρωθούν με αποτελεσματικό τρόπο μέσα από τη διερευνητική προσέγγιση της μαθηματικής δραστηριότητας. Η διαφορετική κατανόηση του εργαλείου της διερεύνησης οδήγησε στην αναδιαμόρφωση των κανόνων του ΣΔ και την οριστική επίλυση της αντίφασης, μέσα από τη μετασχηματιστική διαδικασία που περιγράφηκε.

Υποσημείωση. Η έρευνα υποστηρίχθηκε από το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Engeström, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. In Y. Engeström, R. Miettinen, & R.-L. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory (pp. 19-38).* New York: Cambridge University Press.

Goodchild, S. (2007). An activity theory perspective of didacticians' learning within a mathematics teaching development research project. In D. Pitta- Pantazi & G. Phillipou (eds.), *Proceedings of the 5th congress of European society for research in mathematics education (CERME5)* (pp.1678-1687). Cyprus: ERME.

Jaworski, B. (2004a). Grappling with complexity: Co-learning in inquiry communities in mathematics teaching development. In M. Johnsen Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 1* (pp. 17-36). Bergen: Bergen University College.

Lave, J. and Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*, Cambridge, Cambridge University Press.

Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). *A culturalhistorical perspective on mathematics teaching and learning*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and on the dangers of choosing just one, *Educational Researcher 27*(2), 4–13.

Wagner, J. (1997). The unavoidable intervention of educational research: A framework for reconsidering research-practitioner cooperation. *Educational Researcher*, *26*, 13-22.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press.

Wenger, E., McDermott, R., & Snyder, W. M. (2002). *Cultivating communities of practice: A guide to managing knowledge.* Boston, MA: Harvard Business School Press.

Σακονίδης, Χ. (2007). Κοινότητες πρακτικής στη μάθηση. Στο Δραγώνα, Θ. & Φραγκουδάκη, Α., *Πρόσθεση όχι αφαίρεση, πολλαπλασιασμός όχι διαίρεση* (σελ. 289-326). Αθήνα: Μεταίχμιο.

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΝΕΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΟΨΕΙΣ ΑΝΑΠΛΑΙΣΙΩΣΗΣ

Α. Κλώθου[1] και Χ. Σακονίδης[2]
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
[1]aklothou@eled.duth.gr, [2]xsakonid@eled.duth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα πεδία αναπλαισίωσης και ειδικότερα οι λόγοι που παράγονται σε αυτά επιτρέπουν την κατανόηση της νοηματοδότησης που αποδίδεται σε ένα Πρόγραμμα (ΠΣ) από τους εκπαιδευτικούς. Η παρούσα μελέτη εστιάζεται στους λόγους που ανέπτυξαν τέσσερις εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με διαφορετικό επαγγελματικό προφίλ, κατά τη διάρκεια μιας ημι-δομημένης συνέντευξης που πραγματοποιήθηκε μετά το πέρας της πιλοτικής εφαρμογής του νέου ΠΣ που συγκροτήθηκε για τα Μαθηματικά στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι η νοηματοδότηση και η υλοποίηση των μεταρρυθμίσεων είναι αποτέλεσμα παράλληλων αναπλαισιώσεων σε διαφορετικά επίπεδα.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι έρευνες που μελετούν τις διαδικασίες υλοποίησης των εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων έχουν αναδείξει την πολύπλοκη φύση της αλλαγής στις διδακτικές πρακτικές και τους φορείς (agents) που λειτουργούν σε θεσμικό επίπεδο (πολιτεία) και σε ατομικό επίπεδο (εκπαιδευτικοί), ως εμπόδια σε αυτήν την αλλαγή (π.χ. Fullan 2001). Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν διαστρέβλωση των καινοτομιών που προωθούνται στην πράξη, κυρίως εξαιτίας της κυριαρχίας των παραδοσιακών διδακτικών προσεγγίσεων και τη μερική μόνο υιοθέτηση καινοτόμων στοιχείων, συνήθως εκείνων που μπορούν ανώδυνα να ενσωματωθούν στις υπάρχουσες διδακτικές πρακτικές. Ακόμη, υποδεικνύουν αντίσταση των εκπαιδευτικών στις προτεινόμενες αλλαγές για διάφορους λόγους, όπως η ασυμβατότητα των πεποιθήσεών τους σε σχέση με αυτές που πρεσβεύει η μεταρρυθμιστική προσπάθεια, και φτωχής εμβέλειας ευκαιρίες μύησής τους στις καινοτομίες. Ως αποτέλεσμα, παρατηρείται περιορισμένη μετατόπιση της διδακτικής πρακτικής προς την επιθυμητή κατεύθυνση (Jacobs et al. 2006, Stoll et al. 2003), κυρίως σε περιπτώσεις εμπλοκής των εκπαιδευτικών σε προγράμματα παρέμβασης με βάση μεθοδολογίες που εντάσσονται στην κοινωνικο-πολιτισμική θέαση της μάθησης και της διδασκαλίας, όπως η έρευνα δράση και ο αναστοχασμός της διδακτικής πράξης (π.χ. Fennema et al. 1996, Jaworski 2007).

2. ΝΕΟ ΠΣ & ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΑΝΑΠΛΑΙΣΙΩΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κάθε νέο ΠΣ «αλλοιώνεται» κατά την προσπάθεια υλοποίησής του τόσο από τη δράση θεσμικών παραγόντων που λειτουργούν ως εμπόδια όσο και από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς. Η συζήτηση αυτή δεν διαφέρει από εκείνη της αλλοίωσης των ακαδημαϊκών μαθηματικών κατά τον μετασχηματισμό τους σε σχολικά μαθηματικά (Schoenfeld 2004) και της ακαδημαϊκής γνώσης που αφορά στη μαθηματική εκπαίδευση σε γνώση αναγκαία και ικανή να στηρίξει τη διδασκαλία των μαθηματικών στην πράξη (Morgan 2010).

Συγκεκριμένα, η δραστηριότητα όσων εμπλέκονται στα σχολικά μαθηματικά στοχεύει στην ανάπτυξη της σχετικής γνώσης από τους μαθητές και όχι στην επέκταση της ίδιας της μαθηματικής γνώσης. Ενώ οι μαθηματικοί στο ακαδημαϊκό πεδίο εργάζονται για την παραγωγή νέων μαθηματικών γνώσεων, εκπαιδευτικοί και μαθητές εργάζονται για την αναπαραγωγή της γνώσης που «έχει παραχθεί αλλού» (Morgan 2010). Η μετακίνηση από το πεδίο παραγωγής των μαθηματικών (ακαδημαϊκό) στο πεδίο αναπαραγωγής τους (σχολικό) προϋποθέτει μια διαδικασία αναπλαισίωσης του λόγου (discourse) που συγκροτείται τόσο στο πρώτο όσο και σε άλλα πεδία (π.χ. των θεωριών μάθησης).

Ανάλογη είναι η διαδικασία μετάβασης από το πεδίο παραγωγής της έρευνας και της θεωρίας στη μαθηματική εκπαίδευση (ακαδημαϊκό) στο πεδίο αναπαραγωγής τους (σχολικό). Οι εκπαιδευτικοί γενικά δεν ασχολούνται με την παραγωγή νέας γνώσης για τη διδασκαλία και τη μάθηση, αλλά με την απόκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων που θα τους επιτρέψουν να διδάξουν αποτελεσματικά. Έτσι, κατά την αναπόφευκτη διαδικασία αναπλαισίωσης που προκύπτει, θεωρητικές και ερευνητικές γνώσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης μετασχηματίζονται, για να υποστηρίξουν τους σκοπούς της διδασκαλίας των μαθηματικών στην πράξη. Η ανάπτυξη ΠΣ, η παραγωγή διδακτικών υλικών που υποστηρίζουν ένα ΠΣ και οι δραστηριότητες επαγγελματικής ανάπτυξης διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο σε αυτόν τον μετασχηματισμό. Το πεδίο αναπαραγωγής εδώ είναι ενσωματωμένο σε πολλούς τομείς της επαγγελματικής ζωής των εκπαιδευτικών, διαμορφώνοντας ένα πιο σύνθετο περιβάλλον για την ανάπτυξη λόγου σχετικού με τις πρακτικές τους.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η υιοθέτηση μιας κοινωνιολογικής θεώρησης της διαδικασίας υλοποίησης ενός νέου ΠΣ, η οποία προτάσσει ως βασική την έννοια της αναπλαισίωσης της γνώσης, θα μπορούσε να προσφέρει ένα λειτουργικό πλαίσιο κατανόησης και ερμηνείας των προβλημάτων που προκύπτουν εξαιτίας της πολυπλοκότητας του εγχειρήματος. Μια τέτοια θεώρηση είναι αυτή που προτείνεται από τον Bernstein (2000), ο οποίος εστιάζεται στον παιδαγωγικό μηχανισμό που δομεί και οργανώνει τα εκπαιδευτικά περιεχόμενα και την κατανομή τους με βάση την κυρίαρχη διαδικασία της αναπλαισίωσης. Δηλαδή, της μεταφοράς της γνώσης μέσα

από διαδικασίες επιλογής από τους χώρους όπου παράγεται (π.χ. Πανεπιστήμια) στους χώρους της τυπικής ή της άτυπης εκπαίδευσης (π.χ. σχολική τάξη): «ένα κείμενο αποσπάται από το φυσικό του συγκείμενο, εντάσσεται στη διδασκαλία, μετατρέπεται σε ύλη και υποτάσσεται στις προθέσεις των διδασκόντων αρχικά και των διδασκομένων στη συνέχεια».

Ο Bernstein (2000) διέκρινε το Πεδίο της Επίσημης Αναπλαισίωσης (Official Recontextualizing field - ΠΕΑ), που συγκροτείται και κυριαρχείται από την πολιτεία για την κατασκευή και την επιτήρηση του κρατικού παιδαγωγικού λόγου, και το Πεδίο της (επίσημης) Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης (Pedagogic Recontextualizing field - ΠΠΑ), στη διαμόρφωση και διαχείριση του οποίου συμμετέχουν περισσότερο ή λιγότερο ανεξάρτητοι από την πολιτεία αντιπρόσωποι, όπως οι εκπαιδευτές των εκπαιδευτικών. Η σχέση μεταξύ των δύο πεδίων και των διεργασιών μεταρρύθμισης ενός ΠΣ εξαρτάται από τον βαθμό αυτονομίας του ΠΠΑ, τον βαθμό στον οποίο οι λόγοι (discourses[1]) που παράγει μοιάζουν ή διαφέρουν από εκείνους του ΠΕΑ και την πηγή παραγωγής του αναθεωρημένου ΠΣ (Morgan, 2010).

Οι εκπαιδευτικοί λειτουργούν ως εκπρόσωποι στο ΠΠΑ, αναπαράγοντας τον επίσημο παιδαγωγικό λόγο που συγκροτείται στο ΠΕΑ. Ωστόσο, οι πρακτικές τους δεν μπορεί να ρυθμίζονται απόλυτα από εξωτερικούς κανονισμούς. Αυτό που αναπαράγεται στο σχολείο και στην τάξη εξαρτάται από τις αρχές της αναπλαισίωσης που απορρέουν από «το ειδικό πλαίσιο ενός συγκεκριμένου σχολείου και από την αποτελεσματικότητα του εξωτερικού ελέγχου στην αναπαραγωγή του επίσημου παιδαγωγικού λόγου» (Bernstein, 1990). Δηλαδή, από τη λειτουργία συμπληρωματικών πόρων που παράγονται σε τοπικό επίπεδο (Τοπικό ΠΠΑ, σε διάκριση με το Επίσημο ΠΠΑ).

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι, παρά την ανεξαρτησία μεταξύ τους, τα πεδία αναπλαισίωσης επηρεάζουν το ένα το άλλο, με σημαντικούς αντιπροσώπους να διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο σε περισσότερα από ένα πεδία (π.χ. ερευνητές που διδάσκουν στα Πανεπιστήμια, σε προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης, στον σχεδιασμό νέων ΠΣ, κ.ά.). Αυτή η περίπλοκη σχέση δημιουργεί διαφορές μεταξύ των παιδαγωγικών λόγων που συγκροτούνται στα διαφορετικά πεδία αναπλαισίωσης και, κατά συνέπεια, μεταξύ των πρακτικών που υιοθετούνται με βάση αυτούς τους λόγους. Η αλληλεπίδραση μεταξύ των πεδίων αναπλαισίωσης και των ερμηνειών των λόγων που αναπτύσσονται σε αυτά διαμορφώνει τους πόρους που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί, για να νομιμοποιήσουν τις πρακτικές τους στην τάξη (π.χ. McNamara & Corbin, 2001).

[1] Ο λόγος (discourse), σύμφωνα με τον Bernstein (2000), αποτελεί μια κοινωνική κατασκευή, η οποία "οικειοποιείται επιλεκτικά νέους παιδαγωγικούς λόγους και εστιάζεται σε αυτούς για να συστήσει την ατομική κοινωνική ιεράρχηση και, με αυτόν τον τρόπο, ρυθμίζει την παιδαγωγική σχέση και τις εμπειρίες των μαθητών" (Κουλαϊδής & Τσατσαρώνη, 2010)

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, η πολιτεία έχει σχεδόν τον απόλυτο έλεγχο στο ΠΣ, στην παραγωγή εκπαιδευτικού υλικού και στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών και την εφαρμογή σε επίπεδο σχολείου. Δεν υφίσταται, λοιπόν, πραγματικά ανεξάρτητο ΠΠΑ. Παρόλα αυτά, υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στα επιμέρους πεδία αναπλαισίωσης και στους λόγους που παράγουν, παρέχοντας ποικίλους πόρους ερμηνείας του ΠΣ για τους εκπαιδευτικούς στο πεδίο αναπαραγωγής. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί μπορεί να αντλήσουν από προηγούμενους λόγους των Μαθηματικών, από τις διαδικασίες μάθησης και διδασκαλίας που βίωσαν κατά τη διάρκεια της δικής τους εκπαίδευσης, από τη διδακτική τους εμπειρία, καθώς και από τις συζητήσεις που πραγματοποιούνται στο σχολείο καθημερινά, αλλά και στην εκπαιδευτική κοινότητα.

Η παρούσα εργασία εστιάζεται στους τρόπους με τους οποίους μετασχηματίζονται οι αρχές ενός νέου ΠΣ στα μαθηματικά, εξαιτίας των διαφορετικών λόγων από τους οποίους αντλούν οι εκπαιδευτικοί. Οι λόγοι αυτοί, σύμφωνα με τον Bernstein (2000), αναδεικνύουν το νόημα που αποδίδεται στο περιεχόμενο του νέου ΠΣ, καθώς και τον τρόπο που αυτό αναπλαισιώνεται. Κατά συνέπεια, και τις συνθήκες υλοποίησής του στην τάξη.

3. Η ΜΕΛΕΤΗ

Το πλαίσιο υλοποίησης της παρούσας έρευνας συνιστά μια πρόσφατη μεταρρυθμιστική προσπάθεια στην ελληνική υποχρεωτική μαθηματική εκπαίδευση, ενταγμένη στο πλαίσιο μιας γενικότερης εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης, η οποία αφορούσε στην ανάπτυξη νέων ΠΣ, ολοκληρώθηκε το 2011, δοκιμάστηκε πιλοτικά για μια διετία και προς το παρόν, υλοποιείται σε πρότυπα σχολεία της χώρας. Βασική καινοτομία υπήρξε η έμφαση της εκπαιδευτικής πράξης στη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος στην τάξη. Αξιοποιώντας το θεωρητικό πλαίσιο του Bernstein, η εργασία εστιάζεται στον αντίκτυπο αυτής της μεταρρύθμισης στις διαδικασίες αναπλαισίωσης των εκπαιδευτικών. Ειδικότερα, στόχος της έρευνας είναι να μελετηθούν οι τρόποι με τους οποίους εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης που συμμετείχαν στην πιλοτική εφαρμογή του νέου ΠΣ για ένα σχολικό έτος αναπλαισίωσαν τις καινοτομίες του στην τάξη, έτσι όπως αυτό ανιχνεύεται στον λόγο που αρθρώνουν σχετικά.

Το δείγμα αποτέλεσαν 13 εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε σχολεία πιλοτικής εφαρμογής στη Θράκη (10 απόφοιτοι Παιδαγωγικής Ακαδημίας που παρακολούθησαν το Πρόγραμμα Εξομοίωσης, 2 απόφοιτοι Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης και 1 απόφοιτος Μαθηματικού και Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης). Όλοι είχαν αξιόλογη διδακτική εμπειρία (10-25 έτη) και ενεργή εμπλοκή σε δράσεις επαγγελματικής ανάπτυξης, όπως παρακολούθηση προγραμμάτων επιμόρφωσης και συμμετοχή σε ερευνητικά προγράμματα. Κατά την

περίοδο διεξαγωγής της μελέτης οι πέντε εκπαιδευτικοί δίδασκαν σε μεγάλες τάξεις (Ε, ΣΤ), οι τέσσερις σε μεσαίες (Γ,Δ) και οι τέσσερις σε μικρές τάξεις (Α, Β). Οι εκπαιδευτικοί ενεπλάκησαν στη διαδικασία υλοποίησης του νέου ΠΣ των Μαθηματικών, καταρχήν γιατί οι σχολικές μονάδες στις οποίες ανήκαν επιλέχθηκαν από την πολιτεία ως μονάδες πιλοτικής εφαρμογής. Ο βαθμός της εμπλοκής τους καθορίστηκε από την ανάγκη να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις του νέου ΠΣ, αλλά και να συμμετέχουν σε δράσεις που πραγματοποιούνται στο πεδίο και στηρίζουν την επαγγελματική τους ανάπτυξη.

Τα ερευνητικά εργαλεία που αξιοποιήθηκαν για τη συλλογή των δεδομένων ήταν η παρατήρηση και η συνέντευξη. Βασική εστίαση της παρατήρησης ήταν οι διδακτικές επιλογές των εκπαιδευτικών κατά τον σχεδιασμό και την υλοποίηση διδασκαλιών σύμφωνα με το νέο ΠΣ. Οι συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν στο τέλος της πιλοτικής εφαρμογής, μέσης διάρκειας δύο ωρών, αφορούσαν σε ερωτήσεις σχετικές με τον βαθμό αξιοποίησης των καινοτόμων στοιχείων του ΠΣ, τον τρόπο αξιοποίησής τους στην καθημερινή διδακτική πράξη και την αξιολόγηση της σχετικής εμπειρίας.

Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν οι σημειώσεις πεδίου από την παρατήρηση, η βιντεοσκόπηση μιας αντιπροσωπευτικής, καινοτόμου δίωρης διδασκαλίας και οι απαντήσεις των υποκειμένων στις ερωτήσεις της συνέντευξης. Η παρούσα εργασία εστιάζεται στις συνεντεύξεις τεσσάρων εκπαιδευτικών, με σημαντική υπηρεσία (12- 21χρόνια) και με διαφορετικό επαγγελματικό «προφίλ» (μία πτυχιούχος Μαθηματικού Τμήματος και ΠΤΔΕ, με διετή μετεκπαίδευση και ευρεία συμμετοχή σε σεμινάρια και ερευνητικά προγράμματα, μία απόφοιτος Παιδαγωγικού Τμήματος και δύο απόφοιτες Παιδαγωγικής Ακαδημίας και προγράμματος εξομοίωσης).

Για την ανάλυση των απαντήσεων των εκπαιδευτικών στη συνέντευξη αξιοποιήθηκε ένας συνδυασμός τεχνικών της Θεμελιωμένης Θεωρίας και της Ανάλυσης Περιεχομένου (π.χ. Stemler, 2001), με στόχο την ανίχνευση στον λόγο τους των τρόπων ενεργοποίησης και αξιοποίησης των πεδίων αναπλαισίωσης, καθώς και τη μετάβαση από το ένα στο άλλο. Αρχικά, πραγματοποιήθηκαν προσεκτικές αναγνώσεις των απαντήσεων, κατά τη διάρκεια των οποίων εντοπίστηκαν οι διατυπώσεις που ήταν σχετικές με τα πεδία αναπαραγωγής στα οποία τοποθετούνται οι εκπαιδευτικοί επιχειρηματολογώντας για το πώς κατανόησαν και αξιοποίησαν τις καινοτομίες του νέου ΠΣ στην πράξη. Στη συνέχεια, κωδικοποιήθηκαν και ομαδοποιήθηκαν οι διατυπώσεις των εκπαιδευτικών που εντάχθηκαν σε κάθε πεδίο, νηματοδοτώντας έτσι το περιεχόμενο και τη δομή του.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Κεντρικός προσανατολισμός του νέου Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών είναι η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες που ενισχύουν διεργασίες όπως α) ο μαθηματικός συλλογισμός και η επιχειρηματολογία, β) η δημιουργία συνδέσεων/ δεσμών μεταξύ των εννοιών, γ) η επικοινωνία μέσω της χρήσης διαφορετικής μορφής εργαλείων, και δ) η μεταγνωστική ενημερότητα, «όπου ο μαθητής σκέφτεται πάνω στις δράσεις του και ελέγχει την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών του» (Οδηγός Εκπαιδευτικού, 2011). Για λόγους οικονομίας, η παρουσίαση των αποτελεσμάτων περιορίζεται σε μία από τις διεργασίες, αυτής του μαθηματικού συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας.

Οι εκπαιδευτικοί, σε γενικές γραμμές, δεν αντιμετώπισαν την ιδέα αυτή ως κάτι νέο. Υποστήριξαν ότι ήταν πάντα αντίθετοι με τη διδακτική προσέγγιση που ήθελε τους μαθητές να λαμβάνουν παθητικά τις μαθηματικές γνώσεις, μέσω διαλέξεων, και ισχυρίστηκαν ότι ενίσχυαν τον μαθηματικό συλλογισμό και την επιχειρηματολογία στις τάξεις τους και πριν από τη μεταρρύθμιση. Τοποθετήθηκαν, λοιπόν, με σαφήνεια υπέρ του επίσημου λόγου.

> Διάβασα για τις διεργασίες, συμφωνώ, είναι πολύ σημαντικές, το ξέραμε και από παλιά. Όμως, με τα βιβλία που έχουμε, δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα…είναι φτωχά τα βιβλία. Έτσι, κάνουμε πάρα πολλά πράγματα εκτός του βιβλίου, επιπλέον. Δηλαδή, το βιβλίο είναι λίγα αυτά που έχει για την εκπαίδευση, είναι λίγα…Εμείς έχουμε πολύ υλικό, έχουμε πολύ υλικό από παλιά, πάρα πολλά χρόνια έχουμε ψάξει. Έχουμε κάνει το υλικό της δευτέρας, της τρίτης, αλλά καθημερινά τα παιδιά, εκτός το μάθημα, που γίνονται όλα στο σχολείο και εξηγούνται και στον πίνακα και αυτά…κάνουμε πάρα πολλά επιπλέον πράγματα…Ίσως και αυτό, να μην αφήσουμε τους γονείς να εφησυχάσουν, "έλα εδώ-δεν έχεις τίποτα-φύγε". Δηλαδή, ό,τι κάνουμε στο σχολείο το ξαναβλέπουν (οι μαθητές) το απόγευμα, γιατί επικρατεί η άποψη "α, δεν έχετε ασκήσεις, δεν έχετε τίποτα"….Από τη διδασκαλία που είδαμε από το άλλο σχολείο, κάτι τέτοια κάνουμε κι εμείς, τα ίδια, τα ίδια…..δεν μας αρέσει να τα λέμε εμείς, τα παιδιά πρέπει να κάνουν πράγματα στην τάξη….βέβαια, όταν έχεις τόσο μικρά παιδιά, δεν έχεις και τη δυνατότητα να τα κάνεις όλα αυτά (20 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, διετής κύκλος σπουδών, εξομοίωση, συμμετοχή σε επιμορφωτικά προγράμματα, Β τάξη)

Η εκπαιδευτικός συμφωνεί με τη σημαντικότητα της αξιοποίησης των διεργασιών στη μαθηματική εκπαίδευση, όπως αυτές περιγράφονται στο ΠΣ (Οδηγός εκπαιδευτικού), τοποθετούμενη έτσι υπέρ του επίσημου λόγου (ΠΕΑ). Ωστόσο, όταν αναφέρεται στις διαδικασίες υλοποίησης βασικών συνιστωσών των διεργασιών, εισάγει πρακτικές που προσδιορίζονται από το ΤΠΠΑ (στο απόσπασμα οι γονείς φαίνεται ότι συνιστούν μια κυρίαρχη παράμετρο για την επιλογή και την υλοποίηση πρακτικών που προτείνονται από το ΠΣ στην τάξη, το ίδιο αλλά σε μικρότερο ίσως βαθμό και οι συνάδελφοι σε άλλα σχολεία).

> Πολύ ωραίο αυτό, το ότι επιμένει πάρα πολύ (το ΠΣ) στην επιχειρηματολογία, δεν ήταν πάρα πολύ ξεκαθαρισμένο στο προηγούμενο αναλυτικό. Ήταν καθοριστικό για τον τρόπο που (οι μαθητές) σκέφτονται, τους έχει αλλάξει τον τρόπο που σκέφτονται για τα μαθηματικά…Για μένα αυτό που κέρδισαν είναι ότι συμμετέχει μεγάλο κομμάτι της τάξης και (αυτό) …με ικανοποιεί….έχω δει εξέλιξη στη διδασκαλία μου…Η αλήθεια είναι από πέρσι δοκίμαζα πράγματα, είχα φύγει από το βιβλίο…Με βοήθησε αυτό που προηγήθηκε (η μετεκπαίδευση), γιατί ένας εκπαιδευτικός, για να δοκιμάσει πράγματα, πρέπει να πειστεί για να το κάνει και εγώ είχα πειστεί από παλιά…Πριν, η θεώρησή μου ήταν περισσότερο διαισθητική, δηλαδή δεν ήξερα το διαφορετικό. Μπορεί να προβληματίζεσαι, αλλά να μην ξέρεις το διαφορετικό…Πάντα ήθελα να δοκιμάζω τα πράγματα που διάβαζα, τώρα μου είναι πιο εύκολο …. Το βιβλίο είναι εγκλωβιστικό, θα έπρεπε να είναι βιβλίο αναφοράς (12 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, ΠΤΔΕ και Μαθηματικό Τμήμα, Μετεκπαίδευση, σημαντική συμμετοχή σε επιμορφωτικά και ερευνητικά προγράμματα, ΣΤ τάξη)

Και η δεύτερη εκπαιδευτικός συμφωνεί με την αναγκαιότητα ανάπτυξης των διεργασιών που προτείνει το νέο ΠΣ από τους μαθητές, υιοθετώντας τον Επίσημο Λόγο (ΠΣ) και τοποθετώντας έτσι τον εαυτό της στο ΠΕΑ. Παράλληλα, τοποθετείται στο Επίσημο Πεδίο Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης, όταν αναδεικνύει ως ιδιαίτερα σημαντική (καθοριστική σχεδόν) για τις επιλογές της την εκπαίδευσή της από επίσημους φορείς (Διδασκαλείο). Ωστόσο, αφήνει ένα «άνοιγμα» σε λόγους που προέρχονται από το Τοπικό Πεδίο Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης, όταν αναφέρεται στην αναγκαιότητα να πειστεί ένας εκπαιδευτικός για να υιοθετήσει τον επίσημο λόγο.

> Πολλοί ερευνητές κατέληξαν ότι ίσως φταίει ο μηχανιστικός και μνημονικός τρόπος με τον οποίο προσφέραμε ως σήμερα τις μαθηματικές έννοιες. Προβάλλεται έτσι, η ανάγκη να ωθήσουμε τους μαθητές στην επιχειρηματολογία, να αναπτύξουν μαθηματικό λογισμό με την ενεργή συμμετοχή στην οικοδόμηση της νέας έννοιας …. Το ζητούμενο είναι η ουσιαστική και όχι η μηχανική μάθηση. Είναι βέβαιο πως η επιχειρηματολογία συμβάλλει σε μεγάλο βαθμό στην κατάκτηση της ουσιαστικής μάθησης. Στο σημερινό σχολείο η επιχειρηματολογία εμποδίζεται από την πληθώρα της διδακτέας ύλης, το σφιχτό εβδομαδιαίο πρόγραμμα και τις πολλές δραστηριότητες ανά διδακτική ενότητα. Μοιραία η διδασκαλία γίνεται δασκαλοκεντρική, η γνώση σερβίρεται έτοιμη από τον δάσκαλο και αποθηκεύεται μηχανικά στη μακρόχρονη μνήμη του παιδικού εγκεφάλου δίχως ουσιαστικά την ενεργή συμμετοχή του παιδιού στην οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης (21 χρόνια διδακτικής εμπειρίας, διετής κύκλος σπουδών, εξομοίωση, συμμετοχή σε επιμορφωτικά προγράμματα, ΣΤ τάξη)

Η τρίτη εκπαιδευτικός τοποθετείται, επίσης, υπέρ του επίσημου λόγου (ΠΕΑ), που πριμοδοτεί πρακτικές που ενισχύουν την επιχειρηματολογία στη μαθηματική εκπαίδευση και περιγράφονται στο νέο ΠΣ των Μαθηματικών. Παράλληλα, επικαλείται θεσμικά «εμπόδια» (π.χ. εκτεταμένη ύλη) που δεν «επιτρέπουν» την υλοποίηση σημαντικών διεργασιών στην τάξη, όπως της επιχειρηματολογίας και τοποθετείται έτσι στο Επίσημο Πεδίο Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης, το οποίο ερμηνεύει ωστόσο με

όρους τοπικού λόγου (στο απόσπασμα τα διδακτικά εγχειρίδια φαίνεται να προσδιορίζουν ποιες από τις διεργασίες που προτείνονται από το ΠΣ θα υλοποιηθούν τελικά στην τάξη, καθώς το Τοπικό Πεδίο Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης (π.χ. «σφιχτό» εβδομαδιαίο πρόγραμμα) επιδρά τελικά και αλλοιώνει το περιεχόμενο που προσδίδεται στο Επίσημο Πεδίο Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης).

> Αυτή η διεργασία είναι πραγματικά σημαντική για τους μαθητές, χρειάζεται όμως πολύς διδακτικός χρόνος σε κάθε ενότητα του βιβλίου και αυτό δημιουργεί προβλήματα, δεν μπορούμε να καλύψουμε την ύλη. Επίσης, χρειάζεται αντίστοιχο υλικό και αυτό θέλει χρόνο και θέλει κόπο από την πλευρά του δασκάλου (14 χρόνια υπηρεσίας, ΠΤΔΕ, συμμετοχή σε επιμορφωτικά προγράμματα, Β τάξη)

Και η τέταρτη εκπαιδευτικός αρθρώνει καταρχήν υποστηρικτικό λόγο και τοποθετείται θετικά απέναντι στο ΠΕΑ, ταυτόχρονα με την «αρνητική» τοποθέτησή της στο Επίσημο Πεδίο Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης (στο απόσπασμα η διδακτέα ύλη συνιστά εμπόδιο στην πιθανή αξιοποίηση μιας διεργασίας, όπως η επιχειρηματολογία, στις πρακτικές του εκπαιδευτικού με αποτέλεσμα η εκπαιδευτικός να προσφεύγει σε πρακτικές που προσδιορίζονται από το Τοπικό Πεδίο Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης (χρειάζεται αντίστοιχο υλικό και αυτό θέλει χρόνο και κόπο), το οποίο και εδώ αλλοιώνει το νόημα που υποδεικνύεται/ προτείνεται από το Επίσημο Πεδίο Παιδαγωγικής Αναπλαισίωσης).

Συνοψίζοντας, αναφορικά με τη διεργασία του μαθηματικού συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας, οι εκπαιδευτικοί του δείγματος φαίνεται να ευθυγραμμίζονται καταρχήν με τον επίσημο λόγο, στον οποίο αποδίδουν σημαντική αξία. Ωστόσο, σπεύδουν να δημοσιοποιήσουν την απόκλισή τους από αυτόν, καθώς αναφέρονται στις δυνατότητες αξιοποίησής του με συνέπεια στην τάξη. Στην κατεύθυνση αυτή, προσφεύγουν σε μια παιδαγωγική αναπλαισίωση που διέπεται συχνότερα από ανεπίσημους, τοπικούς παράγοντες (π.χ. η εμπλοκή των γονιών στην εκπαιδευτική διαδικασία) και σπανιότερα από επίσημα παιδαγωγικά «φίλτρα» (π.χ., προγράμματα μετεκπαίδευσης). Τα τοπικά αυτά χαρακτηριστικά συνδέονται κυρίαρχα με εξωτερικούς/ θεσμικούς παράγοντες και λιγότερο με παράγοντες εσωτερικούς της διδακτικής πρακτικής (π.χ. η «σφιχτή» ύλη και όχι η ενδεχόμενη δυσκολία διαχείρισης των αλλαγών από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς). Αυτή η δόμηση των πεδίων αναπλαισίωσης που ενεργοποιούνται και οι λόγοι που παράγονται σε αυτά επιτρέπουν την κατανόηση της συνύπαρξης νοηματοδοτήσεων που αποκλίνουν ή βρίσκονται ακόμη και σε αντίφαση μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, παρέχουν έναν εναλλακτικό τρόπο κατανόησης της απόκλισης αυτής.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα εγείρουν το ερώτημα γιατί ορισμένοι λόγοι (όπως αυτός που παράγεται στο τοπικό ΠΠΑ) είναι πιο ισχυροί σε σχέση με άλλους ως προς την επιρροή που ασκούν στους εκπαιδευτικούς.

Ο τοπικός λόγος που αναπτύσσεται στο σχολείο μεταξύ των εκπαιδευτικών, των γονέων και των μαθητών αναδεικνύεται από τους πιο ισχυρούς και οφείλει πιθανώς τη δύναμή του στο γεγονός ότι σχετίζεται με την απαίτηση από θεσμικούς παράγοντες για «καλές» επιδόσεις των μαθητών. Ωστόσο, ο τοπικός λόγος έχει και μια περαιτέρω σημαντική και άμεση σχέση με την πρακτική. Ειδικότερα, καθώς οι επίσημοι λόγοι δεν αναγνωρίζουν τις δυσκολίες που συναντώνται κατά τη διαδικασία υλοποίησης των αρχών τους στην τάξη ή την ανάγκη μεταβλητότητας της εφαρμογής τους σε διαφορετικούς μαθητές ή ομάδες μαθητών, οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται ένα μέσο για να αντιμετωπίσουν την πολυπλοκότητα της αξιοποίησης των μεταρρυθμίσεων στην τάξη τους - ένα μέσο που παρέχεται από τον τοπικό λόγο. Αυτός ο λόγος παρέχει μια ισχυρή εναλλακτική λύση απέναντι στον επίσημο λόγο (στη συγκεκριμένη περίπτωση αναφορικά με τον μαθηματικό συλλογισμό και την επιχειρηματολογία). Μια αιτία για την επιρροή που ασκεί ο τοπικός λόγος μπορεί να είναι η συχνή ασάφεια των επίσημων λόγων, γεγονός που αφήνει χώρο σε άλλους λόγους να υφίστανται και στους εκπαιδευτικούς να μπορούν να υιοθετήσουν τους λόγους αυτούς. Επαγγελματικές ταυτότητες που δομούνται μέσα από μαθητεία σε διαδικασίες επίσημης αναπλαισίωσης ενδεχομένως να περιορίζουν τον χώρο ύπαρξης άλλων λόγων.

Στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα είναι εμφανής η παράλληλη λειτουργία αναπλαισιωμένων πεδίων, μη συμβατών μεταξύ τους, τα οποία επηρεάζουν αντιφατικά τους τρόπους με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν και μετασχηματίζουν τον επίσημο λόγο. Οι εκπαιδευτικοί αξιοποιούν τους λόγους που παράγονται σε αυτά τα πεδία και τοποθετούν τον εαυτό τους σε σχέση με αυτούς, επηρεάζονται από την επίσημη ή μη φύση τους, η οποία διαμορφώνει τις δυνατότητες για αντίσταση και για χρήση εναλλακτικών λόγων. Η μελέτη της υλοποίησης ενός νέου Προγράμματος Σπουδών θα «επωφελούνταν» από την ανάλυση των δομών που διέπουν τα αναπλαισιωμένα πεδία και τους λόγους τους, έτσι ώστε να γίνουν κατανοητές (στην πραγματικότητα να προληφθούν) οι επιλογές και οι μετασχηματισμοί αυτών των λόγων στις επαγγελματικές πρακτικές των εκπαιδευτικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bernstein, B. (1990). *Class, Codes and Control: The structuring of Pedagogic Discourse*. London: Routledge.

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identity. Theory, research, critique*, αναθεωρημένη έκδοση, New York, Rowman & Littlefield Publishers.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A Longitudinal Study of Learning to Use Children's Thinking in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 403-434.

Fullan, M. (2001). *The new meaning of educational change - Third edition*. New York and London: RoutledgeFalmer.

Jacobs, J. K., Hiebert, J., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Garnier, H., & Wearne, D. (2006). Does eighth-grade mathematics teaching in the United States align with the NCTM Standards? *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(1), 5-32.

Jaworski, B. (2007). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(2), 187-211.

Morgan, C. (2010). Making sense of curriculum innovation and mathematics teacher identity. In C. Kanes (Ed.), *Elaborating Professionalism: Studies in Practice and Theory* (pp. 107-122). Dordrecht: Springer.

Schoenfeld, A. (2004). The Math Wars. *Educational Policy*, *18*(1), 253-286.

Stemler, S. (2001). An overview of content analysis. *Practical Assessment, Research & Evaluation*, 7(17). Retrieved December 10, 2013 from http://PAREonline.net/getvn.asp?v=7&n=17.

Stoll, L., Stobart, G., Martin, S., Freeman, S., Freedman, E., Sammons, P., & Smees, R. (2003). *Preparing for change: Evaluation of the implementation of the Key Stage 3 Strategy pilot - Executive Summary*. Nottingham: Department for Education and Skills.

ΙΕΠ (2011). *Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων»*. Αθήνα: ΙΕΠ/ ΕΣΠΑ 2007-13\ Ε.Π. Ε& ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3 «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) –Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη».

Κουλαϊδής, Β. & Τσατσαρώνη, Α. (2010) (επιμ.) *Παιδαγωγικές Πρακτικές: Έρευνα και εκπαιδευτική πολιτική*, Αθήνα: Μεταίχμιο.

ΑΞΙΟΛΟΓΩΝΤΑΣ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Κωνσταντίνος Τάτσης
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
ktatsis@uoi.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία επικεντρώνεται στην αξιολόγηση προβλημάτων που σχεδιάστηκαν από φοιτήτριες και φοιτητές παιδαγωγικού τμήματος. Η ανάλυση αναδεικνύει τη σημασία του αρχικού πλαισίου, των στρατηγικών κατασκευής, αλλά και της διαδικασίας ανατροφοδότησης μέσω επίλυσης και αξιολόγησης των προβλημάτων από διαφορετικές ομάδες εργασίας.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επίλυση προβλημάτων αποτέλεσε και αποτελεί έναν από τους βασικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης σε όλες τις βαθμίδες. Αν και δεν υπάρχει απόλυτη συμφωνία σχετικά με τον ακριβή ορισμό του προβλήματος, όλοι οι ερευνητές συμφωνούν στο ότι οι μαθητές πρέπει να εμπλέκονται από μικρή ηλικία σε διαδικασίες επίλυσης, αλλά και κατασκευής προβλημάτων. Η συγκεκριμένη θέση εκφράζεται σε πολλά προγράμματα σπουδών παγκοσμίως (π.χ. NCTM, 2000), αλλά και στο *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών* (2003), το οποίο περιγράφει τους γενικούς στόχους για όλες τις τάξεις του Δημοτικού (που αφορούν στον άξονα «Επίλυση Προβλημάτων»):

> Οι μαθητές εξερευνούν μία κατάσταση, κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, διατυπώνουν διαφορετικά το ίδιο πρόβλημα, αναγνωρίζουν και περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις, χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή και εξοικειώνονται με τις νέες τεχνολογίες. (σ. 250)

Είναι προφανές από τα παραπάνω ότι οι διαδικασίες επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων (πρέπει να) είναι συνδεδεμένες, ανατροφοδοτώντας η μία την άλλη και δίνοντας στους μαθητές την ευκαιρία όχι μόνο να κατανοήσουν σε βάθος τις σχετικές μαθηματικές έννοιες, αλλά και να εξασκήσουν τη δημιουργικότητά τους (Silver, 1997). Η σχέση μεταξύ των ικανοτήτων κατασκευής και επίλυσης προβλήματος έχει μελετηθεί και ένα γενικό συμπέρασμα είναι ότι οι μαθητές που είναι καλοί λύτες προβλημάτων κατασκευάζουν περισσότερα αλλά και πιο πολύπλοκα μαθηματικά προβλήματα σε σχέση με τους υπόλοιπους (Ellerton, 1986). Ένα πιο ειδικό συμπέρασμα είναι ότι η

μειωμένη ικανότητα επεξεργασίας πληροφοριών που χαρακτηρίζει τους λιγότερο ικανούς λύτες προβλημάτων είναι πιθανόν υπεύθυνη για τα προβλήματα που εκείνοι κατασκεύασαν (Silver & Cai, 1996). Ταυτόχρονα όμως, δεν φαίνεται να υπάρχουν μελέτες στις οποίες ζητείται η επίλυση των προβλημάτων από τα άτομα που τα έθεσαν (Silver & Cai, 1996). Επιπλέον, προκύπτει άμεσα και η ανάγκη επιμόρφωσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών στις συγκεκριμένες πρακτικές και για αυτό το σκοπό έχουν υπάρξει μελέτες σε μελλοντικούς, αλλά και εν ενεργεία εκπαιδευτικούς (Leung & Silver, 1997, Silver, Mamona-Downs, Leung & Kenney, 1996). Βέβαια, ακόμη και σε πρόσφατες μελέτες αναγνωρίζεται ότι οι γνωστικές διαδικασίες που εμπλέκονται στην κατασκευή προβλημάτων δεν έχουν μελετηθεί επαρκώς (Kontorovich, Koichu, Leikin & Berman, 2012). Με αυτά τα δεδομένα οργανώσαμε το εξαμηνιαίο μάθημα που αποτέλεσε το πλαίσιο πραγματοποίησης της παρούσας έρευνας, για τις ανάγκες της οποίας επικεντρωθήκαμε αποκλειστικά στις διαδικασίες κατασκευής προβλημάτων. Ο βασικός στόχος της έρευνας ήταν η συγκρότηση και η εφαρμογή ενός πλαισίου αξιολόγησης των παραχθέντων προβλημάτων, ενώ ένας δευτερεύων στόχος (που δεν εξετάζεται στην παρούσα εισήγηση) αφορούσε στην εξέταση των παραγόντων που καθιστούν ένα δεδομένο πλαίσιο κατάλληλο για κατασκευή προβλημάτων βασισμένων σε αυτό.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ενώ, όπως αναφέραμε, οι διαδικασίες επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων θεωρούνται από τις πιο ουσιώδεις για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, ακόμη και εντός της σχετικής βιβλιογραφίας συναντούμε διαφορετικές αντιλήψεις ως προς τη φύση του μαθηματικού προβλήματος (Schoenfeld, 1992). Η Zawojewski (2013) επισημαίνει δύο χαρακτηριστικά που χρήζουν προσοχής στους συνήθεις ορισμούς: α) το πρόβλημα (καθ)ορίζεται σε σχέση με τον υποψήφιο λύτη, δηλαδή οι ικανότητες κάποιου καθορίζουν το αν μια δραστηριότητα μπορεί να θεωρηθεί πρόβλημα ή όχι και β) η διαδικασία επίλυσης περιέχει και την αναζήτηση μεθόδων (ευρετικών) οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Η πρώτη επισήμανση σχετίζεται με τη δυσχέρεια στο σχεδιασμό «κατάλληλων» μαθηματικών προβλημάτων, αφού σε ένα σύνολο μαθητών αναμένεται να υπάρχει ανομοιομορφία στις μαθηματικές τους ικανότητες. Το γεγονός αυτό βέβαια αποτελεί και μία από τις προκλήσεις που έχουν να αντιμετωπίσουν οι εκπαιδευτικοί, αλλά και οι ερευνητές. Η δεύτερη επισήμανση σχετίζεται με τη δυσκολία κάποιων μαθητών να αντιμετωπίσουν συγκεκριμένα προβλήματα, αφού δεν μπορούν να εφαρμόσουν τις κατάλληλες ευρετικές. Αυτές οι δυσχέρειες μπορούν να αντιμετωπιστούν είτε με δραστηριότητες μοντελοποίησης (όπως προτείνει η Zawojewski, 2013) είτε με δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων, οι οποίες επιτρέπουν σε κάθε μαθητή (ή ομάδα μαθητών) να ερμηνεύσει και να διαχειριστεί τα δεδομένα με όποιο τρόπο κρίνει κατάλληλο – χωρίς αυτό να αποκλείει

τη δυνατότητα αξιολόγησης. Ο μαθητής με αυτό τον τρόπο τοποθετείται στο κέντρο της μαθησιακής διαδικασίας και παύει να είναι απλός δέκτης-λύτης προβλημάτων που έχουν τεθεί από άλλους, είτε τον εκπαιδευτικό είτε το συγγραφέα του σχολικού εγχειριδίου (Kilpatrick, 1987). Επιπροσθέτως, ο μαθητής έχει την ευκαιρία να εξασκήσει τη δημιουργική του σκέψη, αφού η διατύπωση προβλήματος θεωρείται μία εκ των δραστηριοτήτων που την ενισχύουν, μαζί με την επίλυση προβλήματος και την αναδιατύπωση μιας προβληματικής κατάστασης (Haylock, 1997).

Η κατασκευή προβλημάτων μπορεί να πραγματοποιηθεί εντός δομημένου, ημιδομημένου ή μη δομημένου πλαισίου (Stoyanova, 1998), ανάλογα με το ρόλο που παίζουν κάποιες αρχικές υποθέσεις ή κάποιο αρχικό πρόβλημα. Όσον αφορά στις στρατηγικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές έχουν κατηγοριοποιηθεί στις εξής (Kontorovich et al., 2012):

- ανταλλαγή μεταξύ των δεδομένων και των ζητούμενων του δοθέντος προβλήματος,
- μεταβολή των περιορισμών ή των υποθέσεων του δοθέντος προβλήματος και πιο συγκεκριμένα αντικατάσταση των αριθμητικών δεδομένων με άλλα ή διατύπωση ερωτήσεων του τύπου: «τι θα συνέβαινε αν ένας συγκεκριμένος περιορισμός ή υπόθεση δεν ίσχυε;»,
- μεταβολή των ζητούμενων του δοθέντος προβλήματος, ενώ τα δεδομένα παραμένουν αμετάβλητα,
- διατύπωση του νέου προβλήματος με τρόπο ώστε να επιδέχεται μια συγκεκριμένη μέθοδο επίλυσης,
- διατύπωση του νέου προβλήματος με τρόπο ώστε το δοθέν πρόβλημα να αποτελεί ειδική περίπτωσή του,
- επέκταση του δοθέντος προβλήματος με τρόπο ώστε η επίλυση του νέου προβλήματος να προϋποθέτει την επίλυση του δοθέντος.

Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα της κατασκευής προβλημάτων είναι ότι επιτρέπει την (αυτο)αξιολόγηση των μαθητών όταν τεθεί το ζήτημα της καταλληλότητας των προβλημάτων που δημιουργήθηκαν. Ο όρος «καταλληλότητα» αφορά κάθε έναν από τους εμπλεκόμενους στη διαδικασία, δηλαδή: τον μαθητή-δημιουργό του προβλήματος, τον εκπαιδευτικό ή οποιοδήποτε άλλο αξιολογητή του παραχθέντος προβλήματος και τον δυνητικό λύτη του προβλήματος. Τα παραπάνω καταδεικνύουν την πολυπλοκότητα της κατασκευής προβλημάτων, αλλά και τη δυνατότητα που παρέχει στους μαθητές για αναστοχασμό, συζήτηση με επιχειρήματα και συνειδητοποίηση της υποκειμενικότητας των μαθηματικών προβλημάτων όσον αφορά στο βαθμό δυσκολίας τους.

3. ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια ενός προπτυχιακού μαθήματος διδακτικής των μαθηματικών που απευθύνεται σε τεταρτοετείς φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Συμμετείχαν συνολικά 26 άτομα (24 γυναίκες και 2 άνδρες), οι οποίοι συγκρότησαν 10 ομάδες της επιλογής τους. Η πλειοψηφία των συμμετεχόντων (10) προερχόταν από τη θεωρητική κατεύθυνση του Λυκείου, 8 άτομα από την τεχνολογική κατεύθυνση και 8 από τη θετική κατεύθυνση. Στα πλαίσια προηγουμένων μαθημάτων οι συμμετέχοντες είχαν την ευκαιρία να εμπλακούν σε διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων (κλειστών και ανοιχτών), ενώ ιδιαίτερη αναφορά είχε γίνει στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση. Στα πλαίσια του μαθήματος υπό μελέτη οι συμμετέχοντες είχαν εμπλακεί σε διαδικασίες διατύπωσης ερωτήσεων που να ικανοποιούν συγκεκριμένα κριτήρια, όπως π.χ. να ανήκουν σε συγκεκριμένα επίπεδα ταξινομιών (Anderson & Krathwohl, 2001), να είναι κλειστές ή ανοιχτές, κ.ο.κ. Την ημέρα πραγματοποίησης της έρευνας το μάθημα ξεκίνησε με μια δραστηριότητα κατασκευής προβλημάτων, η οποία αποτελεί παραλλαγή αυτής των Silver & Cai (1996). Στη συνέχεια μοιράστηκε ένα ανώνυμο φύλλο, το οποίο περιείχε δύο εικόνες από το σχολικό εγχειρίδιο της Ε΄ Δημοτικού (Εικόνα 1). Το ζητούμενο ήταν η σύνθεση τριών προβλημάτων για κάθε εικόνα. Το πλαίσιο θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως ημιδομημένο (Stoyanova, 1998). Οι δύο εικόνες επιλέχθηκαν να χρησιμοποιηθούν στην ίδια έρευνα για να διαπιστώσουμε την επίδραση του πλαισίου στην κατασκευή προβλημάτων. Στο τέλος του φύλλου υπήρχε η ερώτηση: «Ποιο από τα δύο πλαίσια θεωρείτε καταλληλότερο για την κατασκευή προβλημάτων; Γιατί;». Οι περιορισμοί που δόθηκαν ήταν ότι τα προβλήματα πρέπει να απευθύνονται σε μαθητές της Ε΄ Δημοτικού και ότι θα πρέπει να είναι αυξημένου βαθμού δυσκολίας. Οι συμμετέχοντες είχαν στη διάθεσή τους το σχολικό εγχειρίδιο της Ε΄ Δημοτικού, όπου οι συγκεκριμένες εικόνες συνοδεύονται από επιπλέον πληροφορίες, αλλά και από ενδεικτικές ερωτήσεις. Ζητήθηκε επίσης από κάθε ομάδα να επιλύσει όλα τα προβλήματα που έχει θέσει. Επιπλέον, έγινε γνωστό ότι τα προβλήματα θα επιλυθούν και από άλλες ομάδες μέσω ανταλλαγής των φύλλων και οι ομάδες που θα επιλύσουν τα προβλήματα, θα βαθμολογήσουν κάθε ένα από αυτά με βάση τρία κριτήρια: την πρωτοτυπία του, το επίπεδο (δηλαδή το κατά πόσο ο βαθμός δυσκολίας του προσεγγίζει τον ζητούμενο υψηλό βαθμό) και τη ρεαλιστικότητα.



Εικόνα 1. Οι εικόνες-πλαίσια για την κατασκευή προβλημάτων

Αφού τα προβλήματα επιλύθηκαν μέσω της ανταλλαγής των φύλλων (διατηρώντας την ανωνυμία), τα φύλλα επιστράφηκαν στις αρχικές ομάδες, οι οποίες είχαν στη διάθεσή τους το αρχικό πρόβλημα, τη δική τους λύση, αλλά και τη λύση των συναδέλφων τους. Τους ζητήθηκε τότε να απαντήσουν σε ερωτήσεις για κάθε ένα από τα προβλήματα που είχαν θέσει: α) Λύθηκε το πρόβλημα σύμφωνα με τη δική σας λύση; β) Αν όχι, για ποιους λόγους πιστεύετε ότι συνέβη αυτό; γ) Κάνατε ή θα θέλατε να κάνετε αλλαγές στο πρόβλημα που είχατε θέσει αρχικά;

Τα δεδομένα μας αποτελούνταν από τα προβλήματα που τέθηκαν, τις γραπτές απαντήσεις των φοιτητών στα διάφορα ερωτήματα, τις αξιολογήσεις που οι ίδιοι έκαναν στους συναδέλφους τους και τις λεκτικές ανταλλαγές που έλαβαν χώρα τόσο κατά τη διάρκεια της διαδικασίας κατασκευής των προβλημάτων, όσο και μετά την ολοκλήρωση της επίλυσης και αξιολόγησης. Αρχικά, κάθε πρόβλημα ταξινομήθηκε με βάση το μαθηματικό του περιεχόμενο σε επίπεδο ζητούμενων διαδικασιών. Διαπιστώσαμε, όπως και οι Silver & Cai (1996), ότι η απλή καταμέτρηση των πράξεων που περιλαμβάνει ένα πρόβλημα δεν αποτελεί αξιόπιστο δείκτη της πολυπλοκότητάς του. Γι' αυτό το λόγο οι κατηγορίες που κατασκευάσαμε είχαν ως βάση τις μαθηματικές διαδικασίες που περιείχαν τα προβλήματα. Λάβαμε επίσης υπόψη τις στρατηγικές που περιγράφουν οι Kontorovich et al. (2012). Τα αριθμητικά δεδομένα που συγκεντρώθηκαν από τις αξιολογήσεις των φοιτητών προς τους συναδέλφους τους λήφθηκαν υπόψη, αλλά μόνο ως ενδείξεις για τα εν λόγω χαρακτηριστικά και δεν παρουσιάζονται στο συγκεκριμένο άρθρο.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από τα 60 προβλήματα που συγκεντρώσαμε μόλις 5 ήταν ανοιχτά, ενώ ένα πρόβλημα που αφορούσε στον χάρτη δεν ήταν μαθηματικό. Μεταξύ των ανοιχτών προβλημάτων υπήρχαν κάποια τα οποία δεν λυνόταν με βάση τα στοιχεία που δίνονται. Επιπλέον, κάποιες ομάδες δεν έδωσαν αριθμητική λύση στα ανοιχτά τους προβλήματα, αλλά περιέγραψαν τη διαδικασία επίλυσης. Ένα άλλο ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι μόνο τα μισά περίπου προβλήματα επιλύθηκαν με τον ίδιο τρόπο από τις δύο ομάδες, δηλαδή την ομάδα κατασκευής και την ομάδα αξιολόγησης.

4.1. Ενδεικτική ανάλυση προβλημάτων του 1ου πλαισίου

Κάποιες ομάδες ερμήνευσαν το ζητούμενο για αυξημένο βαθμό δυσκολίας ως αίτημα για διατύπωση πολλών ερωτήσεων. Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι χαρακτηριστικό και καταδεικνύει το γεγονός ότι η απλή καταμέτρηση πράξεων δεν αποτελεί αξιόπιστο δείκτη πολυπλοκότητας. Ο κωδικός που εμφανίζεται αναφέρεται στον αριθμό της ομάδας (δηλαδή ομάδα 5), στο πλαίσιο αναφοράς (πλαίσιο 1, δηλαδή το παρτέρι) και στον αριθμό του προβλήματος (δηλαδή το πρώτο από τα τρία

προβλήματα). Ακολουθούν σε παρένθεση: ο χαρακτηρισμός του ως ανοιχτό ή κλειστό σύμφωνα με την ομάδα που το κατασκεύασε, το αν δόθηκαν ίδιες λύσεις από τις δύο ομάδες και η βαθμολογία που έλαβε το συγκεκριμένο πρόβλημα από την ομάδα που ανέλαβε την επίλυσή του. Η βαθμολογία αφορά στην πρωτοτυπία (Π), το επίπεδο δυσκολίας (Ε) και τη ρεαλιστικότητα (Ρ).

> ΟΜ5-ΠΛ1.1 (Κλειστό, Ίδιες λύσεις, Π:2 Ε:2 Ρ:5): Αν το 1ο παρτέρι έχει μήκος 40 μ, πόσες αγγελικές φυτέψανε; Αν το 2ο παρτέρι είναι 20 μ. μεγαλύτερο από το 1ο, πόσες πικροδάφνες φυτέψανε; Αν κάθε γλάστρα αγγελικής κοστίζει 1,20 € και κάθε γλάστρα πικροδάφνης 0,80 €, πόσα € διέθεσε το ταμείο του σχολείου για την αγορά των φυτών;

Η συγκεκριμένη στρατηγική εμφανίστηκε και σε άλλες ομάδες, των οποίων τα προβλήματα είχαν κοινό χαρακτηριστικό τις απλές πράξεις που απαιτούν απλούς συλλογισμούς. Από τη σκοπιά της διαδικασίας κατασκευής προβλήματος, μπορούμε να εντοπίσουμε δύο στρατηγικές: της μεταβολής των περιορισμών ή των υποθέσεων του δοθέντος προβλήματος του σχολικού εγχειριδίου και της επέκτασης του δοθέντος προβλήματος με τρόπο ώστε η επίλυση του νέου προβλήματος να προϋποθέτει την επίλυση του δοθέντος. Όσον αφορά στις μαθηματικές διαδικασίες που εμπλέκονται μπορούμε να εντοπίσουμε μόνο ποσοτικούς υπολογισμούς που εκφράζονται κυρίως με το ερωτηματικό «πόσα;», ενώ ένας εκφράζεται μέσω σύγκρισης: «το 2ο παρτέρι είναι 20 μ. μεγαλύτερο από το 1ο». Οι ποσοτικοί υπολογισμοί κυριάρχησαν στα προβλήματα που κατασκευάστηκαν, αν και τα δεδομένα μας οδήγησαν σε περαιτέρω κατηγοριοποίησή τους. Πέραν λοιπόν των απλών ποσοτικών υπολογισμών (που στο εξής θα ονομάζουμε 1ου επιπέδου), υπήρχε και μία περίπτωση πιο απαιτητικών υπολογισμών, τους οποίους ονομάσαμε 3ου επιπέδου:

> ΟΜ4-ΠΛ1.2 (Ανοιχτό, Διαφορετικές λύσεις, Π:4 Ε:5 Ρ:3): Τους χειμερινούς μήνες θα καλύψουμε το κάθε παρτέρι με νάιλον, γύρω και πάνω από τα λουλούδια, λαμβάνοντας υπόψιν ότι το ύψος των λουλουδιών είναι κατά μέσο όρο 40cm. Πόσο θα κοστίσει η κατασκευή και για τα δύο παρτέρια, αν το $1m^2$ νάιλον κοστίζει 1,50€;

Παρατηρούμε ότι η επίλυση του προβλήματος απαιτεί μια σειρά υπολογισμών, εκτιμήσεων και υποθέσεων (π.χ. για το σχήμα του νάιλον), το οποίο δικαιολογεί την ασυμφωνία μεταξύ των λύσεων. Επιπλέον, μπορούμε να διακρίνουμε τις δύο στρατηγικές που αναφέραμε και στο προηγούμενο παράδειγμα, δηλαδή της μεταβολής των περιορισμών του δοθέντος προβλήματος και της επέκτασής του. Όσον αφορά στις μαθηματικές διαδικασίες που εμπλέκονται παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη ομάδα δεν περιορίζεται σε υπολογισμούς που αφορούν στα πολλαπλάσια ή τους διαιρέτες αριθμών, αλλά διακρίνει μία καλή ευκαιρία για γεωμετρική σκέψη η οποία οδηγεί σε ένα πρόβλημα που η Frankenstein (2009) θα χαρακτήριζε πραγματικά ρεαλιστικό (*real* real-life word problem).

4.2. Ενδεικτική ανάλυση προβλημάτων του 2ου πλαισίου

Οι περισσότερες ομάδες συνάντησαν δυσκολία στην κατασκευή προβλημάτων με βάση αυτό το πλαίσιο. Βέβαια, ένας πρώτος λόγος θα μπορούσε να είναι η έλλειψη παραδειγμάτων στο βιβλίο. Στην ερώτηση για το ποιο πλαίσιο θεωρείται καταλληλότερο, μόλις μία ομάδα δήλωσε την προτίμησή της στο χάρτη «γιατί είναι πιο διαθεματικό». Οκτώ ομάδες επέλεξαν το πρώτο πλαίσιο, το οποίο χαρακτήρισαν ως πιο ρεαλιστικό και επίσης δήλωσαν ότι παρέχει δυνατότητα για περισσότερα ερωτήματα. Όπως και στο 1ο πλαίσιο, κυριάρχησαν τα προβλήματα ποσοτικών υπολογισμών που στο συγκεκριμένο πλαίσιο αφορούσαν εμβαδά ή διαδρομές σε συνδυασμό με τη χρήση κλίμακας:

> ΟΜ1-ΠΛ2.2 (Κλειστό, Ίδιες λύσεις, Π:2 Ε:1 Ρ:1): Αν ο χάρτης έχει κατασκευαστεί με κλίμακα 1:1000000 να υπολογιστεί το πραγματικό μήκος του δρόμου που καλύπτεται από τα τετραγωνάκια Ε1-Ε6.
>
> ΟΜ10-ΠΛ2.2 (Κλειστό, Διαφορετικές λύσεις, Π:2 Ε:3 Ρ:4): Αν στην πραγματικότητα δύο σπίτια απέχουν 10 χλμ, πόσα εκατοστά θα απέχουν σε χάρτη κλίμακας 1:1000000;

Όσον αφορά στη στρατηγική κατασκευής, μπορούμε να εντοπίσουμε αυτή της επέκτασης του δοθέντος προβλήματος, με την παραδοχή βέβαια ότι στην προκειμένη περίπτωση αναφερόμαστε στην προσθήκη στοιχείων στο δεδομένο πλαίσιο και όχι σε κάποιο πρόβλημα. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και από πλευράς μαθηματικών διαδικασιών τα δύο παραπάνω προβλήματα, αφού τα δεδομένα του ενός αποτελούν ζητούμενα του άλλου και αντιστρόφως. Το πρώτο πρόβλημα έλαβε χαμηλή βαθμολογία από την ομάδα που το επίλυσε γιατί «δεν αναφέρεται η μονάδα μέτρησης», η οποία όμως δεν είναι απαραίτητη. Το δεύτερο πρόβλημα δεν σχετίζεται άμεσα με το δεδομένο πλαίσιο, αλλά με το πλαίσιο της χαρτογράφησης και της κλίμακας γενικότερα. Και τα δύο θεωρούμε ότι ανήκουν σε ποσοτικούς υπολογισμούς 2ου επιπέδου λόγω των μετατροπών που απαιτούνται.

4.3. Συνολική ανάλυση προβλημάτων

Η ποικιλία των δεδομένων που συγκεντρώσαμε μας οδήγησε στην κατασκευή διαφόρων πινάκων, εκ των οποίων παρουσιάζουμε μόνο τον Πίνακα 1.

Επίπεδο	Πλαίσιο 1		Πλαίσιο 2		Σύνολα
1	Υπολογισμοί ποσοτήτων	14	Υπολογισμοί ποσοτήτων, διαδρομές	8	22
2	Υπολογισμοί με χρήση ΕΚΠ, συνδυασμοί	15	Υπολογισμοί με χρήση κλίμακας	19	34
3	Υπολογισμοί-εκτίμηση	1	Κατασκευή	2	3

Πίνακας 1. Κατηγοριοποίηση προβλημάτων

Ο παραπάνω πίνακας καταδεικνύει την προτίμηση των συμμετεχόντων σε προβλήματα υπολογισμού, αρκετά εκ των οποίων θεωρήθηκαν αυξημένου βαθμού δυσκολίας. Καταφανής είναι επίσης η δυσκολία κατασκευής προβλημάτων 3ου επιπέδου, δηλαδή προβλημάτων που απαιτούν από το λύτη τη λήψη αποφάσεων. Το δεύτερο πλαίσιο βέβαια προσφερόταν για προβλήματα κατασκευής χαρτών, αλλά μόλις δύο ομάδες πρότειναν τέτοιου είδους προβλήματα.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο βασικός στόχος ήταν η συγκρότηση και η εφαρμογή ενός πλαισίου μελέτης και αξιολόγησης των προβλημάτων που έχουν προταθεί. Τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν μας οδήγησαν σε τρία επίπεδα ανάλυσης: ως προς τις στρατηγικές που εφαρμόστηκαν στη σύνθεση των προβλημάτων, ως προς τις μαθηματικές διαδικασίες που εμπλέκονται κατά την επίλυση των προβλημάτων και ως προς την καταλληλότητα των προβλημάτων που τέθηκαν. Η καταλληλότητα αναλύθηκε σε σχέση με το δεδομένο πλαίσιο, τη συμφωνία μεταξύ των λύσεων που δόθηκαν από δύο διαφορετικές ομάδες, αλλά και το επίπεδο των μαθηματικών διαδικασιών. Όσον αφορά στο πλαίσιο, όπως ήδη αναφέραμε, υπήρχε μια προτίμηση στο πρώτο. Αυτό ενδεχομένως να οφείλεται και στη μεγαλύτερη εξοικείωση των φοιτητών με τις σχετικές έννοιες, κάτι που εκφράστηκε και στη συζήτηση που έλαβε χώρα. Όσον αφορά στη συμφωνία μεταξύ των λύσεων, το σχετικά χαμηλό ποσοστό καταδεικνύει την έλλειψη εμπειρίας των συμμετεχόντων στην κατασκευή προβλημάτων. Σε πολλές περιπτώσεις η ασυμφωνία λύσεων οφειλόταν στην έλλειψη δεδομένων ή στην ασάφεια στην εκφώνηση του προβλήματος. Τέλος, αν και είχε ζητηθεί η κατασκευή προβλημάτων αυξημένου βαθμού δυσκολίας, τα περισσότερα ήταν μάλλον μέτριου βαθμού, ενώ οι περισσότερες προσπάθειες για ανοιχτά προβλήματα χαρακτηρίστηκαν από ασάφειες και έλλειψη δεδομένων. Από διδακτικής άποψης οι παραπάνω διαπιστώσεις αποτέλεσαν μία πρώτης τάξεως ευκαιρία για βελτίωση της ικανότητας των συμμετεχόντων στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων, αφού όπως προαναφέραμε, το πρόβλημα (καθ)ορίζεται σε σχέση με τον υποψήφιο λύτη, κάτι που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη σε όλη τη διάρκεια της διαδικασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (Eds.) (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing: a Revision of Bloom's Taxonomy*. New York: Longman Publishing.

ΥΠ.Ε.Π.Θ. (2000). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο: Αθήνα.

Frankenstein, M. (2009). Developing a critical mathematical numeracy through real real-life word problems. In L. Verschaffel, B. Greer, W. V. Dooren & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds - Modelling verbal descriptions of situations* (pp. 111-130). Rotterdam, Netherlands: Sense.

Haylock, D. (1997). Recognizing mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM*, 29(3), 68-74.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *Journal of Mathematical Behavior*, 31, 149-161.

Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematical knowledge, and creative thinking on the arithmetic problems posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 5-24.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 29(3), 75-80.

Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 293-309.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. In A. McIntosh, & N. Ellerton (Eds.), *Research in mathematics education: A contemporary perspective* (pp. 164-185). Edith Cowan University: MASTEC.

Zawojewski, J. (2013). Problem Solving Versus Modeling. In R. Lesh et al. (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 237-243). Dordrecht: Springer.

ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ. Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΑΥΘΕΝΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Ευάγγελος Μώκος, Σόνια Καφούση
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
emokos@rhodes.aegean.gr, kafoussi@rhodes.aegean.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή τη μελέτη που διενεργήθηκε στο πλαίσιο διδακτορικής διατριβής, διερευνάται η σχέση της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος και η αυθόρμητη εμφάνιση μεταγνωστικών λειτουργιών. Η συγκεκριμένη εργασία επικεντρώνεται στην εμφάνιση των μεταγνωστικών λειτουργιών κατά την επίλυση αυθεντικών μαθηματικών προβλημάτων από μαθητές Ε Δημοτικού, οι οποίοι εργάστηκαν τόσο ατομικά όσο και σε ομάδες των δύο. Τα αποτελέσματα της έρευνας φανέρωσαν ότι οι μαθητές εμφανίζουν αυθόρμητα μεταγνωστικές λειτουργίες ελέγχου και παρακολούθησης με σχετικές διαφοροποιήσεις στη χρήση μεταγνωστικών στρατηγικών στα δύο περιβάλλοντα.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επίλυση προβλήματος δεν είναι μια ακόμη μέθοδος στα μαθηματικά, αλλά ένας ουσιαστικός παράγοντας για τη μάθηση των μαθηματικών, κατά την οποία ο μαθητής εμβαθύνει την κατανόησή του στις μαθηματικές έννοιες, αναλύοντας και συνθέτοντας τις γνώσεις του (Krulik & Rudnick, 2003). Όμως ένα σημαντικό τμήμα της επίλυσης προβλήματος γίνεται από συνήθεια. Ενώ οι μαθητές «παλεύουν» να λύσουν κάποιο πρόβλημα και βρίσκονται σε ένα στάδιο της επίλυσης, ο δάσκαλος φανερώνει ένα μοντέλο επίλυσης και το υπόλοιπο πρόβλημα λύνεται με βάση το μοντέλο αυτό (Posamentier & Krulik, 1998). Μιμούμενοι το μοντέλο επίλυσης που έδωσε ο δάσκαλος, οι μαθητές το εφαρμόζουν και σε άλλα προβλήματα του ίδιου τύπου. Γι' αυτό το λόγο παρατηρείται δυσκολία στο να λύσουν κάποιο μη συνηθισμένο – αυθεντικού τύπου μαθηματικό πρόβλημα, αν και τα προβλήματα αυτά είναι πιο κοντά στις δραστηριότητες των μαθητών και στην πραγματική ζωή. Οι μαθητές προσπαθούν να χρησιμοποιήσουν αποθηκευμένες στρατηγικές, χωρίς να έχουν προσπαθήσει να τις επιβεβαιώσουν, αφού έχουν διδαχτεί τυπικά να λύνουν προβλήματα με τον πιο τυποποιημένο δυνατό τρόπο (Harskamp et al., 2007).

Η μεταγνώση έχει κερδίσει αρκετό ερευνητικό ενδιαφέρον στη μαθηματική εκπαίδευση και πρακτική (Ku & Ho, 2010). Στη μαθηματική εκπαίδευση, η σημασία της έρευνας των μεταγνωστικών λειτουργιών των μαθητών κατά τη μαθηματική τους δραστηριότητα εμφανίστηκε ως συνέπεια της έμφασης που είχε δοθεί στο ρόλο της απόκτησης συνείδησης από τους ίδιους τους μαθητές των ενεργειών τους καθώς

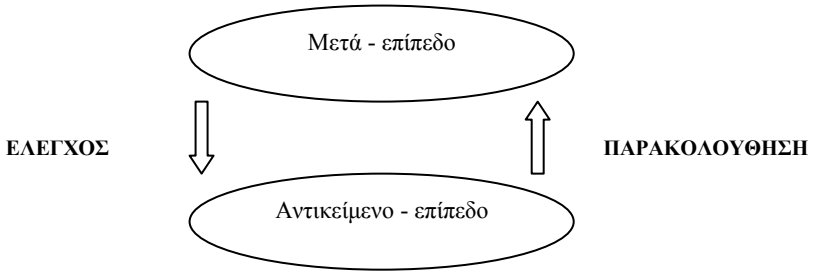
μαθαίνουν μαθηματικά και των διαδικασιών αυτο-ρύθμισής τους (Kilpatrick, 1985; Καλαβάσης, 2007). Στην παρούσα εργασία εστιαζόμαστε στην επίλυση αυθεντικού μαθηματικού προβλήματος, διερευνώντας την εμφάνιση μεταγνωστικών λειτουργιών κατά τη διαδικασία επίλυσης, τόσο σε επίπεδο ατομικό, όσο και σε επίπεδο των ομάδων των δύο ατόμων.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Τα τελευταία χρόνια η μεταγνώση έχει γίνει ένα από τα κύρια πεδία της γνωστικής αναπτυξιακής έρευνας. Η ερευνητική δραστηριότητα ξεκίνησε με τον John Flavell, ενώ στη συνέχεια μπορεί να καταγραφεί ένας σημαντικός αριθμός θεωρητικών και εμπειρικών ερευνών που ασχολούνται με τη μεταγνώση (Papaleontiou, 2008). Σε σχέση με την εκπαίδευση, η μεταγνώση συνδέεται με την απόκτηση νέας γνώσης. Μέσω των μεταγνωστικών λειτουργιών μπορούμε να τροποποιήσουμε την υπάρχουσα γνώση, να αλληλεπιδράσουμε με αυτή και να φτάσουμε στην κατασκευή της νέας γνώσης. Επίσης μπορούμε να εξετάσουμε πώς οι ίδιες οι στρατηγικές απόκτησης της γνώσης τροποποιούνται στην πορεία της συνεχούς εφαρμογής τους (Kuhn, 2000). Το 1976 ο Flavell υποστήριξε ότι η μεταγνώση αποτελείται από δύο μέρη, την παρακολούθηση (monitoring) και τη ρύθμιση (regulation). Εντόπισε τη σπουδαιότητα της μεταγνώσης σε ένα ευρύ πεδίο εφαρμογών που περιλάμβανε το διάβασμα, το γράψιμο, την απόκτηση της γλωσσικής ικανότητας, τη μνήμη, την προσοχή, τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις, την αυτό-διδασκαλία, την ανάπτυξη της προσωπικότητας και την εκπαίδευση (Flavell, 1979). Ο Flavell θεωρούσε ότι η μεταγνώση είναι απαραίτητη για μια επιτυχή μάθηση και ότι καλός μαθητής είναι εκείνος που έχει μεταγνωστική γνώση σχετικά με τον εαυτό του σα μαθητή, σχετικά με τη φύση της γνωστικής δραστηριότητας και σχετικά με τις απαραίτητες στρατηγικές που απαιτούνται για να πετύχει τους στόχους του.

Οι Nelson και Narens πρότειναν ένα θεωρητικό πλαίσιο για τη μεταγνώση που αποτελεί επίσης και μία περιγραφή των συστατικών και των διαδικασιών που συνιστούν την έννοια της μεταγνώσης. Το πλαίσιο τους βασίζεται επάνω σε τρεις αρχές: α) οι νοητικές διαδικασίες διακρίνονται σε αυτό που ονομάζεται αντικείμενο – επίπεδο (δηλ. γνώση) και στο μετά – επίπεδο (δηλ. μεταγνώση), β) το μετά – επίπεδο περιέχει ένα δυναμικό μοντέλο του αντικείμενου – επιπέδου, το οποίο είναι η πηγή της μεταγνωστικής γνώσης ή κατανόησης του αντικείμενου – επιπέδου και γ) υπάρχουν δύο διαδικασίες που αντιστοιχούν στη ροή των πληροφοριών από το αντικείμενο – επίπεδο προς το μετά – επίπεδο (δηλ. παρακολούθηση) και από το μετά – επίπεδο προς το αντικείμενο – επίπεδο (δηλ. έλεγχος) (Nelson & Narens, 1990). Έτσι η μεταγνώση μπορεί να ειδωθεί σαν μία παρακολούθηση και ένας έλεγχος ενός κατώτερου επιπέδου σκέψης, από ένα υψηλότερο επίπεδο σκέψης (Broadbent, 1977). Διαμέσου της παρακολούθησης, οι άνθρωποι παίρνουν πληροφορίες στο μεταγνωστικό επίπεδο σχετικά με την κατάσταση της γνώσης ή των στρατηγικών ενός γνωστικού επιπέδου. Μέσα από τη διαδικασία του ελέγχου, οι

άνθρωποι μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη μεταγνωστική τους γνώση ή κατανόηση μέσα στο μεταγνωστικό επίπεδο για να ρυθμίσουν τη σκέψη στο γνωστικό επίπεδο (Hacker, 2004). Το επόμενο σχήμα (σχ. 1) δείχνει τα επίπεδα οργάνωσης του μεταγνωστικού μοντέλου των Nelson και Narens, καθώς και των διαδικασιών ροής των πληροφοριών.



Σχ. 1. Το θεωρητικό μοντέλο των Nelson και Narens.

Οι έρευνες που έχουν γίνει για τη μεταγνώση και την επίλυση μαθηματικού προβλήματος, έχουν δείξει ότι η μεταγνώση είναι ένας καθοριστικός παράγοντας που όχι μόνο μπορεί να οδηγήσει στη σωστή λύση ενός μαθηματικού προβλήματος, αλλά να βοηθήσει τη διαδικασία επίλυσης (Mevarech & Fridkin, 2006). Οι έρευνες εστιάζονται τόσο σε αυτές χωρίς μεταγνωστική διδασκαλία (Biryukov, 2004; Mohini & Nai, 2005) όσο και σε αυτές με μεταγνωστική διδασκαλία (Kramarski, Mevarech & Arami, 2002; Goos, Galbraith, & Renshaw, 2002;). Ο Schoenfeld (1985), υποστηρίζει σε έρευνά του με μαθητές σε ζευγάρια που έλυναν προβλήματα με τη μέθοδο της «φωναχτής σκέψης», ότι η καλή λειτουργία της μεταγνωστικής παρακολούθησης κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος, δεν οδηγεί πάντοτε σε σωστές πράξεις ελέγχου, αλλά συνήθως δείχνει το σημείο από το οποίο πρέπει να γίνει η επανεκκίνηση, για τη συνέχεια της λύσης. Στη μελέτη αυτή και βασιζόμενοι στις αναφερθείσες μελέτες διερευνάται η αυθόρμητη εμφάνιση μεταγνωστικών λειτουργιών από μαθητές Δημοτικού όταν λύνουν αυθεντικά μαθηματικά προβλήματα είτε ατομικά, είτε σε ομάδες των δύο.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δημόσιο Δημοτικό Σχολείο των Αθηνών στην Ε΄ τάξη το 2010. Στην τάξη αυτή φοιτούσαν 20 μαθητές από τους οποίους 10 ήταν κορίτσια και 10 αγόρια. Και οι 20 μαθητές ήταν ελληνικής καταγωγής. Η Ε΄ τάξη (μαθητές ηλικίας 10 – 11 ετών) επιλέχθηκε καθώς σε αυτή την ηλικία οι μαθητές μπορούν να κατανοούν ερωτήματα μεταγνωστικού τύπου (Focant et al., 2006). Η κυρίως έρευνα αναπτύχθηκε σε δύο φάσεις: α) Φάση Α΄ στην οποία λύθηκε ένα αυθεντικό πρόβλημα σε ατομικό επίπεδο, β) Φάση Β΄ στην οποία λύθηκε ένα αυθεντικό πρόβλημα σε επίπεδο ομάδας των δύο. Η συλλογή των δεδομένων στηρίχτηκε στη μέθοδο της «φωναχτής σκέψης». Όλες οι συναντήσεις του ερευνητή τόσο με τους μεμονωμένους μαθητές όσο και με τις ομάδες βιντεοσκοπήθηκαν. Τα αυθεντικά προβλήματα που δόθηκαν στην Α΄ και Β΄ φάση αντίστοιχα ήταν:

Α) Θέλεις να αγοράσεις για το πάρτι σου αναψυκτικό που κυκλοφορεί σε διάφορες συσκευασίες: α) 500 ml (χιλιοστόλιτρο) και κάνει 1 € β) 1 λίτρου και κάνει 1,20 € και γ) 1,5 λίτρου και κάνει 1,50 €. Είναι γνωστό ότι 1 λίτρο έχει 1000 ml. Υπολόγισε ότι στο πάρτι σου θα χρειαστούν 5 λίτρα αναψυκτικού. Ποια ή ποιες συσκευασίες είναι η πιο φτηνή λύση για το πάρτι που οργανώνεις;

Β) Το σχολείο μας που έχει 300 μαθητές αποφάσισε τη φετινή χρονιά να πάει εκδρομή στο Αττικό Πάρκο. Για να πάμε μια σχολική εκδρομή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε λεωφορεία των 50 και των 25 θέσεων. Πήραμε από δύο γραφεία διοργάνωσης εκδρομών τις εξής προσφορές: α) Το πρώτο γραφείο χρεώνει 100 € για το λεωφορείο των 50 θέσεων. Δεν διαθέτει λεωφορεία των 25 θέσεων, β) Το δεύτερο γραφείο χρεώνει 150 € για το λεωφορείο των 50 θέσεων και προσφέρει για κάθε 5 τέτοια λεωφορεία, δωρεάν 2 λεωφορεία των 25 θέσεων. Να εξετάσετε ποια προσφορά μας συμφέρει να προτιμήσουμε, αν όλοι οι μαθητές του σχολείου έχουν δηλώσει ότι θέλουν να συμμετέχουν στην εκδρομή.

Προτιμήθηκε το είδος των αυθεντικών προβλημάτων στη συγκεκριμένη έρευνα γιατί μπορούν να αποτυπώσουν καλύτερα τις μεταγνωστικές λειτουργίες των μαθητών, δημιουργώντας ένα φυσικό και οικείο περιβάλλον.

Στην έρευνά μας και για την ανάλυση των λεκτικών αναφορών των μαθητών στην Α΄ Φάση βασιστήκαμε στο Ερωτηματολόγιο Μεταγνωστικής Αξιολόγησης (Metacognitive Assessment Inventory, MAI), των Schraw και Dennison (1994), για να ανιχνευθούν ποιες λειτουργίες ελέγχου και παρακολούθησης ανάπτυξαν οι μαθητές κατά την επίλυση του αυθεντικού μαθηματικού προβλήματος, αφού τροποποιήθηκε κατάλληλα για να ταυτίζεται καλύτερα με τη θεωρία των Nelson και Narens (βλ. Παράρτημα). Για την ανάλυση των λεκτικών αναφορών των μαθητών στη Β΄ φάση βασιστήκαμε σε ένα πρωτόκολλο ανάλυσης φωναχτής σκέψης που αναπτύχθηκε από τους Goos και Galbraith (1996) (βλ. Παράρτημα).

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων των αυθεντικών προβλημάτων όταν οι μαθητές εργάζονται ατομικά (βλ. πιν. 1), έδειξε ότι οι μαθητές της συγκεκριμένης ηλικίας αναπτύσσουν αυθόρμητα μεταγνωστικές πράξεις ελέγχου και παρακολούθησης. Υπήρχαν ωστόσο διαφοροποιήσεις σχετικά με τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές κατά τη διαδικασία επίλυσης.

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ – ΕΠΙΠΕΔΟ	
Στρατηγικές Διαχείρισης Πληροφοριών (Control)	37
Στρατηγικές Διόρθωσης (Control)	9
Σχεδιασμός (Control)	6
Έλεγχος Κατανόησης (Monitoring)	11

Αξιολόγηση (Monitoring)	14
ΣΥΝΟΛΟ	77
ΜΕΤΑ – ΕΠΙΠΕΔΟ	
Διαδικαστική Γνώση (Control)	37
Δηλωτική Γνώση (Monitoring)	12
ΣΥΝΟΛΟ	49
ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ ΛΕΚΤΙΚΩΝ ΑΝΑΦΟΡΩΝ	**126**

Πίνακας 1. Λεκτικές αναφορές των μαθητών στο αυθεντικό πρόβλημα (ατομική εργασία)

Όσον αφορά το αντικείμενο – επίπεδο και τη μεταγνωστική λειτουργία του Ελέγχου (control), οι μαθητές εξέφρασαν περισσότερες λεκτικές αναφορές που αναφέρονταν στις Στρατηγικές Διαχείρισης Πληροφοριών και στη συνέχεια στις Στρατηγικές διόρθωσης, ενώ ακολουθούν οι στρατηγικές για το Σχεδιασμό. Σύμφωνα με το μεταγνωστικό μοντέλο των Nelson και Narens (1990), οι μαθητές όταν λύνουν ένα αυθεντικό πρόβλημα στα μαθηματικά προσπαθούν να διαχειριστούν όσο το δυνατό καλύτερα τις πληροφορίες που τους δίνονται, να ελέγξουν το αντικείμενο – επίπεδο, αφού έχουν μια πλήρη και σαφή ενημέρωση με τις πληροφορίες και τα δεδομένα που τους δίνονται. Όσον αφορά το μετά – επίπεδο και τη μεταγνωστική λειτουργία του Ελέγχου (control), οι μαθητές εξέφρασαν πάρα πολλές λεκτικές αναφορές που αναφέρονταν σε στρατηγικές της Διαδικαστικής γνώσης. Σύμφωνα με το μεταγνωστικό μοντέλο των Nelson και Narens (1990), οι μαθητές φαίνεται να προσπαθούν με πολλές πράξεις να ελέγξουν και να τροποποιήσουν το ατελές μοντέλο του αντικείμενου – επιπέδου που υπάρχει στο μετά – επίπεδό τους. Ταυτόχρονα η λειτουργία της μεταγνωστικής Παρακολούθησης παρακολουθεί το ατελές νοητικό μοντέλου του αντικείμενου – επιπέδου με στρατηγικές που αναφέρονται στη Δηλωτική γνώση αφού με τις γνώσεις που ήδη κατέχουν παρακολουθούν αν κατάφεραν να ελέγξουν και να τροποποιήσουν την ατελή νοητική αναπαράσταση του προβλήματος που έχουν να λύσουν.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων των αυθεντικών προβλημάτων όταν οι μαθητές εργάζονται σε μικρές ομάδες (βλ. πιν. 2), έδειξε ότι οι μαθητές της συγκεκριμένης ηλικίας αναπτύσσουν αυθόρμητα μεταγνωστικές πράξεις ελέγχου και παρακολούθησης.

Μεταγνωστικές λειτουργίες	**Λεκτικές αναφορές**
Τοπική Αξιολόγηση (LA)	52
Νέα Ιδέα (NI)	14

Νέα Διαδικασία (NP)	5
Σφαιρική Αξιολόγηση (GA)	8
ΣΥΝΟΛΟ (Παρακολούθηση)	79
Αλλαγή (T)	10
ΣΥΝΟΛΟ (Έλεγχος)	10
ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ	89

Πίνακας 2. Λεκτικές αναφορές των μαθητών στο αυθεντικό πρόβλημα (εργασία σε ομάδες)

Όσον αφορά τη λειτουργία της μεταγνωστικής Παρακολούθησης (monitoring) οι ομάδες εξέφρασαν περισσότερες λεκτικές αναφορές, που είχαν τη μορφή της Τοπικής Αξιολόγησης (LA), ενώ ακολουθούσαν οι Νέες Ιδέες (NI) και οι Σφαιρικές Αξιολογήσεις (GA). Οι Νέες Διαδικασίες (NP) ήταν πολύ λίγες. Σύμφωνα με το μεταγνωστικό μοντέλο των Nelson και Narens (1990), οι μαθητές φαίνεται να παρακολουθούν πολύ καλά την επίλυση του αυθεντικού τύπου μαθηματικού προβλήματος και η εξήγηση είναι ότι υπάρχει η εντύπωση πως προσπαθούν συνεχώς να βελτιώσουν και να τροποποιήσουν το ατελές μοντέλο του αντικείμενου – επιπέδου που υπάρχει στο μετά – επίπεδό τους, ίσως γιατί η παρουσία του συμμαθητή ή της συμμαθήτριάς τους στη μικρή ομάδα, λειτουργεί καταλυτικά στο γνωστικό και συναισθηματικό τους περιβάλλον και δε θέλουν να δείξουν πως κάνουν λάθος στη λύση του προβλήματος ή να προχωρήσουν σε μια πράξη Ελέγχου που θα οδηγήσει σε λανθασμένη επίλυση του προβλήματος. Όσον αφορά τη μεταγνωστική λειτουργία του Ελέγχου (control), οι ομάδες εξέφρασαν πολύ λίγες λεκτικές αναφορές που σηματοδοτούσαν μια Αλλαγή (T), δηλαδή μια πράξη ελέγχου η οποία αλλάζει δραματικά τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος και οδηγεί σε ένα επόμενο στάδιο, το οποίο αποτελεί τη λύση ή μέρος αυτής. Η εξήγηση του ότι έχουμε λίγες πράξεις ελέγχου μπορεί να στηριχτεί στο ότι ο μαθητής όταν ενεργεί μέσα στα πλαίσια μιας μικρής ομάδας, δεν μπορεί να εκθέσει τη σκέψη του και την μαθηματική αιτιολόγησή του σε αμφισβήτηση από το άλλο μέλος της ομάδας, λαμβάνοντας το ρίσκο μιας λανθασμένης πράξης ελέγχου, που πιθανόν να οδηγήσει σε λάθος αποτέλεσμα. Γι' αυτό προτιμά περισσότερο να παρακολουθεί τη διαδικασία επίλυσης από το να επεμβαίνει συχνά επάνω στη λύση, περιμένοντας την κατάλληλη ευκαιρία, αφού έχουν διαμορφωθεί αρκετά οι συνθήκες μέσα από τις πράξεις παρακολούθησης για να επέμβει και να δώσει την πράξη ελέγχου που θα οδηγήσει στη λύση του προβλήματος.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα μελέτη μελετήσαμε την εμφάνιση μεταγνωστικών λειτουργιών από μαθητές Ε΄ τάξης, 10 – 11 ετών, καθώς λύνουν αυθεντικά προβλήματα μαθηματικών είτε δουλεύοντας ατομικά είτε σε μικρές ομάδες των δύο. Τα ευρήματα της έρευνας φανερώνουν ότι οι μαθητές της ηλικίας αυτής εμφανίζουν αυθόρμητα μεταγνωστικές λειτουργίες ελέγχου και παρακολούθησης με σχετικές διαφοροποιήσεις στη χρήση μεταγνωστικών στρατηγικών κατά τη διάρκεια επίλυσης.

Η ικανότητα των μαθητών της ηλικίας αυτής να εμφανίζει αυθόρμητα μεταγνωστικές λειτουργίες ελέγχου και παρακολούθησης, μπορεί να αξιοποιηθεί κατάλληλα από τον εκπαιδευτικό, ο οποίος μπορεί να ενισχύσει τις μεταγνωστικές ικανότητες των μαθητών του, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του μαθήματος των μαθηματικών με μια μεταγνωστικού τύπου διδασκαλία. Η διδασκαλία αυτή μπορεί να βασίζεται είτε σε ερωτήματα μεταγνωστικής μορφής, τα οποία θα ωθούν τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν σε κάθε φάση επίλυσης του προβλήματος ερωτήματα που θα τους βοηθούν να ενεργοποιούν την κατάλληλη μεταγνωστική πράξη Ελέγχου ή Παρακολούθησης, είτε σε ένα τυποποιημένο μεταγνωστικό διδακτικό πρόγραμμα που θα δημιουργηθεί από τους εκπαιδευτικούς φορείς. Η πρόταση αυτή χρειάζεται βαθύτερη διερεύνηση καθώς σχετίζεται με την επιμόρφωση των δασκάλων σε νέες πρακτικές μεταγνωστικού χαρακτήρα, αλλά και την ενεργοποίηση φορέων που εμπλέκονται στην εκπαιδευτική διαδικασία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Biryukov, P. (2004). Metacognitive Aspects of Solving Combinatorics Problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1 – 19.

Broadbent, D. E. (1977). Levels, hierarchies and the locus of control. *Quarterly journal of Experimental Psychology*, 29, 181 – 201.

Harskamp, E., Suhre, C. (2007). Schoenfeld's problem solving theory in a student controlled learning environment. *Computational Education*, 49 (3), 822–839.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231–235). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring. *American Psychologist*, 34, 906-911.

Focant, J., Gregoire, J., Desoete, A. (2006). Goal setting, planning and control strategies and arithmetical problem solving at grade 5. In A. Desoete and M. Veenman (Eds.), *Metacognition in mathematics education*(pp. 51-71). New York: Nova Science Publishers, Inc.

Goos, M., Galbraith P. (1996). Do it this way! Metacognitive strategies in collaborative mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 229 – 260.

Goos, M., Galbraith, P., Renshaw, P. (2002). Socially Mediated Metacognition: Creating Collaborative Zones of Proximal Development in Small Group Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 193-223.

Hacker, D. J. (2004). Self-regulated comprehension during normal reading. In R. B. Ruddell & N. Unrau (Eds.), *Theoretical models and processes of reading* (5th ed., pp. 775 – 779). Newark, DE: Internatinal Reading Association.

Καλαβάσης, Φ. (2007). Ορισμένες αρχικές επισημάνσεις για την έννοια του Σχεδιασμού Εκπαιδευτικών Μονάδων. Στο Φ. Καλαβάσης & Α. Κοντάκος (Επ.), *Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού*, 13 – 28.Εκδόσεις Ατραπός.

Kilpatrick, J. (1985). Reflection and recursion. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 187 – 228.

Kramarski, B., Mevarech, Z., Arami, M. (2002). The Effects of Metacognitive Instruction on Solving Mathematical Authentic Tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 225 – 250.

Krulik, S., Rudnick, J.A. (2003). *Problem Solving: A Handbook for Senior High School Teachers*. Antony Rowe, Ltd., Eastbourne

Ku, K., Ho, I., (2010). Metacognitive strategies that enhance critical thinking. *Metacognition and Learning*, 5(3), 251 -267. Doi: 1 0.1 007/s11 409-01 0-9054-4.

Kuhn, D. (2000). Metacognitive Development. *Current Directions in Psycological Science*, 9 (5), 178 – 181.

Mohini, M., Tan Ten Nai. (2005). The use of metacognitive process in learning mathematics. *Proceedings of the Conference Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education*, pp. 159-162.

Nelson, T. O., Narens, L. (1990). Metamemory: A theoretical framework and new findings. *The Psychology of Learning and Motivation*, 26, 125–141.

Papaleontiou – Louca, E. (2008). *Metacognition and Theory of Mind*. Cambridge Scholars Publishing, Newcastle, ISBN (10): 1-84718-578-9

Posamentier, A.S., Krulik, S. (1998). *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions*. Corwin Press, Inc., California (1998)

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schraw, G., Dennison, R.S. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology*, 19, 460-475.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

α) Το τροποποιημένο ερωτηματολόγιο MAI

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ			
ΕΛΕΓΧΟΣ (CONTROL)		**ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ (MONITORING)**	
ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ (IMS)		**ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ (COMPREHENSION MONITORING)**	
1. Επιβραδύνει την ταχύτητά του όταν συναντά σημαντικές πληροφορίες		11. Συχνά (περιοδικά) ανακεφαλαιώνει για να βοηθηθεί να καταλάβει σημαντικές σχέσεις	
2. Συνειδητά επικεντρώνει την προσοχή του σε σημαντικές πληροφορίες		12. Αναλύει τη χρησιμότητα των στρατηγικών ενώ μελετά	
3. Προσπαθεί να κατακερματίσει τη μελέτη σε μικρότερα βήματα		13. Βρίσκει τον εαυτό του να σταματά ταχτικά για να ελέγξει την κατανόησή του	
4. Συγκεντρώνεται περισσότερο σε γενικές παρά σε ειδικές έννοιες		**ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ (EVALUATION)**	
ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ (DEBUGGING)		14. Γνωρίζει πόσο καλά τα πήγε όταν τελειώνει ένα τεστ	
5. Επανεκτιμά τις υποθέσεις του όταν μπερδεύεται		15. Ανακεφαλαιώνει τι έμαθε αφού τελειώσει	
6. Σταματά και ξαναδιαβάζει όταν μπερδεύεται		16. Ρωτά τον εαυτό του αν έχει θεωρήσει όλες τις περιπτώσεις μετά από τη λύση ενός προβλήματος	
ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ (PLANNING)			
7. Βάζει συγκεκριμένους στόχους πριν ξεκινήσει ένα πρόβλημα			
8. Ρωτά τον εαυτό του ερωτήσεις σχετικά με το υλικό πριν ξεκινήσει			
9. Σκέφτεται πολλούς τρόπους για να λύσει ένα πρόβλημα και διαλέγει τον καλύτερο			
10. Διαβάζει προσεκτικά τις οδηγίες πριν ξεκινήσει ένα πρόβλημα (task)			

ΜΕΤΑ-ΕΠΙΠΕΔΟ			
ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ		**ΔΗΛΩΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ**	
17. Έχει ένα συγκεκριμένο σκοπό για κάθε στρατηγική που χρησιμοποιεί		19. Είναι καλός στο να κρίνει το πόσο καλά καταλαβαίνει κάτι	
18. Βρίσκει τον εαυτό του να χρησιμοποιεί χρήσιμες στρατηγικές μάθησης αυτομάτως			

β) το εργαλείο των Goos και Galbraith

ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΩΝ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΩΝ

Επεισόδιο[1]	Αριθμός[2]	Δημιουργός[3]	Τύπος[4]	Περιεχόμενο	NI/NP χρήσιμη	Ανταπόκριση στη NI/NP
E_1						
T_1						
E_2						
T_2						

Το συγκεκριμένο εργαλείο αναφέρεται σε αναγνώριση τριών διαφορετικών τύπων αποφάσεων που στηρίζονται σε μεταγνωστικές λειτουργίες: *α) Αλλαγές (transitions)* μεταξύ των επεισοδίων με τις οποίες η κατεύθυνση της επίλυσης προβλήματος αλλάζει σημαντικά, β) Αποφάσεις στις οποίες αναγνωρίστηκε *νέα γνώση ή έγιναν τοπικές εκτιμήσεις – αξιολογήσεις* συγκεκριμένων μερών της λύσης.

Οι αλλαγές (transitions) μεταξύ των επεισοδίων εμπίπτουν στη μεταγνωστική λειτουργία του ελέγχου (control), ενώ η παραγωγή νέων ιδεών και νέων διαδικασιών εμπίπτουν στη μεταγνωστική λειτουργία της παρακολούθησης (monitoring) σύμφωνα με το θεωρητικό μοντέλο των Nelson και Narens (1990).

[1] E = Επεισόδιο, T = Αλλαγή
[2] Ο αριθμός αντιπροσωπεύει τη λεκτική αναφορά
[3] Ο μαθητής που είπε τη φράση
[4] NI = Νέα πληροφορία, NP = Νέα διαδικασία, LA = Τοπική αξιολόγηση

ΜΟΤΙΒΑ ΣΤΗΝ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

Σκουμπουρδή Χρυσάνθη
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
kara@aegean.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα μοτίβα προτείνεται να διδάσκονται από το νηπιαγωγείο. Εικόνες και γεγονότα από την καθημερινή ζωή των παιδιών περιέχουν μοτίβα, σε ποικίλες μορφές και με σημαντικές ιδιαιτερότητες. Δημιουργείται όμως το ερώτημα, με δεδομένο ότι η διερεύνηση των μοτίβων είναι εξαρτημένη από τη χρήση υλικού, αν θα μπορούσαν μοτίβα από την καθημερινότητα να ενταχθούν στη διερεύνηση των κανονικοτήτων από τα νήπια. Εντοπίζουν και αναγνωρίζουν τα νήπια τέτοιου είδους μοτίβα; Μπορούν να τα περιγράψουν και να τα συμπληρώσουν; Οι απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα θα συνεισφέρουν στο σχεδιασμό σειράς δραστηριοτήτων για τα μοτίβα στο νηπιαγωγείο.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Η ενασχόληση με μοτίβα είναι θεμελιώδης για την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού των παιδιών (Mulligan & Michelmore, 2009). Μέσω της ικανότητας εντοπισμού, αναγνώρισης, αντιγραφής, επέκτασης και δημιουργίας μοτίβων καλλιεργούνται σύνθετες μαθηματικές ικανότητες και δεξιότητες (Clements & Sarama, 2009˙ Papic, Mulligan & Michelmore, 2009). Για αυτό και στα αναλυτικά προγράμματα πολλών χωρών προτείνεται η προσέγγιση των μοτίβων από το νηπιαγωγείο. Στα ελληνικά αναλυτικά προγράμματα (ΠΣΝ, 2011: 170-171), μέσα από την ευρύτερη ενότητα Άλγεβρα: 'Εισαγωγή στην Αλγεβρική σκέψη' *κανονικότητες και ισότητες*—σημειώνεται: (α) Τα *παιδιά αναγνωρίζουν, περιγράφουν και συμπληρώνουν κανονικότητες με χειραπτικό ή εικονιστικό υλικό* και (β) *Κατασκευάζουν δικές τους κανονικότητες με υλικό.*

Εκτός από τα αναλυτικά προγράμματα, έρευνες διεθνώς για την αντίληψη των μοτίβων από τα μικρά παιδιά αφορούν: στη διαμόρφωση σταδίων ανάπτυξης μέσα από τη διερεύνηση των επιδόσεών τους (Rustigian, 1976 στο Threlfall 2005:23˙ Michael, Elia, Gagatsis, Theoklitou, Savva, 2006˙ Clements & Sarama, 2009), στη διερεύνηση της αντίληψής τους για τη δομή ποικίλων μαθηματικών καταστάσεων (Mulligan, Prescott & Mitchelmore, 2004), στη διερεύνηση των εξηγήσεων και των γενικεύσεων των παιδιών (Lannin, 2005˙ Swoboda, & Tatsis, 2009˙ Synoś & Swoboda, 2007), στη διερεύνηση των δυσκολιών στη διατύπωση του κανόνα (Warren, 2006), στη διερεύνηση της αυθόρμητης τάσης των παιδιών να εντοπίζουν, να επαναλαμβάνουν ή να συνεχίζουν ένα πρότυπο (Τζεκάκη & Κούλελη, 2007), στην

καταγραφή των λαθών των παιδιών στα μοτίβα (Klein & Starkley, 2004), στη επίδραση της διδασκαλίας σε θέματα μοτίβων (Papic, Mulligan & Michelmore, 2011) και στην ιεράρχηση στρατηγικών για τη διαμόρφωση επιπέδων επίδοσης (Skoumpourdi, 2013). Στα αποτελέσματα των ερευνών φάνηκε ότι τα μικρά παιδιά έχουν την ικανότητα να εντοπίζουν, να αναγνωρίζουν, να συμπληρώνουν, να αναπαράγουν, να επεκτείνουν και να κατασκευάζουν μοτίβα. Είναι φανερό όμως ότι οι επιδόσεις τους είναι άμεσα εξαρτημένες και επηρεάζονται από τη μορφή του μοτίβου, τη δομή του προτύπου που επαναλαμβάνεται, το είδος του υλικού και του μέσου που χρησιμοποιείται, καθώς και με το αν έχει προηγηθεί ή όχι διδασκαλία. Οι περισσότερες από τις παραπάνω έρευνες καταλήγουν, στο ότι για την περαιτέρω βελτίωση της επίδοσης των παιδιών είναι αναγκαία η διδακτική παρέμβαση από τις μικρές ηλικίες. Σε αυτό συνηγορούν και έρευνες που δείχνουν ότι πολλές από τις δυσκολίες των μεγαλύτερων παιδιών στην άλγεβρα ίσως ξεκινάνε από την έλλειψη εμπειριών σε μικρές ηλικίες, για τα μοτίβα (Warren & Cooper, 2008).

Παρόλη όμως τη σημαντικότητα των μοτίβων και την περιγραφή συγκεκριμένων στόχων για τη διερεύνηση τους, πολύ συχνά στις τάξεις των νηπιαγωγείων, δεν αποτελούν αυτόνομη ενότητα διδασκαλίας και οι σχετικές δραστηριότητες, εάν υπάρχουν, είναι ελάχιστες. Το δεδομένο αυτό αποσυντονίζει τη μαθησιακή τροχιά των κανονικοτήτων, εφόσον ενώ υπάρχουν οι στόχοι και το σχεδιασμένο μαθησιακό μονοπάτι από το οποίο περνούν τα επίπεδα συλλογισμού των παιδιών για τα μοτίβα, λείπει η διδασκαλία που θα βοηθήσει τα παιδιά να διασχίσουν το μονοπάτι αυτό.

Σε μια προσπάθεια δημιουργίας σειράς δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία των μοτίβων στο νηπιαγωγείο και με δεδομένο ότι στοιχεία από το καθημερινό πολιτισμικό περιβάλλον των παιδιών προτείνεται να χρησιμοποιούνται στη διαδικασία της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών (D'Ambrosio, 1985), αναρωτηθήκαμε αν τα νήπια έχουν την ικανότητα να εντοπίζουν, να αναγνωρίζουν, να περιγράφουν και να σημειώνουν/συμπληρώνουν μοτίβα σε εικόνες που αναπαριστούν στοιχεία από το πολιτισμικό τους περιβάλλον.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η μορφή των μοτίβων και η δομή του προτύπου που επαναλαμβάνεται είναι δύο παράγοντες που αφενός λαμβάνονται υπόψη κατά το σχεδιασμό αντίστοιχων δραστηριοτήτων και αφετέρου επηρεάζουν τις επιδόσεις των παιδιών στα μοτίβα. Τα υλικά και τα μέσα που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή των μοτίβων είναι άλλος ένας παράγοντας. Από τις έρευνες που έχουν γίνει διεθνώς, για τα μοτίβα στις μικρές ηλικίες, έχει φανεί ότι δραστηριότητες εντοπισμού, αναγνώρισης και αντιγραφής ή συμπλήρωσης μοτίβου είναι ευκολότερες από τις δραστηριότητες επέκτασης, αναπαραγωγής και κατασκευής και σε κάθε περίπτωση η λεκτική περιγραφή μοτίβου προκαλεί στα παιδιά δυσκολία. Έχει φανεί επίσης ότι, οι δομές ΑΑΑ (με πρότυπο Α) και ΑΒΑΒΑΒ (με πρότυπο ΑΒ) είναι ευκολότερες από τις

υπόλοιπες. Όσον αφορά στην κατασκευή των μοτίβων χρησιμοποιούνται συνήθως αντικείμενα καθημερινής χρήσης (π.χ. κουμπιά), το ανθρώπινο σώμα (π.χ. βήματα, ανθρωπάκια), πολιτισμικά εργαλεία (π.χ. ρολόι, χάρακας) και εκπαιδευτικά υλικά (π.χ. αριθμογραμμή, κυβάκια, αναπαραστάσεις επίπεδων σχημάτων). Θέματα από τη λαϊκή παράδοση και την καθημερινότητα των παιδιών έχουν χρησιμοποιηθεί σε έρευνες με μεγαλύτερα παιδιά (Ε΄ τάξης) και έχει φανεί ότι συνάντησαν δυσκολίες στον εντοπισμό μοτίβου μέσα από έγχρωμο υφαντό ενώ αντίθετα δεν δυσκολεύτηκαν να εντοπίσουν μοτίβα μέσα από καθημερινές καταστάσεις (Μιχαήλ & Λεμονίδης, 2007).

Με βάση τα παραπάνω, για τη διερεύνηση της ικανότητας των νηπίων να εντοπίζουν, να αναγνωρίζουν, να περιγράφουν και να συμπληρώνουν μοτίβα που προέρχονται από την καθημερινότητά τους, σχεδιάστηκαν δύο δραστηριότητες που πραγματοποιήθηκαν σε μια τάξη νηπιαγωγείου, με 9 παιδιά (5 κορίτσια και 4 αγόρια), δύο συνεχόμενες ημέρες του Μαΐου. Η μορφή των μοτίβων ήταν διαφορετική σε κάθε περίπτωση και η δομή των προτύπων ήταν του τύπου ΑΑΑ και ΑΒΑΒΑΒ. Το ευρύτερο περιβάλλον της πόλης που ζουν και κινούνται καθημερινά τα παιδιά με τις οικογένειές τους αποτέλεσε το πλαίσιο των δραστηριοτήτων και παρουσιάστηκε μέσα από εικόνες.

Οι διδασκαλίες, ως διάγνωση ικανοτήτων παρά ως διαδικασία μάθησης, πραγματοποιήθηκαν από τη νηπιαγωγό της τάξης η οποία δεν είχε δουλέψει δραστηριότητες με μοτίβα στη διάρκεια της χρονιάς, εκτός από μία εικαστική δραστηριότητα – χρωματισμού μιας μέλισσας με εναλλαγή των χρωμάτων κίτρινο-μαύρο. Για το λόγο αυτό οι διδασκαλίες έλαβαν χώρα με τον τρόπο που συνήθιζε η νηπιαγωγός να κάνει το μάθημα: την πρώτη μέρα στην παρεούλα με συμμετοχή των παιδιών που ήθελαν να συμμετάσχουν, τη δεύτερη μέρα στην παρεούλα με επιλογή διαφορετικών κάθε φορά ομάδων 3-4 παιδιών για την πραγματοποίηση κάθε δραστηριότητας.

3. ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Η πρώτη δραστηριότητα, έθετε τον προβληματισμό κάποιων τουριστών για το ποια σημεία της πόλης απεικονίζονται στις φωτογραφίες που τράβηξαν στις διακοπές τους. Παρουσιάστηκαν στα παιδιά τέσσερις φωτογραφίες: τα τείχη του κάστρου (Εικ. 1), το ταχυδρομείο (Εικ. 2), η πρώην Παιδαγωγική Ακαδημία (Εικ. 3) – σήμερα στεγάζεται το σχολείο τους – και ένα βοτσαλωτό ψηφιδωτό (Εικ. 4) τα οποία αφενός είναι πολύ χαρακτηριστικά για την πόλη τους και αφετέρου η δόμησή τους περιλαμβάνει μοτίβα. Ο προβληματισμός που δόθηκε ήταν ο εξής:

> *Ο Κιμ και η Αντριάν, δύο παιδιά στην ηλικία σας, είχαν έρθει, πριν ένα μήνα, διακοπές στο νησί μας και τράβηξαν διάφορες φωτογραφίες από τα αξιοθέατά του. Γυρνώντας στην πατρίδα τους αποφάσισαν να φτιάξουν ένα άλμπουμ, αλλά δε θυμούνταν όλα τα αξιοθέατα και ζητάνε τη δική μας βοήθεια.*



Εικ. 1: Τείχη Π. Πόλης



Εικ. 2: Ταχυδρομείο



Εικ. 3:(πρώην) Παιδ. Ακαδημία



Εικ. 4: Βοτσαλωτό ψηφιδωτό

Για την πραγματοποίηση της πρώτης διδασκαλίας, η νηπιαγωγός διάβασε στα νήπια το γράμμα που έφτασε στο νηπιαγωγείο τους, από τα παιδιά που είχαν ταξιδέψει στο νησί. Τα νήπια έδειξαν μεγάλη περιέργεια για τις φωτογραφίες και προσπάθησαν να αναγνωρίσουν τις εικόνες, αλλά οι προσεγγίσεις τους δεν ήταν πάντα επιτυχείς. Όλα αναγνώρισαν το κτίριο του σχολείου τους, καθώς και τα τείχη της Παλιάς Πόλης. Ένα παιδί μόνο αναγνώρισε το ταχυδρομείο λέγοντας ότι η μαμά του δουλεύει εκεί. Το βοτσαλωτό ψηφιδωτό περιγράφηκε από τα παιδιά ως κατασκευή σε κάποιο δρόμο, χωρίς κανένα παιδί να μπορέσει να καταλάβει σε ποιο σημείο της πόλης βρίσκεται. Με τη βοήθεια της νηπιαγωγού, δόθηκαν ονόματα σε όλες τις φωτογραφίες.

Στη συνέχεια, και αφού είχαν ονομαστεί τα αξιοθέατα, έγινε παρατήρηση των εικόνων για ανακάλυψη εκείνων των χαρακτηριστικών τους (ιδιαιτερότητες, επαναλήψεις κλπ) που θα μπορούσαν να βοηθήσουν στον ευκολότερο εντοπισμό και αναγνώρισή τους. Ο προβληματισμός που δόθηκε ήταν ο εξής:

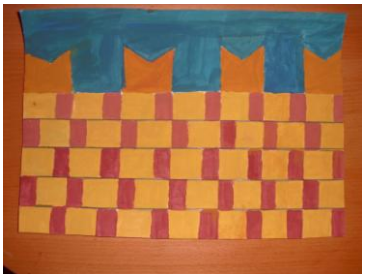
> *Τελικά τα παιδιά είχαν δίκιο. Είναι δύσκολο να θυμάσαι τι στεγάζει το κάθε κτίριο ή πού βρίσκεται το κάθε ψηφιδωτό. Θέλετε να παρατηρήσουμε την κάθε φωτογραφία και να βρούμε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά αυτού που εικονίζει; Ίσως με αυτό τον τρόπο να τα θυμόμαστε πιο εύκολα.*

Τα νήπια, στην προσπάθειά τους να παρατηρήσουν τις εικόνες και να ανακαλύψουν τα χαρακτηριστικά και τις ιδιαιτερότητες της καθεμίας, εντόπισαν και ανάφεραν τα παράθυρα, τα γύψινα, καθώς και άλλα δομικά στοιχεία τα οποία ξεχώριζαν σε κάθε εικόνα. Κάποια νήπια άρχισαν την καταμέτρηση αναφέροντας το συνολικό αριθμό, για παράδειγμα, των παραθύρων. Μετά από συζήτηση η τάξη κατέληξε ότι δεν είναι αυτό το σύνολο π.χ. των παραθύρων γιατί η φωτογραφία δείχνει ένα μέρος του κτιρίου, καθώς και ότι η καταμέτρηση δε βοηθάει στην αναγνώριση και στη μνήμη.

Η διαφορετικότητα και η θέση των δομικών στοιχείων αναδείχθηκαν ως πιο σημαντικά σημεία και αυτά αναλύθηκαν. Για παράδειγμα, για το κτίριο του σχολείου τους παρατήρησαν την επανάληψη κατακόρυφα: μικρό τετράγωνο παράθυρο/ορθογώνιο στολισμένο παράθυρο/ορθογώνιο σκέτο παράθυρο και την επανάληψη οριζόντια: μικρό τετράγωνο παράθυρο ή ορθογώνιο στολισμένο παράθυρο ή ορθογώνιο σκέτο παράθυρο. Κατέληξαν ότι ο εντοπισμός αυτού του είδους τα βοηθούσε να θυμούνται ποιο είναι το κάθε κτίριο, αλλά και να γνωρίζουν πώς είναι το υπόλοιπο κτίριο, το οποίο δεν περιλαμβάνεται στη φωτογραφία.

Στη δεύτερη δραστηριότητα καλούνταν τα νήπια να λύσουν τα κουίζ που τους έστειλαν τα παιδιά με τις ζωγραφιές τους[i]. Ο προβληματισμός που δόθηκε ήταν ο εξής:

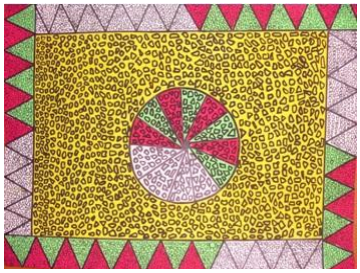
Η Αντριάν και ο Κιμ μας έστειλαν κάποιες από τις ζωγραφιές που έκαναν με ό,τι τους εντυπωσίασε από το νησί μας και σας προσκαλούν να λύσετε τα κουίζ που τις συνοδεύουν.



Ζωγραφιά 1-ΚΟΥΙΖ: Πώς είναι φτιαγμένο αυτό; Ψάξε βρες το μυστικό …



Ζωγραφιά 2- ΚΟΥΙΖ: Είναι ολοκληρωμένο ή μισοσυμπληρωμένο;



Ζωγραφιά 3-ΚΟΥΙΖ: Τρίγωνα μεγάλα, τρίγωνα μικρά, πώς θα μπούνε στη 'σωστή' σειρά;

Αφού παρουσίασε η εκπαιδευτικός στα νήπια την 1η ζωγραφιά (που παριστάνει τα τείχη της Π. Πόλης) και τους διάβασε το κουίζ που τη συνόδευε, προσπάθησε με διάφορες ερωτήσεις, όπως: *Τι παρατηρείτε; Πώς είναι φτιαγμένο; Επαναλαμβάνεται κάτι; Τι επαναλαμβάνεται; Μπορείτε να το κυκλώσετε;* να βοηθήσει τα παιδιά να αντιληφθούν τι διακρίνεται στην κατασκευή, δηλαδή τι επαναλαμβάνεται, και να το σημειώσουν στη ζωγραφιά, για να δείξουν ότι βρήκαν το μυστικό της κατασκευής.

Τα παιδιά, πολύ εύκολα, εντόπισαν την επανάληψη των χρωματισμών στις πέτρες και την ομοιότητα της ζωγραφιάς με τη φωτογραφία των τειχών της Π. Πόλης, αλλά όχι και την επανάληψη των επάλξεων, στο πάνω μέρος της ζωγραφιάς. Χαρακτηριστικός είναι ο παρακάτω διάλογος (όπου Ε: εκπαιδευτικός, Ν: πολλά νήπια μαζί, Ν1, Ν3, Ν5, Ν7 και Ν9: τα 5 κορίτσια και Ν2, Ν4, Ν6 και Ν8: τα 4 αγόρια):

Ε: Παιδιά, ακούστε τι λέει το κουίζ της πρώτης ζωγραφιάς: 'Πώς είναι φτιαγμένο αυτό; Ψάξε βρες το μυστικό …'. Τι νομίζετε; Πώς μπορούμε να απαντήσουμε στο κουίζ;

Ν1: Να πούμε πώς είναι φτιαγμένο αυτό το κάστρο.

Ε: Πώς είναι φτιαγμένο αυτό το κάστρο; Τι παρατηρείτε;

Ν: Έχει κίτρινες και καφέ πέτρες.

Ε: Επαναλαμβάνεται κάτι;

Ν: Ναι…

Ε: Τι επαναλαμβάνεται;

Ν1: Εεεε… Είναι κίτρινο-καφέ-κίτρινο-καφέ.

Ν2: Έχει και εκεί κυρία κίτρινο-καφέ.

Ε: Πολύ σωστά! Άρα βλέπουμε πως επαναλαμβάνεται το κίτρινο-καφέ. Αν μας ζητούσαν να το φτιάξουμε και εμείς θα μπορούσαμε; Πώς θα το φτιάχναμε; …

Ν3: Θα ζωγραφίζαμε κίτρινες και καφέ πέτρες.

Ε: Λέτε να είναι αυτό το μυστικό; Έχουμε βρει το μυστικό; …

Ν: Ναι!!!

Ε: Μπορείτε να κυκλώσετε αυτό που βλέπετε να επαναλαμβάνεται; …

Ν3: (Κύκλωσε την πρώτη κίτρινη πέτρα της δεύτερης σειράς)

Ν1: Εγώ τώρα (κύκλωσε την επόμενη κίτρινη πέτρα).

Ν2: Είναι και αυτό … και αυτό επαναλαμβάνεται (κύκλωσε τις επάλξεις οι οποίες δεν είχαν αναφερθεί στη μέχρι τότε συζήτηση).

Παρόλο που τα νήπια εντόπισαν και αναγνώρισαν ποια στοιχεία της κατασκευής επαναλαμβάνονται και κατά κάποιο τρόπο περιέγραψαν το πρότυπο που επαναλαμβάνεται, στη μία περίπτωση – λέγοντας *κίτρινες και καφέ πέτρες* ή *κίτρινο-καφέ-κίτρινο-καφέ* – όταν έπρεπε να σημειώσουν την επανάληψη πάνω στη ζωγραφιά, κύκλωσαν μόνο κίτρινες πέτρες.

Στη δεύτερη ζωγραφιά, τα παιδιά κατάλαβαν αμέσως ότι κάτι λείπει από το κεραμικό και προσπάθησαν, με τα κομμάτια που είχαν στη διάθεσή τους, να το συμπληρώσουν και να ολοκληρώσουν την κατασκευή. Ενώ η συμπλήρωση του πρώτου μοτίβου δεν παρουσίασε ιδιαίτερη δυσκολία – η διαφοροποίηση του μεγέθους του φύλλου έγινε γρήγορα αντιληπτή – η κατασκευή του δεύτερου δυσκόλεψε τα παιδιά – το μέγεθος των κομματιών, καθώς και το ιδιαίτερο σχήμα τους προβλημάτισε τα παιδιά. Χαρακτηριστικό είναι το σχετικό επεισόδιο:

Ε: Για να δούμε τι λέει το κουίζ της δεύτερης ζωγραφιάς: Είναι αυτό ολοκληρωμένο ή μισοσυμπληρωμένο;

Ν4: Δεν είναι συμπληρωμένο.

Ε: Τι πρέπει να κάνουμε εμείς;

Ν4: Να το συμπληρώσουμε.

Ν5: Να κολλήσουμε … καφέ στο κίτρινο (το νήπιο κολλάει το πρώτο καφέ χαρτονάκι στη ζωγραφιά).

Ε: Ωραία. Θέλεις να το βάλεις πιο εκεί; … Τώρα πως πάει;

Ν4: Καφέ-κίτρινο-καφέ-κίτρινο-καφέ-κίτρινο-καφέ…

Ε: Άρα τι πρέπει να κάνουμε τώρα;

Ν4: Να βάλουμε καφέ (το νήπιο κολλάει ένα καφέ χαρτονάκι στη ζωγραφιά όμως κάτι δεν του αρέσει στο μέγεθος το βγάζει και βάζει ένα πιο λεπτό, ώστε να σχηματιστεί σωστά το μοτίβο).

Ε: Τι λέτε παιδιά απαντήσαμε στο κουίζ; Συμπληρώσαμε το κεραμικό;

Ν: Ναι!!!

Ν6: Όχι χρειάζεται και εδώ να βάλουμε κάτι. Να βάλουμε αυτό (πιάνει ένα κίτρινο κομμάτι και το κολλάει… πάει να καλύψει το μαύρο σχέδιο και το άλλο παιδί του το σπρώχνει λίγο δεξιά πριν στεγνώσει η κόλλα).

Ν5: Να βάλω εγώ το άλλο (το νήπιο ψάχνει να βρει το επόμενο σωστό κίτρινο κομμάτι και στη συνέχεια προσπαθεί να βρει πώς θα το κολλήσει … το γυρίζει ανάποδα … προσπαθεί διάφορες θέσεις και τελικά καταλήγει στην κατάλληλη θέση και το κολλάει) …

Ο εντοπισμός και η αναγνώριση των στοιχείων που επαναλαμβάνονται στο κεραμικό έγινε με σχετική ευκολία από τα νήπια τα οποία κατάφεραν να περιγράψουν το μοτίβο – λέγοντας *καφέ-κίτρινο-καφέ-κίτρινο-καφέ-κίτρινο-καφέ*. Η δημιουργία όμως του υπόλοιπου μοτίβου, μέσω συμπλήρωσης, δεν ήταν πολύ εύκολη για τα παιδιά. Βέβαια σε αυτό μπορεί να συνέβαλλε η ιδιαιτερότητα και το μέγεθος των σχεδίων.

Στο ψηφιδωτό από πέτρες, της τρίτης ζωγραφιάς, τα παιδιά καλούνταν, μέσω του κουίζ, να τοποθετήσουν τα τρίγωνα χαρτόνια διαφορετικών μεγεθών και χρωμάτων, στη σωστή θέση. Αυτό δυσκόλεψε αρκετά κάποια από τα νήπια. Οι δυσκολίες που παρουσιάστηκαν στη συγκεκριμένη δραστηριότητα είχαν να κάνουν με την επιλογή του κατάλληλου – σε μέγεθος και χρώμα – τριγώνου και με τη σωστή τοποθέτησή του στην αντίστοιχη θέση – με τη βάση κάτω ή με τη μύτη κάτω. Συγκεκριμένα, υπήρχαν παιδιά που επέλεξαν τρίγωνο σε λάθος μέγεθος ή/και σε λάθος χρώμα, π.χ. μεγάλο για να μπει στη θέση του μικρού ή πράσινο για να μπει δίπλα σε πράσινο, καθώς και παιδιά που αντιμετώπισαν αρκετή δυσκολία στην τελική τοποθέτηση των τριγώνων, του περιγράμματος, που είχαν την κορυφή προς τα κάτω. Μέρος του διαλόγου καταγράφεται παρακάτω:

Ε: Έχουμε ακόμα μία ζωγραφιά. Τι λέει το κουίζ της; Τρίγωνα μεγάλα, τρίγωνα μικρά, πώς θα μπούνε στη σωστή σειρά;

Ν7: Εγώ ξέρω, Μπορώ να τα βάλω!!!

Ε: Για πες μου, πως είναι φτιαγμένο το βοτσαλωτό ψηφιδωτό;

Ν7: Έχει κίτρινες, κόκκινες και πράσινες πέτρες.

Ε: Αυτές οι πέτρες είναι τοποθετημένες τυχαία ή έχουν κάποια σειρά;

Ν: …

Ε: Για δείτε εδώ (δείχνει το περίγραμμα του ψηφιδωτού), παρατηρείτε κάτι;

Ν8: Είναι κίτρινο- πράσινο- κίτρινο- πράσινο.

Ν7: Όχι, πράσινο- κόκκινο- πράσινο- κόκκινο- πράσινο, θα βάλω πράσινο.

Ε: Γιατί θα βάλεις πράσινο;

Ν7: Γιατί μπαίνει πρώτα κόκκινο και μετά πράσινο.

Ε: Και μετά τι μπαίνει;

Ν: Κόκκινο.

Ε: Και μετά;

Ν: Πράσινο-κόκκινο-πράσινο-κόκκινο-πράσινο.

Ε: Για να τα βάλουμε τώρα.

Ν9: (έχει επιλέξει τρίγωνο σε άλλο μέγεθος και προσπαθεί να το προσαρμόσει στην κενή θέση, αλλάζοντάς του προσανατολισμό, αλλά δεν τα καταφέρνει) … Δεν μπορώ να το κάνω.

Ε: Για σκέψου λίγο ... Μήπως έχει γίνει κάποιο λάθος; … έχει κι άλλα (κομματάκια) εδώ για δες! Αυτό είναι;

Ν9: Δεν ξέρω…

Ν8: Πάρε πιο μικρό.

Ε: Έλα συνέχισέ το εσύ …

…

Ν2: (τοποθετεί πράσινο δίπλα στο πράσινο, αλλά κάποιο παιδί τον σταματάει)

Ν8: Όχι κόκκινο (λέει κόκκινο-πράσινο-κόκκινο…).

… συνεχίζεται η τοποθέτηση και από τα υπόλοιπα παιδιά της τάξης …

Όπως και στην προηγούμενη δραστηριότητα, έτσι και εδώ, τα νήπια δυσκολεύτηκαν στη συμπλήρωση του μοτίβου. Ενώ δηλαδή αναγνώρισαν σχετικά εύκολα το μοτίβο του βοτσαλωτού ψηφιδωτού και το πρότυπο που επαναλαμβάνεται, και το ονόμασαν – λέγοντας – πράσινο-κόκκινο-πράσινο-κόκκινο-πράσινο – η επιλογή και η σωστή τοποθέτηση του κατάλληλου σχήματος στη σωστή θέση δεν ήταν εύκολη για τα νήπια. Αυτό βέβαια σχετίζεται με την ιδιαιτερότητα του σχήματος του τριγώνου.

4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη συγκεκριμένη εργασία, μέσα από δύο διδακτικές παρεμβάσεις μελετήθηκε η ικανότητα νηπίων να εντοπίζουν, να αναγνωρίζουν, να περιγράφουν και να συμπληρώνουν μοτίβα σε εικόνες που αναπαριστούν στοιχεία του πολιτισμικού τους περιβάλλοντος. Από τα αποτελέσματα φάνηκε ότι, τα νήπια έχουν την ικανότητα να διαπραγματευτούν τέτοιου είδους θέματα στο επίπεδο του εντοπισμού του μοτίβου,

αλλά όχι τόσο στο επίπεδο της κατασκευής του. Συγκεκριμένα, ενώ ο εντοπισμός και η αναγνώριση του μοτίβου, καθώς και η περιγραφή του προτύπου που επαναλαμβάνεται πραγματοποιήθηκε από την πλειοψηφία των νηπίων, δυσκολία παρουσιάστηκε στη σημείωση, καθώς και στη συμπλήρωση του προτύπου. Η κατασκευή του υπόλοιπου μοτίβου, με συμπλήρωσή του, θα μπορούσε να έχει μεγαλύτερη επιτυχία, όπως έχουν δείξει άλλες έρευνες, αν τα σχήματα ήταν πιο απλά, τετραγωνισμένα και σε απόσταση μεταξύ τους – διακριτά.

Η στοχευμένη παρατήρηση εικόνων από την καθημερινότητα δίνει αναμφισβήτητα την ευκαιρία στους μαθητές να αποκτούν εμπειρίες πολιτισμικές, να γνωρίζουν καλύτερα την πόλη τους και μέσα από τον κατάλληλο διδακτικό σχεδιασμό να αποκτούν μαθηματικές εμπειρίες και να καλλιεργούν ποικίλες ικανότητες και δεξιότητες όπως της διερεύνησης, του συλλογισμού, της επίλυσης προβλήματος, της τεκμηρίωσης, της επικοινωνίας και της σημειωτικής δράσης.

Η γενική ιδέα των προβληματισμών που παρουσιάστηκαν, διαμορφωμένη ανάλογα με το πολιτισμικό πλαίσιο, θα μπορούσε να αποτελέσει μέρος μιας ευρύτερης σειράς δραστηριοτήτων για τη διερεύνηση των μοτίβων από τα μικρά παιδιά. Ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη δραστηριοτήτων μοτίβων απαιτεί τη συνδυαστική ιεράρχηση της μορφής του μοτίβου και της δομής του προτύπου σε διαφορετικά πλαίσια, με το κατάλληλο, κάθε φορά, υλικό ώστε να δημιουργηθούν ομαλές μαθησιακές διαδρομές από τα μοτίβα της καθημερινότητας στα μοτίβα του νηπιαγωγείου και το αντίστροφο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D.H. & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math The Learning Trajectories Approach* (pp. 189-202). N.Y.: Routledge, Studies in Mathematical Thinking and Learning Series.

D'Ambrosio, U. (1985). Socio-cultural bases for mathematics education. *Proceedings of ICME 5*, Unicamp, Brazil.

Klein, A. & Starkey, P. (2004). Fostering Preschool Children's Mathematical Knowledge: Findings from the Berkeley Math Readiness Project. In D. H. Clements & J. Sarama (Eds.), *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 343-360). USA: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Lannin, J.K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Michael, S., Elia, I., Gagatsis, A. Theoklitou, A. & Savva, A. (2006). Levels of understanding of patterns in multiple representations. In J. Novotná, H. Moraová,

M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.) *Proceedings 30th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education, Vol.4,* pp. 161-168. Prague.

Mulligan, J. & Michelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21* (2), 33-49.

Mulligan, J., Prescott, A. & Michelmore, M. (2004). Children's development of structure in early mathematics. In M. Johnsen Hoines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education, Vol.3,* pp. 393-401 and *Vol.4*, pp. 417-424. Norway.

Papic, M., Mulligan, J. & Michelmore, M. (2009). The growth of mathematical patterning strategies in preschool children. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4*, pp. 329-336. Thessalonica, Greece.

Papic, M., Mulligan, J. & Michelmore, M. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *42* (3), 237-268.

Skoumpourdi, C. (2013). Kindergartners' performance on patterning. *International Journal of Mathematics in Education (in print)*

Swoboda, E. & Tatsis, K. (2009). Five year-old children construct, deconstruct and talk about patterns-design and implementation of an analytical tool. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1*, p. 474. Thessaloniki, Greece: PME.

Synoś, J. & Swoboda, E. (2007). Argumentation Created by 4-6 years Old Children in Patterns Environment. *Proceedings of CIEAEM59 Mathematical activity in classroom practice and as research object in didactics: two complementary perspectives* (pp. 184-188). Dobogoko, Hungary.

Threlfall, J. (2005). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 1-17). Great Britain: Continuum Studies in Mathematics Education.

Warren, E. (2006). Learning comparative mathematical language in the elementary school: A longitudinal study. *Educational Studies in Mathematics*, *62* (2), 169-189.

Warren, E. & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Strategies that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 171-185.

Μιχαήλ, Μ. & Λεμονίδης, Χ. (2007). Τα εθνομαθηματικά και η διδασκαλία μοτίβων:

μια ερευνητική μελέτη σε μαθητές Ε΄ τάξης. *Πρακτικά 9ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης,* Πάφος, 291-302.

ΠΣΝ (Πρόγραμμα Σπουδών Νηπιαγωγείου), (2011). Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Αθήνα.

Τζεκάκη, Μ. & Κούλελη, Μ. (2007). Διερεύνηση της ικανότητας αναγνώρισης προτύπων σε παιδιά προσχολικής ηλικίας. Στο Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή (επιμ.) *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ.*

[i] Οι ζωγραφιές είναι δημιουργίες ομάδας φοιτητριών στο πλαίσιο μαθήματος έρευνας.

ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΣΕ 'ΑΛΛΕΣ' ΓΛΩΣΣΕΣ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΗΣ ΜΑΡΑΜ

Άννα Χρονάκη & Γεωργία Μουντζούρη

Παιδαγωγικό Τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

chronaki@uth.gr, mountgeo@ath.forthnet.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία συζητά τι μπορεί να προκύψει σε μια τάξη νηπιαγωγείου, μεταξύ μικρών παιδιών και ενηλίκων (εκπαιδευτικών και γονέων) όταν η ισχύς του ηγεμονικού χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης σε μια δεδομένη στιγμή 'ταρακουνηθεί' με την παρότρυνση για πρόσβαση, έστω και εντός ενός περιστασιακού, μη-μόνιμου διδακτικού συμβάντος το οποίο ενέχει μια εναλλακτική ή εν δυνάμει ανατρεπτική προοπτική. Οι σχεδιασμένες δράσεις εντάσσονται στην ενότητα που αφορά τη μάθηση για την ανάπτυξη «αίσθησης αριθμού». Εστιάζουν σε μια διαπολιτισμική διερεύνηση γύρω από τα σύμβολα και τις λέξεις, όπως αυτά εμφανίζονται σε 'άλλες' γλώσσες και μπορεί να υποστηρίξουν τη διαλογικότητας σε μία πολυπολιτισμική τάξη προσχολικής ηλικίας. Προσπαθεί να ερμηνεύσει πως βιώνουν τα παιδιά μια τέτοιου τύπου παρότρυνση αναλύοντας την περίπτωση της Μαράμ.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Η σημασία της «κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης» έχει αρχίσει να συζητείται τα τελευταία χρόνια στο ερευνητικό πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης με στόχο την ευαισθητοποίηση σε εναλλακτικές προσεγγίσεις για θέματα επιστημολογίας, παιδαγωγικών και διδακτικών παρεμβάσεων. Το θεωρητικό πλαίσιο της κριτικής μαθηματικής εκπαίδευσης προβληματοποιεί κυρίαρχες κατανοήσεις για την μαθηματική γνώση, την παιδαγωγική μέθοδο και μας υποστηρίζει να δούμε την μάθηση και την διδασκαλία των μαθηματικών ως ένα κοινωνικοπολιτικό συμβάν (Skovsmose, 2006, 2011). Εκπαιδευτικοί και ερευνητές που ενδιαφέρονται να εστιάσουν στην περιπλοκότητα του κοινωνικού, πολιτισμικού και πολιτικού συγκειμένου μιας σχολικής τάξης μαθηματικών (η οποία συνδέεται άμεσα ή έμμεσα με την οικογένεια και την κοινωνία) μπορούν να εντοπίσουν μεθοδολογικά εργαλεία και παραδείγματα για την ανάλυση, συζήτηση και επαναπροσέγγιση ζητημάτων που αφορούν την αλληλεπιδραστική σχέση μεταξύ εξουσίας, γνώσης και ταυτοτήτων.

Στην δική μας περίπτωση, το ενδιαφέρον ξεδιπλώνεται γύρω από την σημασία μιας «κριτικής» προσέγγισης για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών σε μια πολυπολιτισμική τάξη. Συγκεκριμένα, μας απασχολεί πώς μπορούμε ως ερευνητές να καταγράψουμε, να αποτυπώσουμε και να ερμηνεύσουμε την περιπλοκότητα

γεγονότων που αφορούν παιδαγωγικές παρεμβάσεις, όπως αυτά βιώνονται από παιδιά που ανήκουν σε περιθωριοποιημένες κοινωνικές ομάδες.

Στόχος μας εδώ είναι να συζητήσουμε την εφαρμογή μιας μαθηματικής δράσης με θέμα «Οι αριθμοί σε 'άλλες' γλώσσες». Θα αναλύσουμε, μέσα από την περίπτωση της μικρής Μαράμ, πως η ευκαιρία που της δόθηκε να εκφράσει φωναχτά τους αριθμούς στη μητρική της γλώσσα της έδωσε, ταυτόχρονα, σε εμάς την δυνατότητα να θέσουμε σημαντικά ερωτήματα σχετικά με τη θέση αυτού του κοριτσιού στην σχολική τάξη. Μας βοηθά ακόμη, να κατανοήσουμε την περιπλοκότητα που εδράζει στην ανάγκη για συνεχή μετατόπιση της Μαράμ μεταξύ, συχνά, αντικρουόμενων πρακτικών όπως αυτές βιώνονται από την ίδια στη σχολική τάξη, στην οικογένεια και στην κοινότητα όπου ζει την παιδική της ηλικία.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ: ΜΕΤΑΞΥ ΚΡΙΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΗΣ ΕΘΝΟΓΡΑΦΙΑΣ

Η μεθοδολογία που ακολουθήσαμε για την συλλογή και ανάλυση των δεδομένων είναι ποιοτική και εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο της «κριτικής» και της «συνεργατικής» εθνογραφίας. Όπως αναφέρει ο JimThomas (1993) η κριτική εθνογραφία γίνεται αναγκαιότητα όταν η αναστοχαστικότητα των ερευνητών μετακινείται από την ερώτηση «τι συμβαίνει εδώ» στο ενδιαφέρον για τη διερεύνηση του «πώς αλλιώς θα μπορούσε να ήταν τα πράγματα εδώ» θέτοντας ερωτήματα πέρα από τα φαινόμενα που μοιάζουν αντικειμενικά εύκολο να παρατηρηθούν. Η «συνεργατική» εθνογραφία (collaborative ethnography) προκύπτει από την ανάγκη για άμεση συνεργασία και διάλογο μεταξύ των συμμετεχόντων (παιδιά, εκπαιδευτικός, ερευνήτρια).Η συγκεκριμένη μεθοδολογία έχει το πλεονέκτημα ότι «κάθε μέλος έχει πολλά περισσότερα να μάθει από το άλλο και τα αποτελέσματα της έρευνας είναι πλουσιότερα μέσω της συνεργασίας, απ' ότι κάθε μέλος θα μπορούσε να καταφέρει μόνο του» (Pushor, 2008, σελ. 91-92). Διαφορετικές πτυχές της έρευνας σχεδιάζονται και υλοποιούνται από κοινού και μ' αυτό τον τρόπο, συζητούνται ποικίλες οπτικές γύρω από ένα θέμα, εντοπίζονται προβληματισμοί και συγκροτούνται θέσεις και αντιπαραθέσεις.

Στην δική μας περίπτωση, η συνεργατική εθνογραφική προσέγγιση συγκροτήθηκε σε επιμέρους στάδια της ανάπτυξης και εφαρμογής των μαθηματικών δραστηριοτήτων και παρεμβάσεων. Κατ' αρχάς, εκπαιδευτικός και ερευνήτρια συζήτησαν εκτενώς το νέο αναλυτικό πρόγραμμα (ΥΠΕΠΘ, 2011) και συμφώνησαν στη δυναμική επέκτασης με δράσεις που εστιάζουν στην ανάγκη για διαπολιτισμική επαφή, λόγω της ύπαρξης πολλών αλλοεθνών μαθητών στο συγκεκριμένο τμήμα. Κατά την εφαρμογή των δράσεων, η εκπαιδευτικός, είχε την ελευθερία να τροποποιήσει τμήματα αυτών των δράσεων που είχαν συζητηθεί με την ερευνήτρια. Παράλληλα, η ερευνήτρια εντάχθηκε στο ερευνητικό πεδίο ως ενεργή συμμετέχουσα και ως παρατηρήτρια εκ των έσω (βλ. Γκέφου-Μαδιανού, 1998, σελ. 365-6).Αρκετές φορές έθετε διευκρινιστικές ερωτήσεις στα παιδιά ή μετάφραζε τις ερωτήσεις της

εκπαιδευτικού στ' αγγλικά, για να διευκολύνει την κατανόηση της Μαράμ, το κορίτσι στο οποίο θα εστιάσουμε στην ανάλυσή μας.

Στο πνεύμα αυτό, σχεδιάστηκε και οργανώθηκε η κυρίως ερευνητική διαδικασία ως σειρά «διδακτικών πειραμάτων» τα οποία πραγματοποιήθηκαν κατά το σχολικό έτος 2011-2012 σε δημόσιο νηπιαγωγείο της Αθήνας, στο οποίο εντάσσεται ένα κλασικό κι ένα ολοήμερο τμήμα. Η σειρά αυτή των «διδακτικών πειραμάτων» καλύπτει τους πέντε άξονες του προγράμματος των μαθηματικών για την προσχολική ηλικία (αριθμοί, άλγεβρα, γεωμετρία-μετρήσεις, στατιστική & πιθανότητες),στους οποίους εστιάζει το νέο αναλυτικό πρόγραμμα (ΥΠΕΠΘ, 2011). Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν λαμβάνοντας υπόψη τις αντίστοιχες που περιγράφονται στο εν λόγω πρόγραμμα, με εστίαση στη καλλιέργεια της διαπολιτισμικής επαφής, της διαλογικότητας αλλά και της ανατροπής των στερεοτύπων.

Συμμετέχοντες αποτέλεσαν τα είκοσι παιδιά του ολοήμερου τμήματος του νηπιαγωγείου, εκ των οποίων τα επτά δεν είχαν ελληνική καταγωγή, οι γονείς τους και η εκπαιδευτικός του τμήματος. Τα παιδιά αυτά, μιλούν το καθένα ξεχωριστή μητρική γλώσσα όπως αλβανικά, ρώσικα, αρμένικα, φιλιππινέζικα, τούρκικα και ουρντού (η εθνική γλώσσα του Πακιστάν). Τα περισσότερα γεννήθηκαν στην Ελλάδα και ήταν παιδιά οικονομικών μεταναστών. Η Μαράμ για την οποία θα μιλήσουμε εκτενώς εδώ, κατάγεται από το Πακιστάν και ενώ η μητρική της γλώσσα είναι τα ουρντού, η μητέρα της χρησιμοποιεί στο σπίτι και τα αγγλικά ως κύρια γλώσσα επικοινωνίας. Στα παρακάτω, θα εστιάσουμε σε ένα συγκεκριμένο επεισόδιο, όπου η μικρή Μαράμ ενθαρρύνεται να εκφράσει φωναχτά τους αριθμούς στη μητρική της γλώσσα. Το επεισόδιο αυτό, μας επιτρέπει να σκιαγραφήσουμε τις δυσκολίες, τα διλήμματα αλλά και τις επιτυχίες της μικρής, οι οποίες δηλώνουν την διαρκή πάλη μεταξύ τοπικών και παγκοσμιοποιημένων λόγων (discourses) για τα μαθηματικά, το κορίτσι και τη γλώσσα ως κώδικα επικοινωνίας.

2.1. Σύμβολα &Λέξεις Αριθμών: Πρόκληση για γνωριμία με τους «άλλους»;

Τον μήνα Μάιο του 2012 και περίπου προς τα τέλη της εφαρμογής της σειράς των «διδακτικών πειραμάτων», υλοποιήθηκε η πειραματική διδασκαλία η οποία εστίασε στο θέμα «Οι αριθμοί σε 'άλλες' γλώσσες».Η δράση αυτή, αποτελεί συνέχεια μίας σειράς δράσεων που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια διαπολιτισμικού φεστιβάλ στην πόλη του Βόλου και αφορούσαν τη γνωριμία των παιδιών -ελληνόπαιδων και μη- με διαφορετικούς τρόπους γραφής των ψηφίων, από αυτούς που διδάσκονται στο σχολείο. Τα σχολεία όπου φοιτούν παιδιά από αραβικές χώρες ή χώρες όπως το Πακιστάν, ή παιδιά ρόμικης καταγωγής που έχουν διαφορετικούς τρόπους συμβολισμού των αριθμού και διαφορετικές αριθμολέξεις, μπορούν να αναπτυχθούν δράσεις γνωριμίας με τους διαφορετικούς αριθμούς (Chronaki, Mountzouri&Magos, 2014˙ Chronaki, &Mountzouri, 2011).Σε προηγούμενες εργασίες έχουμε θίξει την προοπτική επεξεργασίας ενός τέτοιου θέματος δίνοντας έμφαση στην ενεργή χρήση της γλώσσας των παιδιών στο πλαίσιο δράσεων που στοχεύουν σε θέματα

διαπολιτισμικής επαφής και ιδιαίτερα μιας διαλογικής προσέγγιση εαυτού και 'άλλου' (βλ. Chronaki, 2009, 2011).

Ο μαθησιακός στόχος στη δράση αυτή εντός του σχολικού πλαισίου, ήταν η αναγνώριση αριθμητικών συμβόλων και αριθμολέξεων από το 0 έως το 10, στις γλώσσες που τα παιδιά μιλούν στο σπίτι τους. Γι' αυτό τον σκοπό, δημιουργήθηκε ένας πίνακας καταγραφής με τη βοήθεια των γονέων των αλλοεθνών παιδιών (βλ. εικόνα 1). Οι γονείς αυτοί, μας είχαν αναφέρει στις συνεντεύξεις μαζί τους, τις αριθμολέξεις στις δικές τους γλώσσες, οι οποίες συμπεριλήφθηκαν στον πίνακα.

Στην αρχή της δράσης, ζητήθηκε από τα παιδιά να «διαβάσουν» λέξεις και σύμβολα. Τα παιδιά αναγνώρισαν τα αριθμητικά ψηφία από 0-10 στην κάθετη διάταξη στ' αριστερά του πίνακα και τις χώρες καταγωγής των παιδιών σε οριζόντια διάταξη. Παράλληλα, είχαν την ευκαιρία να δουν και να συζητήσουν για τις χώρες αυτές στον χάρτη, να δουν φωτογραφικό υλικό από την καθημερινότητα των ανθρώπων στις χώρες αυτές (λ.χ. σχολεία, σπίτια, ενδυμασία, αριθμητικά σύμβολα κτλ.).Στη συνέχεια, τα παιδιά σχημάτιζαν μικρές ομάδες, ανάλογα με τη χώρα καταγωγής τους και απήγγειλαν τις αριθμολέξεις στη μητρική τους γλώσσα (βλ. εικόνα 2). Στο τέλος της «ανάγνωσης» των αριθμολέξεων, έγινε συζήτηση σχετικά με τις αριθμολέξεις στις διαφορετικές αυτές γλώσσες και τα παιδιά κατάληξαν σε συμπεράσματα όπως: Ποιές αριθμολέξεις είναι κοινές σε διαφορετικές γλώσσες; («ζέρο» σε τρεις γλώσσες), ποιες μοιάζουν; (τρε-τρι-τρία και ντου-ντο), ποιες χρησιμοποιούμε και σήμερα στα ελληνικά; (ντόρτστη λέξη«ντόρτια»).

2.2. Οι αριθμοί στη «δική» μου γλώσσα;! Αμηχανία και ενδιαφέρον

Η ανάπτυξη της δράσης εφαρμόστηκε από την ερευνήτρια η οποία βοηθά τα παιδιά να «διαβάσουν» τα αριθμητικά σύμβολα και τις ονομασίες των χωρών. Ανάμεσα στα παιδιά που παίρνουν το λόγο είναι και η Μαράμ από το Πακιστάν, η οποία απαγγέλει χωρίς δυσκολία στα ελληνικά, τα ψηφία από το 0-10.Στο επεισόδιο που περιγράφεται, θα δούμε, πώς εκδηλώνει η Μαράμ την αμηχανία της όταν απαριθμεί στη μητρική της γλώσσα.

Ερευνήτρια: Ποιο παιδάκι από την τάξη μας είναι από το Πακιστάν;

Χριστίνα: Η Μαράμ!(η Μαράμ ακούγοντας το ερώτημασηκώνει το χέρι της χαμογελώντας).

Ερευνήτρια: Μαράμ, έλα έξω! (η Μαράμ στέκεται στη μέση του κύκλου της συζήτησης).Μαράμ, θέλω να μας πεις τους αριθμούς στα πακιστανικά (αναφέρει «πακισταντικά» κι όχι "urdu").

Η Μαράμ χαμογελά, πιάνει τα μάγουλά της με τα χέρια της και στριφογυρίζει αμήχανα μια τούφα από τα μαλλιά της.

Ερευνήτρια: Ξέρεις; (η Μαράμ εξακολουθεί να παίζει με τα μαλλιά της).

Ερευνήτρια: Inurdu.

Ερευνήτρια: Της το λέω στ' αγγλικά, γιατί δεν καταλαβαίνει (εξηγεί στα παιδιά, γιατί μίλησε στη Μαράμ στ' αγγλικά).Iwantyoutotellusthenumbersinurdu(ηΜαράμκοιτάζειαμήχανα).

Ερευνήτρια: Πάμε, σιφρ, εκ…Σιφρ, εκ θα σε βοηθήσω εγώ. Σιφρ, εκ, ντο, έλα!

Η Μαράμ εξακολουθεί να περιφέρει διαδοχικά τα χέρια της στο πρόσωπό της, χαμογελά και κουνά μπρος-πίσω το αριστερό της πόδι. Δείχνει ότι θέλει να μιλήσει αλλά είναι ακόμα αρκετά διστακτική (φωτογραφίες 3 έως 7).

~~Η ερευνήτρια στρέφεται προς τα παιδιά.~~

~~Ερευνήτρια: Μας τους έχει ξαναπεί. Τους θυμάστε; (η Χριστίνα, ο Αριάν, ο Αριστείδης και ο Ιλίρ γνέφουν καταφατικά). Έλα! Έλα, Μαράμ! Σιφρ…~~

~~Η Μαράμ ξεκινά ξαφνικά να μετρά πολύ γρήγορα, έτσι ώστε δεν γίνονται κατανοητά τα λεγόμενά της.~~

Μαράμ: Σιφρ, εκ, ντο, τιν, τσαρ, παντς, τσε, σαάτ, ατ, νο, ντας (όταν τελειώνει τοποθετεί τα χέρια στη μύτη της και τα μάτια της).

Ερευνήτρια: Πολύ ωραία, αλλά θέλω λίγο πιο σ… πιο αργά (η Μαράμ κάνει άλλον ένα μορφασμό).

Ερευνήτρια: Slowly, ok? (η Μαράμ τοποθετεί τον αριστερό της δείκτη στη μύτη της). Πάμε! Έτσι θα τους πεις: σιφρ, εκ, ντο (η ερευνήτρια απαγγέλει τους αριθμούς αργά και καθαρά για να την μιμηθεί η Μαράμ).

Αριάν: Σιφρ (ο Αριάν από την Αλβανία, θυμίζει στη Μαράμ την αριθμολέξη για το μηδέν).

Ερευνήτρια: Πάμε! Σιφρ…

Μαράμ: Σιφρ, εκ, ντο, τιν, τσαρ, παντς, τσε, σαάτ, ατ, νο, ντας (αυτή τη φορά αριθμεί αργά και καθαρά).

Ερευνήτρια: Πολύ ωραία! Δώστε της ένα χειροκρότημα! Πολύ ωραία, Μαράμ! Ευχαριστούμε! (η Μαράμ επιστρέφει στη θέση της).

Μετά τη Μαράμ, ακολουθεί η αναγνώριση των αριθμολέξεων στις μητρικές γλώσσες των υπολοίπων παιδιών: εκτός των ελληνικών, τέσσερα παιδιά απαγγέλουν τις αριθμολέξεις στα αλβανικά, τρία στα ρώσικα, ένα στα αρμένικα, ένα στα τούρκικα, ένα στα φιλιππινέζικα. Προσπαθώντας να ερμηνεύσουμε την τοποθέτηση της Μαράμ στο παραπάνω επεισόδιο, αναφερόμαστε σε δύο ζητήματα που μοιάζει να επηρεάζουν τη στάση της: η «γυναικεία ντροπαλότητα», και η ανάγκη διαμεσολάβησης της αγγλικής ως εναλλαγή κώδικα κατά την επικοινωνία της στο σχολικό πλαίσιο.

Α) Η «γυναικεία» ντροπαλότητα της Μαράμ. Όπως φαίνεται στο παραπάνω διάλογο, η Μαράμ έδειξε έντονη αμηχανία όταν της ζητήθηκε να εκφράσει φωναχτά τους αριθμούς στη δική της γλώσσα, κάτι που δεν συνέβη όταν απήγγειλε της αριθμολέξεις στα ελληνικά, κατά τη διαδικασία «ανάγνωσης» του πίνακα. Η

ντροπαλότητα αυτή συνδέεται με έντονο δισταγμό που επιδεικνύει με τους διάφορους μορφασμούς του προσώπου της και τις αδέξιες κινήσεις των χεριών. Η «ντροπαλότητα» αυτή ερμηνεύεται από την μητέρα της ως «γυναικείο» χαρακτηριστικό και η επίδειξη δισταγμού είναι κάτι φυσιολογικό για τα κορίτσια. Σε συνέντευξή μας μαζί της, περιέγραψε εκτεταμένα στην «ντροπαλότητα» (shyness) της Μαράμ -χρησιμοποιώντας την αγγλική γλώσσα για επικοινωνία μαζί μας. Η ίδια αναφέρει: «Είμαστε ντροπαλές εμείς οι γυναίκες από το Πακιστάν, από τη φύση μας. Στην κουλτούρα μας. Ακόμα κι εδώ οι περισσότεροι άνθρωποι, δεν ξέρουν το νόημα της ντροπαλότητας...Αρκετά παιδιά σε χώρες σαν τη δική μας, αισθάνονται πολύ ντροπαλά, δεν συμμετέχουν σε κάθε δραστηριότητα. Θέλω τα δικά μου παιδιά να τα καταφέρουν όχι μόνο στα μαθηματικά, αλλά σε όλα τα πεδία» (συνέντευξη 27-3-2012).

Η«ντροπαλότητα»για τη συγκεκριμένη μητέρα, είναι χαρακτηριστικό των κοριτσιών της χώρας και συνδέεται με αξίες όπως η σύνεση, η ταπεινότητα κτλ. και πρέπει να υιοθετείται από τις γυναίκες και ιδιαίτερα τις νεαρές γυναίκες. Όμως, η μητέρα της Μαράμ ανησυχεί και ρωτά την ερευνήτρια εάν η κόρη της είναι ντροπαλή στην τάξη. Η ανησυχία της εδράζει στο ότι η ίδια γνωρίζει και φοβάται ότι η «ντροπαλότητα» δεν ταιριάζει με την σύγχρονη εποχή και με την κουλτούρα που διαπνέει το ελληνικό σχολείο (το οποίο θεωρείται «δυτικό» σε σχέση με τα σχολεία του Πακιστάν). Κατανοεί ότι η Μαράμ είναι όντως διστακτική και προσπαθεί να της εμφυσήσει την ανάγκη να είναι περισσότερο συμμετοχική.

Β) Η διαμεσολάβηση της αγγλικής στην εναλλαγή κώδικα. Η Μαράμ είναι δίγλωσση, καθώς μιλά εν μέρει τη μητρική της γλώσσα στο σπίτι και κατανοεί τα ελληνικά στο σχολείο. Επιπλέον, γνωρίζει να χειρίζεται και τα αγγλικά, τα οποία μιλά στο σπίτι κυρίως, με τη μητέρα της. Σύμφωνα με την Σκούρτου (2001) η διγλωσσία αναφέρεται ακριβώς σ' αυτήν την «… εναλλακτική χρήση δύο ή περισσότερων γλωσσών από το ίδιο άτομο» (σελ. 199) κάτι στο οποίο εμπίπτει η γλωσσική συμπεριφορά της μικρής Μαράμ.

Η επιλογή της χρήσης της αγγλικής γλώσσας από την ερευνήτρια στο παραπάνω επεισόδιο, έγινε για να διευκολυνθεί η μικρή Μαράμ, μιας και στις πρώτες συνεντεύξεις ζητούσε η συνομιλία να γίνεται στα αγγλικά. Σε αρκετές όμως, περιπτώσεις κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, η Μαράμ χρησιμοποιούσε η ίδια την «εναλλαγή κώδικα» στις απαντήσεις της. Ως «εναλλαγή κώδικα» χαρακτηρίζεται «η πρακτική της χρήσης δύο ή περισσοτέρων γλωσσών μέσα στην ίδια επικοινωνιακή πράξη» (Τσοκαλίδου, 2000, όπ. αναφ. στο Σκούρτου, 2001, σελ. 184).Στη δική μας περίπτωση, όταν ήταν παρούσα η ερευνήτρια, η Μαράμ, όποτε δεν μπορούσε να περιγράψει κάτι που ήθελε στα ελληνικά, χρησιμοποιούσεχωρίς δισταγμό τα αγγλικά. Κατανοούσε προφανώς, ότι δεν μπορούσε να χρησιμοποιήσει τη συγκεκριμένη γλώσσα όταν το μάθημα διεξήγαγε η εκπαιδευτικός του τμήματος που δεν γνώριζε αγγλικά.

Για την Μαράμ, η χρήση της αγγλικής παίζει συμβολικά σημαντικότερο ρόλο σε σχέση με τα ελληνικά και τα ουρντού. Αυτό βασίζεται στο ότι η μητέρα της είναι καθηγήτρια αγγλικών και ήταν διευθύντρια ενός σχολείου στη χώρα της (όπου η αγγλική και πρωτεύουσα γλώσσα στο αναλυτικό πρόγραμμα). Η ίδια λοιπόν, αποδίδει μεγαλύτερη αξία στα αγγλικά ως «διεθνή» πλέον γλώσσα (αποδεχόμενη τον αποικιοκρατικό και παγκοσμιοποιημένο της χαρακτήρα). Προσπαθεί η Μαράμ να αποκτήσει καλύτερη πρόσβαση σ' αυτά με στόχο την κοινωνική άνοδο.

Έτσι, ένα σημαντικό σημείο στο οποίο επικεντρώθηκε η συγκεκριμένη μητέρα, και που σχετίζεται με το παραπάνω επεισόδιο, ήταν το θέμα της εκμάθησης και χρήσης των αγγλικών στο πλαίσιο του σχολείου. Το γεγονός ότι δεν γνώριζαν οι δασκάλες της κόρης της αγγλικά, δημιουργούσε δυσκολίες στην επαφή της μαζί τους και ήταν ένας λόγος που ή ίδια δεν μίλησε καμία φορά μαζίτους για τη Μαράμ. Παράλληλα, ήταν μια επιλογή αδιανόητη για την ίδια και εκφράζει στην ερευνήτρια την άποψη ότι «Τα αγγλικά θα έπρεπε να μιλιούνται και στο σχολείο, εκτός από τα ελληνικά. Αλλά εδώ, δεν υπάρχει αγγλικό σύστημα στα σχολεία. Αυτό είναι κακό, γιατί τα αγγλικά είναι διεθνής γλώσσα».

Στο παραπάνω επεισόδιο, η χρήση των αγγλικών από την ερευνήτρια έπαιξε σημαντικό ρόλο στη διαδικασία εναλλαγής κώδικα μεταξύ ουρντού και ελληνικών και ενίσχυσε ενθαρρυντικά τη μικρή Μαράμ στη συμμετοχή της στη δράση της τάξης. Σε πλείστα επεισόδια εκτός του παραπάνω, διαπιστώθηκε ότι η χρήση μίας τρίτης γλώσσας (των αγγλικών), που η Μαράμ είχε μάθει από τη μητέρα της έπαιξε έντονα διαμεσολαβητικό ρόλο. Η Μαράμ ενώ ξέρει τους αριθμούς στη μητρική της γλώσσα, προκειμένου να τους εκφράσει δυνατά, χρειάζεται επανειλημμένη ενθάρρυνση σε μία τρίτη γλώσσα που γνωρίζει καλά και νοιώθει άνετα. Οι συνεχείς παροτρύνσεις(ερευνήτριας και Αριάν) λειτούργησαν θετικά στο να απελευθερωθεί η Μαράμ από τις αναστολές της και να απαριθμήσει δημόσια στη μητρική της γλώσσα.

3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ

Τι ενδιαφέρον μπορεί να έχει μια δράση για τα μαθηματικά η οποία δεν μοιάζει να αναφέρεται στην ανάπτυξη γνωστικών δεξιοτήτων και συνεπώς, για πολλούς, τείνει να μην αφορά άμεσα την «μάθηση» των παιδιών; Θα μπορούσαμε στο δημόσιο χώρο της σχολικής τάξης να ενδιαφερόμαστε για ανοιχτές δράσης που στοχεύουν στην διερεύνηση της σχέσης των παιδιών με τα μαθηματικά, στην πολιτισμική ευαισθητοποίηση, και στην ενθάρρυνσή της συμμετοχής και παρουσίας όλων των παιδιών; Θα αποτολμούσαμε, ίσως, ερμηνείες στα παραπάνω αν εστιάζαμε σ' έναν ευρύ ορισμό για τη μάθηση (ο οποίος ενσωματώνει κίνητρα και ταυτότητες) και να δίναμε έμφαση σε εμπειρίες με τα μαθηματικά, οι οποίες διευκολύνουν όλα τα παιδιά να εκφράσουν διαφορετικές πτυχές των ταυτοτήτων τους.

Ανάλογες δράσεις με τη θεματική «Οι αριθμοί σε 'άλλες' γλώσσες» περιλαμβάνουν τη γνωριμία των παιδιών με τα μαθηματικά των «άλλων», διευκολύνουν τη σύνδεση άτυπων αριθμητικών γνώσεων που το παιδί αποκτά στο οικογενειακό του

περιβάλλον και τυπικών γνώσεων που διδάσκεται στο σχολικό πλαίσιο και επιτρέπουν την πολιτισμική ευαισθητοποίηση όλων των παιδιών για τη γνώση. Με τον τρόπο αυτό, τονώνεται η αυτοπεποίθηση όλων των παιδιών -ειδικά εκείνων από μη κυρίαρχα εθνοπολιτισμικά περιβάλλοντα-και δίνεται μία ευκαιρία να επικοινωνήσουν στην ομάδα ότι και η δική τους κουλτούρα έχει αξία με τα μαθηματικά του σήμερα. Οι επισημάνσεις αυτές συνάδουν με ένα ευρύτερο πνεύμα πρόσληψης των μαθηματικών ως πολιτισμικό, κοινωνικό και πολιτικό αγαθό, όπου οι εκπαιδευτικοί είναι πρόθυμοι να αποδεχθούν πολλαπλά πλαίσια ερμηνείας και έκφρασης από τους ίδιους τους μαθητές και τις μαθήτριες.

Κάτι τέτοιο μπορεί να υλοποιηθεί με τη χρήση αντικειμένων και υλικών που σχετίζονται με τα μαθηματικά και προέρχονται από «άλλους» πολιτισμούς και κοινωνικές πρακτικές. Για παράδειγμα, η Presmeg (1999) αναφέρει ότι η χρήση αντικειμένων από τη χώρα προέλευσης των μαθητών διευκολύνει την κατανόηση και τη σύνδεση των μαθηματικών του σχολείου με εκείνα της κοινωνίας. Στο πνεύμα αυτό, υλοποιήθηκαν αργότερα στη συγκεκριμένη τάξη, δράσεις στον άξονα της γεωμετρίας, όπου τα παιδιά έφεραν από το σπίτι τους αντικείμενα τα οποία διαθέτουν αναπαραστάσεις ποικίλων σχημάτων. Παρόλο, που ο κίνδυνος της «εξωτικοποίησης» και «εξιδανίκευσης» της μαθηματικής γνώσης ελλοχεύει, και τα διλήμματα ή οι προκλήσεις γύρω από τη μαθησιακή διαδικασία είναι πολλά, η συμπερίληψη τους στον παιδαγωγικό και διδακτικό σχεδιασμό συνεχίζει να είναι αναγκαία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Chronaki, A. (2011). Troubling Essentialist Identities: Performative Mathematics and the Politics of Possibility. In M. Kontopodis, C. Wulf and B. Fitcher (Eds.), *Children, Development and Education: Cultural, Historical and Anthropological Perspectives* (pp. 207-227). Dordrecht: Springer.

Chronaki, A. (2009). An entry to dialogicality in the maths classroom: Encouraging hybrid learning identities. In M. César & K. Kumpulainen (Eds.), *Social interactions in Multilingual Settings* (pp. 117-143). Rotterdam: SensePublishers.

Chronaki, A., Mountzouri, G.& Magos K. (2014). 'Number in Cultures' as a Playful Outdoor Activity: *Designing a space for critical mathematics education in the early years.* In U. Gellert et al. (eds). A collection of CIAEAM papers.

Chronaki, A. & Mountzouri, G. (2012). Playing with Numbers in Cultures*:* Beginning to trouble essentialist views of mathematical knowledge re-production and use. In Di P. Benedetto&J. Diez-Palomar(Eds.), *The Proceedings of the International Commission for study and improvement of Mathematics Education (CIEAEM 63)* ***Facilitating access and participation: Mathematical practices inside and outside the classroom.*** **Quaderni** di Ricerca in Didattica (Mathematics) **(pp. 90-94).Barcelona, Universitat de Barcelona, Spain, 24-29 July 2011. Διαθέσιμο στην ηλεκτρονική διεύθυνση:** http://math.unipa.it/~grim/CIEAEM%2063_Pproceedings_QRDM_Issue%2022,%20Suppl.1

Γκέφου-Μαδιανού, Δ. (1998). Αναστοχασμός, Ετερότητα και Ανθρωπολογία Οίκοι: Διλήμματα και Αντιπαραθέσεις. Στο Δ. Γκέφου-Μαδιανού (Επιμ.), *Ανθρωπολογική Θεωρία και Εθνογραφία* (σελ. 365-436). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Pushor, D. (2008). Collaborative Research. In L.S. Given (Ed). *The SAGE Encyclopedia of Qualitative Research Methods*. (vol. 1, pp. 91-94). London: Sage.

Presmeg, N. (1999). Ethnomathematics in Teacher Education. *Journal of mathematics Teacher Education, 1*, 317-339.

Skovsmose, O. (2011). *An invitation to critical mathematics education.* Rotterdam: Sense Publishers.

Skovsmose, O. (2006). **Foregrounds and Politics of Learning Obstacles.**In U. Gellert, & E. Jablonca (Eds.), Mathematisation- Demathematisation: *Social, Philosophical, Sociological and Educational Ramifications* (pp. 81-94). Rotterdam: SensePublishers.

Σκούρτου, Ε.(2001). Διγλωσσία, διδασκαλία δεύτερης γλώσσας. Στο Θ. Δραγώνα, Ε. Σκούρτου, & Α. Φραγκουδάκη (Επιμ.), *Κοινωνικές Ταυτότητες/Ετερότητες– Κοινωνικές Ανισότητες, Διγλωσσία και Σχολείο* (τόμος Α, σελ. 167-274). Πάτρα: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

Thomas, J. (1993). Doing Critical Ethnography. *Qualitative Research Methods* (vol. 26). London: Sage Publications.

Τσοκαλίδου Ρ. (2000). «Η εναλλαγή του κώδικα: μια δυναμική και πολυδιάστατη διγλωσσική πρακτική», *Τετράδια Εργασίας Νάξου,* τεύχος *Διγλωσσία.* Ρόδος: εκδ. Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Πρόγραμμα ΕΠΕΑΕΚ, Ακαδημαϊκή και Επαγγελματική Αναβάθμιση Εκπαιδευτικών.

ΥΠΕΠΘ (2011). Αναλυτικό Πρόγραμμα για το Νηπιαγωγείο.

ΟΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΓΟΝΙΚΗ ΕΜΠΛΟΚΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΣΧΟΛΙΚΕΣ ΚΟΙΝΟΤΗΤΕΣ

Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος, Πέτρος Χαβιάρης & Σόνια Καφούση

Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

amoutsiosrentzos@aegean.gr, chaviaris@aegean.gr, kafoussi@aegean.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή την ποσοτική έρευνα μελετάται το πώς αντιλαμβάνονται τη γονική εμπλοκή στα Μαθηματικά οι μαθητές δημοτικών σχολείων. Μελετώνται και συγκρίνονται σχολεία διαφορετικών πολιτισμικών ταυτοτήτων, όπως αυτές ορίζονται από την εθνότητα των μαθητών τους. Βρέθηκαν διαφοροποιήσεις στην αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή οι οποίες φαίνεται να σχετίζονται με τη διαφορετική πολιτισμική ταυτότητα των σχολείων, ενώ διαφορετικές αντιλήψεις καταγράφηκαν εντός της ίδιας σχολικής κοινότητας τόσο από τάξη σε τάξη, όσο και από τμήμα σε τμήμα.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει αναπτυχθεί από ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης για τη μελέτη της σχέσης της μαθησιακής πορείας στα Μαθηματικά με το εκτός της σχολικής τάξης περιβάλλον. Το ενδιαφέρον αυτό συνδέεται με τις σύγχρονες κοινωνικο-πολιτισμικές θεωρητικές προσεγγίσεις της μαθηματικής εκπαίδευσης και εντάσσεται στην προσπάθεια ερμηνείας της διαφορετικής μαθηματικής επίδοσης μαθητών που προέρχονται από διαφορετικά κοινωνικο-πολιτισμικά περιβάλλοντα (Cao, Bishop & Forgasz, 2006· Cobb &Yang, 1995· Wang, 2004). Κρίσιμο περιβάλλον επιρροής της πορείας του παιδιού στα Μαθηματικά αποτελεί η οικογένεια, καθώς η αλληλεπίδρασή της με το σχολείο είναι καθημερινή τόσο μέσω των εργασιών στα Μαθηματικά που πραγματοποιεί το παιδί στο σπίτι, όσο και μέσω των πρακτικών που αναπτύσσουν τα μέλη της οικογένειας σε μαθηματικές ή μη δραστηριότητες. Μελέτες έχουν αναδείξει τη σχέση αυτών των πρακτικών με τις στάσεις και τις αντιλήψεις των γονέων για τα Μαθηματικά και τη διαμεσολάβησή τους στη διαμόρφωση των στάσεων και των αντιλήψεων των παιδιών τους (Anderson, 1997· Hyde et al., 2006· Kafoussi, 2006· Λεμονίδης, Τσακιρίδου & Μαρκάδας, 2009).

Ο ουσιαστικός ρόλος των γονέων στη συναισθηματική και γνωστική ανάπτυξη των παιδιών τους στα Μαθηματικά καθιστά σημαντική την διερεύνηση πτυχών του ζητήματος με στόχο το σχεδιασμό δράσεων για τη βελτίωση της μαθηματικής παιδείας στη χώρα μας. Στην παρούσα εργασία εστιαζόμαστε στην αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή με τα Μαθηματικά από μαθητές δημοτικών σχολείων, διερευνώντας

τη σχέση της με την πολιτισμική ταυτότητα του σχολείου, όπως αυτή ορίζεται από την εθνότητα των μαθητών του σχολείου (De Abreu, Cline & Shamsi, 2002).

1.2 Γονική εμπλοκή και Μαθηματικά

Η γονική εμπλοκή στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών διακρίνεται σε έμμεση και άμεση. Η έμμεση εμπλοκή περιλαμβάνει τις προσδοκίες της οικογένειας για τη μαθηματική επίδοση του παιδιού, την ενθάρρυνση των παιδιών, τις στάσεις των γονέων απέναντι στα Μαθηματικά, καθώς και την ευρύτερη υποστήριξη μέσω επιλογών βιβλίων (ή άλλων μέσων) ή επαγγελματικού προσανατολισμού. Η άμεση εμπλοκή σχετίζεται με την αλληλεπίδραση των γονέων με τα παιδιά τους κατά τη σχολική εργασία Μαθηματικών που δίνεται για το σπίτι (για παράδειγμα, οι γονείς βοηθούν τα παιδιά τους να υπερβούν μια δυσκολία σε μια τέτοια εργασία), καθώς και με μαθηματικές δραστηριότητες της οικογένειας (άτυπες ή τυπικές).

Σχετικά με την έμμεση γονική εμπλοκή, έρευνες δείχνουν ότι οι αντιλήψεις των γονέων για την αξία της μαθηματικής γνώσης επηρεάζουν τη στάση των παιδιών τους για τα Μαθηματικά (Yee, 1986), ενώ η στάση των γονέων για τα Μαθηματικά επηρεάζει το εύρος των γνώσεων που αποκτά ένα παιδί στο σπίτι, ανεξάρτητα από το κοινωνικο-οικονομικό επίπεδο της οικογένειας (Young-Loveridge, 1989). Επιπροσθέτως, οι υψηλές προσδοκίες των γονέων για την επίδοση των παιδιών τους στα Μαθηματικά φαίνεται να επηρεάζουν θετικά την επίδοση και την αυτοεκτίμησή τους (Jacobs & Bleeker, 2004· Wang, 2004). Σχετικά με την ευρύτερη υποστήριξη από την οικογένεια, όπως ο αριθμός των βιβλίων, καταγράφεται θετική επιρροή στην επίδοση των μαθητών (Hyde et al., 2006· Wang, 2004).

Σχετικά με την άμεση γονική εμπλοκή, η ποιότητα της συνεργασίας γονέων-παιδιών φαίνεται να καθορίζει την αποτελεσματικότητα της γονικής εμπλοκής κατά την εργασία στο σπίτι (Hyde et al., 2006). Στη χώρα μας οι περισσότεροι γονείς αφιερώνουν αρκετό χρόνο με τα παιδιά τους στα σχολικά Μαθηματικά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, περισσότερο από το χρόνο που αφιερώνουν για τα άλλα μαθήματα (Δεσλή & Σαραήογλου, 2009· Καφούση & Ντζιαχρήστος, 2003· Χασάπης & Ζαχάρος, 2009), αν και διεθνείς έρευνες δείχνουν ότι ο χρόνος ενασχόλησης των γονέων δε φαίνεται να σχετίζεται με την επίδοση των παιδιών (Pezdek, Berry & Renno, 2002).

Αναφορικά με τους τρόπους που οι μαθητές βιώνουν τη γονική εμπλοκή στα Μαθηματικά, οι Cao, Bishop & Forgasz (2006) σε έρευνα στην Κίνα και την Αυστραλία με μαθητές 11, 13 και 15 ετών βρήκαν διαφοροποιήσεις στις απόψεις τους για την έμμεση και την άμεση γονική εμπλοκή σχετιζόμενες με την ηλικία, τη χώρα και την πολιτισμική ταυτότητα. Ειδικότερα, βρέθηκε ότι η αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή ήταν λιγότερο έντονη σε παιδιά μεγαλύτερης ηλικίας. Οι αντιλήψεις για τη γονική ενθάρρυνση και τις γονικές προσδοκίες για καλύτερη επίδοση στα Μαθηματικά ήταν εντονότερες στην Κίνα απ' ό,τι στην Αυστραλία. Επιπροσθέτως,

οι μαθητές στην Κίνα, σε αντίθεση με μαθητές που μιλούσαν την κινεζική γλώσσα στην Αυστραλία, δήλωσαν ότι οι γονείς τους είχαν σημαντικές προσδοκίες για την επίδοσή τους στα Μαθηματικά. Επιπλέον, φαίνεται να υπάρχουν διαφοροποιήσεις εντός μιας χώρας συνδεδεμένες με την πολιτισμική ταυτότητα, καθώς η αντιλαμβανόμενη γονική ενθάρρυνση των μαθητών που μιλούν αγγλικά στην Αυστραλία ήταν λιγότερο έντονη συγκριτικά με μαθητές και μαθήτριες που μιλούν γλώσσες εκτός της αγγλικής.

Έρευνες στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουν δείξει ότι η γονική εμπλοκή των μαθητών που δεν ανήκουν στην κυρίαρχη πολιτισμική κοινότητα μιας χώρας είναι καθοριστικός παράγοντας για την κοινωνική ενσωμάτωσή τους (Crafter, 2012). Οι De Abreu, Cline και Shamsi (2002) μελέτησαν τη γονική στήριξη στις μεταβάσεις των παιδιών τους ανάμεσα στα σχολικά Μαθηματικά και τα Μαθηματικά στο σπίτι. Στην έρευνα συμμετείχαν μαθητές, οι γονείς και οι δάσκαλοί τους. Η επιλογή έγινε από τέσσερα σχολεία μιας πολυπολιτισμικής περιοχής της Νότιας Αγγλίας με βάση την εθνότητα (λευκοί Βρετανοί, Πακιστανοί Βρετανοί), την επίδοσή τους στα Μαθηματικά και την ηλικία. Οι απόψεις των γονέων για τη συμμετοχή τους στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών τους διαφοροποιούνταν ανάλογα με την εθνότητα στην εμπλοκή ή μη των μελών της οικογένειας στη βοήθεια των παιδιών.

Συνεπώς, φαίνεται ότι η γονική εμπλοκή στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες. Η αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή φαίνεται να σχετίζεται με το κοινωνικό-πολιτισμικό περιβάλλον μιας χώρας, ενώ εντός μιας χώρας η εθνότητα αναδεικνύεται ως καθοριστικός παράγοντας. Στην Ελλάδα φαίνεται να υπάρχει έλλειψη ανάλογων ερευνών, καθώς και ερευνών που να μελετούν την αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή σε σχέση με την εθνότητα, εντός της ίδιας σχολικής μονάδας. Σε αυτή την μελέτη, βασιζόμενοι στην έρευνα των Cao, Bishop και Forgasz (2006), διερευνώνται τα εξής ζητήματα σχετικά με το πώς αντιλαμβάνονται τη γονική εμπλοκή στα Μαθηματικά οι μαθητές δημοτικών σχολείων: α) Ποιες είναι οι αντιλήψεις μαθητών δημοτικών σχολείων για τη γονική εμπλοκή στα μαθηματικά σε σχέση με την πολιτισμική ταυτότητα του σχολείου; β) Πώς διαμορφώνονται ανάλογα με την τάξη (Ε΄ ή ΣΤ΄) και με το τμήμα που παρακολουθούν οι μαθητές;

2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Η έρευνα διεξήχθη το Μάιο του 2013 με μαθητές της Ε΄ και ΣΤ΄ δημοτικού τριών σχολείων από διαφορετικές περιοχές της Αθήνας (N=249). Τα σχολεία επιλέχθηκαν ως αντιπροσωπευτικά της διαφοροποίησης σε σχέση με την εθνότητα των μαθητών: *Σχολείο Α 'αναμενόμενη'* (η αναλογία ημεδαπών και αλλοδαπών είναι κοντά στην αναμενόμενη για την Αθήνα αναλογία· περίπου 4 προς 1), *Σχολείο Β 'πολυπολιτισμική'* (οι μαθητές του σχολείου είναι διαφόρων εθνοτήτων, χωρίς να υπάρχει εθνότητα με κυρίαρχη παρουσία, άνω του 50%), και *Σχολείο Γ 'κυρίως*

ημεδαπών' (περίπου 85% των μαθητών του σχολείου είναι ελληνικής καταγωγής). Αναλυτικά, στο Σχολείο Α ήταν εγγεγραμμένοι 80,95% ημεδαποί έναντι 19,05% άλλων εθνοτήτων, στο Σχολείο Β 24,52% έναντι 75,48% και στο Σχολείο Γ 84,91% έναντι 15,09%.

Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με μια μεταφρασμένη στα ελληνικά εκδοχή της κλίμακας Αντιλαμβανόμενης Γονικής Εμπλοκής (Perceived Parental Influence, PPI· Cao, Bishop & Forgasz, 2006) με δύο επιπλέον ερωτήματα. Το PPI αποτελείται από δεκαέξι ερωτήματα τύπου Likert: οκτώ μετρούν την αντιλαμβανόμενη εμπλοκή της μητέρας και οκτώ του πατέρα. Τα δύο ερωτήματα που προσθέσαμε διερευνούν τις αντιλήψεις για τη σημασία να πηγαίνουν καλά στα μαθηματικά (ένα για τη μητέρα και ένα για τον πατέρα). Συνεπώς, το ερωτηματολόγιο αυτής της έρευνας αποτελείται από 18 ερωτήματα, επεκτείνει το PPI και ονομάζεται *PPI-ext* (βλ. Παράρτημα). Σημειώνεται ότι εσωτερική συνέπεια του ερωτηματολογίου κρίνεται ικανοποιητική (α=0,798· Kline, 1999), ενώ η ανάλυση κύριων συνιστωσών του PPI-ext ανέδειξε τέσσερις συνιστώσες, σε συμφωνία με το πρωτότυπο PPI, ενισχύοντας την εγκυρότητά του: α) *Γονική ενθάρρυνση* (ΓΕ), β) *Στάση και βοήθεια μητέρας* (επικεντρωμένες στα μαθηματικά· ΣΒΜ), γ) *Στάση και βοήθεια πατέρα* (επικεντρωμένες στα μαθηματικά· ΣΒΠ), και δ) *Γονική προσδοκία επίδοσης* (ΓΠΕ).

Η στατιστική ανάλυση έγινε με το SPSS 17 (SPSS Inc., Chicago, IL) συμπεριλαμβάνοντας ανεξάρτητο έλεγχο t-test, έλεγχο Mann-Whitney, Ανάλυση Διακύμανσης μονής κατεύθυνσης και έλεγχο Kruskal-Wallis.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αρχικά, διερευνήθηκε η αντιλαμβανόμενη εμπλοκή μαθητών της ίδιας τάξης των τριών σχολείων. Φαίνεται ότι στην Ε΄ Δημοτικού δεν παρατηρούνται στατιστικώς σημαντικές διαφοροποιήσεις στις αντιλήψεις για τη γονική εμπλοκή (PPI-ext· $F(2, 131)=1,893$, $p=0,155$). Αντίθετα στη ΣΤ΄ Δημοτικού παρατηρούνται στατιστικώς σημαντικές διαφοροποιήσεις στο PPI-ext και στις υποκλίμακες (εκτός ΣΒΜ· βλ. Πίνακα 1). Οι post-hoc αναλύσεις εντοπίζουν τη διαφοροποίηση στο Σχολείο Β ('πολυπολιτισμική'), με τους μαθητές αυτού του σχολείου να βιώνουν *εντονότερη γονική εμπλοκή* (στατιστικώς σημαντική ή μη· βλ. Πίνακα 1).

	Σχολείο			One-way ANOVA			Post-hoc συγκρίσεις		
	Α	Β	Γ	*F*	*df*	*P*	Α vs. Β	Α vs. Γ	Β vs. Γ
PPI-ext	1,9±0,4	2,3±0,3	1,9±0,5	8,879	(2,112)	**<0,001**	**0,002**	0,698	**0,001**
ΓΕ	2,1±0,7	2,6±0,4	2,2±0,7	5,409	(2,112)	**0,006**	**0,005**	0,929	**0,047**
ΣΒΜ	1,8±0,5	2,0±0,6	1,8±0,6	2,746	(2,112)	0,068	-	-	-
ΣΒΠ	1,8±0,7	2,0±0,7	1,5±0,8	3,549	(2,112)	**0,032**	0,258	0,329	**0,024**
ΓΠΕ	2,2±0,7	2,6±0,4	2,0±0,7	8,022	(2,112)	**0,001**	**0,003**	0,682	**0,001**

Σημειώσεις. Σχολείο Α 'αναμενόμενη', Σχολείο Β 'πολυπολιτισμική', Σχολείο Γ 'κυρίως ημεδαπών', ΓΕ 'Γονική ενθάρρυνση', ΣΒΜ 'Στάση και βοήθεια μητέρας', ΣΒΠ 'Στάση και βοήθεια πατέρα', και ΓΠΕ 'Γονική προσδοκία επίδοσης'. Οι τιμές κυμαίνονται από 1 έως 4 ('έντονη διαφωνία' έως 'έντονη συμφωνία') και δηλώνονται με Μέση τιμή±Τυπική απόκλιση. Οι post-hoc συγκρίσεις βασίζονται στο Tukey HSD. Οι στατιστικώς σημαντικές διαφοροποιήσεις δηλώνονται με έντονους χαρακτήρες.

Πίνακας 1: Συγκρίσεις των αντιλήψεων σε κάθε σχολείο για την ΣΤ΄.

Για την περαιτέρω διερεύνηση αυτού του ευρήματος, συγκρίναμε τις αντιλήψεις των μαθητών Ε΄ και ΣΤ΄ εντός του κάθε σχολείου (βλ. Πίνακα 2). Στα Σχολεία Α ('αναμενόμενη') και Γ ('κυρίως ημεδαπών'), βρέθηκε στατιστικώς σημαντική μείωση της αντιλαμβανόμενης γονικής εμπλοκής (PPI-ext), καθώς και σε όλες τις υποκλίμακες στο Σχολείο Α και στις μαθηματικά επικεντρωμένες στο Σχολείο Γ. Αυτό ίσως συνάδει με το γεγονός ότι οι μαθητές της ΣΤ΄ αναμένεται να βιώσουν μια αλλαγή στην αντιλαμβανόμενη σχέση εξουσίας που έχουν στο σχολείο σε σχέση με τις προηγούμενες τάξεις, όντας στην τελευταία τάξη ή και με την πιθανή χαλάρωση της γονικής εμπλοκής λόγω της τελευταίας τάξης. Εντούτοις, στο Σχολείο Β ('πολυπολιτισμική') παρατηρείται ότι δεν υπάρχουν στατιστικώς σημαντικές διαφοροποιήσεις στην αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή (PPI-ext) από την Ε΄ στην ΣΤ΄, ούτε σε κάποια από τις υποκλίμακες.

Δεδομένης της στατιστικώς σημαντικής διαφοροποίησης του PPI-ext στην ΣΤ΄, διερευνήθηκαν οι αντιλήψεις στα επίπεδο τμημάτων μόνο στην ΣΤ΄. Βρέθηκαν διαφορές στην αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή (βλ. Πίνακα 3), οι οποίες ήταν στατιστικώς σημαντικές στο Σχολείο Β ('πολυπολιτισμική'· PPI-ext, ΣΒΜ) και στο Σχολείο Γ ('κυρίως ημεδαπών'· PPI-ext, ΓΕ, ΓΠΕ). Υποθέτουμε ότι οι διαφορές μεταξύ των τμημάτων υποδηλώνουν τον καθοριστικό ρόλο της ταυτότητας του τμήματος στην αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή η οποία μπορεί να διαφέρει από τις αντιλήψεις που καταγράφονται για όλη την τάξη ή/και για όλο το σχολείο.

	PPI-ext	ΓΕ	ΣΒΜ	ΣΒΠ	ΓΠΕ
Σχολείο Α 'αναμενόμενη'					
Ε΄	**2,4±0,4**	**2,5±0,6**	**2,3±0,5**	**2,2±0,7**	**2,5±0,5**
ΣΤ΄	**1,9±0,4**	**2,1±0,7**	**1,8±0,5**	**1,8±0,7**	**2,2±0,7**
	***t*(102)=5,3 *p*<0,001, *r*=0,46**	***t*(102)=2,6 *p*=0,012, *r*=0,25**	***t*(102)=5,8 *p*<0,001, *r*=0,50**	***t*(102)=2,7 *p*=0,009, *r*=0,26**	***t*(102)=3,2 *p*=0,002, *r*=0,30**
Σχολείο Β 'πολυπολιτισμική'					
Ε΄	2,3±0,4	2,7±0,4	2,1±0,5	2,3±0,6	2,4±0,6
ΣΤ΄	2,3±0,4	2,6±0,4	2,0±0,6	2,0±0,7	2,6±0,4
	t(67)=0,8 *p*=0,4, *r*=0,10	*t*(67)=1,2 *p*=0,229, *r*=0,15	*t*(67)=1,0 *p*=0,314, *r*=0,12	*t*(67)=1,5 *p*=0,152, *r*=0,17	*t*(67)=-1,9 *p*=0,063, *r*=0,23
Σχολείο Γ 'κυρίως ημεδαπών'					
Ε΄	**2,2±0,4**	2,4±0,7	**2,2±0,4**	**2,1±0,7**	2,1±0,6
ΣΤ΄	**1,9±0,5**	2,2±0,7	**1,8±0,4**	**1,5±0,8**	2,0±0,7

***t*(74)=3,4**	*t*(74)=1,7	***t*(74)=3,1**	***t*(74)=3,5**	*t*(74)=0,6
***p*=0,001, *r*=0,36**	*p*=0,094, *r*=0,19	***p*=0,003, *r*=0,34**	***p*=0,001, *r*=0,37**	*p*=0,553, *r*=0,07

Σημειώσεις. ΓΕ 'Γονική ενθάρρυνση', ΣΒΜ 'Στάση και βοήθεια μητέρας', ΣΒΠ 'Στάση και βοήθεια πατέρα', και ΓΠΕ 'Γονική προσδοκία επίδοσης'. Οι τιμές κυμαίνονται από 1 έως 4 ('έντονη διαφωνία' έως 'έντονη συμφωνία') και δηλώνονται με Μέση τιμή±Τυπική απόκλιση. Οι στατιστικώς σημαντικές διαφοροποιήσεις με έντονη γραφή.

Πίνακας 2: Συγκρίσεις των αντιλήψεων σε κάθε τάξη ανά σχολείο.

	Σχολείο Β 'πολυπολιτισμική'		Σχολείο Γ 'κυρίως ημεδαπών'	
	$Β_{ΣΤ1}$	$Β_{ΣΤ2}$	$Γ_{ΣΤ1}$	$Γ_{ΣΤ2}$
PPI-ext	**2,1±0,4**	**2,4±0,3**	**1,6±0,4**	**2,1±0,5**
	***U*=59,0, *p*=0,004, *r*=-0,49**		***U*=43,5, *p*=0,011, *r*=-0,47**	
ΓΕ	2,5±0,5	2,6±0,4	**1,9±0,7**	**2,4±0,6**
	U=129,5, *p*=0,821, *r*=-0,04		***U*=50,0, *p*=0,026, *r*=-0,42**	
ΣΒΜ	**1,7±0,5**	**2,4±0,3**	1,6±0,5	1,9±0,6
	***U*=34,5, *p*<0,001, *r*=-0,65**		*U*=58,5, *p*=0,071, *r*=-0,34	
ΣΒΠ	1,9±0,8	2,2±0,6	1,3±0,8	1,7±0,7
	U=106,5, *p*=0,293, *r*=-0,19		*U*=74,5, *p*=0,298, *r*=-0,20	
ΓΠΕ	2,6±0,4	2,6±0,3	**1,7±0,7**	**2,3±0,7**
	U=124,5, *p*=0,677, *r*=-0,08		***U*=52,0, *p*=0,033, *r*=-0,40**	

Σημειώσεις. ΓΕ 'Γονική ενθάρρυνση', ΣΒΜ 'Στάση και βοήθεια μητέρας', ΣΒΠ 'Στάση και βοήθεια πατέρα', και ΓΠΕ 'Γονική προσδοκία επίδοσης'. Οι τιμές κυμαίνονται από 1 έως 4 ('έντονη διαφωνία' έως 'έντονη συμφωνία') και δηλώνονται με Μέση τιμή±Τυπική απόκλιση. Οι στατιστικώς σημαντικές διαφοροποιήσεις με έντονη γραφή.

Πίνακας 3: Συγκρίσεις αντιλήψεων των τμημάτων της ΣΤ΄ ανά σχολείο.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ

Στην παρούσα μελέτη βασιζόμενοι στην έρευνα των Cao, Bishop και Forgasz (2006) μελετήσαμε τη γονική εμπλοκή στα Μαθηματικά, όπως αυτή βιώνεται από μαθητές δημοτικών σχολείων. Η έρευνα επικεντρώθηκε στη διερεύνηση του ρόλου της πολιτισμικής ταυτότητας των σχολείων στην αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή. Η αρχική έρευνα στην Αυστραλία και στην Κίνα φανέρωσε μια πολύπλοκη σχέση μεταξύ της γονικής εμπλοκής και της εθνότητας και της πολιτισμικής ταυτότητας των μαθητών. Στην παρούσα έρευνα διερευνήσαμε την επιρροή του παράγοντα κοινωνικο-πολιτισμική ταυτότητα εντός της ίδιας χώρας, αλλά και εντός της ίδιας σχολικής μονάδας.

Τα ευρήματα φανερώνουν ότι σχολεία διαφορετικής πολιτισμικής ταυτότητας διαφοροποιούνται σαφώς στην αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή, με τα σχολεία πολυπολιτισμικής ταυτότητας να συνδέονται με εντονότερη γονική εμπλοκή. Επιπροσθέτως, σε συμφωνία με τους Cao, Bishop και Forgasz (2006), παρατηρήθηκε

ότι η αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή είναι σταθερότερη σε σχολεία 'πολυπολιτισμικής' ταυτότητας. Υποθέτουμε ότι η πολυπολιτισμικότητα αποδυναμώνει την επίδραση της ευρύτερης κοινότητας στην αντιλαμβανόμενη γονική εμπλοκή δημιουργώντας ένα περιβάλλον στο οποίο η μεγαλύτερη επιρροή προέρχεται από την ίδια την οικογένεια των μαθητών, το οποίο, συνεπώς, χαρακτηρίζεται από μια 'ευσταθή ισορροπία'. Η διερεύνηση της αντιλαμβανόμενης γονικής εμπλοκής εντός της ίδιας τάξης των ίδιων σχολείων φανέρωσε ουσιαστικές διαφοροποιήσεις από τμήμα σε τμήμα, οι οποίες είναι και στατιστικώς σημαντικές στα σχολεία με ταυτότητα 'πολυπολιτισμική' και 'κυρίως ημεδαπών'. Αυτές οι διαφοροποιήσεις μπορεί να σχετίζονται με την ταυτότητα της κάθε τάξης, αλλά χρειάζεται ευρύτερη μελέτη αυτών των σχέσεων.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις οδηγούν στην αναγκαιότητα σχεδιασμού και ανάπτυξης ευρύτερων ερευνών (ποσοτικών και ποιοτικών) για τη μελέτη της πολυπλοκότητας του φαινομένου (Moutsios-Rentzos, Kalavasis & Sofos, υπό δημοσίευση), οι οποίες θα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τις αλληλεπιδράσεις εντός και εκτός της σχολικής μονάδας, την πολιτισμική ταυτότητα της σχολικής μονάδας, της τάξης, του τμήματος, της ευρύτερης κοινωνίας, αλλά και των εσωτερικών σχέσεων που διέπουν την κάθε οικογένεια αναφορικά με την εμπλοκή της στη μαθηματική εκπαίδευση. Μια τέτοια πολυδιάστατη διερεύνηση μπορεί να συμβάλει σε ένα πιο ολοκληρωμένο και αποτελεσματικότερο εκπαιδευτικό σχεδιασμό, κατάλληλο για τη σύγχρονη διευρυμένη πολυπολιτισμική κοινωνία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anderson, A. (1997). Families and Mathematics: a study of parent- child interactions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(4), 484-511.

Δεσλή, Δ., & Σαραήογλου, Π. (2009). Η εμπλοκή των γονέων στα μαθηματικά του σχολείου. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή & Γ. Φεσάκης, (Επ.), *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ* (σ. 121-130). Ρόδος: ΕΝΕΔΙΜ.

Cao, Z., Bishop, A., & Forgasz, H. (2006). Perceived parental influence on mathematics learning: a comparison among students in China and Australia. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 85-106.

Cobb, P., & Yang, M. T-L. (1995). A cross-cultural investigation into the development of place value concepts of children in Taiwan and the United-States. *Educational Studies in Mathematics*, *28*, 1-33.

Crafter, S. (2012). Parental cultural models and resources for understanding mathematical achievement in culturally diverse school settings. *Educational Studies in Mathematics*, *81*, 31-46.

de Abreu, G., Cline, T., & Shamsi, T. (2002). Exploring ways parents participate in their children's school mathematical learning: Cases studies in multiethnic primary schools. Στο G. de Abreu, A. Bishop & N. Presmeg (Eds.), *Transitions Between Contexts of Mathematical Practices* (σ. 123-147). Kluwer Academic Publishers.

Hyde, J. S., Else-Quest, N. M., Alibali, M. W., Knuth, E., & Romberg, T. (2006). Mathematics in the home: Homework practices and mother–child interactions doing mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 136–152.

Jacobs, J. E., & Bleeker, M. (2004). Girls' and boys' developing interests in Math and Science: do parents matter? *New Directions for Child and Adolescent Development*, *106*, 5-21.

Kafoussi, S. (2006). Parents' and students' interaction in mathematics: designing home mathematical activities. Proceedings of CIEAEM 58, 9-15 July 2006, SRNI, Czech Republic. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), 2009, 19*(3), 209-214.

Καφούση, Σ., & Ντζιαχρήστος, Β. (2003). Οι απόψεις των γονιών για τα Μαθηματικά του Δημοτικού Σχολείου. *Πρακτικά 20ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας* (σ. 264-273). Βέροια: ΕΜΕ.

Kline, P. (1999). *The handbook of psychological testing*. London: Routledge.

Λεμονίδης, Χ., Τσακιρίδου Ε. & Μαρκάδας, Σ. (2009). Διερεύνηση της εμπλοκής των γονέων στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών τους. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή & Γ. Φεσάκης, (Επ.), *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ* (σ. 89-100). Ρόδος: ΕΝΕΔΙΜ.

Moutsios-Rentzos, A., Kalavasis, F., & Sofos, A. (υπό δημοσίευση). *The mathematics classroom in the expanded open system of a globalised virtual social network.* Proceedings of CIEAEM 65, 23-27 July 2013, Torino, Italy. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*.

Pezdek, K., Berry, T. & Renno, P. (2002). Children's Mathematics Achievement: The role of parents' perceptions and their involvement in homework. *Journal of Educational Psychology*, 94(4), 771-777.

Wang, D. B. (2004). Family background factors and mathematics success: A comparison of Chinese and US students. *International Journal of Educational Research*, 41, 40-54.

Χασάπης, Δ., & Ζαχάρος, Κ. (2009). Μία διερεύνηση της εμπλοκής γονέων μαθητών του Δημοτικού στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών τους. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή & Γ. Φεσάκης, (Επ.), *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ* (σ. 101-110). Ρόδος: ΕΝΕΔΙΜ.

Yee, D. K. (1986). Sex equity in the home: Parents' influence on their children's attitudes about math. *Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association, San Francisco, CA.* (ERIC Document Reproduction Service No. ED 280 717)

Young-Loveridge, J. (1989). The relationship between children's home experiences and their mathematical skills on entry to school. *Early Child Development and Care*, 43, 43-59.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

PPI και PPI-ext: ερωτήματα και ανάλυση κυρίων συνιστωσών

		ΓΕ	ΣΒΠ	ΣΒΜ	ΓΠΕ
1	Η μητέρα μου είναι καλή στα Μαθηματικά.			**X**	
2	Η μητέρα μου ελέγχει συχνά την εργασία που κάνω στα Μαθηματικά στο σπίτι.			**X**	
3	Η μητέρα μου με ρωτά για τα αποτελέσματα της αξιολόγησής μου στα Μαθηματικά.			**X**	
4	Η μητέρα μου με βοηθά σε μερικά δύσκολα μαθηματικά προβλήματα.			**X**	
5	Η μητέρα μου με βοηθά να νοιώθω ότι μπορώ να τα καταφέρω στα Μαθηματικά.	X		**X**	
6	Η μητέρα μου λέει ότι κάποιος πρέπει να κάνει κάτι προσεκτικά για να το κάνει καλά.	**X**			
7	Η μητέρα μου λέει ότι κάποιος πρέπει να δουλεύει σκληρά για να κάνει κάτι καλά.	**X**			
8	Η μητέρα μου προσδοκά να είμαι ο καλύτερος μαθητής στα Μαθηματικά και στα άλλα μαθήματα στην τάξη μου.				**X**
N1	Η μητέρα μου θεωρεί ότι είναι σημαντικό να τα πηγαίνω καλά στα Μαθηματικά.				**X**
9	Ο πατέρας μου είναι καλός στα Μαθηματικά.		**X**		
10	Ο πατέρας μου ελέγχει συχνά την εργασία που κάνω στα Μαθηματικά στο σπίτι.		**X**		
11	Ο πατέρας μου με ρωτά για τα αποτελέσματα της αξιολόγησής μου στα Μαθηματικά.		**X**		

12	Ο πατέρας μου με βοηθά σε μερικά δύσκολα μαθηματικά προβλήματα.	**X**	
13	Ο πατέρας μου με βοηθά να νοιώθω ότι μπορώ να τα καταφέρω στα Μαθηματικά.	X	**X**
14	Ο πατέρας μου λέει ότι κάποιος πρέπει να κάνει κάτι προσεκτικά για να το κάνει καλά.	**X**	
15	Ο πατέρας μου λέει ότι κάποιος πρέπει να δουλεύει σκληρά για να κάνει κάτι καλά.	**X**	
16	Ο πατέρας μου προσδοκά να είμαι ο καλύτερος μαθητής στα Μαθηματικά και στα άλλα μαθήματα στην τάξη μου.		**X**
N2	Ο πατέρας μου θεωρεί ότι είναι σημαντικό να τα πηγαίνω καλά στα Μαθηματικά.		**X**

Σημειώσεις. Οι συνιστώσες ονομάζονται κατά τους Cao, Bishop και Forgasz (2006). ΓΕ 'Γονική ενθάρρυνση', ΣΒΜ 'Στάση και βοήθεια μητέρας', ΣΒΠ 'Στάση και βοήθεια πατέρα', ΓΠΕ 'Γονική προσδοκία επίδοσης', ενώ N1, N2 τα δύο επιπλέον ερωτήματα του PPI-ext. Με 'X' δηλώνεται η συνιστώσα στην οποία ανήκει ένα ερώτημα στο πρωτότυπο PPI, ενώ με 'X' ένα ερώτημα του PPI-ext, καθώς και η ταύτιση των αποτελεσμάτων των αναλύσεων των PPI και PPI-ext για το ερώτημα.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΚΑΙ Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥΣ: ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ, ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΣΕΙΣ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Δεσλή Δέσποινα & Ανεστάκης Πέτρος
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.
ddesli@eled.auth.gr & petrosan@hotmail.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να μελετήσει τις επιδόσεις και τις στρατηγικές 113 υποψηφίων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης κατά την επίλυση προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης, καθώς και τις απόψεις τους για τη διδασκαλία τέτοιων προβλημάτων στο δημοτικό σχολείο. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιήθηκε ερωτηματολόγιο στο οποίο παρουσιάστηκαν για επίλυση τέσσερις κατηγορίες προβλημάτων - σχετικό μέγεθος των αριθμών, χρήση σημείων αναφοράς, αριθμητικές πράξεις και λογική κρίση - με και χωρίς πλαίσιο. Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί παρουσίασαν αρκετά υψηλές επιδόσεις σε όλα τα προβλήματα, ενώ οι στρατηγικές τους βασίστηκαν περισσότερο σε ευέλικτες προσεγγίσεις και λιγότερο σε κανόνες και τυποποιημένους αλγόριθμους. Τέλος, θεωρούν πολύ σημαντική τη διδασκαλία της υπολογιστικής εκτίμησης στο δημοτικό σχολείο.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια η εκτίμηση του αποτελέσματος ενός υπολογισμού αποτελεί σημαντικό μέρος του Αναλυτικού Προγράμματος των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο στην Ελλάδα και το εξωτερικό καθώς τα οφέλη από την έκθεση των παιδιών σε δραστηριότητες υπολογιστικής εκτίμησης έχουν επισημανθεί με αναφορές, κυρίως, στην πρακτική χρησιμότητα της εκτίμησης (Segovia & Castro, 2009). Συχνά, ωστόσο, η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης συγχέεται με την ικανότητα για νοερούς υπολογισμούς (Λεμονίδης, 2013), ενδεχομένως επειδή πραγματοποιούνται και οι δύο νοερά: σε αντίθεση με τους νοερούς υπολογισμούς που καταλήγουν σε ακριβές αποτέλεσμα, οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί προσεγγίζουν το αποτέλεσμα του υπολογισμού με ακρίβεια. Τόσο οι νοεροί όσο και οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί συνεπικουρούν στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού (McIntosh, 2004) και γι' αυτό προτείνονται για διδασκαλία από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου.

Οι έρευνες σχετικά με την υπολογιστική εκτίμηση έχουν κυρίως επικεντρωθεί στις δεξιότητες που απαιτούνται και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά και οι

ενήλικες, συνδέοντας την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης με διαδικασίες όπως, για παράδειγμα, αυτές που αναπτύσσουν τη σημασία των αριθμητικών πράξεων. Η Dowker (2003), εξετάζοντας την ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης των παιδιών σε προσθετικά προβλήματα, βρήκε ότι όσο βελτιώνεται το επίπεδο της μαθηματικής επίδοσης των παιδιών τόσο περισσότερο σύνθετες δεξιότητες εκτίμησης αυτά παρουσιάζουν. Αντίθετα, ο Alsawaie (2011) και ο Yang, (2005) σε έρευνές τους με μαθητές Στ' τάξης σε Ηνωμένα Αραβικά Εμιράτα και Ταϊβάν αντίστοιχα, βρήκαν ότι η μεγάλη στήριξη που παρουσιάζουν τα παιδιά σε κανόνες και τυπικούς αλγορίθμους λειτουργεί ανασταλτικά και τους εμποδίζει να αναπτύξουν εναλλακτικούς τρόπους υπολογιστικής εκτίμησης. Επιπρόσθετα, όπως συμβαίνει και σε άλλα γνωστικά πεδία, οι στρατηγικές των παιδιών παρουσιάζουν ποικιλία (Lemaire & Lecacheur, 2002), η οποία βελτιώνεται με την ηλικία. Για την πρόσθεση, για παράδειγμα, τα μικρά παιδιά συχνά στρογγυλοποιούν τις μονάδες ή τις δεκάδες στην πλησιέστερη δεκάδα ή εκατοντάδα και μετά προσθέτουν (30+50=80 για να υπολογίσουν το 32+53 ή 200+300=500 για να υπολογίσουν το 234+315). Τα μεγαλύτερα παιδιά παρουσιάζουν τις στρατηγικές υπολογιστικής εκτίμησης με διαφορετική συχνότητα και συχνά συνδυαστικά για μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα (για το 234+315, προσθέτουν 30+10=40 πάνω στο αρχικό 500). Οι περισσότερες από αυτές τις έρευνες συγκλίνουν στο γεγονός ότι η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης του αποτελέσματος στις αριθμητικές πράξεις κατακτάται δύσκολα και ότι επιτυγχάνεται μόνο με συστηματική διδασκαλία.

Η ικανότητα υπολογιστικής εκτίμησης έχει, επίσης, εξεταστεί σε ενήλικες διαφόρων επιπέδων υπολογιστικών επιδόσεων (π.χ., Lemaire, Arnaud & Lecacheur, 2004. Opfer & DeVries, 2008. Hanson & Hogan, 2000) δείχνοντας ότι οι πολύ καλές επιδόσεις των ενηλίκων σε προβλήματα που απαιτούσαν ακριβείς υπολογισμούς δεν συμβάδιζαν με τις επιδόσεις τους σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Παρόμοια είναι και τα αποτελέσματα για τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν σε έρευνες σχετικά με τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν σε προβλήματα αίσθησης του αριθμού. Συγκεκριμένα, οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, στην έρευνα των Yang, Reys και Reys (2009), είχαν χαμηλές επιδόσεις σε προβλήματα που απαιτούν αίσθηση του αριθμού και βασίζονταν κυρίως σε γραπτούς υπολογισμούς με αλγόριθμους και κανόνες. Στην έρευνα του Tsao (2005) μάλιστα οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί -ακόμα και εκείνοι υψηλής ικανότητας - δήλωσαν ότι δεν είναι έτοιμοι για ένα αναλυτικό πρόγραμμα που δίνει λιγότερη έμφαση σε γραπτούς υπολογισμούς. Την αναστολή τους να διδάξουν την υπολογιστική εκτίμηση στο δημοτικό σχολείο εξέφρασαν οι περισσότεροι από τους μισούς εν ενεργεία εκπαιδευτικούς που πήραν μέρος στην έρευνα του Alajmi (2009), φοβούμενοι ότι η έμφαση σε υπολογιστικές εκτιμήσεις θα προκαλούσε προβλήματα στους μαθητές στην ανάπτυξη των τυπικών αλγορίθμων.

Με δεδομένο ότι η γνώση συγκεκριμένου μαθηματικού περιεχομένου από τους εκπαιδευτικούς αλλά και οι στάσεις τους επηρεάζουν τον τρόπο και το περιεχόμενο της διδασκαλίας τους (Pajares, 1992), έχει ενδιαφέρον η διερεύνηση της υπολογιστικής εκτίμησης από τους εκπαιδευτικούς. Όπως υποστηρίζουν οι Tsao και Lin (2011), τα παιδιά αναπτύσσουν την αίσθηση του αριθμού όταν οι εκπαιδευτικοί τους έχουν οι ίδιοι καλή σχετική γνώση της αίσθησης του αριθμού. Παρόμοια, οι Alajmi και Reys (2007) προτείνουν ότι οι εκπαιδευτικοί που βλέπουν θετικά τη σημασία των λογικών απαντήσεων των μαθητών τους, επιμένουν στη διδασκαλία των μαθηματικών με έμφαση στην αναγνώριση της ορθότητας ή τις λογικότητας ενός αποτελέσματος.

Παρόλο που πληθώρα ερευνών επισημαίνουν το σημαντικό ρόλο που οι εκπαιδευτικοί διαδραματίζουν στο να βοηθήσουν τα παιδιά να κατακτήσουν την αίσθηση του αριθμού, πολύ πιο περιορισμένη είναι η έρευνα αναφορικά με την επίδοση των εκπαιδευτικών σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να μελετήσει τόσο τις επιδόσεις και τις στρατηγικές υποψηφίων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης σε προβλήματα υπολογιστικής εκτίμησης όσο και τις απόψεις τους για τη διδασκαλία τέτοιων προβλημάτων στο δημοτικό σχολείο, καθώς οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί θα είναι εκείνοι που θα αποδώσουν την έμφαση στις υπολογιστικές εκτιμήσεις όπως ορίζουν οι αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 113 προπτυχιακοί φοιτητές και φοιτήτριες (86,7% γυναίκες και 13,3% άντρες) του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, οι οποίοι φοιτούσαν στο τρίτο (64%) και το τέταρτο έτος (36%) των σπουδών τους και είχαν ασχοληθεί στα πλαίσια των μαθημάτων τους με ζητήματα της διδακτικής των μαθηματικών. Οι περισσότεροι συμμετέχοντες εισήχθησαν στο τμήμα από τη θεωρητική κατεύθυνση (63,4%), ενώ πολύ λιγότεροι από την τεχνολογική (22,3%) και τη θετική κατεύθυνση (14,3%). Η επιλογή του δείγματος έγινε με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας.

Σχεδιασμός – Εργαλείο μέτρησης. Για τη διεξαγωγή της έρευνας σχεδιάστηκε ερωτηματολόγιο αποτελούμενο από δύο άξονες. Ο πρώτος άξονας εξετάζει τις επιδόσεις και τις στρατηγικές των συμμετεχόντων στις εξής τέσσερις κατηγορίες προβλημάτων υπολογιστικής εκτίμησης που ευρύτερα αναφέρονται σε διαφορετικά στοιχεία της αίσθησης του αριθμού (Tsao, 2005. Yang, Reys & Reys, 2009): i) σχετικό μέγεθος των αριθμών (π.χ., *'Χωρίς να κάνετε υπολογισμούς με ακρίβεια, επιλέξτε ποιο από τα δύο*

κλάσματα είναι πιο κοντά στο 1: α) το $\frac{30}{31}$*, β) το* $\frac{36}{37}$*'*), ii) χρήση σημείων αναφοράς (π.χ., *'Χωρίς να κάνετε υπολογισμούς με ακρίβεια, εκτιμήστε περίπου πόσο κάνει το γινόμενο 72x0,46: α) Λιγότερο από 36, β) Περισσότερο από 36')*, iii) αριθμητικές πράξεις (π.χ., *'Χωρίς να κάνετε υπολογισμούς με ακρίβεια, εκτιμήστε ποιο από τα παρακάτω γινόμενα είναι μεγαλύτερο: α) 14x17x21x12, β) 12x17x7x42'*) και iv) λογική κρίση (π.χ., *'Χωρίς να κάνετε υπολογισμούς με ακρίβεια, εκτιμήστε το πηλίκο της διαίρεσης 61.027: 33.275')*. Για κάθε κατηγορία χρησιμοποιήθηκαν έργα χωρίς πλαίσιο –όπως αυτά στα παραδείγματα - και έργα με ρεαλιστικό πλαίσιο προερχόμενο από την καθημερινή ζωή (π.χ., *'Ένα σχολικό λεωφορείο χωρά 50 παιδιά. Για τη μετακίνηση 915 παιδιών σε ένα μουσείο, πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν;'* – πρόβλημα λογικής κρίσης με πλαίσιο). Στα μισά έργα δινόταν η απάντηση ανάμεσα σε επιλογές και υπήρχε σε όλα γραπτώς η έμφαση για αποφυγή υπολογισμών με ακρίβεια προκειμένου οι συμμετέχοντες να ενθαρρυνθούν στην αναζήτηση εναλλακτικών τρόπων επίλυσης. Οι συμμετέχοντες, τέλος, καλούνταν να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Ο δείκτης αξιοπιστίας cronbach's alpha εκτιμήθηκε στο 0.857.

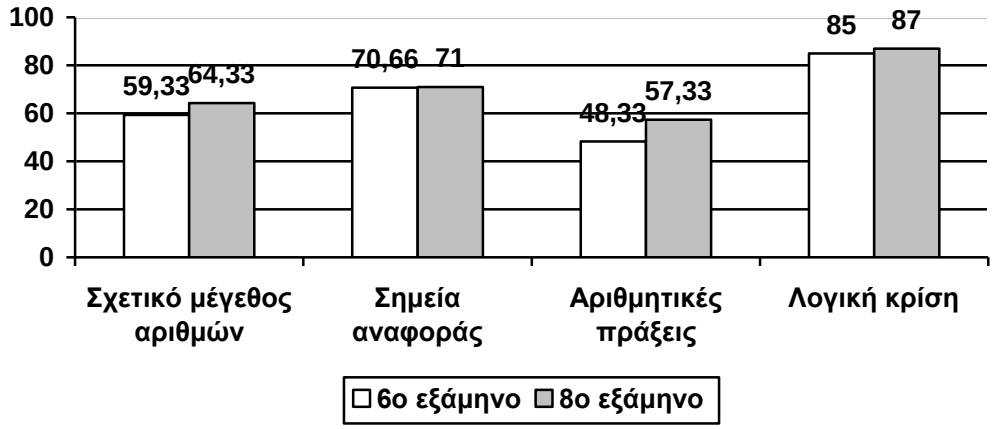
Στο δεύτερο άξονα οι απόψεις των συμμετεχόντων για τη σπουδαιότητα των υπολογιστικών εκτιμήσεων και της διδασκαλίας τους διερευνώνται μέσα από τέσσερις κλειστού τύπου ερωτήσεις που επιδέχονταν επεξήγηση.

Διαδικασία. Το ερωτηματολόγιο διανεμήθηκε στους συμμετέχοντες στο χώρο του Πανεπιστημίου οι οποίοι το συμπλήρωσαν ατομικά και το επέστρεψαν στους ερευνητές. Η συμμετοχή στην έρευνα ήταν ανώνυμη και προαιρετική, διήρκεσε περίπου 25', ενώ το ποσοστό επιστροφής των συμπληρωμένων ερωτηματολογίων ξεπέρασε το 85%.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

α. Οι επιδόσεις των υποψήφιων εκπαιδευτικών. Η γενική επίδοση των συμμετεχόντων κυμάνθηκε στο 68%. Οι συμμετέχοντες που φοιτούσαν στο τέταρτο έτος σπουδών τους παρουσίασαν οριακά καλύτερη επίδοση από τους συναδέλφους τους στο τρίτο έτος σπουδών ($F(1,113)= 4,043$, $p<.05$). Επίσης, όσοι είχαν εισαχθεί από τη τεχνολογική κατεύθυνση είχαν στατιστικά μεγαλύτερα ποσοστά σωστών απαντήσεων σε σχέση με τους συμμετέχοντες από τις άλλες δύο κατευθύνσεις ($F(2,112)= 8,410$, $p<.001$). Στατιστικά σημαντικές διαφορές βρέθηκαν, επίσης, στον αριθμό των σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων ως προς την κατηγορία προβλημάτων ($F(1,109)= 20,442$, $p<.001$), με τα προβλήματα λογικής κρίσης (ποσοστό επιτυχίας 86%) να είναι πιο εύκολα από τις άλλες κατηγορίες προβλημάτων και τα προβλήματα αριθμητικών πράξεων (ποσοστό επιτυχίας 52%) τα πιο δύσκολα. Η επίδραση της κατηγορίας των

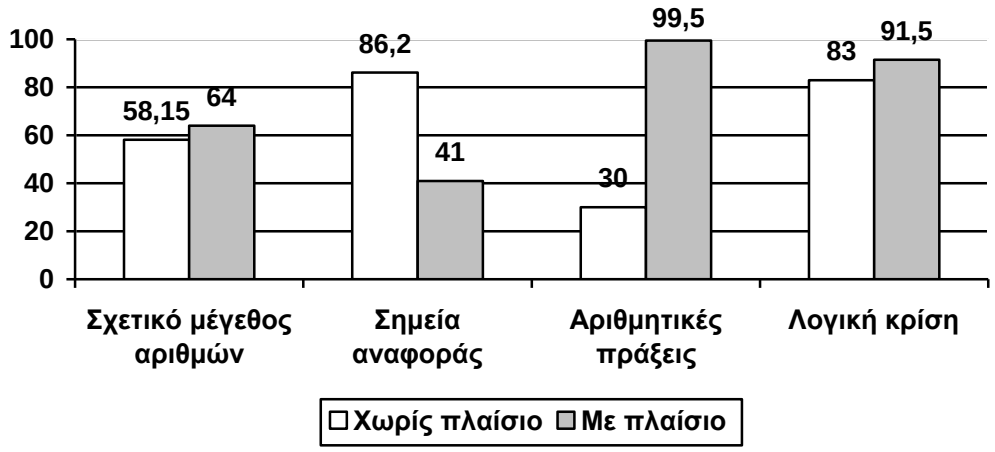
προβλημάτων ήταν ίδια για τους συμμετέχοντες και των δύο εξαμήνων (F(1,109)= ,065, p=.799). Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται αναλυτικά στο Σχήμα 1 που ακολουθεί.



Σχήμα 1: Ποσοστό σωστών απαντήσεων ως προς την κατηγορία προβλημάτων και το εξάμηνο φοίτησης

Η παρουσία πλαισίου επηρέασε τους συμμετέχοντες (βλ. Σχήμα 2) οι οποίοι παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση στα προβλήματα αριθμητικών πράξεων και λογικής κρίσης με πλαίσιο σε σύγκριση με τα αντίστοιχα χωρίς πλαίσιο (t=20,369, df=104, p<.001 και t=3,334, df=98, p<.01), Το αντίθετο, ωστόσο, ίσχυε για τα προβλήματα της κατηγορίας των σημείων αναφοράς (t=-8,995, df=103, p<.001), ενώ δεν βρέθηκε διαφοροποίηση ως προς το πλαίσιο στα προβλήματα σχετικού μεγέθους των αριθμών (t=-,310, df=98, p=.757).

β. Οι στρατηγικές των υποψήφιων εκπαιδευτικών. Οι γραπτές επεξηγήσεις των συμμετεχόντων που απάντησαν στα προβλήματα αναδείκνυαν τις στρατηγικές που ακολούθησαν και ταξινομήθηκαν σε τέσσερις κατηγορίες: α) «χωρίς εξήγηση» (απαντήσεις στις οποίες δεν δόθηκαν επεξηγήσεις),



Σχήμα 2: Ποσοστό σωστών απαντήσεων στα προβλήματα με πλαίσιο και χωρίς πλαίσιο ως προς την κατηγορία προβλημάτων

β) «ασαφής εξήγηση» (στρατηγικές που δεν οδηγούν σε λογικό τρόπο επίλυσης και είναι ασαφείς), γ) «εφαρμογή κανόνα» (εργαλειακές στρατηγικές που βασίζονται στη χρήση κανόνα ή σε γραπτούς τυποποιημένους αλγόριθμους) και δ) «αίσθηση του αριθμού» (στρατηγικές που δείχνουν εννοιολογική κατανόηση, ευελιξία και άνεση στο χειρισμό και την ερμηνεία αριθμών και πράξεων ή αυτοσχέδιες στρατηγικές επίλυσης με νόημα).

Σε όλα τα έργα οι στρατηγικές της αίσθησης του αριθμού παρουσιάζουν μεγαλύτερα ποσοστά σε σύγκριση με τις στρατηγικές εφαρμογής κανόνα, που κυμαίνονται από 2,8% έως και 6,75%, με εξαίρεση το πρόβλημα με πλαίσιο που αφορούσε τη χρήση των σημείων αναφοράς (35,2%). Αυτό σημαίνει ότι οι περισσότεροι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί αφενός προέβησαν στη χρήση εκτιμήσεων – και όχι γραπτών υπολογισμών - και αφετέρου διαθέτουν νοερές στρατηγικές επίλυσης, ακόμα και αν δεν τις χρησιμοποιούν συστηματικά (βλ. Πίνακα 1). Οι στρατηγικές αυτές ευνοήθηκαν περισσότερο στα προβλήματα ‘λογικής κρίσης’ (πάνω από 60%) και ‘σχετικού μεγέθους των αριθμών’: εμφανίζονται παρόμοια υψηλά ποσοστά ανεξάρτητα από την ύπαρξη πλαισίου. Σε δύο έργα ‘λογικής κρίσης’, επίσης, διαπιστώθηκε συσχέτιση ανάμεσα στην επίδοση και τη χρήση στρατηγικής (ρ=0,333, $p<.01$): οι στρατηγικές που δείχνουν εννοιολογική κατανόηση, ευελιξία και άνεση και έχουν νόημα για τους υποψήφιους συσχετίζονται θετικά με την επιτυχία στην επίλυση του προβλήματος. Ωστόσο, η παρουσία πλαισίου επηρέασε αρνητικά τη συχνότητα εμφάνισης των στρατηγικών της αίσθησης του αριθμού στα προβλήματα που αφορούσαν τη ‘χρήση των σημείων αναφοράς’ (μόλις 28,7%) και θετικά στα προβλήματα που αφορούσαν τις ‘αριθμητικές πράξεις’ (78,9%). Τέλος, το γεγονός ότι αρκετοί συμμετέχοντες δεν έδωσαν εξηγήσεις (οι χωρίς εξήγηση απαντήσεις κυμαίνονται από 20,2% έως και

49,5%, ιδιαίτερα υψηλά στα προβλήματα σχετικού μεγέθους των αριθμών) σημαίνει ενδεχομένως ότι απάντησαν στην τύχη ή ότι δεν ήθελαν, ή δεν μπόρεσαν να δώσουν εξηγήσεις.

Στρατη-γικές	**Σχετικό μέγεθος των αριθμών**		**Χρήση σημείων αναφοράς**		**Αριθμητικές πράξεις**		**Λογική κρίση**	
	Με πλαίσιο	***Χωρίς πλαίσιο***	***Με πλαίσιο***	***Χωρίς πλαίσιο***	***Με πλαίσιο***	***Χωρίς πλαίσιο***	***Με πλαίσιο***	***Χωρίς πλαίσιο***
Χωρίς εξήγηση	49,5	39,65	26,8	21,95	20,2	22,95	26,9	29,1
Ασαφής	8,6	17	9,3	9,35	0,9	51,35	0,9	3,8
Εφαρμογή κανόνα	6,9	5,55	35,2	6,75	-	4,55	2,8	5,2
Αίσθηση αριθμού	35	37,8	28,7	61,95	78,9	21,15	69,4	61,9

Πίνακας 1: Κατανομή συχνότητας των στρατηγικών στα προβλήματα με και χωρίς ρεαλιστικό πλαίσιο

γ. Πολύ θετικές ήταν οι *στάσεις των υποψηφίων εκπαιδευτικών απέναντι στις υπολογιστικές εκτιμήσεις* αναδεικνύοντας τη σπουδαιότητά τους τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και για τη διδασκαλία τους στο δημοτικό σχολείο (ρ=.603, p<.001 με μέσους όρους 1,38 και 1,49, αντίστοιχα, σε πεντάβαθμη κλίμακα με 1=πάρα πολύ σημαντικό, …, 5= καθόλου σημαντικό). Οι περισσότεροι συμμετέχοντες πρότειναν την ανάπτυξη συγκεκριμένων ικανοτήτων στα παιδιά, κυρίως με αναφορές στην αίσθηση του αριθμού.

4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι επιδόσεις των υποψήφιων εκπαιδευτικών στην παρούσα έρευνα ήταν σε γενικές γραμμές πολύ καλές και συμφωνούν με τα ποσοστά επιτυχίας που βρέθηκαν στην έρευνα του Tsao (2005) για τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς υψηλής ικανότητας. Ωστόσο, οι επιδόσεις τους δεν ήταν ίδιες σε όλες τις κατηγορίες προβλημάτων. Στα προβλήματα λογικής κρίσης, για παράδειγμα, τα ποσοστά επιτυχίας είναι ιδιαίτερα υψηλά, δείχνοντας αφενός το υψηλό επίπεδο υπολογιστικής εκτίμησης και αφετέρου την αδυναμία τους σε άλλες καταστάσεις εκτιμήσεων. Το τελευταίο επιβεβαιώνει τα ευρήματα των Yang, Reys και Reys (2009), οι οποίοι ανέδειξαν στην έρευνά τους την αδυναμία των εκπαιδευτικών να χρησιμοποιήσουν με επιτυχία τα σημεία αναφοράς στα προβλήματα υπολογιστικών εκτιμήσεων. Παρόμοιες δυσκολίες στη χρήση υπολογιστικών εκτιμήσεων έχουν αναφερθεί και στην έρευνα των Hanson και Hogan

(2000) με μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επιπρόσθετα, το γεγονός ότι στα προβλήματα λογικής κρίσης σημειώθηκαν τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχών υπολογιστικών εκτιμήσεων δείχνει ακόμα περισσότερο την ανάγκη να συνειδητοποιήσουμε ότι υπάρχουν καταστάσεις που οι ακριβείς υπολογισμοί δεν βοηθούν τόσο όσο οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί.

Η ύπαρξη συγκεκριμένου πλαισίου στην παρουσίαση των προβλημάτων, επίσης, φαίνεται να επηρεάζει τις υπολογιστικές εκτιμήσεις των υποψηφίων εκπαιδευτικών. Γενικά, στα προβλήματα με πλαίσιο εμφανίστηκαν περισσότερες επιτυχείς υπολογιστικές εκτιμήσεις σε σύγκριση με αυτά χωρίς πλαίσιο. Η χρήση των σημείων αναφοράς, ωστόσο, ήταν λιγότερο αποτελεσματική στα προβλήματα που παρουσιάστηκαν με πλαίσιο σε σχέση με αυτά που παρουσιάστηκαν χωρίς πλαίσιο. Σε κάθε περίπτωση, η αξία της υπολογιστικής εκτίμησης ως διαδικασίας που οδηγεί κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα προσδιορίζεται μέσα από καταστάσεις που μας επιτρέπουν να σκεφτόμαστε αν κάτι είναι περισσότερο ή λιγότερο λογικό (Alajmi & Reys, 2007). Συνεπώς, οι υπολογιστικές εκτιμήσεις έχουν νόημα όταν αναφέρονται σε συγκεκριμένη κατάσταση και καλό είναι να πραγματοποιούνται με αναφορές σε συγκεκριμένα πλαίσια.

Οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν ευέλικτες στρατηγικές στηριζόμενοι πολύ συχνά σε συνδυασμό στοιχείων που παραπέμπουν στην αίσθηση του αριθμού. Η τάση τους για αποδέσμευση από την αποκλειστική χρήση κανόνων και τυποποιημένων αλγορίθμων φάνηκε σε όλες τις κατηγορίες προβλημάτων, ιδιαίτερα στα προβλήματα λογικής κρίσης και αριθμητικών πράξεων. Ωστόσο, προβληματισμό δημιουργεί το γεγονός ότι στα προβλήματα που αναφέρονται στο σχετικό μέγεθος των αριθμών το συνολικό ποσοστό απαντήσεων χωρίς εξήγηση και ασαφών απαντήσεων ήταν υψηλό (πάνω από 55%): τόσο η ικανότητα συστηματικής χρήσης στρατηγικών σύγκρισης από τους εκπαιδευτικούς όσο και η ικανότητα προσδιορισμού και περιγραφής των στρατηγικών που χρησιμοποιούν δεν είναι δεδομένες.

Η σημασία της υπολογιστικής εκτίμησης αναδείχθηκε έντονα μέσα από τις απαντήσεις των υποψήφιων εκπαιδευτικών, οι οποίοι δηλώνουν ότι αναγνωρίζουν εξίσου την αξία της υπολογιστικής εκτίμησης τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και στη διδασκαλία των μαθηματικών. Τα αποτελέσματα αυτά βρίσκονται σε αντίθεση με τα ευρήματα του Alajmi (2009), σύμφωνα με τα οποία η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών θεωρούν περισσότερο σημαντική την υπολογιστική εκτίμηση στην καθημερινή ζωή και λιγότερο σημαντική στην τάξη. Στην παρούσα έρευνα η σημασία που αποδίδουν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί στην υπολογιστική εκτίμηση επιβεβαιώνει και την τάση των μελλοντικών εκπαιδευτικών να προσβλέπουν στη σύνδεση ανάμεσα στην καθημερινή ζωή και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στις

εκτιμήσεις προτείνεται από τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς που υποστηρίζουν την ανάπτυξη ικανοτήτων υπολογιστικής εκτίμησης στο σχολείο. Συγκεκριμένα, η ικανότητα στρογγυλοποίησης, ανάλυσης και σύνθεσης των αριθμών, χρήσης σημείων αναφοράς – μεταξύ άλλων - θεωρούνται από τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς σημαντικές προϋποθέσεις για τη διδασκαλία της υπολογιστικής εκτίμησης, και συνδέονται με διαδικασίες που ενισχύουν την αίσθηση του αριθμού (McIntosh, 2004) και αναπτύσσουν τη σημασία των αριθμητικών πράξεων (Dowker, 2003).

Καθώς οι εκπαιδευτικοί, μελλοντικοί και εν ενεργεία, αναγνωρίζουν τη σπουδαιότητα της υπολογιστικής εκτίμησης και τις διαφορετικές χρήσεις της και αντιλαμβάνονται την εκτίμηση ως μέρος της διαδικασίας υπολογισμών, είναι πολύ πιθανόν αυτή η τάση τους να μεταφέρεται και στη σχολική τάξη. Κάτι τέτοιο θα ενισχύει τις ικανότητες υπολογιστικής εκτίμησης των παιδιών και κατ' επέκταση την εφαρμογή μαθηματικής γνώσης με ευέλικτους τρόπους (Λεμονίδης, 2013), που αποτελεί και έναν από τους βασικούς στόχους στη σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών. Συνεπώς, αναδεικνύεται η ανάγκη αφενός για μεγαλύτερη ένταξη των υπολογιστικών εκτιμήσεων στο σχολικό πρόγραμμα των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου και αφετέρου για ενίσχυση της εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών σε ζητήματα εκτιμήσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alajmi, A. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 263-283.

Alajmi, A., & Reys, R. (2007). Reasonable and reasonableness of answers: Kuwaiti middle school teachers' perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 65,* 77-94.

Alsawaie, O.N. (2011). Number-sense based strategies used by high-achieving sixth grade students who experienced reform textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(5), 1071-1097.

Dowker, A. (2003). Young children's estimates for addition: The zone for practical knowledge and understanding. In A. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp.243-265). Mahwah, NJ: LEA.

Hanson, S.A. & Hogan, T.P. (2000). Computational estimation skill of college students. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 483-499.

Lemaire, P., Arnaud, L. & Lecacheur, M. (2004). Adults' age-related differences in adaptivity of strategy choices: evidence from computational estimation. *Psychology and Aging, 19*(3), 467-481.

Lemaire, P. & Lecacheur, M. (2002). Children's strategies in computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology, 82*, 281-304.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής: νοεροί υπολογισμοί*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

McIntosh, A. (2004). Where we are today. In A. McIntosh & L. Sparrow (Eds.), *Beyond written computation* (pp.3-14). Perth: MASTEC.

Opfer, J.E. & DeVries, J.M. (2008). Representational change and magnitude estimation: Why young children can make more accurate salary comparison than adults. *Cognition, 108*, 843-849.

Pajares, M.F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307-332.

Segovia, I. & Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17, Vol 7*(1), 499-539.

Tsao, Y.L. & Lin, Y.C. (2011). The study of number sense and teaching practice. *Journal of Case Studies in Education, 2*, 1-14.

Tsao, Y.L. (2005). The number sense of preservice elementary school teachers. *College Student Journal, 39*(4), 647-679.

Yang, D.C., Reys, R. & Reys, B. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*, 383-403.

Yang, D.C. (2005). Number-sense strategies used by 6th grade students in Taiwan. *Educational Studies, 31*(3), 317-333.

Η ΠΡΟΚΑΤΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΕΓΚΥΡΩΝ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΩΝ: ΑΝΑΠΤΥΞΙΑΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Πνευματικός Δημήτρης, Καραμανίδου Αθηνά

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

dpnevmat@uowm.gr, athinakaramanidou@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος της έρευνας ήταν να διερευνήσει την ύπαρξη της προκατάληψης του φυσικού αριθμού όταν παιδιά σχολικής ηλικίας και φοιτητές αξιολογούν την εγκυρότητα παραγωγικών συλλογισμών. Οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν σε δεκαέξι έγκυρους συλλογισμούς, στους μισούς εκ των οποίων το συμπέρασμα ήταν συμβατό με την γνώση σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς και στους άλλους μισούς το συμπέρασμα ήταν μη συμβατό με την γνώση των φυσικών αριθμών. Τα αποτελέσματα ανέδειξαν την προκατάληψη του φυσικού αριθμού και στις δύο ηλικιακές ομάδες. Μάλιστα, οι φοιτητές ήταν λιγότερο ακριβείς και χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο σε σχέση με τα παιδιά σχολικής ηλικίας προκειμένου να αξιολογήσουν ορθώς την εγκυρότητα των συλλογισμών.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κατανόηση των χαρακτηριστικών των ρητών αριθμών, είτε με τη μορφή κλάσματος είτε δεκαδικού αριθμού, είναι ιδιαίτερα δύσκολη για τους μαθητές. Οι ερευνητές ερμηνεύουν την δυσκολία κατανόησης των ρητών αριθμών με βάση την θεωρία πλαισίου, την οποία από πολύ νωρίς διαμορφώνουν οι μαθητές, θέτοντας εμπόδια στην κατανόηση περισσότερο σύνθετων μαθηματικών εννοιών και πράξεων (Stafylidiou & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010, 2012; Vosniadou & Verschaffel, 2004). Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση των κλασμάτων, ακόμη και έπειτα από συστηματική διδασκαλία, έχουν ερμηνευτεί ως αποτέλεσμα της γνώσης που έχουν για τους φυσικούς αριθμούς, την οποία και εφαρμόζουν και στην περίπτωση των κλασμάτων. Το φαινόμενο αυτό περιγράφηκε από τους Ni και Zhou (2005) ως η προκατάληψη του φυσικού αριθμού (the whole number bias). Η ιδέα αυτή προϋποθέτει ότι αν και οι μαθητές δημιουργούν ένα δεύτερο εννοιολογικό δίκτυο, το οποίο περιλαμβάνει της αρχές των ρητών αριθμών, το εννοιολογικό δίκτυο των φυσικών αριθμών το οποίο είναι παλαιότερο, έχει αυτοματοποιηθεί κατά κάποιον τρόπο και ενεργοποιείται εσφαλμένα και στην περίπτωση κατά την οποία δεν πρέπει, όπως είναι η περίπτωση των ρητών αριθμών. Στην παρούσα έρευνα, επιχειρείται ο έλεγχος της υπόθεσης αυτής. Συγκεκριμένα, ελέγχεται εάν τα άτομα όταν καλούνται να αξιολογήσουν την εγκυρότητα μιας

σειράς παραγωγικών συλλογισμών των οποίων το συμπέρασμα βασίζεται σε προκείμενες με περιεχόμενο μαθηματικό, εμφανίζουν την προκατάληψη του φυσικού αριθμού.

1.1 Οι δυσκολίες των ρητών αριθμών

Οι ερευνητές, που ερμηνεύουν την εννοιολογική κατανόηση από τη θεωρία πλαισίου (framework theory), υποστηρίζουν ότι όταν οι μαθητές μαθαίνουν για τους ρητούς αριθμούς, χρησιμοποιούν τα χαρακτηριστικά των φυσικών αριθμών για να τους ερμηνεύσουν (DeWolf & Vosniadou, 2011). Η γνώση των φυσικών αριθμών έχει διαισθητική βάση, καθότι αποκτιέται από τη στιγμή που τα παιδιά μαθαίνουν να μετρούν διακριτούς φυσικούς αριθμούς (Gelman, 2000) και ισχυροποιείται κατά τα σχολικά χρόνια, όπου διδάσκονται τα χαρακτηριστικά των αριθμών αυτών και των πράξεών τους (Vamvakoussi & Vosniadou, 2007; Bonato, Fabbri, Umilta & Zorzi, 2007; Fishmen, Deri, Nello & Marino, 1985; Smith, Solomon, & Carey, 2005). Κάποιες από τις βασικές αρχές που εφαρμόζονται στους φυσικούς αριθμούς δεν ισχύουν στην περίπτωση των ρητών αριθμών, και απαιτούν την οικοδόμηση μιας νέας εννοιολογικής δομής διαφορετικής, όχι μόνον ως προς το περιεχόμενο, αλλά κυρίως ως προς την δομή της.

Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι συχνά τα παιδιά χρησιμοποιούν τον αριθμητή και τον παρονομαστή ως διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς και κατά τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων με τον ίδιο παρονομαστή, αφήνουν τον παρονομαστή σταθερό, αγνοώντας τα κλασματικά μέρη (Stafylidou & Vosniadou, 2004) ή εστιάζουν μόνον στο ακέραιο μέρος όταν χειρίζονται μικτά κλάσματα (Fazio & Siegler, 2011). Αντίστοιχα, ακόμη και έπειτα από αρκετά χρόνια εκπαίδευσης στα μαθηματικά, πολλοί μαθητές δεν κατανοούν την πυκνότητα και την άπειρη διαιρετότητα των αριθμών, χρησιμοποιώντας την αρχή της διακριτότητας των φυσικών αριθμών (Smith, et al., 2005). Επιπλέον, δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι πολλαπλασιάζοντας έναν φυσικό αριθμό με έναν ρητό μικρότερο από την μονάδα, προκύπτει αριθμός μικρότερος από τον φυσικό αριθμό, ή διαιρώντας έναν φυσικό αριθμό με έναν ρητό μικρότερο από την μονάδα είναι δυνατόν να προκύψει αριθμός μεγαλύτερος από τον φυσικό (DeWolf & Vosniadou, 2011).

Θα περίμενε κανείς ότι οι παραπάνω δυσκολίες θα πρέπει να εξαφανίζονται έπειτα από την συστηματική διδασκαλία στην εκπαίδευση. Ωστόσο, υπάρχουν βάσιμες ενδείξεις ότι το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού συνεχίζει να υπάρχει ακόμη και σε φοιτητές. Στην μελέτη των Shtulman και Valcarcel (2012) ζητήθηκε από τριτοετείς φοιτητές να αξιολογήσουν την επιστημονική ορθότητα προτάσεων που αφορούσαν την πυκνότητα και την διαίρεση κλασμάτων. Βρήκαν χαμηλότερες επιδόσεις (χαμηλή ακρίβεια, υψηλό χρόνο) στις προτάσεις που ήταν επιστημονικά ορθές αλλά μη συμβατές με την γνώση των φυσικών αριθμών (π.χ. «Διαιρώντας το 4 με το 1/2 προκύπτει 8»), σε σχέση με τις προτάσεις που ήταν επιστημονικά ορθές και συμβατές με την γνώση των φυσικών αριθμών (π.χ. «Διαιρώντας το 4 με το 2/1 προκύπτει 2»). Σε παρόμοια αποτελέσματα κατέληξαν και οι DeWolf και Vosniadou (2011) που εξέτασαν τις

επιδόσεις φοιτητών πάνω στην σύγκριση κλασμάτων, βρίσκοντας ότι στην συνθήκη που ήταν συμβατή με την γνώση των φυσικών αριθμών είχαν καλύτερες επιδόσεις, σε σχέση με την ασύμβατη.

Οι παραπάνω έρευνες παρέχουν σημαντική γνώση, τόσο για την κατανόηση βασικών ψυχολογικών μηχανισμών που υποστηρίζουν την μάθηση στα μαθηματικά, όσο και για την εκπαίδευση στα μαθηματικά. Ωστόσο, αυτές είναι περιορισμένες και απαιτείται περαιτέρω τεκμηρίωση του φαινομένου. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι το φαινόμενο της προκατάληψης της πεποίθησης εμφανίζεται κατά την αξιολόγηση της εγκυρότητας συμπερασμών. Τα άτομα τείνουν να αξιολογούν τα συμπεράσματα παραγωγικών συλλογισμών, όχι με βάση την λογική αναγκαιότητα, δηλαδή την εγκυρότητα, αλλά με βάση την εμπειρική τους αλήθεια, δηλαδή με βάση τις διαισθητικές πεποιθήσεις τους (Evans, Barston & Pollard, 1983). Όταν ο διαισθητικός τρόπος σκέψης έρχεται σε σύγκρουση με την λογική σκέψη, τότε οι διαισθήσεις οδηγούν σε λανθασμένη αξιολόγηση της εγκυρότητας του συλλογισμού ή αλλιώς σε μία προκατάληψη πεποίθησης. Έτσι, τα άτομα κάνουν συστηματικά περισσότερα λάθη όταν αξιολογούν την εγκυρότητα συλλογισμών, που αν και είναι έγκυροι, καταλήγουν σε συμπεράσματα που δεν είναι συμβατά με την εμπειρία. Επιπρόσθετα, τα άτομα χρειάζονται περισσότερο χρόνο προκειμένου να αξιολογήσουν ορθώς έγκυρους συλλογισμούς, οι οποίοι έρχονται σε αντίθεση με την εμπειρία (De Neys & Franssens, 2009). Θα μπορούσε να υποθέσει κανείς ότι το φαινόμενο της προκατάληψης της πεποίθησης στις κρίσεις για την εγκυρότητα των συλλογισμών θα μπορούσε να εμφανιστεί και στην περίπτωση που οι προκείμενες περιλαμβάνουν προτάσεις οι οποίες δημιουργούν το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού. Για παράδειγμα, ζητώντας από τα άτομα να αξιολογήσουν έναν έγκυρο συλλογισμό, το συμπέρασμα του οποίου είναι «Διαιρώντας το 4 με το 1/2 προκύπτει 8», είτε θα απαντήσουν λανθασμένα ότι το συμπέρασμα δεν προκύπτει λογικά από τις προκείμενες, είτε θα χρειαστούν αρκετό χρόνο για να απαντήσουν σωστά, επειδή θα επηρεαστούν από τη γνώση τους πάνω στη διαίρεση των φυσικών αριθμών σύμφωνα με την οποία «διαιρώντας προκύπτει πάντα κάτι μικρότερο» (Fishmen et al, 1985).

1.2. Η παρούσα έρευνα

Στην παρούσα έρευνα επιχειρείται η διερεύνηση του φαινομένου της προκατάληψης του φυσικού αριθμού όταν τα άτομα αξιολογούν την εγκυρότητα παραγωγικών συλλογισμών. Ειδικότερα, εξετάζεται κατά πόσο η προκατάληψη του φυσικού αριθμού εμφανίζεται κατά την αξιολόγηση των έγκυρων συλλογισμών. Υποθέτουμε ότι τα άτομα θα είναι λιγότερο ακριβή (Υπόθεση 1) και θα χρειάζονται περισσότερο χρόνο (Υπόθεση 2) προκειμένου να αξιολογήσουν ορθά την εγκυρότητα παραγωγικών συλλογισμών, οι οποίοι έχουν ως προκείμενες προτάσεις που μπορούν να αναδείξουν την προκατάληψη του φυσικού αριθμού. Βασική προϋπόθεση για την εμφάνιση της προκατάληψης είναι η προϋπαρξη συστηματικής διδασκαλίας στους ρητούς αριθμούς. Στην Ελλάδα, η διδασκαλία των ρητών αριθμών συστηματοποιείται στην Ε΄ Δημοτικού, από την ηλικία

των 11 χρόνων (ΔΕΠΠΣ, 2003). Συνεπώς, η μικρότερη ηλικία στην οποία θα μπορούσε κανείς να αναμένει την εμφάνιση της προκατάληψης είναι η ηλικία των 11-12 χρόνων.

2. ΜΕΘΟΔΟΣ

2.1. Συμμετέχοντες

Συνολικά στην έρευνά μας συμμετείχαν 102 άτομα. Ειδικότερα, 45 μαθητές της Στ΄ Δημοτικού (*ΜΟ* = 11.7, *ΤΑ* = 0.29) από Δημοτικά Σχολεία της Κεντρικής και Δυτικής Μακεδονίας και 57 πρωτοετείς φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης της Φλώρινας (*ΜΟ* = 19.3, *ΤΑ* = 1.76) πήραν μέρος εθελοντικά στην έρευνα. Για τους μαθητές του Δημοτικού σχολείου ζητήθηκε έγγραφη συγκατάθεση από τους γονείς.

2.2. Εργαλεία

2.2.1. Έργο συλλογιστικής σκέψης.

Το έργο περιελάμβανε 16 παραγωγικούς, επιστημονικά ορθούς, συλλογισμούς, εκ των οποίων οι οκτώ ήταν Έγκυροι Συμβατοί με την γνώση των φυσικών αριθμών και άλλοι οκτώ Έγκυροι αλλά Μη Συμβατοί με την εμπειρία των φυσικών αριθμών. Οι προκείμενες και τα συμπεράσματα των συλλογισμών είχαν κατηγορική και υποθετική μορφή (Copy, 1986).

Ένας Έγκυρος Συμβατός με την εμπειρία συλλογισμός ήταν:

Πολλαπλασιάζοντας δύο φυσικούς αριθμούς, εκτός του 0 και του 1, το γινόμενο είναι πάντα μεγαλύτερο από τους φυσικούς.

Οι αριθμοί 7 και 11 είναι φυσικοί αριθμοί.

Άρα, πολλαπλασιάζοντας τον 7 και τον 11, το γινόμενο είναι μεγαλύτερο από το 7 και το 11.

Ένας Έγκυρος Μη Συμβατός με την εμπειρία συλλογισμός ήταν:

Μεταξύ δύο κλασμάτων υπάρχουν άπειροι δεκαδικοί αριθμοί.

Τα 1/3 και 2/3 είναι κλάσματα.

Άρα, μεταξύ του 1/3 και του 2/3 υπάρχουν άπειροι δεκαδικοί αριθμοί.

Οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να αξιολογήσουν, όσο το δυνατόν γρηγορότερα, την εγκυρότητα των συλλογισμών, αποφεύγοντας τα λάθη. Κατά την εκτέλεση του έργου

καταγράφονταν η ακρίβεια στην αξιολόγηση της εγκυρότητας των συλλογισμών και ο χρόνος που απαιτήθηκε για να αξιολογηθεί η εγκυρότητα του συλλογισμού. Στη συνέχεια, οι ακριβείς αξιολογήσεις για κάθε μία από τις δύο κατηγορίες συλλογισμών (έγκυροι, συμβατοί και μη συμβατοί) αθροίστηκαν (πιθανές τιμές από 0 μέχρι 8 το μέγιστο) και υπολογίστηκε ο μέσος όρος του χρόνου των ορθών απαντήσεων για κάθε κατηγορία.

2.3. Διαδικασία

Οι συμμετέχοντες εξετάστηκαν ατομικά και οι συλλογισμοί δόθηκαν σε ψηφιακή μορφή με τη βοήθεια του λογισμικού E-Prime. Για την επίλυση του έργου, δόθηκαν οδηγίες έγκυρης παραγωγικής συλλογιστικής. Τονίστηκε ότι ένα συμπέρασμα πρέπει να είναι αποδεκτό μόνο αν προκύπτει λογικά από τις προτάσεις και ότι οι προτάσεις (μαζί με το συμπέρασμα) πρέπει πάντα να θεωρούνται ως πραγματικές. Κάθε πρόταση του συλλογισμού εμφανιζόταν με το πλήκτρο «Space» και ολόκληρος ο συλλογισμός παρέμεινε στην οθόνη, έως ότου οι συμμετέχοντες απαντήσουν. Οι συμμετέχοντες έπρεπε να δηλώσουν την απάντησή τους με την χρήση δύο πλήκτρων του πληκτρολογίου του ηλεκτρονικού υπολογιστή, τα οποία αντιστοιχούσαν στις απαντήσεις «Το συμπέρασμα (δεν) προκύπτει λογικά από τις προτάσεις». Ο χρόνος απόκρισης άρχιζε από την εμφάνιση του συμπεράσματος.

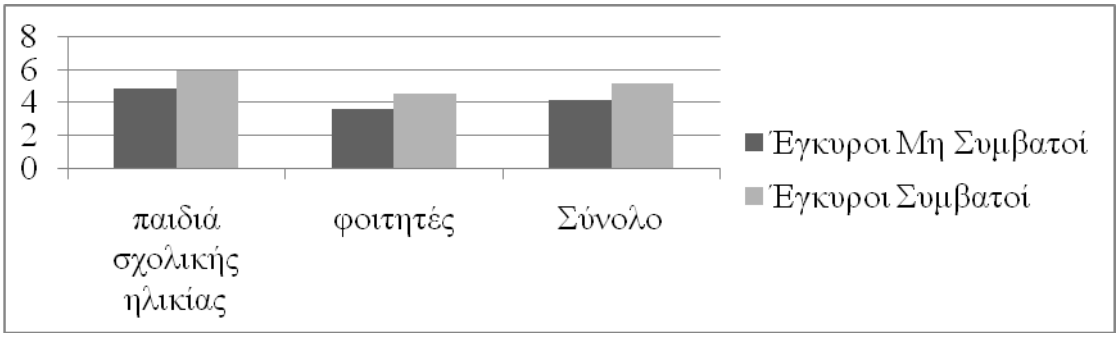
3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι ΜΟ και οι ΤΑ της ακρίβειας και του χρόνου συναγωγής έγκυρων συμβατών και μη συμβατών συμπερασμών. Οι συμμετέχοντες και των δύο ηλικιακών ομάδων αξιολόγησαν ορθά τους Έγκυρους Συμβατούς συλλογισμούς πάνω από το επίπεδο της τυχαιότητας, $t(44) = 7.65$, $p < .001$, $t(56) = 2.31$, $p = .025$, για τα παιδιά σχολικής ηλικίας και τους φοιτητές αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, μόνον τα παιδιά της σχολικής ηλικίας αξιολόγησαν ορθά τους Έγκυρους Μη Συμβατούς συλλογισμούς, $t(44) = 2.68$, $p = .010$. Ωστόσο, οι φοιτητές δεν μπόρεσαν να αξιολογήσουν ορθά πάνω από το επίπεδο της τυχαιότητας τους Έγκυρους Μη Συμβατούς συλλογισμούς, $t(56) = 1.73$, $p = .090$. Ειδικότερα, όταν οι συλλογισμοί ήταν Μη Συμβατοί με την εμπειρία τους, οι φοιτητές ήταν λιγότερο ακριβείς στις αξιολογήσεις τους (ΜΟ=3.61, ΤΑ=1.69) από τα παιδιά σχολικής ηλικίας.

	Παιδιά σχολικής ηλικίας	Φοιτητές	Σύνολο
	ΜΟ (ΤΑ)	ΜΟ (ΤΑ)	ΜΟ (ΤΑ)
Έγκυροι Συμβατοί			
Ακρίβεια	5.91 (1.68)	4.49 (1.61)	5.12 (1.78)
Χρόνος	5942 (982)	4635 (717)	5211 (1063)
Έγκυροι Μη Συμβατοί			
Ακρίβεια	4.87 (2.17)	3.61 (1.69)	4.17 (2.01)
Χρόνος	5643 (1240)	5093 (1077)	5335 (1178)

Πίνακας 1: Μέσοι Όροι και Τυπικές Αποκλίσεις της ακρίβειας και του χρόνου (ms) συναγωγής έγκυρων συμπερασμών

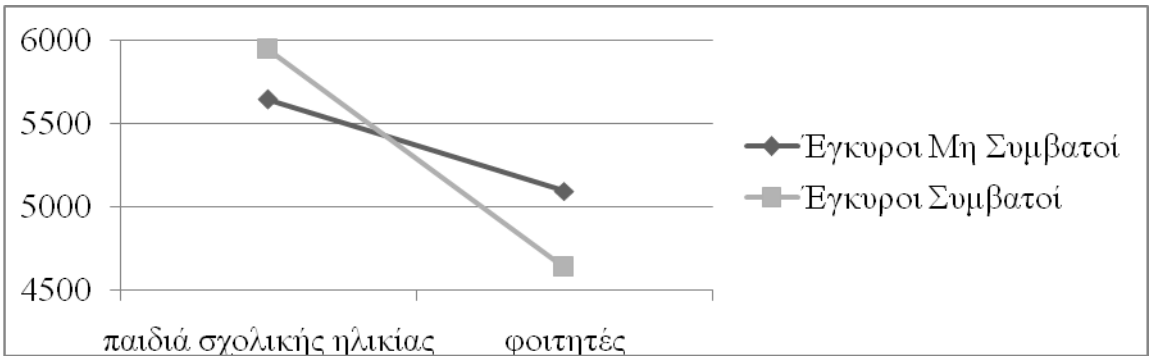
Προκειμένου να ελέγξουμε εάν οι συμμετέχοντες ήταν περισσότερο ακριβείς στις αξιολογήσεις τους όταν οι συλλογισμοί ήταν Συμβατοί με την εμπειρία τους, πραγματοποιήθηκε μικτού μοντέλου ανάλυση διακύμανσης (mixed design repeated measures ANOVA) με την ηλικία (ηλικία: 12χρονα και 19χρονα) ως μεταξύ των συμμετεχόντων παράγοντα και τον μέσο όρο στην ακρίβεια των αξιολογήσεων (συμβατότητα με την εμπειρία: Έγκυροι Συμβατοί, Έγκυροι Μη Συμβατοί) ως μεταξύ των συμμετεχόντων παράγοντα. Επειδή ο έλεγχος της σφαιρικότητας Mauchly δεν ικανοποιήθηκε ($p < .001$) χρησιμοποιήθηκαν οι διορθωμένοι δείκτες Greenhouse-Geisser ($\varepsilon = 1.00$). Η ανάλυση ανέδειξε σημαντικό τον παράγοντα εντός των συμμετεχόντων, $F(1.00,100.00) = 26.7$, $p < .001$, $\eta p2 = .21$, αλλά δεν ανέδειξε σημαντική την αλληλεπίδραση του παράγοντα συμβατότητας με την εμπειρία με την ηλικία, $F(1.00,100.00) = .20$, $p = .65$, $\eta p2 = .002$. Μια σειρά από Paired Samples t-test συγκρίσεις μεταξύ της ορθότητας των αξιολογήσεων στους Συμβατούς και Μη Συμβατούς με την εμπειρία συλλογισμούς έδειξαν σημαντική διαφορά τόσο στα παιδιά σχολικής ηλικίας, $t (44) = 3.36$, $p = .002$, όσο και στους φοιτητές, $t (56) = 3.97$, $p < .001$. Όπως αναμενόταν, τα παιδιά σχολικής ηλικίας και οι φοιτητές αξιολόγησαν ορθά τους περισσότερους Συμβατούς με την εμπειρία συλλογισμούς (12: ΜΟ= 5.91, ΤΑ= 1.68) (19: ΜΟ= 4.49, ΤΑ= 1.61) (βλ. Γράφημα 1).



Γράφημα 1. Επιδόσεις ακρίβειας στους Έγκυρους, Συμβατούς και Μη Συμβατούς συλλογισμούς

Η 2 (ηλικιακή ομάδα: 12χρονα και 19χρονα) Χ Έγκυροι συλλογισμοί Συμβατοί με την εμπειρία ανάλυσης διακύμανσης (ANOVA) έδειξε σημαντική την επίδραση της ηλικίας, $F(1,100) = 18.9$, $p < .001$. Όπως φαίνεται στο Γράφημα 1, τα παιδιά σχολικής ηλικίας αξιολογούν ορθά περισσότερους Έγκυρους Συμβατούς συλλογισμούς σε σχέση με τους φοιτητές. Η 2 (ηλικιακή ομάδα: 12χρονα και 19χρονα) Χ Έγκυροι συλλογισμοί Μη Συμβατοί με την εμπειρία ανάλυσης διακύμανσης (ANOVA) έδειξε σημαντική την επίδραση της ηλικίας, $F(1,100) = 10.8$, $p = .001$. Στο ίδιο γράφημα, φαίνεται ότι τα παιδιά σχολικής ηλικίας αξιολογούν ορθότερα και τους Έγκυρους Μη Συμβατούς συλλογισμούς σε σχέση με τους φοιτητές.

Προκειμένου να ελέγξουμε εάν οι συμμετέχοντες χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο στις αξιολογήσεις τους όταν οι συλλογισμοί ήταν Μη Συμβατοί με την εμπειρία τους, πραγματοποιήθηκε μικτού μοντέλου ανάλυση διακύμανσης με την ηλικία (ηλικία: 12χρονα και 19χρονα) ως μεταξύ των συμμετεχόντων παράγοντα και τον μέσο όρο στον χρόνο αντίδρασης των αξιολογήσεων (συμβατότητα με την εμπειρία: Έγκυροι Συμβατοί, Έγκυροι Μη Συμβατοί) ως μεταξύ των συμμετεχόντων παράγοντα. Επειδή ο έλεγχος της σφαιρικότητας Mauchly δεν ικανοποιήθηκε ($p < .001$) χρησιμοποιήθηκαν οι διορθωμένοι δείκτες Greenhouse-Geisser ($\varepsilon = 1.00$). Η ανάλυση δεν ανέδειξε σημαντικό τον παράγοντα εντός των συμμετεχόντων, $F(1.00,100.00) = .35$, $p = .55$, $\eta p2 = .004$, αλλά σημαντική την αλληλεπίδραση του παράγοντα συμβατότητας με την εμπειρία με την ηλικία, $F(1.00,100.00) = 7.96$, $p = .006$, $\eta p2 = .074$. Μια σειρά από Paired Samples t-test συγκρίσεις μεταξύ του χρόνου αντίδρασης στις ορθές αξιολογήσεις στους Συμβατούς και Μη Συμβατούς με την εμπειρία συλλογισμούς έδειξαν σημαντική διαφορά μόνον στους φοιτητές, $t (56) = 2.71$, $p = .009$. Όπως αναμενόταν, οι φοιτητές χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο στους Μη Συμβατούς με την εμπειρία συλλογισμούς (ΜΟ= 4635 ms, ΤΑ= 717). Επιπρόσθετα, δεν βρέθηκε σημαντική διαφορά ως προς τον χρόνο αντίδρασης μεταξύ των δύο τύπων συλλογισμών στα παιδιά σχολικής ηλικίας, $t (44) = 1.40$, $p = .17$ (βλ. Γράφημα 2).



Γράφημα 2. Μέσοι χρόνοι (ms) απόκρισης στους Έγκυρους, Συμβατούς και Μη Συμβατούς συλλογισμούς

Η 2 (ηλικιακή ομάδα: 12χρονα και 19χρονα) Χ χρόνος αντίδρασης στους Συμβατούς με την εμπειρία συλλογισμούς ανάλυσης διακύμανσης (ANOVA) έδειξε σημαντική την επίδραση της ηλικίας, $F(1,100) = 60.3$, $p < .001$. Όπως φαίνεται στο Γράφημα 2, οι φοιτητές αξιολογούν ορθά ταχύτητα τους Έγκυρους Συμβατούς συλλογισμούς σε σχέση με τα παιδιά σχολικής ηλικίας. Η 2 (ηλικιακή ομάδα: 12χρονα και 19χρονα) Χ χρόνος αντίδρασης στους Μη Συμβατούς με την εμπειρία συλλογισμούς ανάλυσης διακύμανσης (ANOVA) έδειξε σημαντική την επίδραση της ηλικίας, $F(1,100) = 5.73$, $p = .019$. Στο ίδιο γράφημα, φαίνεται πάλι ότι οι φοιτητές αξιολογούν ορθά ταχύτερα και τους Έγκυρους Μη Συμβατούς συλλογισμούς σε σχέση με τα παιδιά σχολικής ηλικίας.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στόχος της έρευνάς μας ήταν η ανάδειξη της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στην προσπάθεια των ατόμων να αξιολογήσουν την εγκυρότητα παραγωγικών συλλογισμών, οι οποίοι - αν και οδηγούν σε επιστημονικώς ορθά και έγκυρα συμπεράσματα με ρητούς και φυσικούς αριθμούς - είναι Μη Συμβατοί με την γνώση των φυσικών αριθμών. Για τον σκοπό αυτό, εξετάστηκε μία ομάδα παιδιών σχολικής ηλικίας της Στ' Δημοτικού και μία ομάδα πρωτοετών φοιτητών Παιδαγωγικού Τμήματος. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι περισσότεροι φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος προέρχονται από θεωρητικές κατευθύνσεις.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού εμφανίζεται και στην περίπτωση που τα άτομα επιχειρούν να αξιολογήσουν την εγκυρότητα παραγωγικών συλλογισμών. Όπως αναμενόταν, τόσο τα παιδιά σχολικής ηλικίας όσο και οι φοιτητές, απάντησαν ορθά σε περισσότερους συλλογισμούς Συμβατούς με τη γνώση των φυσικών αριθμών, ενώ εμφάνισαν τα περισσότερα λάθη στους συλλογισμούς Μη Συμβατούς με τους φυσικούς αριθμούς, επαληθεύοντας την πρώτη μας υπόθεση (Υπόθεση 1).

Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται να στηρίξουν τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών, σύμφωνα με τα οποία παρατηρείται δυσκολία κατανόησης της πυκνότητας των ρητών στην ηλικία των 12 (Smith et al., 2005) και 20 χρόνων (Shtulman & Valcarcel, 2012) και δυσκολία κατανόησης του πολλαπλασιασμού με ρητούς στην ηλικία των 12 (Brown, 1981, παρατίθεται σε Thipkong & Davis, 1991) και της διαίρεσης στην ηλικία των 12 (Brown, 1981, παρατίθεται σε Thipkong & Davis, 1991) και 20 χρόνων (Shtulman & Valcarcel, 2012), εξαιτίας της ισχυρής γνώσης των φυσικών αριθμών.

Ωστόσο, μόνον οι φοιτητές χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο προκειμένου να αξιολογήσουν ορθώς τους συλλογισμούς, οι οποίοι ήταν Μη Συμβατοί με την γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς, επαληθεύοντας την δεύτερή μας υπόθεση (Υπόθεση 2). Αντίθετα, τα παιδιά του δημοτικού σχολείου χρειάστηκαν περίπου τον ίδιο χρόνο προκειμένου να αξιολογήσουν τις δύο κατηγορίες συλλογισμών. Επιπρόσθετα, κατά την περίοδο που τα παιδιά διδάσκονται τους ρητούς αριθμούς, φαίνεται ότι είναι περισσότερο ακριβή σε κάθε μορφής συλλογισμού σε σχέση με τους φοιτητές και χρειάζονται περισσότερο χρόνο προκειμένου να αξιολογήσουν ορθά την εγκυρότητα των συλλογισμών.

Τα παραπάνω ευρήματα δείχνουν ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού είναι εμφανής στις αξιολογικές κρίσεις των ατόμων για την εγκυρότητα των συλλογισμών, διευρύνοντας έτσι τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών. Αν και κατά την περίοδο που τα παιδιά διδάσκονται τους ρητούς αριθμούς το φαινόμενο εκδηλώνεται κυρίως στην ακρίβεια και όχι στον χρόνο που απαιτείται για την αξιολόγηση, αργότερα είναι εμφανής και ως προς τον χρόνο της αξιολόγησης των συμπερασμών, δηλώνοντας ότι όσο τα άτομα απομακρύνονται από τον χρόνο της συστηματικής διδασκαλίας των ρητών αριθμών, η προκατάληψη του φυσικού αριθμού είναι πιο έντονη. Με άλλα λόγια, η αναπτυξιακή έρευνα μαρτυρεί ότι το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού εμφανίζεται κατά την περίοδο διδασκαλίας των ρητών αριθμών, αλλά εντείνεται κατά την περίοδο απομάκρυνσης από τον χρόνο της συστηματικής διδασκαλίας, και είναι τουλάχιστον εμφανής κατά τα πρώτα χρόνια της ενήλικης ζωής.

Επιπρόσθετα, φαίνεται ότι οι διαισθητικές πεποιθήσεις που δεν είναι συμβατές με τις νέες γνώσεις για τους ρητούς αριθμούς, δεν αντικαθίστανται όταν τα άτομα έρθουν σε επαφή με την νέα γνώση, αλλά παραμένουν σε λανθάνουσα κατάσταση (Shtulman & Valcarcel, 2012) και ότι και τα δύο είδη γνώσεων παραμένουν ως πιθανές ανταγωνιστικές εξηγήσεις και συνυπάρχουν τουλάχιστον μέχρι και τα χρόνια της ενήλικης ζωής (Zaitchik & Solomon, 2009).

Αυτή η προκατάληψη θα μπορούσε να έχει επιπτώσεις στην καθημερινότητα των ατόμων, όταν τα άτομα κάνουν κατ' εκτίμηση υπολογισμούς (Λεμονίδης, 2013). Συνεπώς, η συστηματική προσέγγιση της προκατάληψης, προκειμένου τα άτομα να είναι ικανά να διακρίνουν τα δύο εννοιολογικά συστήματα και να χρησιμοποιούν με συστηματικό τρόπο τη γνώση για κάθε ένα από αυτά, κρίνεται αναγκαία ώστε τα άτομα να είναι περισσότερο ακριβή στις κρίσεις και εκτιμήσεις τους για συλλογισμούς που έρχονται σε αντίθεση με την εδραιωμένη, από νωρίς, γνώση των φυσικών αριθμών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bonato, M., Fabbri, S., Umilta`, C., & Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: Real or integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 33*, 1410–1419.

Brown, L. (1981). Place Value and Decimals. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics*, 11-16 (pp. 48-65). London: John Murray.

Copy, I.M. (1986). *Introduction to logic*. New York: Macmillan.

De Neys, W., & Franssens, S. (2009). Belief inhibition during thinking: Not always winning but at least taking part. *Cognition, 113*, 45–61.

ΔΕΠΠΣ (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών.* Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Νοέμβριος 2003. (www.pi-schools.gr).

DeWolf, M., & Vosniadou S. (2011). The whole number bias in fraction magnitude comparisons with adults. *Proceedings of the 33rd annual conference of the cognitive science society, Cognitive Science Society,* Austin, TX , 20 -23 July, Boston, Massachusetts, 1751–1756.

Evans, J. St. B. T., Barston, J. L., & Pollard, P. (1983). On the conflict between logic and belief in syllogistic reasoning. *Memory and Cognition*, *11*, 295 – 306.

Fazio, L., & Siegler, R. (2012). Teaching fractions. *Vol. 22 of Educational practices series*.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S., & Marino, M.S. (1985). *The role of implicit models in solving vergal problems in multiplication and division. Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-17.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology, 21*, 27–37.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής-νοεροί υπολογισμοί. Λογαρέζω με το τζιμίδι μ΄* . Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Ni, Y., & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27–52.

Shtulman, A., & Valcarcel, J. (2012). Scientific knowledge suppresses but does not supplant earlier intuitions. *Cognition*, *124*(2), 209–215.

Smith, C. L., Solomon, G. E. A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology, 51*, 101–140.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*, 503–518.

Thipkong, S., & Davis, E. J. (1991). Preservice elementary teachers' misconceptions in interpreting and applying decimals. *School Science and Mathematics, 91*(3), 93-99.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How Many Numbers are there in a Rational Numbers Interval? Constrains, Synthetic Models and the Effect of the Number Line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.) *Reframing the*

Conceptual Change Approach in Learning and Instruction (pp. 265-282). The Netherlands: Elsevier.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and Instruction, 28*(2), 181–209.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the Gap Between the Dense and the Discrete: The Number Line and the "Rubber Line" Bridging Analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*, 265–284.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching. In L., Verschaffel and S. Vosniadou (Guest Editors), Conceptual Change in Mathematics Learning and Teaching, *Special Issue of Learning and Instruction*, *14*, 5, 445-451.

Zaitchik, D., & Solomon, G. E. A. (2009). Conservation of species, volume, and belief in patients with Alzheimer's disease: The issue of domainspecificity and conceptual impairment. *Cognitive Neuropsychology*, *26*, 511–526.

ΤΟ ΨΗΦΙΑΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΩΣ ΟΧΗΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟ ΚΑΙ ΤΟ ΜΑΣΤΟΡΕΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Χρόνης Κυνηγός

Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Φ.Π.Ψ., ΕΚΠΑ και Ι.Τ.Υ.Ε.

kynigos@ppp.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Περιγράφεται ο σχεδιασμός, οι προδιαγραφές και η μεθοδολογία πραγματοποίησης από πλευράς ΔτΜ των δυο αποθετηρίων του ΥΠΑΙΘ για τα Μαθηματικά Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Το εγχείρημα συζητείται ως μια μεγάλης κλίμακας παρέμβαση με διαστάσεις πρόσθετης αξίας στη μαθησιακή διαδικασία, αναβάθμισης ρόλων με εστίαση σε αυτόν του εκπαιδευτικού ως σχεδιαστή δραστηριοτήτων και ψηφιακών δομημάτων και τέλος αειφόρας και συνεχώς συνδιαμορφούμενης υπηρεσίας από το σώμα των εκπαιδευτικών. Συζητούνται μερικές από τις πρώτες αναφορές και έρευνες αξιοποίησης των διαδραστικών βιβλίων σε σχολικές τάξεις και διατυπώνεται προβληματισμός για τις δυνατότητες αξιοποίησης αυτής της υποδομής στο χώρο της εκπαίδευσης και της ΔτΜ.

1. Η ΔτΜ ΣΤΗΝ ΕΠΟΧΗ ΤΩΝ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΥΠΗΡΕΣΙΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΘΕΤΗΡΙΩΝ

Με ποιούς τρόπους μπορεί η γνώση που παράγεται από την έρευνα στην ακαδημαϊκή κοινότητα της ΔτΜ να αξιοποιηθεί για το σχεδιασμό, ανάπτυξη και εφαρμογή συστημικών παρεμβάσεων στη βασική μας εκπαίδευση; Το ερώτημα αυτό ταλανίζει την κοινότητα της ΔτΜ διεθνώς και η γενική αίσθηση είναι ότι δεν έχει δοθεί αρκετή σπουδή και χρόνος για την αντιμετώπισή του (Κολέζα, 2010; Niss, 1996). Συχνό φαινόμενο είναι οι αποτυχημένες προσπάθειες για ταχείες εφαρμογές απαυγασμάτων της ΔτΜ υπό την πίεση μεταρρυθμιστικών χρονισμών, με κατακερματισμένες προσεγγίσεις και περιορισμένη επεξεργασία. Τι μετασχηματισμούς χρειάζεται ένα ακαδημαϊκό παραγόμενο για να γίνει χρήσιμο σε μια μεταρρύθμιση; Πώς μπορούμε να διακρίνουμε την επιρροή στην εκπαιδευτική πρακτική και με τι χρονισμό; Στο πλαίσιο αυτών των ευρύτερων προβληματισμών, στο άρθρο αυτό αναλύεται η μέθοδος που ακολουθήθηκε για το σχεδιασμό και την ανάπτυξη μιας παρέμβασης στην μαθηματική εκπαίδευση στη βασική παιδεία στη χώρα μας μέσα από τις υπηρεσίες του Ψηφιακού Σχολείου με φορέα το ΕΑΙΤΥ/ΥΠΑΙΘ (http://dschool.edu.gr/). Αναφέρομαι σε δύο από τις υπηρεσίες αυτές που έχουν την ιδιότητα του αποθετηρίου ψηφιακού εκπαιδευτικού υλικού (Megalou & Kaklamanis, 2014). Η πρώτη είναι τα 'διαδραστικά βιβλία', δηλαδή η διαδικτυακή πρόσβαση στα βιβλία του αναλυτικού προγράμματος που για τα Μαθηματικά εμπλουτίστηκαν με συνδέσεις σε δυναμικά ψηφιακά δομήματα με στόχο την εμπειρική εμπλοκή των μαθητών με μαθηματικές διαδικασίες και συλλογισμούς. Μια δεύτερη συναφής είναι

η ανάπτυξη ενός αποθετηρίου μετασχολιασμένων ψηφιακών δομημάτων με την ονομασία ΄Φωτόδεντρο'. Το ερώτημα που απασχόλησε την ομάδα εργασίας για την ανάπτυξη των δυο αποθετηρίων για τα Μαθηματικά ήταν α) το πώς θα αξιοποιηθεί η γνώση από την έρευνα στη ΔτΜ ώστε η πρόσβαση στην υπηρεσία αυτή να προσφέρει πρόσθετη παιδαγωγική αξία για την κατανόηση των Μαθηματικών αλλά και την εκτίμηση του ρόλου τους ως πολιτισμικά εργαλεία σκέψης και έκφρασης και β) για το πώς θα ενταχθεί ρητά στο πλαίσιο των νέων προγραμμάτων σπουδών για τα Μαθηματικά στη χώρα μας και παράλληλα στις διαδικασίες επαγγελματικής κατάρτισης και εξέλιξης των εκπαιδευτικών. Ένα τρίτο ερώτημα που προκύπτει από το δεύτερο ήταν το πώς η υπηρεσία δεν θα λειτουργήσει ως 'υπηρεσιακή οδηγία' για τους εκπαιδευτικούς αλλά ως διαμορφώσιμη και μακροχρόνια διαθέσιμη πηγή μετεξέλιξης της διδακτικής πρακτικής μέσα από διαδικασίες ζύμωσης και συνδιαμόρφωσής της από τους μάχιμους εκπαιδευτικούς, τους συμβούλους, τους επιμορφωτές και τους επιστήμονες της ΔτΜ (Blikstein & Cavallo, 2002; Hoyles, 1993; Hoyles et al., 2004; Kynigos, 2007). Την εποχή της έναρξης του όλου εγχειρήματος δεν ήταν εύληπτη αυτή η στρατηγική μιας και ευρύτερα υπήρχε ώθηση προς άλλες κατευθύνσεις για την αξιοποίηση των αποθετηρίων. Όσον αφορά στα Μαθηματικά, είχε πάρει ξαφνική και ευρεία δημοσιότητα το σκεπτικό του Kahn Academy (http://en.wikipedia.org/wiki/Khan_Acadamy) σχετικά με τη φύση των δομημάτων και συνολικά των αποθετηρίων για τη Διδακτική των Μαθηματικών. Η προτεραιότητα στην αρχή τουλάχιστον αυτής της οπτικής ήταν κατάτμηση των Μαθηματικών σε συγκεκριμένες έννοιες και η ευκρινής επεξήγηση μέσω ορισμού και ασκήσεων λυμένων από τον ομιλητή. Στη συνέχεια προστέθηκαν και ερωτήματα - ασκήσεις για τον χρήστη, συχνά με αυτόματο έλεγχο αναμενόμενων σωστών απαντήσεων - λύσεων. Ο Kahn και οι συνεργάτες του γρήγορα κατανόησαν την κριτική από τον χώρο της ΔτΜ και των εκπαιδευτικών ότι αυτό που χρειάζεται στη βασική παιδεία είναι η εμπλοκή των μαθητών με μαθηματικές δραστηριότητες και συλλογισμούς που να έχουν νόημα γι αυτούς και ότι περαιτέρω και ηχηρότερος βομβαρδισμός με επεξηγήσεις και ορισμούς εννοιών απλά θα τους απομακρύνει από κάτι τέτοιο. Ως αποτέλεσμα τεκμηρίωσαν την λογική αυτή για τα αποθετήρια λέγοντας ότι πρόκειται για υποδομή, δηλαδή για παροχή συμβατικών παραδόσεων έτσι ώστε να μείνει χρόνος για ενίσχυση εμπειρικής εμπλοκής με τα Μαθηματικά ακόμα και στο σχολείο (flipped school, Ronchetti, 2010). Δεν προχώρησαν βέβαια σε προτάσεις για ψηφιακές υπηρεσίες ενίσχυσης της μαθητικής εμπλοκής με τα Μαθηματικά και ούτε φαίνεται να είχαν σκοπό για κάτι τέτοιο. Τα διαδραστικά βιβλία και το Φωτόδεντρο επομένως, αντί να ανταγωνιστούν κάτι που έτσι κι αλλιώς αναπτυσσόταν με αμφιλεγόμενη αξία για τη ΔτΜ, σχεδιάστηκαν ώστε να είναι αξιοποιήσιμα για μαθηματική εμπλοκή και δράση από πλευράς μαθητών, είτε στην τάξη σε ένα μάθημα με στοιχεία της flipped school λογικής, είτε ως άσκηση για τους μαθητές στο σπίτι ή σε συνθετικές εργασίες. Τα δομήματα δεν είναι βίντεο ή επεξηγηματικό υλικό αλλά εργαλεία με τα οποία ο ίδιος ο μαθητής μπορεί να εκφραστεί, να πειραματιστεί και να μαστορέψει με τα Μαθηματικά. Το σκεπτικό ήταν ότι αν η ΔτΜ έχει δείξει κάτι ξεκάθαρο, αυτό είναι ότι η μάθηση μέσω

παρακολούθησης επεξηγήσεων έτοιμων απαυγασμάτων των επιστημών καθώς και η εξάσκηση επιφανειακής αναπαραγωγής τους αποτελούν μια πολύ φτωχή πτυχή της μαθησιακής διαδικασίας (Chevallard, 2012). Υπάρχουν άλλες πτυχές που συνεισφέρουν στην αειφόρα, νοηματοδοτημένη, βαθειά και κοινωνικά αξιοποιήσιμη μάθηση. Στη μάθηση που συνιστά καλλιέργεια, μόρφωση, ικανότητα και συνήθεια, πολιτισμική δηλαδή νοοτροπία (Shoenfeld, 1987; Lakatos, 1976; Kafai & Resnick, 1996). Στη χώρα μας, στο σκεπτικό που έχει διατυπωθεί για το 'Νέο Σχολείο' φαίνεται σαφώς η προσπάθεια να αρχίσει επιτέλους η διαδικασία ένταξης των νέων μεθόδων εκπαίδευσης που καλλιεργούν αυτές τις πτυχές στα αναλυτικά προγράμματα, στην κατάρτιση και επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, στην αξιολόγηση των μαθητών, στο εκπαιδευτικό έργο του σχολείου ευρύτερα. Η ένταξη των εργασιών στην Α' Λυκείου, η ρητή ένταξη των στόχων της μύησης των μαθητών σε ερευνητικές διαδικασίες και διεργασίες είναι ενδεικτικά, με την έμφαση στο μαθηματικό γραμματισμό, στα Μαθηματικά δηλαδή ως εμπειρία και κουλτούρα του κάθε μαθητή. Με τα Μαθηματικά να μπαίνουν σε χρήση, να τους δίνεται νόημα και να γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης. Ποια είναι η ιδιαιτερότητα των Μαθηματικών που τα καθιστά εργαλείο έκφρασης και εξήγησης στον κόσμο και την κοινωνία; Η γενίκευση, η βεβαιότητα, η ακρίβεια, η διεξοδικότητα και η συντομία, σύμφωνα με τη φιλοσοφία του ΑΠΣ (Freudenthal, 1973). Στόχος επομένως στην ανάπτυξη των δυο αποθετηρίων ήταν να αναπτυχθούν και να διατεθούν εξίσου ευρέως ψηφιακά δομήματα σχεδιασμένα για τους μαθητές, για την καλλιέργεια του μαθηματικού γραμματισμού, για την υποστήριξη της ένταξης του μαθηματικού συλλογισμού στην πολιτισμική, ολοκληρωμένη και δια βίου μόρφωσή τους. Η επιστήμη της Διδακτικής των Μαθηματικών μας έχει δείξει τα τελευταία τριάντα χρόνια τους τρόπους να το κάνουμε αυτό και μας έχει δείξει πολύ ισχυρά παραδείγματα μαθητών που, αφού τους έχει γίνει συνήθεια να εκφράζονται με ειδικά σχεδιασμένα για πρόσθετη παιδαγωγική αξία ψηφιακά εργαλεία, ξαφνιάζουν με τις ικανότητές τους στο μαθηματικό συλλογισμό (Laborde et al., 2006; Artigue, 2002; Healy & Hoyles, 1999). Δεν ήρθε η ώρα από τα μεμονωμένα παραδείγματα να πάμε στην ευρεία υποστήριξη τέτοιων πρακτικών; Η ομάδα εργασίας για τα αποθετήρια των Μαθηματικών, ανέπτυξε και ανάρτησε σε μια τριετία 1730 τέτοια δομήματα για τα βιβλία από την Τρίτη Δημοτικού έως και την Β Λυκείου Γενικής Παιδείας με ευαισθησία στο Ελληνικό σχολείο και στον δικό μας πολιτισμό (http://ebooks.edu.gr). Στην πορεία, δημιουργήθηκαν κανάλια συνεργασίας μεταξύ ειδικών επιστημόνων και μάχιμων εκπαιδευτικών για μια συνεχή παραγωγή τέτοιων δομημάτων με τα οποία οι μαθητές μας θα έχουν μαθηματικές εμπειρίες. Είναι δηλαδή σχεδιασμένα για να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές όχι για θέαση και εξάσκηση αλλά για κατανόηση, διαπραγμάτευση και συνεργασία με έμφαση σε πραγματικά προβλήματα και κοινωνικά θέματα. Παράλληλα, είναι σχεδιασμένα ώστε να συνάδουν ρητά με τη φιλοσοφία της αξιοποίησης των ψηφιακών τεχνολογιών για μαθηματικές δραστηριότητες στα νέα Προγράμματα Σπουδών. Κεντρικός στόχος στο νέο πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά, είναι αξιοποίηση ψηφιακών δομημάτων ειδικά σχεδιασμένων ώστε να χρησιμοποιούνται από τους μαθητές ως

εργαλεία έκφρασης σε συνθετικές εργασίες και παράλληλα ως **μικρο-πειράματα** στο πλαίσιο κατανόησης εννοιών, αναπαραστάσεων και των συνδέσεων μεταξύ τους (π.χ. πώς μετεξελίσσεται η δευτεροβάθμια καθώς αλλάζει η κάθε μια από τις παραμέτρους της). Τα δυο αποθετήρια σχεδιάστηκαν ώστε να καλύψουν της ανάγκη για απρόσκοπτη διάθεση μικροπειραμάτων, δομημάτων δηλαδή που είναι άμεσα αξιοποιήσιμα από το σύνολο των εκπαιδευτικών και των μαθητών. Ανάμεσα στα κριτήρια επιλογής των μικροπειραμάτων είναι βέβαια και η έμφαση στα επιτεύγματα που βασίζονται στα Μαθηματικά, στην ιστορία των Μαθηματικών, στα φαινόμενα που ερμηνεύονται με τα Μαθηματικά και σε ορισμένα σαγηνευτικά Μαθηματικά παράδοξα. Η εστίαση όμως ήταν στη μαθησιακή δραστηριότητα που με κατάλληλη διδακτική διαχείριση μπορεί να προκύψει και που όπως ειπώθηκε έχει ως κύριο στοιχείο τον πειραματισμό και το μαστόρεμα ως βασικά στοιχεία για την παραγωγή Μαθηματικής σκέψης.

2. ΤΟ ΨΗΦΙΑΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Τα μικροπειράματα των δυο αποθετηρίων είναι ρητά σχεδιασμένα ώστε να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές για κατανόηση, διαπραγμάτευση και συνεργασία και να δίνουν έμφαση σε πραγματικά προβλήματα και κοινωνικά θέματα. Τα δομήματα και η στοχευόμενη χρήση τους από τους μαθητές έχουν παράλληλα συνάφεια και με τις μεθόδους και αντικείμενα της ευρείας επιμόρφωσης στην αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών στο διδακτικό έργο των εκπαιδευτικών (http://b-epipedo2.cti.gr/el-GR/). Όσο είναι εφικτό, είναι ανοικτά στον επιμορφωμένο εκπαιδευτικό για διαμόρφωση – επέκταση και περαιτέρω εμπλουτισμό (Balacheff & Sutherland, 1993; diSessa, 1997; Healy & Kynigos, 2010). Το είδος αυτό των ψηφιακών δομημάτων σχεδιάζεται με τον ευρύτερο σκοπό να προβλέπει ενδυνάμωση του ρόλου όλων των εμπλεκομένων, δηλαδή δράση, επικοινωνία και προσωπικό νόημα για το μαθητή, αναβάθμιση διδακτικών μεθόδων και προοπτική για καλλιέργεια καλύτερων σχέσεων με τους μαθητές για τον εκπαιδευτικό, επικοινωνία των μαθητών με το γονέα, προοπτική για ανάπτυξη πληθώρας τέτοιων δομημάτων από παιδαγωγούς – σχεδιαστές κλπ. Με δεδομένο ότι πρόκειται για ανεπτυγμένα δομήματα από Έλληνες εκπαιδευτικούς διασφαλίζεται και η κυριότητα από το Υπουργείο καθώς και η ευαισθησία στο Εθνικό αναλυτικό πρόγραμμα. Για το σκοπό αυτό, υπήρξε ιδιαίτερη μέριμνα ώστε από την αρχή η προσέγγιση του εμπλουτισμού των βιβλίων να έχει τη συναίνεση των επιστημονικών και εκπαιδευτικών ενώσεων Διδακτικής των Μαθηματικών δηλαδή της Ε.Μ.Ε., της ΕΝΕΔιΜ και της ΕΠΕΔιΜ.

3. ΤΟ ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ

Η επιλογή ψηφιακών εργαλείων είναι ιδιαίτερα σημαντική μιας και οι μαθητές θα έχουν επανειλημμένες εμπειρίες χρήσης τους διαχρονικά και σε ποικιλία θεμάτων και επιπέδων δυσκολίας. Στο νέα ΑΠΣ γίνεται αναφορά σε εργαλεία μαθηματικής έκφρασης τα οποία οργανώνονται σε πέντε κατηγορίες ανάλογα με το είδος της

μαθηματικής δραστηριότητας και τρόπο χρήσης της υφιστάμενης τεχνολογίας. Για την κάθε κατηγορία υπάρχει ικανή επιστημονική τεκμηρίωση της παιδαγωγικής αξίας χρήσης της από μαθητές διεθνώς. Μιας και η διαχρονικότητα σε συγκεκριμένα λογισμικά ποτέ δεν είναι εξασφαλισμένη, γίνεται μνεία σε ένα-δυο καλά εξελληνισμένα και διαδικτυακά διαθέσιμα λογισμικά από κάθε κατηγορία στα οποία έχουν απρόσκοπτη και ανέξοδη πρόσβαση όλοι οι μαθητές και αναφέρονται κι άλλες εναλλακτικές συμπληρωματικά. Οι κατηγορίες για τα εργαλεία έκφρασης είναι οι ακόλουθες:

- Μαθηματική έκφραση μέσω προγραμματισμού (Π)
- Δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων (ΔΓ)
- Αλγεβρική διερεύνηση με αντίστοιχα συστήματα (ΑΣ)
- Διερεύνηση, πειραματισμός και επεξεργασία δεδομένων για στατιστική και πιθανότητες (ΣΠ)
- Πειραματισμός με ψηφιακά μοντέλα (Μ)

Τα ψηφιακά εργαλεία έκφρασης χρησιμοποιούνται ως βασικό υλικό αναφοράς σε συνθετικές εργασίες και παράλληλα περιστασιακά στο πλαίσιο κατανόησης εννοιών, αναπαραστάσεων και των συνδέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων (π.χ. πώς μετεξελίσσεται η δευτεροβάθμια καθώς αλλάζει η κάθε μια από τις παραμέτρους της). Στα δυο αποθετήρια τα μικρο-πειράματα οργανώθηκαν σύμφωνα με αυτές τις κατηγορίες και η ανάπτυξή τους έγινε κατά κύριο λόγο με τη χρήση εργαλείων έκφρασης ώστε να δημιουργείται μια αίσθηση εστίασης σε σχεδιασμούς και δραστηριότητες με εν γένει συναφείς διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις και δυναμικούς χειρισμούς. Ειδικά για το δημοτικό όπου τα εργαλεία έκφρασης συχνά κρίθηκαν αφηρημένα για τις αντίστοιχες ηλικίες, αναπτύχθηκαν μινι-συγγραφικές μικρο-εφαρμογές με πιο συγκεκριμένα μοντέλα και συμπεριφορές. Ο όρος '*μικρο-πειράματα*' επινοήθηκε για να περιγραφεί ένα είδος ψηφιακού δομήματος που μπορεί μεν να χρησιμοποιηθεί σε συνθετικές εργασίες μαζί με ευρύτερα εργαλεία έκφρασης αλλά που προορίζεται περισσότερο για μεικτή παρέμβαση. Είναι δομήματα που ενσωματώνουν πιο στενή, εστιασμένη περιοχή εννοιών από τα εργαλεία έκφρασης. Τα βασικά χαρακτηριστικά τους είναι: Προορίζονται για χειρισμό από το μαθητή (εξατομικευμένα ή σε συνεργασία σε ομάδα) με δια ζώσης διδακτική υποστήριξη από καθηγητή – γονέα. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν στα στενά πλαίσια του μαθήματος ή και ως εφαλτήριο για συνθετική εργασία – διερεύνηση. Η υποστήριξη από τον διδάσκοντα μπορεί να γίνει και στο πλαίσιο της διευρυμένης διερεύνησης με ένα διαδραστικό πίνακα ενώπιον όλης της τάξης. Εμπεριέχουν διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις α) μαθηματικού φορμαλισμού, β) κειμενικού λόγου, γ) μαθηματικών αναπαραστάσεων – γραφικών, σχηματικών, πινάκων κλπ δ) προσομοιώσεων φαινομένων με μαθηματική συμπεριφορά – ιδιότητες. Αποφεύγονται αναπαραστάσεις, εικονικά αντικείμενα και προσομοιώσεις που δεν έχουν σχέση με τα Μαθηματικά που υποστηρίζει το ψηφιακό δόμημα. Τα μικρο-

πειράματα δημιουργούνται όπου αυτό είναι εφικτό με εργαλείο ανάπτυξης ένα από τα θεσμοθετημένα εργαλεία μαθηματικής έκφρασης για τους μαθητές. Έτσι οι μαθητές εθίζονται στην πρακτική ότι με τα ψηφιακά εργαλεία μπορούν να κάνουν μαθηματικά οι ίδιοι, ακόμα και με αυτά που έχουν δημιουργηθεί από εκπαιδευτικούς και παιδαγωγούς. Η βασική χρήση τους από μαθητές προβλέπει δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων ώστε συμπεριφορές – σχέσεις και ιδιότητες να γίνονται αντικείμενο προβληματισμού, διερεύνησης και διαπραγμάτευσης καθώς από το χειρισμό παρατηρείται τι μένει σταθερό και τι αλλάζει καθώς μετεξελίσσονται τα αντικείμενα. Το κάθε μικρο-πείραμα μπορεί να καλύπτει μια έννοια με στενό τρόπο ή ένα ευρύτερο εννοιολογικό πεδίο όπου εμπλέκονται συνδεδεμένες έννοιες. Με αφετηρία μια δραστηριότητα – άσκηση του σχολικού βιβλίου, το κάθε μικροπείραμα μπορεί να στοχεύει στην επεξήγηση μιας έννοιας ή στην απαραίτητη εμβάθυνση για την κατανόησή της από τους μαθητές. Επίσης, μπορεί να επεκτείνει θεματικά τη διερεύνηση της έννοιας πέρα από το στενό πλαίσιο της συγκεκριμένης δραστηριότητας - άσκησης του σχολικού βιβλίου. Το κάθε μικρο-πείραμα έχει κειμενικά ερωτήματα και προτροπές προς διερεύνηση. Δεν παρέχει τη λύση, αφήνει την ευθύνη γι αυτό στον εκπαιδευτικό.

4. ΠΟΣΟΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Ο συνολικός αριθμός μικροπειραμάτων ανά κατηγορία και με πρώτο προσθετικό τα δομήματα του δημοτικού και δεύτερο γυμνασίου και λυκείου έχει ως εξής: (Π):50+191=241, (ΔΓ): 64+422=486, (ΑΣ):17+488=505, (ΣΠ):23+32=55, (Μ):320+125=445.

Φαίνεται μια γενική έμφαση στην Άλγεβρα σε Γυμνάσιο και Λύκειο αλλά και αναλογικά στη Γεωμετρία αν ληφθεί υπόψη η σχετική έμφαση στο Α.Π.Σ. Φαίνεται επίσης μια γενική τάση να αναθεωρηθεί η ύλη των Μαθηματικών με την προσέγγιση του ποιά πεδία, έννοιες και ενότητες είναι προσοδοφόρες για δημιουργία νοημάτων και κατανόησης με την χρήση ψηφιακών δομημάτων. Τα προγραμματιστικά μικροπειράματα αφορούν σε γεωμετρία αλλά και άλγεβρα και μάλιστα συχνά σε συνδυασμένη μελέτη τους, π.χ. η γωνιακή ιδιότητα παραλληλογράμμου ως συναρτησιακή σχέση συμμεταβαλλόμενων μεγεθών. Διακρίνεται τέλος και η έμφαση σε συγκεκριμένα Μαθηματικά και αριθμητικές έννοιες μέσω των μοντέλων στο Δημοτικό όπως ο Άβακας, το Πολύζυγο, η 'χαλασμένη αριθμομηχανή', η 'αριθμο-γραμμή', καθώς και σε έννοιες δυσπρόσιτες όπως η αίσθηση του χώρου και των στερεομετρικών αντικειμένων στον Κυβόκοσμο (Φακούδης κ.ά., 2014). Οι χρονισμοί για την ανάπτυξη των δομημάτων ήταν πάρα πολύ στενοί και η συγγραφή του παρόντος έγινε ένα μήνα περίπου από την ανάρτηση του τελευταίου μικροπειράματος. Παρά ταύτα ήδη έχουν αρχίσει να αποτυπώνονται έρευνες και περιγραφές αξιοποίησης των διαδραστικών βιβλίων σε σχολικές τάξεις. Για παράδειγμα, οι Φυλάκης και Τασσόπουλος (2013) παρουσιάζουν τα βιβλία συνολικά ενώ η Χαριτίδου περιγράφει εμπειρίες χρήσης δομημάτων στα πλαίσια του πιλοτικού ΑΠ τονίζοντας το ρόλο τους στη μαθηματική δραστηριότητα. Οι Καλαϊτζίδου και

Μανώλης αναπτύσσουν επιχειρηματολογία βασισμένη σε εμπειρική έρευνα ότι τα διαδραστικά βιβλία μπορούν να αποτελέσουν ένα εποικοδομητικό περιβάλλον μάθησης έξω από τη σχολική τάξη, ώστε να βοηθήσουν το μαθητή να μελετήσει στο δικό του χώρο και με το δικό του ρυθμό. Σε άλλο σχολείο οι Δουκάκης κ.α. (2013) περιγράφουν πώς τα μικροπειράματα των βιβλίων του γυμνασίου μελετήθηκαν σε συναντήσεις των καθηγητών/τριών και εντάχθηκαν στο πλαίσιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών μαζί με τις εφαρμογές που είχαν αναπτύξει οι εκπαιδευτικοί της σχολικής μονάδας. Τα επιλεγμένα μικροπειράματα αναρτήθηκαν σε πλατφόρμα διαχείρισης μαθημάτων που διαθέτει η σχολική μονάδα και αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές. Αποτελούν δε, μέρος της καθημερινής διδασκαλίας στην τάξη και αξιοποιούνται σε οποιοδήποτε σημείο της διδασκαλίας κριθεί απαραίτητο από τον εκπαιδευτικό. Φαίνεται ότι η υποδομή αυτή αρχίζει να αξιοποιείται με μια ποικιλία από τρόπους και με διαφορετικές εμπλοκές των εκπαιδευτικών και των μαθητών στα σχολεία, αλλού ως μια δοκιμή πρώτα, αλλού ως σταδιακά εξελισσόμενη διαχρονική μετεξέλιξη αυτή καθεαυτή ή εντασσόμενη σε προϋπάρχον πλαίσιο του σχολείου. Ένα παράδειγμα είναι και έρευνα όπου επιλεγμένα μικροπειράματα προστέθηκαν σε ένα ευρύτερο προσωπικό ψηφιακό περιβάλλον για το μαθητή που περιελάμβανε εργαλεία συνεργασίας και διαπραγματεύσης καθώς και άλλες πηγές που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην καθημερινότητά τους (Manolis & Kalaitzidou, 2014). Οι αναφορές που επελέγησαν εδώ είναι ενδεικτικές των ζητημάτων που αναμένεται να ερευνηθούν τα επόμενα χρόνια και που εντάσσονται στα ερωτήματα που τέθηκαν στην αρχή, στις διαδικασίες δηλαδή όπου μια συστημική παρέμβαση μπορεί να ενέχει πρόσθετη παιδαγωγική αξία και παράλληλα να εμπλέκει τον εκπαιδευτικό ως παιδαγωγικό σχεδιαστή και διδακτικά εξελισσόμενο.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Τα αποθετήρια των Μαθηματικών αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο της Πράξης 'Ψηφιακή Εκπαιδευτική Πλατφόρμα, Διαδραστικά Βιβλία και Αποθετήριο Μαθησιακών Αντικειμένων, με κωδ. ΟΠΣ 296441 και Τελικό Δικαιούχο το ΙΤΥΕ του ΕΠΕΔΒΜ, που συγχρηματοδοτείται από το Ελληνικό Δημόσιο στο πλαίσιο του ΕΣΠΑ Ο γράφων είχε το ρόλο του Επιστημονικού Υπεύθυνου και συντονιστή όμως τίποτα δεν θα ήταν εφικτό χωρίς την στενή συνεργασία με ομάδα πάνω από τριάντα συναδέλφων ερευνητών της ΔτΜ, σχεδιαστών ψηφιακών δομημάτων για τη ΔτΜ, πληροφορικών, εκπαιδευτικών και επιμορφωτών Β-επιπέδου. Τα ονόματα των συναδέλφων είναι διαθέσιμα στις αναφορές του κάθε δομήματος στα διαδραστικά βιβλία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. Int. Jnl. of Comp. for Math/al Learning 7(3): 245–274.

Balacheff, N., Sutherland, R. (1993) Epistemological domain of validity of microworlds: the case of LOGO and Cabri-Géomètre, Lessons from Learning,

Proceedings of the IFIP TC3/WG3.3 137-150, Lewis, R., Mendelsohn, P. (Eds.): Archamps, France, 6-8 September, 1993. IFIP Transactions A-46 North-Holland 1994, ISBN 0-444-81832-4

Blikstein, P. & Cavallo, D. (2002). Technology as a Trojan Horse in School Environments: The Emergence of the Learning Atmosphere (II). In Proceedings of the *Interactive Computer Aided Learning International Workshop*, Carinthia Technology Institute, Villach, Austria.

Chevallard, Y. (2012). *Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: a Case for an Oncoming Counterparadigm*. Plenary lecture at 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

diSessa, A. (1997). Open toolsets: new ends and new means in learning mathematics and science with computers. In E. Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1. Lahti, Finland, pp. 47–62.

Freudenthal, H. (1973) Mathematics as an educational task. Dord. Holland: Reidel.

Healy, L., Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in learning, teaching and developing mathematics, The International Journal of Mathematics Education, 42, 63-76.

Hoyles, C. (1993) Microworlds / Schoolworlds: The transformation of an Innovation.In C. Keitel & K. Ruthven (Eds), *Learning from computers: Mathematics education and technology*, pp. 10-17. Berlin: Springer-Verlag.

Hoyles, C., Noss, R. & Kent, P. (2004). On the integration of digital technologies into mathematics classrooms, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9(3), 309-326.

Kafai, Y. & Resnick, M. (Eds) (1996). Constructionism in Practice. Designing, Thinking and Learning in a Digital World. Wahwah, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Kynigos, C. (2007) Half-baked Microworlds in use in Challenging Teacher Educators' Knowing, international Journal of Computers for Mathematical Learning. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 12 (2), 87-111.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. and Strasser, R. (2006) Teaching and Learning Geometry with Technology, Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future, A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), 275–304, Sense Publishers.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. New York: Cambridge University Press.

Manolis, C., & Kalaitzidou, E. (2014). Personal Learning Environments and Social Networks in the Traditional School System: An Applied Case Study in the Greek

Educational System. In Ġ. Mallia (Ed.), The Social Classroom: Integrating Social Network Use in Education (pp. 417-440). Hershey, PA: . doi:10.4018/978-1-4666-4904-0.ch02.

Megalou, E. , Kaklamanis, C. (2014) "Photodentro LOR, the Greek National Learning Object Repository", INTED2014, the 8th International Technology, Education and Development Conference, Valencia, Spain.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. In A. J. Bishop et al. (eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 11-47). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Ronchetti, M. (2010) Using video lectures to make teaching more interactive, *Int. Jnl. Of Emerging Technologies In Learning (Ijet)* Vol 5, No 2, 45-48.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's the fuss about metacognition. In A. H. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education.* Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Δουκάκης, Σ., Βροντάκης, Μ., Μιχαλοπούλου, Γ., &Διαμάντης, Χ. (2013). Διερεύνηση απόψεων μαθητών/τριών Γυμνασίου για την διαδικασία μάθησης Μαθηματικών με τη χρήση μικροπειραμάτων μέσω ΤΠΕ. Πρακτικά 3ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΤΠΕ.

Κολέζα, Ε. (2010). Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών, εκδ. Τόπος.

Φυλάκης, Α. & Τασσόπουλος, Β. (2013). «Τα εμπλουτισμένα βιβλία Μαθηματικών και η εφαρμογή τους στην διδακτική διαδικασία με νέες τεχνολογίες». Παρουσιάστηκε στην 5η Μαθηματική Εβδομάδα, Θεσσαλονίκη.

Χαριτίδου, Ο. (2013). "Η αναγκαιότητα της δραστηριότητας & ο ρόλος του μικροπειράματος στην κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας - Παραδείγματα διδασκαλίας με βάση το Α.Π. των Πιλοτικών Σχολείων». Παρουσιάστηκε στην 5η Μαθηματική Εβδομάδα, Θεσσαλονίκη

Φακούδης, Ε., Λάτση, Μ., Παπαδόπουλος, Θ. (2014) Μικροπειράματα στα πλαίσια της εφαρμογής «Κυβόκοσμος», 3ο Πανελλήνιο Εκπαιδευτικό Συνέδριο Ημαθίας για την αξιοποίηση των ΤΠΕ στη διδακτική πράξη.

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΟΝΑΔΩΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΕ ΨΗΦΙΑΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΕ ΔΙΑΔΟΧΙΚΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ-ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ-ΣΥΖΗΤΗΣΗΣ

Γιώργος Ψυχάρης Βαγγέλης Φακούδης

Μαθηματικό Τμήμα ΕΚΠΑ Γυμνάσιο Σουφλίου

gpsych@math.uoa.gr fakoudis@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Μέσα από τη συνεργασία ενός εκπαιδευτικού και ενός ερευνητή, στην παρούσα έρευνα μελετάται ο διδακτικός σχεδιασμός, τα αντίστοιχα υλικά και η διδασκαλία του εκπαιδευτικού στο πλαίσιο της χρήσης ψηφιακών εργαλείων στο μάθημα των μαθηματικών. Η έρευνα έλαβε χώρα σε δύο διαδοχικούς κύκλους σχεδιασμού-εφαρμογής-συζήτησης. Η ανάλυση της δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας ανέδειξε πτυχές της εξέλιξης του εκπαιδευτικού στο επίπεδο της γνώσης και του διδακτικού του σχεδιασμού.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζουμε έρευνα σχετικά με τον διδακτικό σχεδιασμό, τα αντίστοιχα υλικά και τη διδασκαλία ενός εκπαιδευτικού στο πλαίσιο της εισαγωγής της χρήσης ψηφιακών εργαλείων στο μάθημα των μαθηματικών. Έχοντας ως αφετηρία διαθέσιμα υλικά, ο εκπαιδευτικός ενεπλάκη στην ανάπτυξη *μονάδων διδασκαλίας* (documents, Gueudet & Trouche, 2009) (π.χ. δραστηριοτήτων, φύλλων εργασίας - ΦΕ, ψηφιακών δομημάτων), που χρησιμοποίησε σε δύο κύκλους εφαρμογής στη σχολική τάξη σε διαδοχικές σχολικές χρονιές. Εστιαζόμαστε στις μονάδες διδασκαλίας που ανέπτυξε αρχικά ο εκπαιδευτικός, στο πώς τις χρησιμοποίησε στην τάξη και στο αν και από ποιους παράγοντες επηρεάστηκε περαιτέρω η γνώση του αλλά και η εξέλιξη του διδακτικού σχεδιασμού του στην επόμενη εφαρμογή. Στην αφετηρία του διδακτικού σχεδιασμού του εκπαιδευτικού ήταν υλικό που αναπτύχθηκε για το νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) για τα Μαθηματικά στη βασική εκπαίδευση [1]. Η αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών υποστηρίζει την καινοτομική φιλοσοφία του συγκεκριμένου ΠΣ για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών που επικεντρώνεται στην εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματικές δραστηριότητες, διατύπωση και έλεγχο υποθέσεων και επίλυση προβλήματος μέσα από τη χρήση εξειδικευμένων λογισμικών για μαθηματική διερεύνηση (π.χ. Δυναμικής Γεωμετρίας, Προγραμματισμού, Αλγεβρικών Συστημάτων). Στο επίπεδο της παρέμβασης στη σχολική τάξη με ψηφιακά εργαλεία, αναπτύχθηκαν δύο κατηγορίες υλικού με χρήση των προτεινόμενων λογισμικών: (α) τα μικροπειράματα [2], ψηφιακά αντικείμενα-δομήματα που ενσωματώνονται σε

διαφορετικά σημεία της ύλης και προσφέρονται για μικρής έκτασης παρέμβαση στο μάθημα και (β) οι συνθετικές εργασίες, που προτείνονται ως δραστηριότητες για ένα σύνολο 10 δ. ωρών με στόχο την εμπλοκή των μαθητών σε διαδικασίες διερεύνησης και μοντελοποίησης προβλημάτων μέσα από το χειρισμό αλληλοσυνδεόμενων αναπαραστάσεων. Η παρούσα έρευνα βασίστηκε στη συνεργασία ενός ερευνητή και ενός εκπαιδευτικού, όταν ο πρώτος επιχείρησε να εισαγάγει τη χρήση ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία του στο σχολείο έχοντας ως σημείο αφετηρίας μια συνθετική εργασία που αποτέλεσε μέρος του υλικού που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του ΠΣ.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στον ερευνητικό χώρο έχει επισημανθεί η πολυπλοκότητα της χρήσης της τεχνολογίας στη σχολική τάξη των μαθηματικών (Lagrange et al., 2003), όπως και η απόσταση που χωρίζει την πρόσβαση σε σχετικό διδακτικό υλικό από την εφαρμογή του στη διδασκαλία. Στη σχετική συζήτηση έχει υποδειχτεί ως κρίσιμο το ζήτημα της ιδιοποίησης του υλικού από τον εκπαιδευτικό, που περιλαμβάνει την ενεργό εμπλοκή του σε διαδικασίες προσαρμογής, τροποποιήσεων και μετασχηματισμών, ανάλογα με το διδακτικό του σχεδιασμό, τις επαγγελματικές του εμπειρίες (π.χ. συμμετοχή σε κοινότητες) και την εμπειρία της χρήσης του υλικού στην διδασκαλία (Laborde, 2001). Οι Gueudet και Trouche (2009) περιέγραψαν την εργασία του εκπαιδευτικού για την προετοιμασία της διδασκαλίας ως μια διαδικασία αλληλεπίδρασης με ένα σύνολο από διαθέσιμες πηγές (resources) – π.χ. σχολικά βιβλία, αρχεία λογισμικού, σημειώσεις, ΦΕ – που οδηγούν στη δημιουργία μονάδων διδασκαλίας (documentational genesis) και ευρύτερα στη δημιουργία *συστημάτων μονάδων διδασκαλίας (documentation systems).* Η διαδικασία αυτή είναι διττή και αναφέρεται τόσο στο πώς οι πηγές επηρεάζουν τη δραστηριότητα του εκπαιδευτικού, όσο και στο πώς ο εκπαιδευτικός διαμορφώνει τις πηγές για συγκεκριμένους στόχους της διδασκαλίας του σε συγκεκριμένα πλαίσια. Δύο χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης διαδικασίας ενίσχυσαν την αξιοποίησή της στην μελέτη όχι μόνο του διδακτικού σχεδιασμού του εκπαιδευτικού, αλλά και της επαγγελματικής του εξέλιξης (Gueudet & Trouche, 2011): (1) Μια μονάδα διδασκαλίας συνέχει στοιχεία πρακτικής και γνώσης, καθώς μπορεί να περιγραφεί ως σύνθεση της πηγής και των *σχημάτων χρήσης* της. Τα σχήματα χρήσης αναφέρονται στις συνήθεις δράσεις/ενέργειες του εκπαιδευτικού (στο πώς χρησιμοποιεί μια πηγή στη διδασκαλία) και στις *λειτουργικές σταθερές*, την μη ευθέως εκφραζόμενη γνώση του εκπαιδευτικού (π.χ. για τα μαθηματικά, τη διδασκαλία, την τεχνολογία, τους μαθητές) που έχει δομηθεί σε διαφορετικά πλαίσια χρήσης της πηγής και καθορίζει τις επιλογές του. (2) Ο σχεδιασμός μονάδων διδασκαλίας συνεχίζεται στο χρόνο μέσα από τη χρήση τους, καθώς μια μονάδα διδασκαλίας μπορεί να αποτελέσει πηγή για την ανάπτυξη μιας νέας μονάδας. Συνεπώς, το σύστημα μονάδων διδασκαλίας που δομεί και επαναδομεί ένας

εκπαιδευτικός μέσα στο χρόνο προσφέρεται ως πεδίο μελέτης του σχεδιασμού και της πρακτικής του, ιδιαίτερα στην περίπτωση της χρήσης ψηφιακών πηγών οι οποίες προσφέρουν πλούσιες δυνατότητες σχεδιασμού και αλληλεπίδρασης. Στο παρόν άρθρο εστιαζόμαστε στη διαδικασία δημιουργίας και χρήσης μονάδων διδασκαλίας από τον εκπαιδευτικό, στο πώς η διαδικασία αυτή επηρεάζεται από την εφαρμογή στη σχολική τάξη, αλλά και στο πώς επηρεάζει την γνώση του εκπαιδευτικού και την περαιτέρω εξέλιξη του διδακτικού του σχεδιασμού.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το αντικείμενο της συνεργασίας ερευνητή και εκπαιδευτικού (Ponte et al., 2004) αφορούσε στην αναζήτηση της γνώσης γύρω από τη διδασκαλία των μαθηματικών με ψηφιακά εργαλεία μέσα από τη διερεύνηση των αποφάσεων του εκπαιδευτικού σε επίπεδο διδακτικού σχεδιασμού και διδασκαλίας, αλλά και τον κριτικό αναστοχασμό. Η επιλογή αυτή ενισχύθηκε από το γεγονός ότι ο εκπαιδευτικός επεδίωκε παράλληλα να διερευνήσει τις δυνατότητες για συστηματική χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία του. Στο παρόν άρθρο αναφερόμαστε σε δύο κύκλους εφαρμογής μιας συνθετικής εργασίας (4 και 8 δ. ώρες αντίστοιχα) σε δύο διαδοχικές σχολικές χρονιές σε αντίστοιχα τμήματα (ένα κάθε φορά) της Β' γυμνασίου. Πριν από κάθε κύκλο εφαρμογής ο εκπαιδευτικός κατέγραφε με συστηματικό τρόπο τα υλικά και τους στόχους της διδασκαλίας του, τα κοινοποιούσε στον ερευνητή και ακολουθούσε συζήτηση σχετικά με τις αποφάσεις του σε επίπεδο διδακτικού σχεδιασμού (σκεπτικό, αιτιολόγηση, κριτήρια). Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας ο εκπαιδευτικός βιντεοσκοπούσε τις διδασκαλίες του συλλέγοντας παράλληλα δεδομένα οθόνης από δύο ομάδες μαθητών. Ακολούθως, ο εκπαιδευτικός ανέλυε τις διδασκαλίες επιλέγοντας σημεία που αναδείκνυαν την απόσταση ανάμεσα στο σχεδιαζόμενο/προσδωκόμενο και το πραγματικό (π.χ. κατανόηση/δυσκολίες των μαθητών, στιγμιαίες αποφάσεις του εκπαιδευτικού, διαχείριση της τάξης). Τα σημεία αυτά ονομάστηκαν *κρίσιμα* καθώς αναμέναμε να τροφοδοτήσουν τη συζήτηση ερευνητή και εκπαιδευτικού για τη διδασκαλία και να αποτελέσουν εναύσματα για να μελετηθεί σε επόμενη φάση αν και πώς επηρέασαν περαιτέρω την εξέλιξη του διδακτικού σχεδιασμού του εκπαιδευτικού και τη διδασκαλία του. Ακολουθούσε σχολιασμός της αρχικής ανάλυσης του εκπαιδευτικού από τον ερευνητή, παράλληλη δική του ανάλυση των διδασκαλιών και κύκλος αναστοχαστικών συζητήσεων (δια ζώσης και εξ' αποστάσεως) με βάση τα κρίσιμα σημεία. Σε επόμενη φάση τα κρίσιμα σημεία κωδικοποιήθηκαν για την ανάλυση και ενσωματώθηκαν σε κατηγορίες. Τα δεδομένα ήταν: (α) το υλικό των διδασκαλιών του εκπαιδευτικού, (β) οι βιντεοσκοπημένες διδασκαλίες και των δύο κύκλων εφαρμογής (12 δ. ώρες), (γ) δεδομένα καταγραφής οθόνης (δύο ομάδες μαθητών ανά δ. ώρα), (δ) συζητήσεις και ηλεκτρονική επικοινωνία ερευνητή-

εκπαιδευτικού. Στο παρόν άρθρο χρησιμοποιήσαμε αποσπάσματα από τις συζητήσεις ερευνητή-εκπαιδευτικού συμπληρωματικά με την ανάλυση των διδασκαλιών για να αναλύσουμε τον διδακτικό σχεδιασμό του εκπαιδευτικού και την πρακτική του κατά τον πρώτο κύκλο εφαρμογής και το διδακτικό του σχεδιασμό για τον δεύτερο κύκλο εφαρμογής.

ΑΝΑΛΥΣΗ

Στην αφετηρία του διδακτικού σχεδιασμού του εκπαιδευτικού και στους δύο κύκλους εφαρμογής στην τάξη ήταν η συνθετική εργασία με τίτλο «Αναζητώντας το λάθος στο γραμμωτό κώδικα» (για συντομία συνθετική ΓΚ) για την έννοια της γραμμικής συνάρτησης στη Β' γυμνασίου με χρήση του Function Probe (FP) [3]. Η συνθετική ΓΚ βασιζόταν σε ένα πραγματικό πρόβλημα ελέγχου των πιθανών λαθών που μπορεί να γίνονται στην τιμολόγηση οπωροκηπευτικών σε ένα σούπερ μάρκετ το οποίο χρησιμοποιεί ζυγαριά με το σύστημα του γραμμωτού κώδικα (barcode). Ο ελεγκτής πωλήσεων παρέλαβε από τον πωλητή που ζυγίζει και τιμολογεί τα προϊόντα έναν πίνακα με την ποσότητα x (κιλά) και δίπλα το ποσό y (ευρώ) με το οποίο τιμολογήθηκε το προϊόν για 30 πωλήσεις που αφορούσαν 4 προϊόντα. Ο ελεγκτής, με βάση τον πίνακα αυτό, θα ελέγξει αν υπήρξαν λάθη τιμολόγησης. Δίνεται πίνακας με τρεις στήλες (Προϊόν, Ποσότητα, Τιμή), δύο τελευταίες εκ των οποίων είναι συμπληρωμένες με 30 ζεύγη τιμών. Ακολουθεί μια συνοπτική περιγραφή τριών φάσεων εφαρμογής με ενδεικτικά ερωτήματα ανά φάση. Φάση 1: $1^{η}$ ερώτηση: εύρεση του αριθμού πωλήσεων από κάθε προϊόν. Προσδοκώμενη δραστηριότητα μαθητών: 'πέρασμα' στοιχείων στον Πίνακα (στήλες x και y), σύνδεση με τα ανάλογα ποσά, συμπλήρωση της στήλης «Τιμή» με το λόγο y/x (τιμές λόγου: 0.7, 1.4, 2.3 και 3.2, εκτός από μία περίπτωση με τιμή 0.82 για την πώληση στην οποία έγινε λάθος). $2^{η}$ ερώτηση: αποστολή ζευγών βάρους-τιμής στο Γράφημα, διερεύνηση του αν και με ποιο κριτήριο τα σημεία αυτά χωρίζονται σε ομάδες. $3^{η}$ ερώτηση: διερεύνηση της σύνδεσης των ομάδων σημείων με σχέσεις αναλογίας (αν ναι, να γραφούν οι αντίστοιχοι τύποι), διερεύνηση ύπαρξης σχέσης μεταξύ των συντελεστών αναλογίας με τα στοιχεία του πίνακα τιμών (υπόδειξη: κατασκευή της y=x και μετακίνησή της με το εργαλείο κατακόρυφου ελαστικού χειρισμού). Προσδοκώμενη δραστηριότητα των μαθητών: προσέγγιση της σύνδεσης των συνευθειακών σημείων με τις γραμμικές συναρτήσεις κιναισθητικά, σύνδεση του συντελεστή αναλογίας y=αx με την τιμή των λόγων που είχαν προκύψει στον πίνακα με δεδομένο ότι εμφανίζεται ο τύπος της συνάρτησης σε κάθε μετασχηματισμό (με αυξομείωση) του γραφήματος. $4^{η}$ ερώτηση: αριθμός περιπτώσεων (και είδος/η) που έγινε υπερτιμολόγηση με δεδομένο ότι οι τιμές ανά κιλό των προϊόντων είναι πολλαπλάσια του δεκαλέπτου του ευρώ. $5^{η}$ ερώτηση: μετά την κατασκευή στηλών στον Πίνακα για τον ακριβή υπολογισμό των τιμών κάθε προϊόντος έως 10Kg (μια στήλη-

βάρος με 100 τιμές, εντολή 'Γέμισμα' από 0 έως 10Kg με βήμα 0.1 και τέσσερις στήλες με τις αντίστοιχες τιμές με χρήση των τύπων y=0.7x, u=1.4x, z=2.3x) να ελεγχθεί η ορθότητα του πίνακα από τη γραφική παράσταση. Προσδοκώμενη δραστηριότητα των μαθητών: αποστολή σημείων στο Γράφημα, διαπίστωση ότι 'πέφτουν' στις υπάρχουσες ευθείες, νοηματοδότηση της σύνδεσης. Φάση 2: Μελέτη της y=αx (κλίση, γραφική παράσταση). Φάση 3: Εισαγωγή στην y=αx+β ως παράλληλη μεταφορά της y=αx μέσα από την επέκταση του αρχικού προβλήματος. Μελέτη της y=αx+β μέσω μετασχηματισμών της y=αx στο Γράφημα και μέσω της κατασκευής νέων στηλών που αντιστοιχούν σε συναρτησιακές σχέσεις (π.χ. y=0.7x+0.5) στον Πίνακα. Γραφική επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων μέσα από πραγματικά προβλήματα.

1ος κύκλος εφαρμογής

Τα κριτήρια επιλογής της συνθετικής εργασίας ΓΚ από τον εκπαιδευτικό για την αρχική εφαρμογή ήταν: (α) η εισαγωγή της έννοιας της γραμμικής συνάρτησης μέσα από ένα πραγματικό πρόβλημα, (β) η εισαγωγή της διερεύνησης στη διδασκαλία και (γ) η διερεύνηση της δυνατότητας υλοποίησης μιας συνθετικής εργασίας στη σχολική τάξη. Λόγω προβλημάτων στη διάθεση του εργαστηρίου, η εφαρμογή της συνθετικής ΓΚ έλαβε χώρα στην τάξη με χρήση 4 φορητών υπολογιστών των μαθητών και 2 του εκπαιδευτικού για 4 δ. ώρες στο πλαίσιο της διδασκαλίας των παραγράφων 3.3 και 3.4 (Οι συναρτήσεις y = αx και y = αx + β) του κεφαλαίου 3 (Συναρτήσεις). Προηγήθηκε η διδασκαλία των παραγράφων 3.1 (Η έννοια της συνάρτησης) και 3.2 (Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης) με χρήση ΦΕ από υλικό που είχε δημιουργήσει ο εκπαιδευτικός τα προηγούμενα διδακτικά έτη δίνοντας έμφαση στον συνολοθεωρητικό ορισμό της συνάρτησης. Αναφορικά με την συνθετική ΓΚ, ο εκπαιδευτικός ανέπτυξε δύο μονάδες διδασκαλίας: (α) το ΦΕ «Γνωριμία με το FP» για την εξοικείωση με το λογισμικό που περιελάμβανε ερωτήματα για βασικές λειτουργίες του FP (Πώς μπορώ να γεμίσω γρήγορα μία στήλη με τιμές; Πώς μπορώ να στείλω στοιχεία από τον πίνακα στο γράφημα;) και σχετικές οδηγίες, (β) το «Φύλλο δραστηριοτήτων», μια σύνθεση τριών φύλλων εργασίας για την κάλυψη και των τριών φάσεων εφαρμογής της συνθετικής εργασίας ΓΚ που περιελάμβανε τα προτεινόμενα από το ΠΣ ερωτήματα ανά φάση και είχε τα ακόλουθα νέα στοιχεία: βοήθεια αναφορικά με λειτουργίες του λογισμικού που εμφανιζόταν στα δεξιά της $1^{ης}$ και της $2^{ης}$ σελίδας με τη μορφή αριθμημένων ερωτήσεων-απαντήσεων (π.χ. Βοήθεια 6), χρήση $1^{ου}$ πληθυντικού στα ερωτήματα και προτροπές προς τους μαθητές για συζήτηση και επιχειρηματολογία.

Ακολουθεί συνοπτική περιγραφή της διδακτικής ακολουθίας και των αντίστοιχων υλικών που χρησιμοποίησε ο εκπαιδευτικός στη διδασκαλία του κεφαλαίου 3 (Συναρτήσεις): ***$1^{η}$-$4^{η}$ δ. ώρα***: 5 ΦΕ από υπάρχον υλικό του εκπαιδευτικού: απεικονίσεις, ορισμός συνάρτησης, σημεία στο επίπεδο, πολλαπλές αναπαραστάσεις συναρτήσεων,

γραφικές παραστάσεις απεικονίσεων και συναρτήσεων. ***5η-6η δ. ώρα***: Μετωπική παρουσίαση του FP από τον εκπαιδευτικό. Στον αρχικό σχεδιασμό η εξοικείωση των μαθητών με το λογισμικό προβλεπόταν να γίνει μέσω της χρήσης του ΦΕ «Γνωριμία με το FP». ***7η–10η δ. ώρα:*** «Φύλλο δραστηριοτήτων»: τρεις φάσεις της συνθετικής εργασίας ΓΚ (με εξαίρεση την y=αx+β που υπήρχε στον αρχικό σχεδιασμό για μία επιπλέον δ. ώρα αλλά ματαιώθηκε λόγω τεχνικών προβλημάτων με τους υπολογιστές). ***11η - 12η δ. ώρα:*** Διδασκαλία της y=αx+β (σχολικό βιβλίο).

Η διπλή ανάλυση των διδασκαλιών έφερε στην επιφάνεια τρεις κατηγορίες (*Υλικά, Μαθηματικά, Διδασκαλία*) και αντίστοιχες ομάδες κρίσιμων σημείων απόστασης ανάμεσα στο προσδοκώμενο και το πραγματικό. Αναφέρουμε συνοπτικά τέσσερα παραδείγματα κρίσιμων σημείων.

Υλικά - Εξοικείωση με τα ψηφιακά εργαλεία. Δυσκολίες μαθητών με τη χρήση των ψηφιακών εργαλείων. Σημειώνουμε ότι η παρουσίαση του FP έγινε μετωπικά στην τάξη από τον εκπαιδευτικό. «Αυτό έγινε λόγω πίεσης χρόνου αλλά και απειρίας μου. Νόμιζα ότι έτσι μπορούν να πάρουν μια γνώση».

Μαθηματικά – Συνδέσεις εντός του εννοιολογικού πεδίου μιας μαθηματικής έννοιας. Δυσκολία των μαθητών με προαπαιτούμενη γνώση: ανάλογα ποσά (ιδιότητες, γραφική αναπαράσταση), λόγοι κ.λπ. Ο εκπαιδευτικός υπενθύμισε τις σχετικές έννοιες μετωπικά.

Μαθηματικά – Κατασκευή νέας μαθηματικής γνώσης. Δυσκολίες των μαθητών στη νοηματοδότηση της προσέγγισης των σημείων στο γράφημα μέσω του μετασχηματισμού της y=x με το εργαλείο ελαστικού χειρισμού.

Διδασκαλία - Ενσωμάτωση της διερεύνησης στο μάθημα. Ανάθεση από τον εκπαιδευτικό ερωτημάτων σε ομάδες και συζήτηση ολομέλειας σε σύντομο χρόνο στη οποία συχνά 'παρουσίαζε' μετωπικά ο ίδιος τη διερεύνηση και το αποτέλεσμά της (π.χ. σχέση των λόγων με τις τιμές των προϊόντων). «Έχεις στο μυαλό σου σχεδιασμένο, λίγο-πολύ ασυνείδητα, ότι αυτή την ώρα θα βγάλω αυτές τις τρεις ερωτήσεις. Ενώ πιστεύεις ότι πρέπει να γίνει διερεύνηση, αν ξέρεις ότι σε ένα πεντάλεπτο θα χτυπήσει το κουδούνι και έχεις σκαλώσει στην πρώτη ερώτηση, χωρίς να το συνειδητοποιείς, λες να κλείσω να πάω στην επόμενη».

2ος κύκλος εφαρμογής

Ο διδακτικός σχεδιασμός του εκπαιδευτικού για τον 2ο κύκλο εφαρμογής δομήθηκε με άξονα τη διδασκαλία ολόκληρου του κεφαλαίου 3 των συναρτήσεων. Για τη διδασκαλία στην τάξη ο εκπαιδευτικός δημιούργησε, μεταξύ άλλων, σύνθετες μονάδες διδασκαλίας με τη μορφή ΦΕ - θα τα ονομάσουμε *εμπλουτισμένα φύλλα εργασίας (ΕΦΕ)* – στα οποία ενσωμάτωσε στοιχεία θεωρίας (π.χ. ορισμοί) και ποικιλία δραστηριοτήτων (π.χ. ανοιχτών), αναπαραστάσεων και διδακτικών πηγών (π.χ. υπερσυνδέσεις με μικροπειράματα). Σημειώνουμε ότι τα περισσότερα μικροπειράματα σχεδιάστηκαν από

τον ίδιο τον εκπαιδευτικό, καθώς το ίδιο χρονικό διάστημα ξεκίνησε να συμμετέχει στην ομάδα εμπλουτισμού των σχολικών βιβλίων μαθηματικών του Ψηφιακού Σχολείου (ΨΣ).

Ακολουθεί η περιγραφή του συστήματος μονάδων διδασκαλίας του εκπαιδευτικού σε σχέση με τη διδακτική ακολουθία στον 2ο κύκλο εφαρμογής (17 διδακτικές ώρες για το κεφάλαιο 3) και η περιγραφή/αιτιολόγηση κάποιων επιλογών του εκπαιδευτικού από τον ίδιο. ***1η-2η δ. ώρα (τάξη)***: 1 ΕΦΕ («Κανονικότητες») με 6 δραστηριότητες: μοτίβα χρωμάτων/σχεδίων, αριθμητικά/γεωμετρικά μοτίβα, τετράγωνοι/τριγωνικοί αριθμοί, ημερολόγιο. «Οι μαθητές έχουν δει κανονικότητες και μοτίβα από το δημοτικό, αλλά δεν φτάνουν ποτέ στο γενικό τύπο. Θεώρησα ότι είναι μια ευκαιρία να μπουν μέσα από τα μοτίβα οι συναρτήσεις, πόσο μάλλον που προτάθηκαν και επίσημα από το ΠΣ». ***3η–8η δ. ώρα (τάξη και εργαστήριο)***: 1 ΕΦΕ («Σχέσεις δύο μεταβλητών-Συναρτήσεις») με 15 δραστηριότητες και 6 μικροπειράματα με Geogebra. «Έβαλα πολλά μικροπειράματα γιατί είναι διερευνητικά χωρίς να πιάνουν μεγάλο διδακτικό χρόνο. Εστιάζονται σε συγκεκριμένες έννοιες με αναπαραστάσεις εννοιών που με τους συνήθεις τρόπους διδασκαλίας δεν αναδεικνύονται. Π.χ. μέσα από την προσομοίωση μιας μπάλας που πέφτει ελεύθερα από έναν ουρανοξύστη, οι μαθητές μπορούν να βλέπουν κάθε χρονική στιγμή το διάστημα που έχει διανύσει η μπάλα και να συμπληρώνουν πίνακα τιμών, να τοποθετούν αυτά τα σημεία σε γράφημα, να μεταβάλουν το α στην $y = ax^2$ ώστε να περνά από αυτά τα σημεία και να βρίσκουν απαντήσεις σε ερωτήματα από τη γραφική παράσταση». ***9η–13η δ. ώρα (εργαστήριο)***: 1 ΕΦΕ «Ανάλογα ποσά – Η συνάρτηση y=αx»: ισοδύναμα κλάσματα, ανάλογα ποσά, 1 μικροπείραμα με FP (βάρος πορτοκαλιών-τιμή στον Πίνακα, αναπαράσταση στο Γράφημα) για εξοικείωση με βασικές λειτουργίες του FP (γέμισμα στήλης, αποστολή στο γράφημα, πύκνωση σημείων, κατασκευή της ευθείας, μέτρηση κλίσης, σύνδεση με συντελεστή αναλογίας) και παράλληλη προσέγγιση της γραφικής αναπαράστασης των αναλόγων ποσών μέσω πύκνωσης σημείων, 1η φάση της συνθετικής ΓΚ (5 ερωτήματα). «Η εκμάθηση του FP μέσα από δραστηριότητα είχε νόημα και βοήθησε πολύ στο να μειωθούν τα προβλήματα χρήσης του λογισμικού». ***14η-15η δ. ώρα (εργαστήριο και τάξη)***: 1 ΕΦΕ «Η συνάρτηση y=αx» (2η Φάση της συνθετικής ΓΚ) και (β) 3 μικροπειράματα με Geogebra από το Ψηφιακό Σχολείο: κλίση ευθείας, μεταβολή της τεταγμένης στην y=αx. ***16η δ. ώρα (εργαστήριο)***: 1 ΕΦΕ «Η συνάρτηση y=αx+β»: 3η φάση της συνθετικής ΓΚ εμπλουτισμένη με 1 μικροπείραμα (ρόλος α και β) και δραστηριότητες για σχεδιασμό ευθειών στο χαρτί. ***17η δ. ώρα (τάξη)***: Ασκήσεις σχολικού βιβλίου στην y=αx+β.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα νέα στοιχεία στο σύστημα μονάδων διδασκαλίας του εκπαιδευτικού και στην αντίστοιχη εφαρμογή (2ος κύκλος) είναι: (α) η διδασκαλία κανονικοτήτων μέσω μοτίβων

και των αναλόγων ποσών πριν την έναρξη της διδασκαλίας των συναρτήσεων, (β) η εισαγωγή της χρήσης μικροπειραμάτων για στοχευμένη διδακτική παρέμβαση σε διαφορετικά σημεία της ύλης και εξοικείωση των μαθητών με την εργασία σε ομάδες, (γ) η εισαγωγή στη συνάρτηση με έμφαση στη συμμεταβολή, (δ) η δημιουργία ΕΦΕ και ο εμπλουτισμός τους με ανοιχτές δραστηριότητες, (ε) η εξοικείωση των μαθητών με το FP μέσω μιας δραστηριότητας της συνθετικής ΓΚ ($10^{η}$ δ. ώρα), (στ) η υλοποίηση της εφαρμογής με εναλλαγή μαθήματος στο εργαστήριο υπολογιστών και την τάξη. Τα στοιχεία αυτά φαίνεται να 'απαντούν' σε πρώτο επίπεδο στα ζητήματα που έφερε στην επιφάνεια ο $1^{ος}$ κύκλος εφαρμογής, αλλά και να σηματοδοτούν πτυχές της εξέλιξης του διδακτικού σχεδιασμού του εκπαιδευτικού. Συγκεκριμένα, μια σειρά από ζητήματα που σχετίζονται με τα παραπάνω στοιχεία συζητήθηκαν μεταξύ εκπαιδευτικού και ερευνητή κατά την ανάλυση των διδασκαλιών του $1^{ου}$ κύκλου και τροφοδότησαν τον αναστοχασμό σχετικά με τα υλικά και τις δράσεις του εκπαιδευτικού σε συγκεκριμένες κατηγορίες καταστάσεων. Για παράδειγμα, μέσα από τις δυσκολίες των μαθητών να συνδέσουν τις προσφερόμενες αναπαραστάσεις με τις επιδιωκόμενες μαθηματικές έννοιες ήρθε στην επιφάνεια το ζήτημα της πρόσθετης παιδαγωγικής αξίας της χρήσης της τεχνολογίας για τη διδασκαλία των συναρτήσεων. Στον $2^{ο}$ κύκλο εφαρμογής ο εκπαιδευτικός υιοθέτησε μια συνολική οπτική για τη διδασκαλία της συνάρτησης σε επίπεδο εννοιολογικού πεδίου, αναδιέταξε τη διδακτική ακολουθία των εμπλεκόμενων μαθηματικών εννοιών (π.χ. αναλογία), τροποποίησε την επιστημολογική του προσέγγιση αναφορικά με την διδασκαλία της συνάρτησης αναπτύσσοντας νέες δραστηριότητες, ενσωμάτωσε στο μάθημά του νέα υλικά (π.χ. ΕΦΕ, μικροπειράματα) που στόχευαν στην διερεύνηση και στην ενίσχυση της κατανόησης από την πλευρά των μαθητών και αντιμετώπισε την εξοικείωση με τα ψηφιακά εργαλεία ως μέρος των μαθησιακών δραστηριοτήτων των μαθητών. Για παράδειγμα, η εισαγωγή του μικροπειράματος με FP ($10^{η}$ δ. ώρα) βασίστηκε στην γνώση του εκπαιδευτικού που προήλθε από την εμπειρία των δυσκολιών των μαθητών να συνδέσουν την προσέγγιση των σημείων στο γράφημα (ανάλογα ποσά) με το μετασχηματισμό της y=x και το συντελεστή αναλογίας κατά τον $1^{η}$ κύκλο εφαρμογής της συνθετικής ΓΚ (Φάση 1: ερωτ. 2 και 3). Το σημείο αυτό είχε εντοπιστεί ως κρίσιμο στην ανάλυση των διδασκαλιών και είχε συζητηθεί το αν και πώς μπορεί να ενισχυθεί η επιδιωκόμενη νοηματοδότηση της σύνδεσης των συνευθειακών σημείων με τις γραμμικές συναρτήσεις κιναισθητικά στην πράξη. Η επιλογή του εκπαιδευτικού ήταν να προηγηθεί η δυναμική κατασκευή του γραφήματος της y=αx μέσω πύκνωσης των σημείων του. Άρα, το μικροπείραμα ως μονάδα διδασκαλίας συνέχει λειτουργικές σταθερές όπως 'η πύκνωση σημείων βοηθάει την κατασκευή νοήματος για τη συνάρτηση ως διαδικασία', 'η συνάρτηση ως σύνολο σημείων ενισχύει την κατανόηση της σύνδεσης αναλόγων ποσών με την y=αx και τους μετασχηματισμούς της'. Αναφορικά με την διαχείριση της διερεύνησης σε επίπεδο διδασκαλίας κατά τον $2^{η}$ κύκλο εφαρμογής, οι ενδείξεις από τις συζητήσεις ερευνητή-

εκπαιδευτικού δείχνουν ότι ο εκπαιδευτικός ακολούθησε σταθερά τον κύκλο ερώτηση-διερεύνηση-συζήτηση αφιερώνοντας περισσότερο χρόνο για διερεύνηση και διαπραγμάτευση. Οι λειτουργικές σταθερές που φαίνεται να επηρεάζουν τον μετασχηματισμό της γνώσης και της πρακτικής του εκπαιδευτικού, αλλά και την εξέλιξη της δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας, σχετίζονται με την εμπειρία του 1ου κύκλου εφαρμογής και τη διερεύνηση της διδασκαλίας με κύριους άξονες: (α) την κατασκευή της μαθηματικής γνώσης μέσα από τη χρήση της τεχνολογίας και (β) την ενσωμάτωση της διερεύνησης στη σχολική τάξη.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Η ανάλυση που προηγήθηκε ανέδειξε ότι η δημιουργία μονάδων διδασκαλίας με ψηφιακά εργαλεία για τα μαθηματικά αποτελεί ένα πρόσφορο πεδίο μελέτης της επαγγελματικής ανάπτυξης του εκπαιδευτικού στο επίπεδο της γνώσης και της εξέλιξης του διδακτικού του σχεδιασμού. Τα κύρια ευρήματα που σηματοδοτούν εξέλιξη μπορούν να εντοπιστούν στην ανάπτυξη μονάδων διδασκαλίας που στοχεύουν στην δημιουργία εστιών ενίσχυσης της κατανόησης και της διερεύνησης από την πλευρά των μαθητών (π.χ. χρήση μικροπειραμάτων για την νοηματοδότηση των συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης).

Σημειώσεις: [1] Πρόγραμμα Σπουδών "Μαθηματικά στην Α/θμια και Β/θμια Εκπαίδευση". «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450. ΙΕΠ, Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2012. [2] Τα μικροπειράματα συνδέονται είτε με ορισμούς και μαθηματικές ιδιότητες, είτε με δραστηριότητες και ασκήσεις των σχολικών βιβλίων. [3] Το FP προσφέρει τρία παράθυρα αναπαράστασης για τις συναρτήσεις: Πίνακας, Γράφημα και Υπολογιστής. Οι γραφικές παραστάσεις μπορεί να σχεδιαστούν με πολλούς τρόπους, π.χ. εισαγωγή τύπου, αποστολή σημείων (x, y) από τον Πίνακα (δημιουργία στηλών "x" και "y", δυνατότητα να εισαχθούν ενδιάμεσες τιμές για πύκνωση των σημείων στο Γράφημα). Ειδικά εργαλεία (π.χ. ελαστικού χειρισμού) επιτρέπουν τον μετασχηματισμό συναρτήσεων (μετατόπιση, ανάκλαση, αυξομείωση) με απευθείας χειρισμό του γραφήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009) Towards new documentation systems for teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199-218.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2011) Mathematics teacher education advanced methods : an example in dynamic geometry. *ZDM*, 43(3), 399-411.

Laborde, C. (2001). The use of new technologies as a vehicle for restructuring teachers' mathematics. In T. Cooney & F. L. Lin (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 87-109). Kluwer.

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2003) Technology and mathematics education: A multidimensional study of the evolution of research and

innovation. In A.J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 239–271). Kluwer.

Ponte, P., Ax, J., Beijaard, D., & Wubbels, T. (2004) Teachers' development of professional knowledge through action research and the facilitation of this by teacher educators. *Teaching and Teacher Education*, 20, 571 – 588.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ ΚΑΙ EUCLIDRAW: Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΑΙ Η ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΣΤΟ ΨΗΦΙΑΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΟΥ EUCLIDRAW

Παπαγιαννακοπούλου Βασιλική[1], Χατζηκυριάκου Κώστας[2]
Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
[1]vikipapagiannakopoulou@gmail.com, [2]kxatzkyr@uth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή αφορά ένα διδακτικό πείραμα στο μάθημα της Γεωμετρίας της Β Λυκείου στη διδακτική ενότητα ΕΜΒΑΔΑ, με κεντρικό θέμα τον τετραγωνισμό. Αναδεικνύοντας την ευκλείδεια αντίληψη για το εμβαδόν, απέναντι στην κυρίαρχη σήμερα αριθμητική και τυποκρατική αντίληψη, επιχειρούμε να παρατηρήσουμε τον τρόπο που εξελίσσεται η διδασκαλία και η μάθησή του, καθώς οι μαθητές, οι μαθήτριες και η καθηγήτρια των Μαθηματικών της τάξης συνεργάζονται και χρησιμοποιούν τα εργαλεία που προσφέρει το ψηφιακό περιβάλλον EuclidDraw.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα μοντέρνα μαθηματικά, το εμβαδόν ενός σχήματος δηλώνεται με έναν αριθμό. Στα Ευκλείδεια *Στοιχεία* όμως, ούτε μήκη ευθυγράμμων τμημάτων δηλώνονται με αριθμούς, ούτε εμβαδά σχημάτων. Όταν ο Ευκλείδης θέλει να δείξει ότι δύο σχήματα έχουν ίσα εμβαδά, αποδεικνύει ότι το ένα μπορεί να χωριστεί σε μέρη τέτοια ώστε, αν κατάλληλα αναπροσαρμοστούν, να παράγουν το άλλο σχήμα (Bunt, Jones, & Bedient, 1981). Σήμερα δεν διδάσκουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία, αλλά μία αριθμητικοποιημένη μετάλλαξή της. Ο τρόπος μάλιστα με τον οποίο διδάσκεται σήμερα η Γεωμετρία, ως παραγωγικός συμπερασμός που προϋποθέτει το σύστημα αρίθμησης των πραγματικών αριθμών, όχι μόνο αποτυγχάνει να ανακατασκευάσει το νόημα των αξιωμάτων, αλλά μπορεί να οδηγήσει στην ολοκληρωτική εξαφάνιση της αναφορικής έννοιας της γεωμετρίας (Patronis & Thomaidis, 1997).

Η εκπαιδευτική έρευνα αποκαλύπτει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα στο πεδίο της μέτρησης του εμβαδού ενός επιπέδου χωρίου και ότι η κατανόηση των διαδικασιών που χρησιμοποιούνται είναι μάλλον επιφανειακή και φτωχή (Zacharos, 2006). Μία από τις αιτίες είναι ο τρόπος που διδάσκεται το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο. Ευθύνες έχουν αποδοθεί στην έμφαση που δίνεται από νωρίς στη χρήση έτοιμων τύπων (Κορδάκη & Πόταρη, 1997; Patronis & Thomaidis, 1997). Άλλωστε, η μέτρηση του μήκους γίνεται άμεσα με τον χάρακα, ενώ η μέτρηση του εμβαδού γίνεται έμμεσα και αυτό μπορεί να δημιουργεί θολή ή στρεβλή αντίληψη για την έννοια του εμβαδού (Battista, 1982). Έτσι παρατηρούνται συχνά παρανοήσεις, όπως

η σύγχυση της περιμέτρου με την επιφάνεια (Kouba, Brown, Carpender, Lindquist, Silver, & Swafford, 1988) ή η «*αυταπάτη της γραμμικότητας»,* η οποία οδηγεί για παράδειγμα έναν μαθητή στον διπλασιασμό των πλευρών ενός τετραγώνου προκειμένου να διπλασιάσει το εμβαδόν του (De Bock, Verschaffel, & Janssens, 1998; Modestou, Gagatsis, & Pitta-Pantazi, 2004; Kordaki & Pottari, 1998; Tsamir & Mandel, 2000). Έχει παρατηρηθεί επίσης ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη διατήρηση του εμβαδού σε άνισα ή ακανόνιστα σχήματα (Kordaki & Balomenou, 2006; Mayer & Beattys, 1986; Duady & Perrin, 1986).

Ειδικότερα, ο τρόπος με τον οποίο διδάσκεται σήμερα το εμβαδόν στη Γεωμετρία της Β΄ Λυκείου είναι αποσπασματικός, δίνει ιδιαίτερη έμφαση σε υπολογιστικές διαδικασίες και δεν βοηθά στην οικοδόμηση από τους ίδιους τους μαθητές της έννοιας του εμβαδού. Θελήσαμε να μελετήσουμε τι θα συμβεί εάν ο ευκλείδειος τετραγωνισμός αντικαταστήσει την κυρίαρχη σήμερα, τυποκρατική, αριθμητική προσέγγιση και διδαχθεί με τη βοήθεια ενός ψηφιακού περιβάλλοντος.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για τις ανάγκες του πειράματός μας σχεδιάσαμε δραστηριότητες τέτοιες ώστε να οικοδομούνται προοδευτικά οι ζητούμενες έννοιες, γνώσεις και δεξιότητες που απαιτούνται ώστε να μπορέσει κάποιος να μετασχηματίσει χωρία του επιπέδου σε ισοδύναμα τετράγωνα. Για την ολοκλήρωση του διδακτικού πειράματος απαιτήθηκαν 7 διδακτικές ώρες, οι οποίες κατανεμήθηκαν σε 3 παρεμβάσεις.

Στις διδασκαλίες χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας EucliDraw (EUC) που είναι ένα πρόγραμμα για τον σχεδιασμό σχημάτων της Ευκλείδειας επιπεδομετρίας. Το EUC είναι αποτέλεσμα μακροχρόνιας προσπάθειας, που ξεκίνησε πριν από το 1990 στο Πανεπιστήμιο Κρήτης και συνεχίζεται έως σήμερα. Το δυναμικό περιβάλλον του EUC επιλέχθηκε επειδή προσομοιώνει το εργαλείο του διαβήτη, μπορεί να παράγει με ένα "κλικ" το εξαρτημένο αντίγραφο ενός σχήματος και κυρίως επειδή διαθέτει τη δυνατότητα διαμέρισης ενός πολυγώνου κατά μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος. Οι λειτουργίες αυτές μας φάνηκαν ιδιαίτερα χρήσιμες στην απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος και στον τετραγωνισμό ενός πολυγωνικού χωρίου. Πριν από τις παρεμβάσεις, οι μαθητές και οι μαθήτριες εκπαιδεύτηκαν επί ένα δίωρο στις βασικές λειτουργίες του λογισμικού.

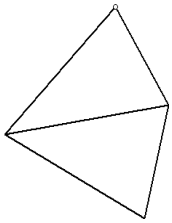
Στην έρευνα συμμετείχαν 22 μαθητές και μαθήτριες της β΄ τάξης ενός επαρχιακού λυκείου. Οι 10 ήταν της θετικής/τεχνολογικής κατεύθυνσης, στην πλειοψηφία τους (6-7) μέτριας επίδοσης (γραπτά 12-16/20). Οι επιδόσεις 10 μαθητών και μαθητριών (σε σύνολο 12) της θεωρητικής κατεύθυνσης,

Η σύνθεση	Ζευγάρια	Τριάδες
Καλός-Μέτριος	6	0
Αδύναμος-Αδύναμος	2	2

ειδικά στη γεωμετρία, ήταν πολύ χαμηλές (γραπτά με βαθμολογία 0-5 στα 20). Η τάξη χωρίστηκε σε οχτώ ομάδες των δύο ατόμων και 2 ομάδες των τριών. Οι ομάδες διαμορφώθηκαν ελεύθερα. Η κατανομή των ομάδων φαίνεται στον διπλανό πίνακα. Οι παρεμβάσεις πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο πληροφορικής, όπου υπήρχαν διαθέσιμοι δέκα υπολογιστές. Σε κάθε παρέμβαση, η καθηγήτρια-ερευνήτρια χρησιμοποιούσε ένα ή δύο φύλλα εργασίας και ένα φύλλο αξιολόγησης. Όση ώρα οι μαθητές και οι μαθήτριες εργάζονταν στο υπολογιστικό περιβάλλον του EUC, οι κινήσεις τους καταγράφονταν από ένα λογισμικό ψηφιακής καταγραφής οθόνης (screen-recorder). Μετά το πέρας κάθε παρέμβασης, η καθηγήτρια έπαιρνε τα αρχεία των βίντεο που είχαν δημιουργηθεί σε κάθε υπολογιστή. Έτσι αργότερα μπορούσε να δει ακριβώς ό,τι έκανε κάθε ομάδα σε κάθε δραστηριότητα. Οι περισσότερες εικόνες που ακολουθούν είναι στιγμιότυπα από τα βίντεο των ομάδων και η ανάλυση των παρεμβάσεων βασίστηκε πάνω στη μελέτη αυτών των βίντεο.

2.1. ΠΡΩΤΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

2.1.1. Ισοδύναμα τρίγωνα (1η διδακτική ώρα)

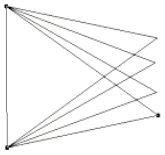


Σχ.1

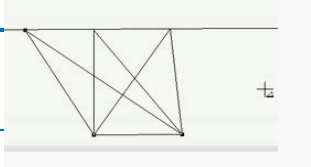
Η καθηγήτρια όρισε τα ισεμβαδικά χωρία ως ισοδύναμα. Στη συνέχεια, μέσω διαλόγου, διερεύνησε τις απόψεις των παιδιών σχετικά με τις έννοιες ίσα τρίγωνα και ισεμβαδικά τρίγωνα. Φάνηκε πως οι μαθητές δεν είχαν ξεκάθαρη γνώμη για το αν δύο άνισα τρίγωνα μπορεί να είναι ισεμβαδικά.

Τότε η καθηγήτρια ζήτησε από τις ομάδες να σχεδιάσουν στο φύλλο σχεδίασης του EUC, δύο ισοδύναμα οξυγώνια τρίγωνα με μία κοινή πλευρά. Όλα τα παιδιά ανεξαιρέτως αφού σχεδίασαν αρχικά ένα οξυγώνιο τρίγωνο, σχεδίασαν ένα δεύτερο, ίσο με και κάτω από το πρώτο, διατηρώντας κοινή τη βάση (Σχ.1).

Η καθηγήτρια ζήτησε τότε ένα ισοδύναμο με το πρώτο τρίγωνο αλλά όχι ίσο με αυτό. Όταν φάνηκε ότι δεν μπορούσαν να βρουν τη λύση, η καθηγήτρια τα παρότρυνε να σχεδιάσουν τρίγωνα, με μία κοινή βάση, που οι κορυφές τους να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο. Στη συνέχεια διατύπωσε το ερώτημα, *Που πρέπει να βρίσκονται αυτές οι κορυφές ώστε τα τρίγωνα να έχουν το ίδιο ύψος*; Τα περισσότερα παιδιά κατάλαβαν ότι έπρεπε να φέρουν παράλληλη από την κορυφή προς τη βάση. Οι ομάδες με τους πιο αδύναμους μαθητές σχεδίαζαν τρίγωνα κρατώντας σταθερό το ύψος «με το μάτι» (Σχ.2), χωρίς όμως να συνειδητοποιούν ότι όλες αυτές οι κορυφές βρίσκονταν πάνω στην ίδια, παράλληλη προς τη βάση του τριγώνου, ευθεία. Χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο και την παρέμβαση της



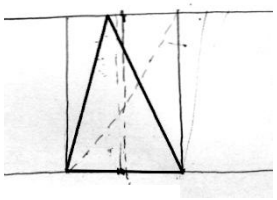
Σχ.2

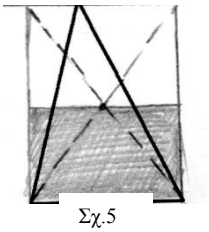


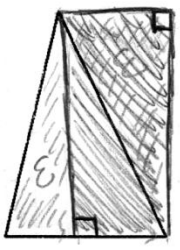
καθηγήτριας για να οδηγηθούν στο συμπέρασμα, ότι τα σημεία που ισαπέχουν από τη βάση του τριγώνου ανήκουν σε ευθεία παράλληλη προς αυτή. Γιατί όμως η πλειοψηφία των μαθητών και των μαθητριών δεν μπόρεσε να οδηγηθεί σε αυτό το συμπέρασμα εξαρχής; Κατά πρώτο και κύριο λόγο, φάνηκε ότι, για πολλούς μαθητές και μαθήτριες, το ύψος τριγώνου από μία κορυφή δεν γίνεται αντιληπτό ως απόσταση της κορυφής αυτής από την απέναντι πλευρά. Ίσως και κατά ένα δεύτερο λόγο, η έννοια της παραλληλίας να μην είναι ταυτόσημη με την έννοια της σταθερής απόστασης μεταξύ δύο ευθειών. Τελικά διατυπώθηκε το γενικό συμπέρασμα ότι *δύο ή περισσότερα τρίγωνα που έχουν κοινή βάση ή κατά προέκταση ίσες βάσεις και οι κορυφές τους βρίσκονται πάνω σε ευθεία παράλληλη προς τη βάση, είναι ισοδύναμα*. Έτσι τα παιδιά σχεδίασαν, εύκολα πια, ένα ορθογώνιο και ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο ισοδύναμα με το αρχικό τρίγωνο (Σχ.3).

2.1.2. Ορθογώνιο και τετράγωνο ισοδύναμο ενός τριγώνου (2η & 3η διδακτική ώρα)

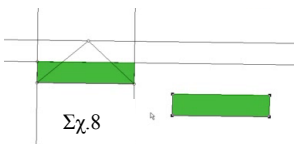
Η επόμενη δραστηριότητα ήταν ατομική και έγινε και σε χαρτί και στον υπολογιστή. Οι μαθητές σ' αυτή τη δραστηριότητα έπρεπε να σχεδιάσουν ένα τυχαίο τρίγωνο και στη συνέχεια να σχεδιάσουν το ισοδύναμο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τα περισσότερα παιδιά σχεδίασαν αρχικά ένα ορθογώνιο τρίγωνο ισοδύναμο με αυτό που ήταν σχεδιασμένο ήδη πάνω στο χαρτί, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη εμπειρία. Στη συνέχεια σχεδίασαν το συμμετρικό του, δημιουργώντας ένα ορθογώνιο που ήταν φανερό ότι είχε διπλάσιο εμβαδόν. Άρα έπρεπε να το «κόψουν» στη μέση. Σχεδίασαν λοιπόν τη μεσοπαράλληλη (Σχ.4, Σχ.5).


Σχ.4

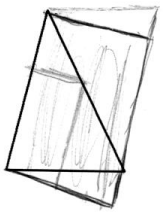

Σχ.5


Σχ.6

Ένας μαθητής θεώρησε το τρίγωνο ισοσκελές, γιατί έτσι του «φάνηκε με το μάτι», οπότε έφερε το ύψος του τριγώνου και σχεδίασε το ορθογώνιο που φαίνεται στο σχήμα 6. Ο μαθητής θεώρησε με αυτό τον τρόπο ότι το ύψος ήταν μεσοκάθετος και επομένως ότι «έκοβε» το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Επομένως διπλασιάζοντας το ένα από τα δύο έφτιαξε το ισοδύναμο ορθογώνιο.


Σχ.8

Ένας άλλος, στην προσπάθεια να υποδιπλασιάσει το εμβαδόν του ορθογωνίου, σχεδίασε ένα ορθογώνιο με πλευρές που ήταν *και οι δύο* υποδιπλάσιες του αρχικού (Σχ.7). Τα παιδιά επανέλαβαν τη διαδικασία και στον υπολογιστή (Σχ.8).

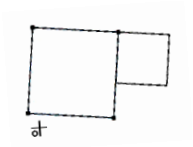

Σχ.7

Κατά την 3η διδακτική ώρα, προβήκαμε σε καθοδηγούμενη διδασκαλία, εξηγώντας τη διαδικασία για την εύρεση του ισοδύναμου τετραγώνου ενός ορθογωνίου

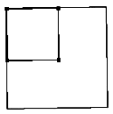
παραλληλογράμμου με διαδοχικά βήματα που δίνονταν σε φύλλο εργασίας. Από τους μαθητές αναμενόταν να θυμηθούν προηγούμενες γνώσεις καθώς και να διατυπώσουν το συμπέρασμα. Ολοκληρώθηκε έτσι η πρώτη παρέμβαση που αφορούσε τον τετραγωνισμό ενός οποιουδήποτε τριγώνου.

2.2. ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ (4η & 5η διδακτική ώρα)

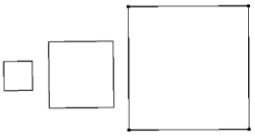
Αρχικά δόθηκε στα παιδιά ένα φύλλο εργασίας με την οδηγία να κατασκευάσουν πρώτα δύο άνισα τετράγωνα και ύστερα ένα τετράγωνο που θα είχε εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο αρχικών τετραγώνων. Οι περισσότεροι αρχικά τοποθετούσαν τα δύο τετράγωνα δίπλα-δίπλα (Σχ.9), ή το ένα μέσα στο άλλο (Σχ.10), ή κατά σειρά μεγέθους, προσπαθώντας ίσως να προσεγγίσουν με κάποιο τρόπο τη λύση (Σχ.11). Κάποιοι πρόσθεσαν και κάποιες μετρήσεις (Σχ.12)



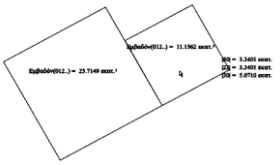
Σχ.9



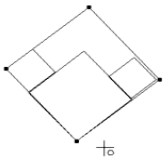
Σχ.10



Σχ.11



Σχ.12



Σχ.13

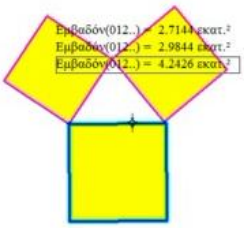
Ένας προσπάθησε να «χτίσει» ένα καινούριο τετράγωνο *με πλευρά ίση με το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών* (Σχ.13), καθοδηγούμενος από την «αυταπάτη της γραμμικότητας».

Ύστερα από περίπου 5 λεπτά, έξι από τις δέκα ομάδες είχαν βρει τη λύση, αναγνωρίζοντας ότι το ζητούμενο τετράγωνο είναι αυτό της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές, τις πλευρές των δύο αρχικών τετραγώνων.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση του Γ. που επέδειξε μεγάλη ευρηματικότητα τόσο στον χειρισμό του προγράμματος, ανακαλύπτοντας εργαλεία και λειτουργίες που η καθηγήτρια δεν είχε αναφέρει, όσο και στη διερεύνηση λύσης. Αξιοποιώντας το εργαλείο της μέτρησης και της πρόσθεσης, αφού σχεδίασε δύο τετράγωνα, μέτρησε τα εμβαδά τους και τα πρόσθεσε (μέσω του λογισμικού). Στη συνέχεια σχεδίασε ένα νέο τετράγωνο και μέτρησε το εμβαδόν του. Αξιοποιώντας την δυναμικότητα του περιβάλλοντος, μεγάλωνε το νέο αυτό τετράγωνο, «τραβώντας» το από μία κορυφή του, μέχρις ότου προσεγγίσει ικανοποιητικά το ποθητό άθροισμα. Παρόμοια στρατηγική για τον σχεδιασμό ισοδύναμων τριγώνων, εντοπίζεται και στο (Kordaki & Balomenou, 2006).

Μετά από παρεμβάσεις της καθηγήτριας με συμπληρωματικές ερωτήσεις κατέληξαν και τα υπόλοιπα παιδιά στη λύση του Πυθαγορείου θεωρήματος που κατανοήθηκε ως αθροιστική μηχανή εμβαδών τετραγώνων. Πριν από τις παρεμβάσεις οι περισσότεροι μαθητές το αντιλαμβάνονταν κυρίως ως μία αλγεβρική σχέση μεταξύ των μηκών των πλευρών των ορθογωνίων τριγώνων.

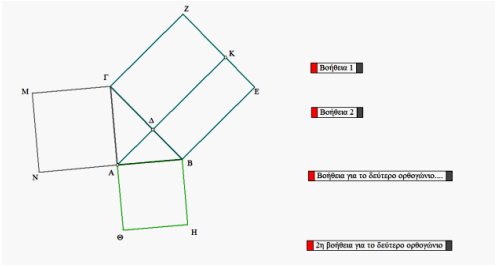
Κάποιοι από αυτούς επαλήθευσαν το θεώρημα μετρώντας τα εμβαδά. Αυτό επιβεβαιώνει την παρατήρηση ότι κάποιοι μαθητές παρ' ότι έχουν διδαχθεί την απόδειξη ενός θεωρήματος, επιζητούν την εμπειρική επαλήθευσή του, παρ' όλο που ισχυρίζονται ότι έχουν καταλάβει την απόδειξη (Fischbein, 1982). Η μία ομάδα των τριών κοριτσιών, όλες εξαιρετικά αδύναμες στα Μαθηματικά, δεν «βλέπουν» ότι οι πλευρές των δύο τετραγώνων που σχεδίασαν δεν σχηματίζουν ορθή γωνία (εικόνα Σχ.14). Το πρόβλημα της αναγνώρισης της ορθής γωνίας όταν οι πλευρές της δεν είναι σε οριζόντια και κατακόρυφη θέση, έχει αναφερθεί από πολλούς ερευνητές (Gal & Linchevski, 2010; Hershkowitz, 1989(b)). Μετράν τα εμβαδά και μόνον τότε αποφασίζουν ότι κάτι πάει στραβά με την κατασκευή τους. Την ξανασχεδιάζουν, προσέχοντας αυτή τη φορά να τοποθετήσουν τα τετράγωνα σε ορθή γωνία.



Σχ.14

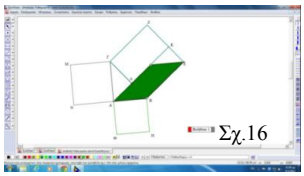
2.2.1. Η απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος κατά Ευκλείδη

Οι μαθητές και οι μαθήτριες δυσκολεύονται στην παραγωγή ολοκληρωμένων αποδείξεων (Martin & McCrone, 2003) και γενικά θα έλεγε κανείς πως οι προσπάθειες να διδάξουμε την μαθηματική απόδειξη στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (συνήθως σε περιορισμένο χρονικό διάστημα) δεν είναι πετυχημένες (Clements & Battista, 1992). Έτσι σκεφτήκαμε πως με τη βοήθεια του λογισμικού θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε έναν πιο ευχάριστο και «εύκολο» δρόμο.



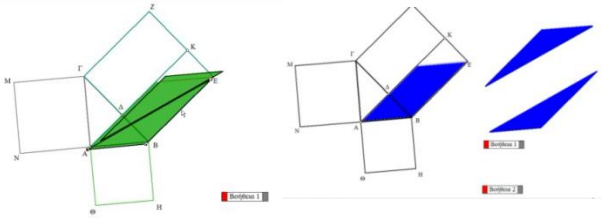
Σχ.15

Οι μαθητές και οι μαθήτριες ανοίγοντας ένα έτοιμο αρχείο EUC είδαν το παρακάτω γνώριμο σχήμα του Πυθαγορείου θεωρήματος στο οποίο, η ΔΚ, προέκταση του ύψους ΑΔ, διαμερίζει το τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα στα δύο ορθογώνια ΒΕΚΔ και ΔΚΖΓ (Σχ.15).


Σχ.16

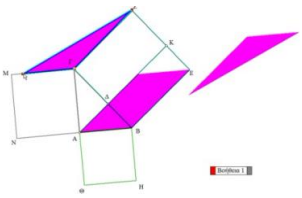
Ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι καθένα από τα δύο ορθογώνια είναι ισοδύναμο αντίστοιχα με ένα από τα δύο μικρότερα τετράγωνα. Η καθηγήτρια οδήγησε τα παιδιά στα διαδοχικά βήματα που ακολούθησε ο Ευκλείδης. Αρχικά λοιπόν τους ζήτησε να σχεδιάσουν ένα παραλληλόγραμμο ισοδύναμο με το ορθογώνιο ΒΕΚΔ. Τα παιδιά το έκαναν με ευκολία (Σχ.16).

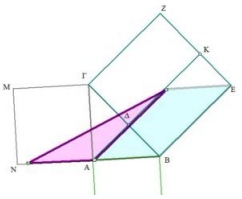
Στη συνέχεια τους είπε να το 'κόψουν' κατά μήκος της μεγάλης διαγωνίου του (Σχ.17 – Σχ.18).


Σχ.17

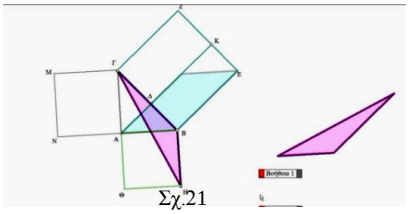
Σχ.18

Έπειτα να μετακινήσουν το 'μισό' του παραλληλογράμμου, το τρίγωνο, και να ψάξουν να βρουν ένα ίσο τρίγωνο με αυτό στο υπάρχον σχήμα. Αρχικά κάποια παιδιά το τοποθέτησαν όπως φαίνεται στα σχήματα Σχ.19 & Σχ.20.

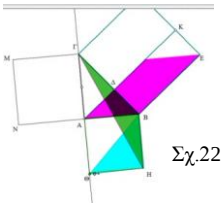

Σχ.19

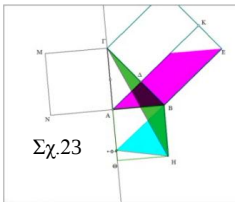

Σχ.20

Η καθηγήτρια παρενέβη και τους ζήτησε να βρουν ενα τρίγωνο που οι κορυφές του να υπάρχουν ως κορυφές στο υπάρχον σχήμα. Τελικά μετά από δοκιμές όλα τα παιδιά, βρήκαν τη θέση στην οποία 'κούμπωνε' το τρίγωνο (Σχ.21). Στη συνέχεια η καθηγήτρια τους ζήτησε να δικαιολογήσουν γραπτώς, με βάση κάποιο από τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, γιατί τα δύο τρίγωνα (το αρχικό μισό παρ/μο και αυτό που βρήκαν) ήταν ίσα. Στην γραπτή αιτιολόγηση προέκυψαν δυσκολίες. Μόνον τρεις από τις δέκα ομάδες συμπλήρωσαν σωστά το κριτήριο με επαρκή αιτιολόγηση, άλλες τρεις έγραψαν τα ίσα στοιχεία χωρίς αιτιολόγηση και οι υπόλοιπες τέσσερις, έγραψαν λάθος τα στοιχεία.


Σχ.21

Στη συνέχεια, η καθηγήτρια τους είπε να βρουν ένα ισοδύναμο τρίγωνο με αυτό στο σχήμα, που να έχει την ίδια βάση και να είναι το μισό τετράγωνο. Τα παιδιά, αξιοποιώντας την προηγούμενη εμπειρία τους με τα ισοδύναμα τρίγωνα, 'γλίστρησαν' την κορυφή Γ κατά μήκος της ευθείας ΓΘ και κατέληξαν στο ισοδύναμο μισό του τετραγώνου της πλευράς ΑΒ (Σχ.22, Σχ.23).

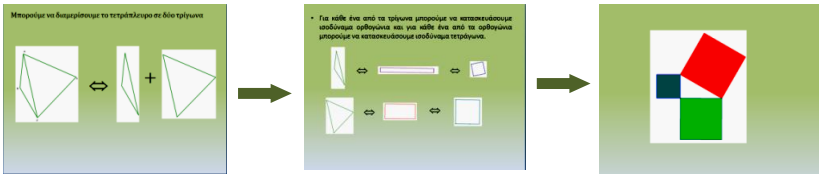

Σχ.22


Σχ.23

Ήταν φανερό λοιπόν ότι με τη διαδικασία αυτή είχαμε αποδείξει την ισοδυναμία ολόκληρου του ορθογωνίου ΔΒΕΚ με το τετράγωνο της πλευράς ΑΒ. Στη συνέχεια όλες οι ομάδες επανέλαβαν μόνες τους την ίδια διαδικασία για να αποδείξουν ότι και το ορθογώνιο ΔΚΖΓ ήταν ισοδύναμο με το τετράγωνο της πλευράς ΑΓ. Όλες οι ομάδες τα κατάφεραν με σχετική ευκολία.

2.3. ΤΡΙΤΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ (6η & 7η διδακτική ώρα)

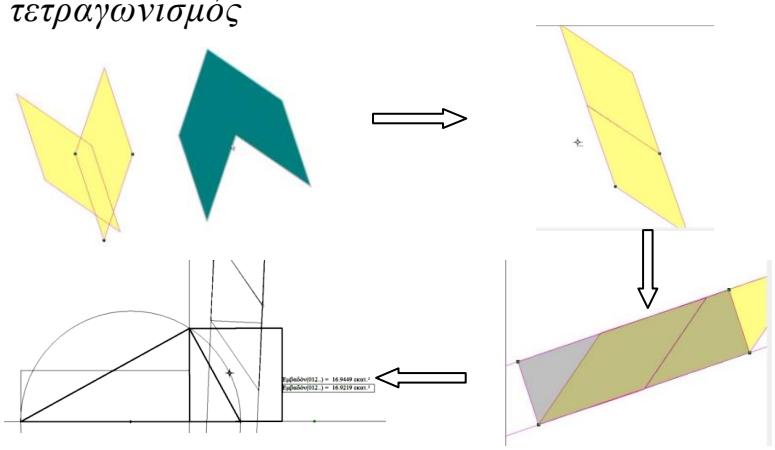
Αρχικά συζητήθηκε πώς θα μπορούσε, σύμφωνα με την ευκλείδεια πρακτική, να τετραγωνιστεί ένα πολυγωνικό χωρίο. Όταν κάποια παιδιά πρότειναν την διαμέριση του χωρίου σε τρίγωνα, η καθηγήτρια βοήθησε να προχωρήσουν αυτή την ιδέα περισσότερο για να καταλήξουν στο σκεπτικό που φαίνεται στις διπλανές εικόνες.




Σχ.24

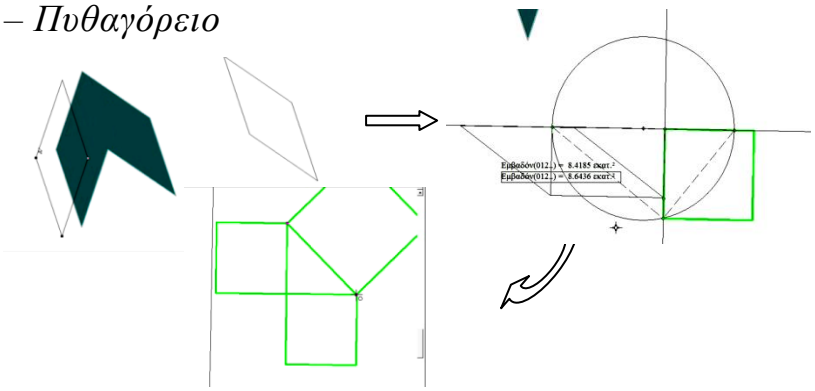
Στη συνέχεια, η καθηγήτρια υπέδειξε στους μαθητές να 'ανοίξουν' ένα έτοιμο αρχείο του EUC και να τετραγωνίσουν, με όποιο τρόπο ήθελαν, το χωρίο που θα έβλεπαν στην οθόνη τους (Σχ.24). Οι ομάδες δούλεψαν αυτόνομα χωρίς καμία βοήθεια από την πλευρά της καθηγήτριας. Αναπτύχθηκαν οι εξής στρατηγικές:

Στρατηγική 1: *Διαμέριση του αρχικού πολυγώνου σε 2 κομμάτια-επανένωση-τετραγωνισμός*



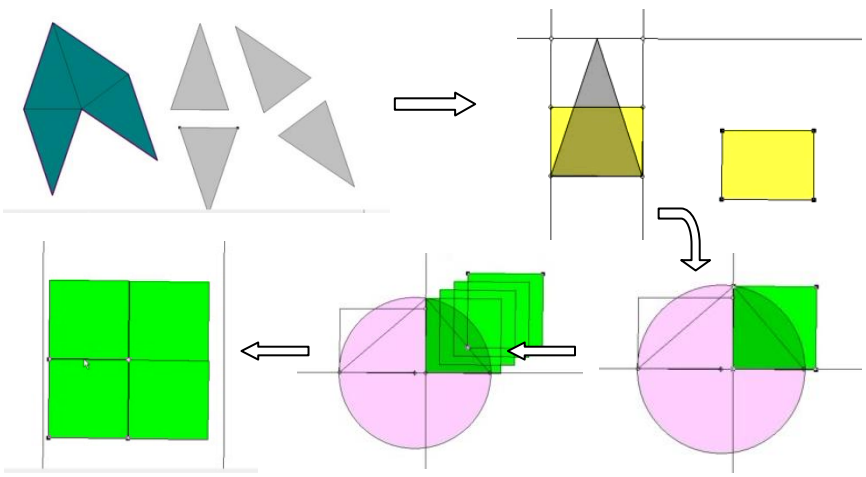
Χώρισαν το πολύγωνο σε δύο κομμάτια, τα οποία τοποθετώντας το ένα πάνω στο άλλο διαπίστωσαν ότι είναι ίσα. Ύστερα τα ένωσαν σε ένα παραλληλόγραμμο. Με αυτό τον τρόπο σχημάτισαν ένα παραλληλόγραμμο ισοδύναμο με το αρχικό μη-κυρτό πολύγωνο. Στη συνέχεια σχεδίασαν ορθογώνιο ισοδύναμο του παραλληλογράμμου και μετά το τετραγώνισαν.

Στρατηγική 2 : *Διαμέριση του αρχικού πολυγώνου σε 2 κομμάτια – τετραγωνισμός – Πυθαγόρειο*



Χώρισαν το αρχικό πολύγωνο σε δύο κομμάτια που διαπίστωσαν ότι είναι ίσα. Τετραγώνισαν το ένα. Έφτιαξαν ένα αντίγραφο. Με τη βοήθεια του Πυθαγορείου, σχεδίασαν το τετράγωνο με το διπλάσιο εμβαδό.

Στρατηγική 3: *Διαμέριση του αρχικού πολυγώνου σε 4 ίσα κομμάτια*



Εδώ τα παιδιά διαμέρισαν το αρχικό πολύγωνο σε 4 κομμάτια που διαπίστωναν ότι είναι ίσα μεταξύ τους. Τετραγώνισαν το ένα και παρήγαγαν άλλα τρία αντίγραφα. Συνέθεσαν τα τέσσερα ίσα τετράγωνα σε ένα!

Δύο ομάδες δεν κατάφεραν να ολοκληρώσουν τον τετραγωνισμό του χωρίου. Οι δύο αυτές ομάδες ήταν οι δύο τριάδες κοριτσιών με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά, παρ' όλα αυτά προσπάθησαν φιλότιμα ως το τέλος.

3. ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο διδακτικό πείραμα που περιγράψαμε, είχαμε την πρόθεση μέσα από τη 'διαδρομή' του τετραγωνισμού και της ισεμβαδικότητας, να βοηθήσουμε τους μαθητές και τις μαθήτριες να κατανοήσουν το εμβαδόν με την ευκλείδεια έννοια, που είναι η ισοδυναμία του μέτρου της έκτασης που καταλαμβάνει το σχήμα στο επίπεδο. Παράλληλα θελήσαμε να αναδείξουμε τη γεωμετρική ερμηνεία του Πυθαγορείου και των μετρικών σχέσεων στα ορθογώνια τρίγωνα. Θέλαμε επίσης να δουν τη γεωμετρική κατασκευή ως αναγκαίο εργαλείο για τη σχεδίαση ισοδύναμων αντικειμένων με βάση κάποια ιδιότητα (στην περίπτωσή μας το εμβαδό).

Στο τέλος των παρεμβάσεων δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο με ερωτήσεις του τύπου 'τι σας άρεσε;', 'τι σας δυσκόλεψε;', 'πως σας φάνηκε…' 'τι καταλάβατε από…' κ.λ.π, καθώς και ένας αριθμός ερωτήσεων-ασκήσεων με σκοπό να αποτιμήσουμε τι 'έμεινε' στους μαθητές και στις μαθήτριες μετά από αυτές τις διδασκαλίες. Από τις απαντήσεις τους στο ερωτηματολόγιο, αλλά και από τις επιδόσεις τους στις τελικές εξετάσεις, συμπεράναμε, σχετικά με την επίτευξη των γνωστικών στόχων που είχαμε θέσει, ότι η ισοδυναμία μεταξύ τριγώνων και τριγώνων-ορθογωνίων αποδείχθηκε η καλύτερα εμπεδωμένη έννοια. Πολύ καλά αποτελέσματα είχαμε και ως προς την κατανόηση του πυθαγορείου θεωρήματος ως αθροιστική μηχανή εμβαδών. Η γεωμετρική κατασκευή όμως του τετραγωνισμού ενός ορθογωνίου, νομίζουμε ότι παρέμεινε μία μηχανιστική διαδικασία η αναγκαιότητα της οποίας δεν έγινε τελείως κατανοητή.

Συμπληρωματικά, ως προς την ανταπόκριση των μαθητών και των μαθητριών σε αυτού του είδους τη διδασκαλία, τη διερεύνηση στο δυναμικό περιβάλλον του EucliDraw και τη γενικότερη γεωμετρική αντίληψη των παιδιών, προέκυψαν τα εξής:

Οι μαθητές και οι μαθήτριες γέμιζαν τα σχήματα με χρώμα το οποίο φάνηκε ότι τους βοήθησε στα σύνθετα σχήματα και τις κατασκευές. Είναι γνωστό ότι υπάρχουν δυσκολίες και παρανοήσεις στην οπτική αντίληψη σύνθετων σχημάτων, που σχετίζεται με την εγγύτητα, τον εγκλεισμό και τη συνέχεια (Gal & Linchevski, 2010). Σε ότι αφορά λοιπόν την 'απόδειξη' φάνηκε ότι με τη βοήθεια του λογισμικού, οι μαθητές και οι μαθήτριες είχαν την ευκαιρία να χαρούν την κατασκευή μιας «δύσκολης» απόδειξης, όπως αυτή του Ευκλείδη για το Πυθαγόρειο θεώρημα, χωρίς να τους φανεί η διαδικασία βαρετή και ανούσια (Hanna, 2000). Επιπλέον όλοι και όλες κατάφεραν να την ολοκληρώσουν και να την καταλάβουν. Έχει παρατηρηθεί εξάλλου ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούν να πραγματευτούν τα γεωμετρικά προβλήματα πολύ καλύτερα, εάν τους δοθεί η ευκαιρία να εργαστούν κατ' ευθείαν

με μία οπτική αντιμετώπιση του προβλήματος, παρά εάν εργαστούν με μια αφηρημένη αντιπροσώπευση του προβλήματος (Τουμάσης, 1999; Hanna, 2000). Για παράδειγμα, η δυνατότητα «drag & drop» του λογισμικού βοήθησε πολύ στην ανακάλυψη ίσων τριγώνων, κατά τη διαδικασία απόδειξης του πυθαγορείου θεωρήματος. Η λεκτική υπόδειξη της ισότητας αυτών των τριγώνων αν η απόδειξη γινόταν στο χαρτί δεν θα ήταν το ίδιο «ορατή» σε όλους και όλες. Όταν απαιτείται νοερός μετασχηματισμός, η απόδειξη της ισότητας δύο τριγώνων γίνεται δυσκολότερη (Gal & Linchevski, 2010). Από την άλλη όμως ενώ το λογισμικό βοήθησε πολύ στην κατανόηση της απόδειξης του Πυθαγορείου θεωρήματος, πολλοί μαθητές και μαθήτριες συνάντησαν ανυπέρβλητες δυσκολίες στο να την διατυπώσουν στην συνήθη, ημισυμβολική μαθηματική γλώσσα.

Η αλγεβρική αντίληψη των μαθητών και των μαθητριών έχει αναπτυχθεί άνισα εις βάρος της γεωμετρικής. Αυτός είναι και ένας από τους λόγους που συναντούν δυσκολίες στη διαχείριση προβλημάτων της ευκλείδειας γεωμετρίας που έχει τη δική της λογική. Η υιοθέτηση ενός γεωμετρικού τρόπου σκέψης απαιτεί χρόνο. Μια επτάωρη διδασκαλία φυσικά δεν μπορεί να «αλλάξει» τις εδραιωμένες πρακτικές και συνήθειες. Το γεωμετρικό δυναμικό περιβάλλον βρίσκει θετική ανταπόκριση στους μαθητές και μπορεί να βοηθήσει στην καλλιέργεια της γεωμετρικής αντίληψης. Η διδασκαλία με δραστηριότητες σ' ένα δυναμικό γεωμετρικό περιβάλλον όπως αυτό του EUC, είναι κοντά στην καθημερινή πρακτική των σημερινών μαθητών και μαθητριών (η πλειοψηφία τους έχει υπολογιστή στο σπίτι), χρησιμοποιεί την «εικόνα» που είναι το ισχυρότερο μέσο πληροφορίας (Sinnett, Spence, & Soto-Faraco, 2007) και τέλος εμπλέκοντάς τους σε μία «δράση», τους διευκολύνει να τολμούν και να πειραματίζονται πάνω στην οθόνη, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του λογισμικού, ενώ πολύ λιγότερα τολμούν μια πιο 'μαθηματική εξερεύνηση' εκφρασμένη με τύπους και λόγια στο χαρτί. Από την άλλη δεν φαίνεται να ενισχύει τη διαλεκτική και συμβολική διατύπωση ενός ολοκληρωμένου παραγωγικού συμπερασμού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Battista, M. (1982, May). Understanding area and area formulas. *The Mathematics Teacher, Vol.75, No.5*, pp. 362-368.

Bunt, L. N., Jones, P. D., & Bedient, J. D. (1981). *Οι Ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών.* Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικός.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. Στο *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: Mac-Millan.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics 35*, pp. 65-83.

Duady, R., & Perrin, M. J. (1986). Concerning conceptions of area (pupils aged 9 to 11). *PME 10*, (pp. 253-258). London.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics, Vol3, No2*, pp. 9-18,24.

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics, Vol.74, No.2*, pp. 163-183.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploratinon. *Educational Studies in Mathematics, Vol.44, No.1/2, Proof in Dynamic Geometry Environments*, pp. 5-23.

Hershkowitz, R. (1989(b)). Visualization in geometry: Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11 (1)*, pp. 61-76.

Kordaki, M., & Balomenou, A. (2006). Challenging students to view the concept of area in triangles in a broad context: Exploiting the features of Cabri-II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, Vol.11, No.1*, pp. 99-135.

Kordaki, M., & Pottari, D. (1998). Children's approaches to area measurement through different contexts. *Journal of Mathematical Behavior, 17(3)*, pp. 303–316.

Kouba, L. V., Brown, A. C., Carpender, P. T., Lindquist, M. M., Silver, A. E., & Swafford, O. J. (1988). Measurement, Geometry, Data Interpretation, Attitudes and other topics. *Arithmetic teacher, 35,9*, pp. 10-16.

Martin, T. S., & McCrone, S. S. (2003). Classrooms Factors Related to Geometric Proof Construction Ability. *The Mathematics Educator, Vol. 7, No.1*, pp. 18-31.

Mayer, A., & Beattys, B. C. (1986). Examining the construction of area and its measurement by ten to fourteen year old children. *8th PME*, (pp. 163-168).

Modestou, M., Gagatsis, A., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Students' improper proportional reasoning: The case of area and volume of rectangular figures. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.3*, (pp. 345-352). Bergen, Norway.

Patronis, T., & Thomaidis, Y. (1997). On the Arithmetization of School Geometry in the Setting of Modern Axiomatics. *Science & Education,6*, pp. 273-290.

Sinnett, S., Spence, C., & Soto-Faraco, S. (2007). Visual dominance and attention:The Colavita effect revisited. *Perception & Psychophysics Vol.69 , No.5*, pp. 673-686.

Tsamir, P., & Mandel, N. (2000). The intuitive rule same A - same B :The case of area and perimeter. *Proceedings of the 24th PME International Conference* (pp. 225-232). Hiroshima, Japan: T. Nakahara & M. Koyama.

Zacharos, K. (2006, October). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior,25* (25), pp. 224-239.

Κορδάκη, Μ., & Πόταρη, Δ. (1997). Η Έννοια της διατήρησης της επιφάνειας μέσα από ένα περιβάλλον ηλεκτρονικού υπολογιστή. *ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ* (σσ. 123-132). Πάτρα: Γ.Α. Πνευματικού.

Τουμάσης, Μ. (1999). Η διδασκαλία της γεωμετρίας. Στο Μ. Τουμάσης, *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών* (σ. 340). Αθήνα: Gutenberg.

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΜΙΑΣ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΩΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΩΣΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Λαλαζήση Χρυσούλα[1], Αργύρη Παναγιώτα[2]

[1]Αρχιτέκτων- Πολιτικός Μηχανικός Σχολική Σύμβουλος ΠΔΕ Αττικής

chrlalazisi@gmail.com

[2]Μαθηματικός στο Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σμύρνης

argiry@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία διερευνάται η επίδραση μιας διαθεματικής διδακτικής εφαρμογής στη βελτίωση της μάθησης στο μάθημα της Γεωμετρίας της Α΄ τάξης του Γενικού Λυκείου και συγκεκριμένα μιας Ερευνητικής Εργασίας (Ε.Ε) στο ΠΠ Λύκειο της Ευαγγελικής Σχολής Ν. Σμύρνης κατά το σχολικό έτος 2012-13 με θέμα «Η αλληλεπίδραση των μαθηματικών & της τέχνης από την αρχαία Ελλάδα έως τον 21ο αιώνα». Συλλέχθηκαν ποσοτικά και ποιοτικά δεδομένα κατά τη διάρκεια και μετά την υλοποίηση της Ε.Ε. Η ποσοτική και ποιοτική τους ανάλυση, έδειξαν ότι, κατά τη συγκεκριμένη διδακτική εφαρμογή αναπτύχθηκαν θετικές πεποιθήσεις για τη χρησιμότητα των μαθηματικών, ενεργοποιήθηκε η δημιουργικότητα και αποκτήθηκαν δεξιότητες χρήσης μαθηματικών λογισμικών για σχεδίαση σύνθετων γεωμετρικών κατασκευών. Επίσης δημιουργήθηκε εξοικείωση και μειώθηκε ο φόβος για το γνωστικό αντικείμενο της γεωμετρίας Καταγράφηκε θετική στάση για το μάθημα της Γεωμετρίας η οποία και, δηλώθηκε ρητά σε εστιασμένες ομαδικές συνεντεύξεις. Αξιοσημείωτη είναι η θετική επίδραση στο κλίμα της τάξης των μαθηματικών καθώς και η αύξηση των επιδόσεων μαθητών στο μάθημα της Γεωμετρίας.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών* (ΔΕΠΠΣ)[1], υποστηρίζει τη διαθεματική προσέγγιση της γνώσης. Κατά την Κουλουμπαρίτση οι θεματοκεντρικές εφαρμογές που περιλαμβάνονται στο (ΔΕΠΠΣ) είναι οι διδακτικές προσεγγίσεις που υλοποιούν αυθεντικά τη διαθεματικότητα (Κουλουμπαρίτση 2005). Το μάθημα της Ερευνητικής Εργασίας που έχει εισαχθεί το σχολικό έτος 2011-12 στο ωρολόγιο

[1] Το *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών* (ΔΕΠΠΣ) θεσμοθετήθηκε το 2003 (ΦΕΚ 303 και 304/13-3-2003 για να συμπληρώσει το Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΕΠΠΣ) του 1999.

πρόγραμμα των Α΄ και Β΄ τάξεων των Γενικών Λυκείων αποτελεί θεματοκεντρική εφαρμογή, η οποία, μέσω ομαδοσυνεργατικής μάθησης με φθίνουσα καθοδήγηση, υλοποιεί τις προτάσεις του ΠΙ για ανάπτυξη δραστηριοτήτων που θα «ενιαιοποιήσουν» τη σχολική γνώση με τα ενδιαφέροντα των μαθητών και με τις καταστάσεις της ζωής πάνω σε θέματα που προτείνουν οι μαθητές και διαμορφώνονται με την καθοδήγηση των εκπαιδευτικών με τα συνακόλουθα αναλυτικά προγράμματα σπουδών (ΠΙ 2004).

Σύμφωνα με τον Ματσαγγούρα «Οι ερευνητικές εργασίες (project) που υλοποιούνται στο ωρολόγιο πρόγραμμα του Λυκείου ενεργοποιούν τη σκέψη, τη δημιουργικότητα και την πρωτοβουλία των μαθητών …. *Επίσης, αυξάνουν το ενδιαφέρον για τα επιμέρους μαθήματα*, διότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται στην πράξη τη συμβολή των διδασκόμενων μαθημάτων στην κατανόηση βασικών ζητημάτων της καθημερινότητας» (βλ. Ματσαγγούρας Η., 2009: 19). Η παρούσα έρευνα διερευνά εμπειρικά την επίδραση μιας διαθεματικής διδακτικής εφαρμογής, όπως η Ε.Ε., στη βελτίωση των επιδόσεων και της θετικής στάσης στα μαθηματικά, ειδικότερα στη Γεωμετρία. Εξετάζεται κατά πόσον επηρεάσθηκαν από την Ε.Ε. οι συντελεστές της επίδοσης στα μαθηματικά τους οποίους έχει εντοπίσει η σχετική διεθνής παιδαγωγική έρευνα.

Υπάρχουν αρκετές μελέτες, οι οποίες εξετάζουν i) τους παράγοντες που διαμορφώνουν την στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και ii) τους παράγοντες που επιδρούν στην μαθηματική επίδοση των μαθητών. Είναι παράγοντες ισχυρά συσχετισμένοι, με συνεχή αλληλεπίδραση και είναι δύσκολη η διάκριση της αιτιότητας μεταξύ τους.

Οι Dossey, Mullis & Jones (1993) υποδεικνύουν ότι στη δημιουργία θετικών ή αρνητικών στάσεων για τα μαθηματικά συμβάλλουν κυρίως *κοινωνικοί παράγοντες*, όπως το *οικογενειακό περιβάλλον* με την *καλλιέργεια της αυτοϊδέας και αυτοεκτίμησης του εφήβου, αλλά και η θετική ενίσχυση* (που παρέχουν οι δάσκαλοι κυρίως στις πρώτες τάξεις του δημοτικού) (Renga & Dalla,1993). Σε ανάλογο συμπέρασμα κατέληξαν οι Schoenfeld (1989) και Φιλίππου (1991), μετά από έρευνες τόσο στο διεθνή όσο και στον ελληνικό χώρο, δηλαδή ότι οι στάσεις των μαθητών επηρεάζονται από την *επίδοση και την εικόνα που έχουν για τον εαυτό τους*.

Η ανάπτυξη εσωτερικών κινήτρων για τη μελέτη των μαθηματικών έχει άμεση σχέση με τη δημιουργία θετικών ή αρνητικών στάσεων απέναντι στα μαθηματικά. Αν ο μαθητής έχει μόνο εξωτερικά κίνητρα, δηλαδή αποβλέπει στη βαθμολογική επιτυχία του ή στην αποφυγή πιθανής ποινής στην αποτυχία, τότε θα σταματήσει την προσπάθειά του όταν δεν υπάρχει πλέον το αντίστοιχο κίνητρο. Τα εσωτερικά κίνητρα είναι η χαρά και η ικανοποίηση για την δημιουργικότητα και τη βελτίωση της ικανότητας του καθαυτές.

Συνοπτικά με βάση την βιβλιογραφία οι πέντε πιο σημαντικοί παράγοντες που φαίνεται να επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την επίδοση στα Μαθηματικά και οι

οποίοι σχετίζονται άμεσα με αυτή είναι *το κλίμα της τάξης* (Wang et al., 1990), *η μεθοδολογία και οι στάσεις του εκπαιδευτικού των Μαθηματικών* (Reyes & Stanic, 1988; Ruffel, Mason & Allen, 1998), το μορφωτικό επίπεδο των γονιών (Fuligni, 1997), οι στάσεις των γονιών απέναντι στα Μαθηματικά (Fuligni, 1997; Bos & Kuiper, 1999) και *οι στάσεις των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά* (Minato & Kamata, 1996).

Ο Τριάντης (1997) «στη θεωρία της διαπροσωπικής συμπεριφοράς» εισάγει δύο συνιστώσες της στάσης α) μια καθαρά συναισθηματική μέτρηση της στάσης (προσδοκώμενα συναισθήματα και ψυχική διάθεση για τη συγκεκριμένη συμπεριφορά) β) μια καθαρά γνωστική (πεποιθήσεις προσδοκώμενου οφέλους) μέτρηση της στάσης.

Είναι γνωστό πως η μαθηματική φοβία εμποδίζει τη μάθηση. Οι Φιλίππου και Χρίστου (1995) την ορίζουν ως «ένα αρνητικό συναίσθημα έναντι των μαθηματικών ή ως μια αρνητική αντίδραση του ατόμου, όταν καλείται να λύσει ένα μαθηματικό πρόβλημα ή να επιτελέσει ένα έργο το οποίο περιλαμβάνει μια μαθηματική δραστηριότητα».

Υπάρχουν ερευνητικά δεδομένα ότι οι συνεργατικές προσεγγίσεις μπορούν να προάγουν τις θετικές στάσεις στα μαθηματικά (Boaler, 1997, 1998).

Στην παρούσα εργασία εξετάζονται α) οι πεποιθήσεις που αναπτύχθηκαν για τη χρησιμότητα των μαθηματικών β) η ανάπτυξη εσωτερικών κινήτρων στην ανάπτυξη δεξιοτήτων χρήσης των μαθηματικών λογισμικών β) η στάση απέναντι στα μαθηματικά δ) η μείωση της μαθηματικής φοβίας στον τομέα των γεωμετρικών κατασκευών και του μαθήματος της Γεωμετρίας ε) η θετική ενίσχυση του καθηγητή προς τους μαθητές στο μάθημα των μαθηματικών.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η συγκεκριμένη παιδαγωγική έρευνα είναι εμπειρική έρευνα πεδίου και αποτελεί μελέτη περίπτωσης. Χρησιμοποιεί συγκεκριμένες μορφές μάθησης (διδακτική) και τις μελετά μέσα στο ειδικό μαθησιακό πλαίσιο ενός Πρότυπου-Πειραματικού Λυκείου. Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιούνται μετρήσεις πριν, ενδιάμεσα και μετά τη διδακτική παρέμβαση στην ομάδα μελέτης (τη σχολική τάξη 13 μαθητών) τόσο ποσοτικές όσο και ποιοτικές: ερωτηματολόγια ανοικτών και κλειστών ερωτήσεων και εστιασμένες ομαδικές συνεντεύξεις (focus group). Η ανάλυση είναι ποσοτική διαχείριση των νοηματικών κατηγοριών που προκύπτουν από την ανάλυση περιεχομένου των ανοικτών ερωτήσεων και των συνεντεύξεων. Το δείγμα της έρευνας είναι 13 μαθητές της Α΄ Λυκείου του Πρότυπου Πειραματικού Λυκείου Ευαγγελικής σχολής Σμύρνης, που συμμετείχαν κατά το σχολικό έτος 2012-13 στην ερευνητική εργασία με θέμα: ‘Μαθηματικά και Τέχνη’. Είναι σημαντικό ότι η διδάσκουσα την ΕΕ δίδασκε παράλληλα και το μάθημα των μαθηματικών στους ίδιους μαθητές, οπότε μπορούσε να διαπιστώσει την πρόοδο στα μαθηματικά σε

σχέση με μαθητές που δεν συμμετείχαν στην συγκεκριμένη ΕΕ και να περιγράψει τις μεταβολές στο κλίμα της τάξης. Παράλληλα η συμμετοχή της στο μάθημα της ΕΕ, με εφαρμογή μαθητοκεντρικής ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, είχε επίδραση στη δική της μεθοδολογία, στάση και υποστήριξη προς τους μαθητές στην τάξη των μαθηματικών.

2.1. Πορεία και Φάσεις Υλοποίησης της Ερευνητικής Εργασίας

Για την υλοποίηση της Ε.Ε ακολουθήθηκε ομαδοσυνεργατική προσέγγιση του θέματος σε τρεις φάσεις με φθίνουσα καθοδήγηση από την πλευρά του διδάσκοντος. Συγκεκριμένα: *Στην α΄ φάση* οι ομάδες των μαθητών συντονίζονται για βιβλιογραφική αναζήτηση, αποδελτίωση και παρουσίαση πληροφοριών. Πιο συγκεκριμένα: Η ομάδα Α ασχολήθηκε με την σχέση των μαθηματικών και της Τέχνης στο Μεσαίωνα –Αναγέννηση. Η ομάδα Β ασχολήθηκε με το χρυσό λόγο, το φ και τον κόσμο των φράκταλς και η ομάδα Γ με τη Μοντέρνα τέχνη.

Στην β΄ φάση οι μαθητές διαπιστώνουν τη συμβολή των νέων τεχνολογιών στη δημιουργία σύγχρονης ψηφιακής τέχνης και διερευνούν πως χρησιμοποιούνται ιδιότητες των μαθηματικών λογισμικών για τη δημιουργία καλλιτεχνικών κατασκευών. Συγκεκριμένα υλοποιήθηκαν οι ακόλουθες δραστηριότητες: α) Εκμάθηση δύο μαθηματικών εκπαιδευτικών λογισμικών (Sketchpad, geogebra) με παρουσίαση στην τάξη, αποστολή βιβλιογραφίας, καθοδήγησης και διευκρινήσεων μέσω emails και προσωπική μελέτη αρκετών ωρών β) Δημιουργία από τους μαθητές ψηφιακών γεωμετρικών κατασκευών υψηλής αισθητικής με συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες: Λόγοι ομοιότητας στα σχήματα, μετασχηματισμοί & συμμετρίες, γεωμετρικά μοτίβα, ψηφιδωτά &πλακοστρώσεις.

Στην γ΄ φάση οι μαθητές ενημερώνονται για εικαστικές τεχνικές από τη Σχολική Σύμβουλο Αρχιτεκτόνων και τους ζητείται να δημιουργήσουν ελεύθερα ένα δικό τους μήνυμα και κατόπιν συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές. Χρησιμοποιώντας τη φαντασία τους, τις γεωμετρικές τους γνώσεις, τις προηγούμενες ψηφιακές γεωμετρικές κατασκευές τους και εικαστικές τεχνικές (κολλάζ, χρώμα, σύνθεση) και βασιζόμενοι στον κανόνα της χρυσής τομής κατασκευάζουν πρωτότυπα εικαστικά έργα όπως πίνακες ζωγραφικής και τρισδιάστατες γεωμετρικές κατασκευές.

2.2. Συλλογή δεδομένων – ανάλυση

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο η συλλογή των δεδομένων ακολούθησε τις ακόλουθες τεχνικές: α) ερωτηματολόγια στο ενδιάμεσο και τελικό στάδιο υλοποίησης β) η παρατήρηση γ) ημιδομημένες συνεντεύξεις σε εστιασμένες ομάδες. Όλες οι συνεντεύξεις έγιναν από τη Σχ. Σύμβουλο ώστε να μειωθεί η επίδραση της προσδοκίας βαθμού ή της εύνοιας του διδάσκοντα και αναλύθηκαν ανεξάρτητα και από τις δύο συγγραφείς

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Α. Τα θέματα που αναδείχθηκαν στις 3 ομαδικές συνεντεύξεις είναι τα ακόλουθα:

1η ομάδα: αποτελείτο από 5 μαθήτριες με μέτριες έως πολύ καλές επιδόσεις στα μαθηματικά.

Στάση προς τα μαθηματικά: μια μόνο μαθήτρια είχε θετική στάση για τα μαθηματικά ενώ οι υπόλοιπες εξέφρασαν αισθήματα απαρέσκειας και φόβου τα οποία αμβλύνθηκαν για τη Γεωμετρία τη φετινή χρονιά. Π.χ. Η καλή μαθήτρια: «*Ενδιαφέρον και δέος... Δηλαδή δεν μπορείς να τα αριθμήσεις και να πεις είναι από δω ως εδώ! Είναι κάτι άγνωστο που με ελκύει να δουλέψω μαζί τους....*» άλλες Μαθήτριες : «*Είναι λίγο ζόρικα!*» «*Δεν είναι μόνο κάτι άγνωστο τα μαθηματικά, είναι το πως τα προσεγγίζει ο καθένας… Αν είναι άγνωστα, αν είναι εύκολα, ο καθένας έχει το δικό του τρόπο προσέγγισης...*».

Επίδραση της ΕΕ: 1) Η εξοικείωση με τα μαθηματικά λογισμικά και τις γραφικές παραστάσεις και την παραγωγή σχημάτων βοήθησε στην κατανόηση θεωρημάτων της Γεωμετρίας. «*Για παράδειγμα όταν διάβαζα γεωμετρία για τις εξετάσεις υπήρχαν θεωρήματα και ορισμοί που με βοήθησαν να τα κατανοήσω πάρα πολύ η εμπειρία που είχα με το σχέδιο μέσα στο project για να καταλάβω πιο βαθιά τον ορισμό της συγκεκριμένης έννοιας.*» **2)** Η αύξηση των θετικών πεποιθήσεων για τη χρησιμότητα των μαθηματικών «*... Δηλαδή... Μέσα από το project μάθαμε να βλέπουμε τις άλλες πλευρές των μαθηματικών... αλλά αλλά... μέσω των σκέτων μαθηματικών που κάνουμε... ίσως να μην μπορούμε… βέβαια χωρίς τα βασικά μαθηματικά τις άλγεβρες, τις γεωμετρίες... δεν μπορούμε να επεκταθούμε… το project βοήθησε σε αυτή την επέκταση...*» «*Η χρυσή τομή είναι μία βάση που πατάς πάνω και το συνεχίζεις, το θεμέλιο ας πούμε για τους πίνακες που ζωγραφίσαμε*».

Θετικά στοιχεία (ευχάριστα συναισθήματα): Συνεργατικότητα, Δημιουργικότητα, αυτονομία, ανάπτυξη εσωτερικών κινήτρων στην παραγωγή γεωμετρικών κατασκευών και απεξάρτηση από τον βαθμό, αίσθηση επάρκειας. **Π.χ.** «Μαθήτρια **1:** *Στα άλλα μαθήματα έχουμε το βιβλίο και πρέπει να ακολουθήσουμε μία συγκεκριμένη πορεία, τώρα συζητούσαμε με τους καθηγητές μας και τα φτιάχναμε εμείς*. Μαθήτρια **2:** Το περιεχόμενο, το δημιουργικό κομμάτι. Μαθήτρια **3:** *Ήταν πιο ελεύθερο, δεν ήταν τόσο δεσμευτικό ως προς τον βαθμό μας...* Όλες μαζί*: Δεν μας ένοιαζε ο βαθμός,... όχι βέβαια, δεν ήμασταν σίγουροι για τον βαθμό αλλά δεν μας ένοιαζε*».

Αρνητικά στοιχεία: Πίεση χρονική και πίεση από τον ανταγωνισμό

2η ομάδα αποτελείτο από 4 αγόρια

Στάση προς τα μαθηματικά : Η ομάδα των 4 αγοριών είχε θετική στάση προς τα μαθηματικά και δεν τους φόβιζαν. Στους τρεις σχετίζεται με υψηλή επίδοση και στον τέταρτο στην επιρροή του πατέρα του.

Επίδραση της ΕΕ:: 1) έγινε καλύτερη η σχέση τους με τα μαθηματικά πχ**:** «*Ε, ναι έγινε χαρούμενη σχέση και πολύχρωμη!*» 2) Συνειδητοποίησαν την χρησιμότητα των μαθηματικών στην τέχνη *π.χ. «Ουσιαστικά αντιλήφθηκα ότι συμπίπτουν και άλλα*

πράγματα εκτός από τις εξισώσεις, εεε... δηλαδή... ότι τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται και στην τέχνη, και σε πίνακες, γενικώς χρησιμοποιούνται παντού θα μπορούσα να πω στην κάθε επιστήμη… και αυτό φάνηκε ότι το χρησιμοποιήσαμε φέτος στην τέχνη».

Θετικά στοιχεία (ευχάριστα συναισθήματα): η συνεργασία «*Ναι βασικά πιστεύω το πιο σημαντικό ήταν που μάθαμε την έννοια της συνεργασίας και δουλέψαμε όλοι μαζί…για να έχουμε ένα καλό αποτέλεσμα».*

Αρνητικά στοιχεία: Δεν αισθάνθηκαν επαρκείς στη παραγωγή έργων, η ομάδα τους δεν λειτούργησε τόσο αρμονικά όσο των κοριτσιών υπήρχαν ισχυρές απόψεις που δεν ήταν εύκολο να συγκεραστούν π.χ. «*Είχαμε κάνει κάποια δουλειά ως ομάδα, ατομικά δεν είχαμε δουλέψει τόσο πολύ, επειδή ήμασταν ομάδα μοιραζόμασταν τις δουλειές».*

3η ομάδα: αποτελείτο από 4 κορίτσια, αρμονική συνεργασία εντυπωσιακά αποτελέσματα σε ψηφιακές κατασκευές όσο και σε χειροτεχνικές.

Στάση προς τα μαθηματικά: Οι 3 στις 4 μαθήτριες δεν συμπαθούν τα μαθηματικά, τα φοβούνται αλλά τα θεωρούν σημαντικά, έκαναν διάκριση στη Γεωμετρία που όλες την θεωρούν κατανοητή. Π.χ. «*Μαθηματικά= Αριθμοί, πράξεις, το σχολείο, δημιουργικότητα, αλλά και φόβος. στόχος των μαθηματικών είναι να καταλάβεις, να ερευνήσεις*» «*Εμένα προσωπικά τα μαθηματικά δεν μου αρέσουν καθόλου, μου αρέσει όμως η γεωμετρία,… με την άλγεβρα δεν τα πάω τόσο καλά, τα μαθηματικά είναι ωραίος κλάδος έχει σκέψη, έχει λογική, όμως η γεωμετρία μου αρέσει πολύ περισσότερο» «Εγώ προσωπικά μπορώ να πω την Άλγεβρα την σιχαίνομαι, δηλαδή δεν έχω καθόλου καλή σχέση, η γεωμετρία ανέκαθεν μου άρεσε περισσότερο».*

Επίδραση της ΕΕ: 1) έγινε καλύτερη η σχέση τους με τα μαθηματικά «*Μου αρέσει γιατί τώρα που την συνδυάσαμε με την τέχνη, έχω μία άλλη ιδέα. Προσωπικά για μένα ο στόχος των μαθηματικών είναι να ανοίξεις το μυαλό σου, να σκεφτείς καινούργιες ιδέες… Εμένα όμως προσωπικά με παιδεύουνε*» η μαθήτρια με τη θεαματική βελτίωση επίδοσης (από 17 σε 19,8): «*Μέχρι πέρσι δεν μου άρεσαν ούτε η γεωμετρία, ούτε τα μαθηματικά, ούτε τίποτα, δηλαδή σε απόσταση και τα δυο. Αλλά φέτος με την γεωμετρία πολύ καλύτερα και την καταλαβαίνω*» **2)** εξοικείωση με τα μαθηματικά λογισμικά: « *Σε σχέση με το Sketchpad…Δεν είναι μόνο η εξίσωση, το βλέπεις κιόλας, μπορείς να φτιάξεις πράγματα, να δημιουργήσεις… Εμένα προσωπικά μου άρεσε πάρα πολύ!».*

Θετικά στοιχεία: η συνεργασία η δημιουργικότητα και η αυτονομία πχ. «*Κάναμε κάποια πράγματα στη γεωμετρία και τα βάλαμε και σε εφαρμογή που κατασκευάσαμε σχήματα, αλλά και επίσης είχαμε και δικές μας ιδέες , κάναμε δικούς μας συνδυασμούς, σκεφτήκαμε περισσότερα πράγματα, ήταν περισσότερο δημιουργικό, δεν ήταν όπως λένε για τα project ε δυο ώρες κενές στην εβδομάδα, ήταν περισσότερο διαδραστικό μάθημα, από ότι τα υπόλοιπα».*

Κίνητρα: η προβολή και η αναγνώριση της δουλειάς τους στο συνέδριο της Θεσσαλονίκης.

Β. Θέματα που κινητοποίησαν το ενδιαφέρον των μαθητών όπως προκύπτει από την ανάλυση περιεχομένου ανοικτών ερωτήσεων του ερωτηματολογίου.

Έγινε κωδικοποίηση περιεχομένου και ποσοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στις ερωτήσεις Α) *τι τους έχει κερδίσει το ενδιαφέρον από την πορεία υλοποίησης της Ε.Ε.*, (η απάντηση δόθηκε σε ενδιάμεσο στάδιο εφαρμογής) βλέπε Πίνακα Ι και Β) *ποια αναπάντεχα ευχάριστα στοιχεία και παράγοντες αναγνωρίζουν στην Ε.Ε.*, (η απάντηση δόθηκε μετά την υλοποίηση της Ε.Ε.) βλέπε Πίνακα ΙΙ.

Βρέθηκαν τα ακόλουθα ευρήματα: Στο ενδιάμεσο στάδιο υλοποίησης της Ε.Ε., φάνηκε πως τα μαθηματικά εκπαιδευτικά λογισμικά ενδιαφέρουν αρκετά στους μαθητές. Μερικές από τις ενδεικτικές απαντήσεις σχετικά με το ποια στοιχεία ήταν ενδιαφέροντα: ‘εξερεύνηση Sketchpad’, ‘Sketchpad’, έμαθα να σχεδιάζω στον Η/Υ’, ‘εφαρμογή geogebra-Sketchpad’, δουλεύαμε με Η/Υ’.

Ενδιαφέροντα στοιχεία της ΕΕ (νοηματικές κατηγορίες)	**Συχνότητα αναφοράς (απόλυτη στους 13 μαθητές)**	**Σχετική συχνότητα αναφοράς**
Συνεργασία σε ομάδα εργασίας	**10**	**76,9%**
Γνωριμία με Μαθηματικά λογισμικά	3	76,9%
Νέες Γνώσεις για τη χρησιμότητα των Μαθηματικών	3	23,1%
Νέες Γνώσεις για έργα τέχνης	5	38,5%
Χρήση των μαθηματικών λογισμικών για δημιουργία Γεωμετρικών Κατασκευών υψηλής αισθητικής	5	38,5%
Η προοπτική της Εκδρομής για παρουσίαση της δουλειάς των μαθητών σε Συνέδριο	5	38,5%

Πίνακας Ι: Εντοπισμός στοιχείων που προκάλεσαν το ενδιαφέρον των μαθητών σε ενδιάμεσο στάδιο υλοποίησης της Ε.Ε

Στην τελική εκτίμησή τους, μετά την ολοκλήρωση της ΕΕ σχεδόν όλοι οι μαθητές (οι 9 στους 13) θεωρούν ως αναπάντεχα ευχάριστο την καλλιέργεια διαφόρων δεξιοτήτων σε δράσεις σχετικά με τα μαθηματικά: όπως τη χρήση των μαθηματικών λογισμικών, τη συζήτηση και ανταλλαγή απόψεων, μέχρι την οργάνωση της σύνθεσης ενός πίνακα στη βάση αξόνων με χρυσή αναλογία (Πίνακας 2).

Ευχάριστα στοιχεία της ΕΕ (νοηματικές κατηγορίες)	**Συχνότητα αναφοράς (απόλυτη στους 13 μαθητές)**	**Σχετική συχνότητα αναφοράς**
Συνεργασία	**7**	**53,8%**
Γνώσεις και εμπειρίες για Μαθηματικά και Τέχνη	4	30,8%
Η δημιουργία Γεωμετρικών κατασκευών τρισδιάστατων με διάφορα υλικά	4	30,8%
Εκπαιδευτική Εκδρομή με διανυκτέρευση	10	76,9%
Καλλιέργεια δεξιοτήτων χρήσης λογισμικών, κατασκευής εικαστικών έργων, ανταλλαγής απόψεων	9	69,2%
Η αναγνώριση και επιβράβευση της δουλειάς τους κατά την παρουσίαση της σε Συνέδριο στη Θεσσαλονίκη	3	23,1%

Πίνακας ΙΙ: Εντοπισμός στοιχείων που προκάλεσαν ευχάριστα το ενδιαφέρον των μαθητών αμέσως μετά την ολοκλήρωση της Ε.Ε

3.1. Επίδοση των μαθητών που συμμετείχαν στην Ε.Ε στο μάθημα της γεωμετριας.

Για την μέτρηση της επίδοσης των μαθητών συλλέχθηκαν και συγκρίθηκαν τα στοιχεία της βαθμολογίας τους από το Α΄ τετράμηνο, το Β΄ τετράμηνο και τις τελικές γραπτές εξετάσεις. Η επίδοση των μαθητών στη γεωμετρία βελτιώθηκε εντυπωσιακά σύμφωνα με την ακόλουθη έκθεση της διδάσκουσας:

«Οι 7 από τους 13 μαθητές που συμμετείχαν στην Ε.Ε ήταν και μαθητές μου στο μάθημα της γεωμετρίας. Σχετικά με την επίδοση τους έχω να παρατηρήσω τα ακόλουθα:

α) Η βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στο μάθημα της γεωμετρίας παρατηρείται στους βαθμούς τους κατά τις γραπτές δοκιμασίες. Ενώ οι αρχικές τους επιδόσεις κυμαίνονταν μέτρια (12-13), στους πέντε από τους επτά, σταδιακά παρατηρήθηκε βελτίωση, με αποκορύφωμα τις γραπτές απολυτήριες εξετάσεις, όπου αριστεύσαν (19,2-20) Επίσης εκδηλώθηκε έντονα η διαμόρφωση θετικής στάσης απέναντι στο

μάθημα της γεωμετρίας καθώς υπήρχε ενεργή συμμετοχή, έντονο ενδιαφέρον, απόλυτη συνέπεια στην παράδοση ασκήσεων.
β) Κατά τη διάρκεια της χρονιάς η συνεργασία μου με αυτούς τους μαθητές στο μάθημα της Ε.Ε διαμόρφωσε σταδιακά και το διδακτικό συμβόλαιο μέσα στην μαθηματική σχολική τάξη στο μάθημα της γεωμετρίας. Αναγνωρίζω ότι η διδακτική μου συμπεριφορά απέναντι σε αυτή την ομάδα μαθητών διαφοροποιήθηκε σε μικρό βαθμό σε σχέση με τους άλλους. Ανέπτυξα και εγώ κίνητρα και προσπαθούσα με διδακτικές παρεμβάσεις (που προετοίμαζα ειδικά) να πετύχω βέλτιστη αποτελεσματική διδασκαλία. Κάποιες φορές ήμουν περισσότερο επιεικής, πολύ πρόθυμη στο να εξηγήσω απορίες και διευκρινήσεις.»

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η γνώση για την σχέση των μαθηματικών με την τέχνη αύξησε τις θετικές πεποιθήσεις των μαθητών για τη χρησιμότητα των μαθηματικών. Η εκμάθηση των μαθηματικών λογισμικών και η χρήση τους για δημιουργία έργων τέχνης εξοικείωσε τους μαθητές με τις γεωμετρικές κατασκευές και διευκόλυνε την κατανόηση γεωμετρικών θεωρημάτων.

Αυξήθηκε η αυτοϊδέα των μαθητών με την κατάκτηση δεξιοτήτων στη χρήση λογισμικών και την δημιουργία καλλιτεχνικών κατασκευών μέσω αυτών.

Η συνεργατικότητα, η ανάπτυξη της αυτονομίας και η ενεργοποίηση της δημιουργικότητας των μαθητών μέσα από τον φθίνοντα βαθμό καθοδήγησης και τη δυνατότητα προβολής δουλειάς τους σε ευρύτερο κοινό οδήγησε στην ανάπτυξη ισχυρών εσωτερικών κινήτρων. Είναι χαρακτηριστική ή δήλωση τους ότι σταματούσανε μόνο λόγω κούρασης μετά από ομαδική εργασία 12ωρη εργασία.

Επίσης δήλωσαν θετικότερη στάση στη Γεωμετρία μετά την όχι μόνο θεωρητική αλλά και βιωματική γνώση της συνεισφοράς των μαθηματικών στην τέχνη.

Αυξήθηκε το θετικό κλίμα στο μάθημα των μαθηματικών κατά δήλωση τόσο της διδάσκουσας όσο και των μαθητών εξ αιτίας της συνεργασίας τους στο μάθημα της Ε.Ε. Τέλος διαπιστώθηκε αλλαγή της συμπεριφοράς στο μάθημα των μαθηματικών με μεγαλύτερη συμμετοχή και αύξηση της επίδοσης των μαθητών στις τελικές γραπτές εξετάσεις των μαθηματικών. Διαπιστώνεται λοιπόν μια σαφέστατα θετική επίδραση μιας διαθεματικής εφαρμογής της Ε.Ε. στην μάθηση των μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Boaler J. (1997). *Experiencing School Mathematics. Teaching Styles, Sex and Setting*. UK. Open University Press.

Boaler J. (1998). Open and closed mathematics: student experiences and understandings. *Jurnal for Research in Mathematics Education, 29*, 41-62.

Bos, K., & Kuiper, W. (1999). Modelling TIMSS Data in a European Comparative Perspective: Exploring Influencing Factors on Achievement in Mathematics in Grade 8. *Educational Research and Evaluation*, *5*, 157-179.

Dossey, J.A., Mullis, I.V.S., &Jones, C.O. (1993). Can students do mathematical problem. *Washington DC: National Center for education Studies.*

Fuligni, A. J. (1997). The academic achievement of adolescents from immigrant families: the roles of family background, attitudes and behavior. *Child development,68* (2), 351-364.

Minato, S. & Kamata, T. (1996). Results of research studies on causal predominance between achievement and attitude in junior high school mathematics of Japan. *Journal of research in Mathematics education*, *27 (1)*, 96-99.

Papanastasiou, C. (2000). Effects of attitudes and beliefs on mathematics achievement. *Studies in educational Evaluation*, *26*, 27-42.

Philippou G.& Christou C (1991)*:*A study of the mathematics teaching efficacy beliefs of primary teachers*» Mathematical Education Library ,Vol.31*

Renga, S & Dalla, L. (1993). Affect: a critical component of mathematical learning in early childhood. *In Robert J. Jensen (Ed.),* Research ideas for the classroom – early childhood mathematics (pp.22-37). Hillsdale, N.J.: MacMillan.

Reyes, L. H., & Stanic, M. A. (1988). Race, Sex, Socioeconomic Status and Mathematics. *Journal for research in mathematics education*, *19 (1)*, 26-43.

Ruffel, M., Mason, J., & Allen, B. (1998). Studying Attitude to Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *35 (1)*, 1-18.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for research in Mathematics Education*, *20*, 338-355.

Triandis, H.C. (1977). *Interpersonal behaviour*, Brooks Cole, Monterey, CA.

Wang, M. C., Haertel, G. D. & Walbery, H. J. (1990). What influences learning? A Content Analysis of Review. *Journal of Educational Research*, *84*, 3-43.

Κουλουμπαρίτση, Α. (2005) Εφαρμογή της Διαθεματικής Προσέγγισης στα Προγράμματα Σπουδών, στη Διδασκαλία και στα Σχολικά Βιβλία. *Νέα Παιδεία, 116*, 30-44.

Ματσαγγούρας, Η. (2009). *Η καινοτομία των ερευνητικών εργασιών.* Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών βιβλίων, Αθήνα.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (2004). προτάσεις για το *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης*, στο διαδικτυακό τόπο: http://www.pi-schools.gr/programs/depps (πρόσβαση Μάϊος 2006).

Φιλίππου, Γ. & Χρίστου, Κ. (1995). Συναισθηματικός τομέας, αριθμοφοβία και διδασκαλία των μαθηματικών. Στο Μ. Καΐλα (Επιμ) *Η σχολική αποτυχία*. Αθήνα: Ελληνικά Γράματα, 75-151.

ΟΙ ΈΛΛΗΝΕΣ ΔΑΣΚΑΛΟΙ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΣΤΑ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥΣ ΜΕ ΑΝΑΛΟΓΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΕ ΟΛΟ ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ.

Ιωάννης Παναγιωτόπουλος

Δάσκαλος, 2ο Δημοτικό Σχολείο Κασσάνδρειας Χαλκιδικής, Απόφοιτος Μεταπτυχιακού Τμήματος Π.Τ.Δ.Ε Φλώρινας.

panagiotio@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ρεαλιστικά προβλήματα είναι τα προβλήματα στα οποία, για την λύση τους απαιτείται μια κριτική θεώρηση της εκφώνησης τους με βάση την καθημερινή εμπειρία. Πολλές έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί στα ρεαλιστικά προβλήματα για να εξετάσουν τις συμπεριφορές μαθητών (Greer, 1993; Verschaffel et al, 1994; Verschaffel et al, 1999) και υποψήφιων δασκάλων (Verschaffel et al. 1997; Chen et al. 2011 κ.α). Όλες σχεδόν οι έρευνες καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές και οι υποψήφιοι δάσκαλοι όταν λύνουν ρεαλιστικά προβλήματα δεν λαμβάνουν υπόψη τους την καθημερινή πραγματικότητα. Στα πλαίσια διπλωματικής εργασίας, έγινε μια παρόμοια έρευνα σε Έλληνες δασκάλους εν ενεργεία (Lemonidis et al, 2009). Ορισμένα από τα αποτελέσματά της συγκρίνονται με άλλες παρόμοιες έρευνες από την Ελλάδα και το διεθνή χώρο και παρατίθενται σε αυτήν την εργασία.

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στη διάρκεια της ιστορίας της εκπαίδευσης θεωρούνταν ότι ένας από τους βασικούς ρόλους της λύσης προβλήματος ήταν η σύνδεση των μαθηματικών με την πραγματικότητα. Μέσω της λύσης προβλήματος προσφέρονταν καταστάσεις της καθημερινής ζωής στις οποίες εύρισκαν εφαρμογή οι μαθηματικές έννοιες που διδάσκονταν στο σχολείο. Για πολύ καιρό τα λεκτικά προβλήματα έπαιζαν αυτό το ρόλο της εφαρμογής των μαθηματικών στην πραγματικότητα χωρίς πολύ σκέψη και κριτική σε αυτό το θέμα (Kilpatrick, 1985; Blum & Niss, 1991; Verschaffel et al, 2000).

Τα τελευταία 15 – 20 χρόνια με βάση τα αποτελέσματα πολλών εμπειρικών ερευνών ο ρόλος αυτός των λεκτικών προβλημάτων άρχισε να αμφισβητείται. Φάνηκε, μετά από πολλά χρόνια εκπαίδευσης στο σχολείο, ότι αρκετοί μαθητές έχουν αποκτήσει

μια συμπεριφορά στη λύση προβλήματος, σύμφωνα με την οποία, περιορίζονται στην εκτέλεση μιας ή περισσότερων αριθμητικών πράξεων με τους αριθμούς που υπάρχουν στο πρόβλημα χωρίς να παίρνουν υπόψη τους κάποιους πιθανούς περιορισμούς της πραγματικότητας που περιγράφονται στο περιεχόμενο της εκφώνησης (Nesher, 1980; Schoenfeld, 1991; Lave, 1992; Boaler, 1994; Reusser & Stebler, 1997; Verschaffel et al, 2000). Αυτό το φαινόμενο στη συμπεριφορά των μαθητών κατά τη λύση αριθμητικών λεκτικών προβλημάτων σύμφωνα με τον Schoenfeld, (1991) ονομάζεται "suspension of sense-making" "αναστολή της δημιουργίας σημασίας".

Τα αποτελέσματα των ερευνών δείχνουν ότι αυτή η γενική και σταθερή παράλειψη των μαθητών στη δημιουργία νοήματος (sense-making) όταν λύνουν λεκτικά αριθμητικά προβλήματα σ' ένα τυπικό σχολικό πλαίσιο, δεν οφείλεται σε γνωστικό έλλειμμα αλλά στο ότι αυτοί δρουν σύμφωνα με "τους κανόνες του παιχνιδιού" της αλληλεπίδρασης, δηλαδή του διδακτικού συμβολαίου.

Διδακτικό Συμβόλαιο καλείται το σύνολο των συμπεριφορών του διδάσκοντος που αναμένεται από το μαθητή και το σύνολο των συμπεριφορών του μαθητή που αναμένονται από το διδάσκοντα. Αυτό το συμβόλαιο είναι το σύνολο των κανόνων που προσδιορίζουν εν μέρει ρητά αυτή τη σχέση, αλλά πάνω από όλα, υπόρρητα το ότι ο κάθε συμμετέχων στη διδακτική σχέση θα τη διαχειρίζεται με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, αλλά πάντα έτσι ώστε να ανταποκρίνεται στις προσδοκίες του άλλου (Brousseau, 1997).

Αρκετοί ερευνητές (π.χ. De Corte & Verschaffel, 1985; Gerofsky, 1996; Kilpatrick, 1985; Lave, 1992; Reusser & Stebler, 1997) ανέλυσαν τους κρυφούς κανόνες που φαίνεται να χρησιμοποιούνται έμμεσα και υπονοούμενα από τους μαθητές. Οι κανόνες που κατέληξαν είναι οι παρακάτω:

- Όλα τα προβλήματα που παρουσιάζει ο δάσκαλος ή βρίσκονται στο βιβλίο έχουν λύση και νόημα.
- Υπάρχει μια απλή, σωστή και συγκεκριμένη αριθμητική απάντηση.
- Αυτή η απλή απάντηση επιτυγχάνεται από την εκτέλεση μιας ή περισσότερων πράξεων χρησιμοποιώντας όλους τους αριθμούς που υπάρχουν στο πρόβλημα.
- Η λύση μπορεί να επιτευχθεί με την εφαρμογή γνωστών μαθηματικών διαδικασιών.
- Το πρόβλημα έχει όλα τα στοιχεία που χρειάζονται για τη λύση του, δεν έχει περιττές πληροφορίες και δεν πρέπει να χρησιμοποιείται για τη λύση του εξωτερική γνώση.
- Μπορεί να αγνοούνται παραβιάσεις της γνώσης σχετικά με τον καθημερινό κόσμο.

1.1. Έρευνες στα ρεαλιστικά προβλήματα

Εμπνευσμένοι από αυτά τα εντυπωσιακά παραδείγματα της αναστολής δημιουργίας σημασίας (suspension of sense-making) ο Geer (1993) πραγματοποίησε πειράματα σε μαθητές 13-14 χρόνων στην Ιρλανδία και οι Verschaffel, De Corte και Lasure (1994) σε μαθητές 10-11 χρονών στο Βέλγιο. Χρησιμοποίησαν προβλήματα τα οποία ταξινόμησαν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: α) στα συνηθισμένα προβλήματα ή προβλήματα S (Standard Problems) και β) στα προβληματικά προβλήματα ή προβλήματα P (Problematic Problems). Τα Standard Problems είναι τα προβλήματα τα οποία μπορούν να λυθούν από τους μαθητές χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες συνδυάζοντας τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος. Τέτοιου είδους προβλήματα είναι συνήθως τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται στα σχολικά μαθηματικά πολλών εκπαιδευτικών συστημάτων. Στη δεύτερη ομάδα, Problematic Problems (ρεαλιστικά) το μαθηματικό μοντέλο δεν είναι εμφανές και κατά την επίλυση τους πρέπει να λαμβάνονται υπόψη ρεαλιστικές καταστάσεις. Τα προβλήματα αυτά σπάνια υπάρχουν σε σχολικά εγχειρίδια και δε χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία. Οι πιο πάνω ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι γενικά οι μαθητές είχαν την τάση να μην εφαρμόζουν γνώσεις από την καθημερινή ζωή και τη ρεαλιστική σκέψη, όταν αντιμετώπιζαν τα προβλήματα τύπου P και όπως ήταν αναμενόμενο, απάντησαν καλύτερα στα S προβλήματα (84% επιτυχία). Οι μαθητές έτειναν να μη χρησιμοποιούν τις γνώσεις που έπαιρναν από την καθημερινή ζωή και τη ρεαλιστική σκέψη.

Τέτοιες έρευνες, με παρόμοια μεθοδολογία και προβλήματα, έγιναν και σε υποψηφίους δασκάλους: (Verschaffel et al, 1997, Chen, 2011, Λεμονίδης, 2007). Οι φοιτητές σε αυτές τις έρευνες, κλήθηκαν να λύσουν μια σειρά «προβληματικών» προβλημάτων με ένα ερωτηματολόγιο και βαθμολογήθηκαν ανάλογα με τη ρεαλιστικότητα των απαντήσεών τους, με τον ίδιο τρόπο που βαθμολογήθηκαν και οι μαθητές σε προηγούμενες έρευνες.

Τόσο οι αρχικές αυτές έρευνες σε υποψηφίους δασκάλους και μαθητές, όσο και άλλες, οι οποίες επαναλήφθηκαν και σε πολλές άλλες χώρες, συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό όσον αφορά στα αποτελέσματά τους. Ενδιαφέρον, ωστόσο παρουσιάζει η πιο πρόσφατη έρευνα των Chen et al σε υποψηφίους δασκάλους στην Κίνα, της οποίας τα αποτελέσματα αποκλίνουν αρκετά από αυτά των προηγούμενων ερευνών. (βλέπε Verschaffel et al, 2000, Xin, 2009, Chen, 2011).

2. ΕΡΕΥΝΑ

2.1. Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Η έρευνα αυτή έρχεται να ερευνήσει σε ένα πρώτο επίπεδο τις απαντήσεις Ελλήνων εν ενεργεία δασκάλων στα ρεαλιστικά προβλήματα της διεθνούς βιβλιογραφίας. Σε

αυτή την εργασία δίνουμε μια μικρή εικόνα στο πως αντιμετωπίζουν οι εν ενεργεία δάσκαλοι τα ρεαλιστικά προβλήματα. Εξετάζεται δηλαδή σε ένα πρώτο επίπεδο, αν ενεργούν στη λύση του προβλήματος με βάση το διδακτικό συμβόλαιο, ώστε να μην παίρνουν υπόψη τους δεδομένα της πραγματικότητας και της καθημερινής ζωής. Δεύτερο, γίνεται μια απόπειρα ώστε οι απαντήσεις αυτές των δασκάλων στα ρεαλιστικά προβλήματα να συγκριθούν με τις απαντήσεις υποψηφίων δασκάλων από άλλες έρευνες, για να διαπιστωθεί κατά πόσο συμβαδίζουν τα ποσοστά ρεαλιστικών ή μη απαντήσεων των δασκάλων εν ενεργεία, με αυτά των διεθνών ερευνών (έστω και αν είναι σε φοιτητές).

Τα συγκριτικά στοιχεία των ρεαλιστικών απαντήσεων των μαθητών, παρατίθενται καθαρά ως ένα γενικό πλαίσιο αναφοράς, γιατί άλλωστε είναι και το πρώτο δείγμα τέτοιου είδους ερευνών, με τα συγκεκριμένου είδους προβλήματα (βλ. Verschaffel et al, 1994).

2.2. Μεθοδολογία – Δείγμα

Η έρευνα διεξήχθη από τον Μάρτιο του 2007 ως και τον Ιούνιο του ίδιου έτους. Το δείγμα αποτέλεσαν 162 δάσκαλοι, από τους οποίους οι 80 ήταν άνδρες και οι 82 γυναίκες και δίδασκαν σε διάφορα μέρη της Ελλάδας. Οι δάσκαλοι έλαβαν είτε δια χειρός, είτε με ταχυδρομείο (ηλεκτρονικό και συμβατικό), είτε με τηλεομοιοτυπία ένα ερωτηματολόγιο, χωρίς να τους δοθεί όριο χρόνου να το συμπληρώσουν.

2.3. Μέσα συλλογής δεδομένων

Η εξέταση των δασκάλων πραγματοποιήθηκε με ένα ερωτηματολόγιο το οποίο περιλάμβανε 4 ρεαλιστικά προβλήματα, τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια. Μετά τις απαντήσεις στα προβλήματα ζητήθηκε επίσης από τους δασκάλους να αναλύσουν με λίγα λόγια και το σκεπτικό τους στο τέλος κάθε απάντησης Το ερωτηματολόγιο περιελάμβανε στην αρχή ερωτήσεις σχετικές με κάποια χαρακτηριστικά των δασκάλων όπως το φύλο, οι σπουδές, τα χρόνια υπηρεσίας, τα μαθήματα που προτιμά ο εκπαιδευτικός να διδάσκει κατά σειρά. (Οι συσχετίσεις αυτές, καθώς και εμπεριστατωμένη ανάλυση των διάφορων παραγόντων παρατίθενται στο Lemonidis et al, 2009). Τα προβλήματα του ερωτηματολογίου τα έχουμε δανειστεί από τη διεθνή βιβλιογραφική έρευνα (Yoshida et al., 1997, Verschaffel, De Corte & Borghart, 1997).

Η μεθοδολογία της έρευνας δε διαφέρει στο κομμάτι για το οποίο γίνονται οι συγκρίσεις με τις έρευνες των Verschaffel et al (1997), Λεμονίδη (2007) και Chen et al (2011) , υπό την έννοια ότι τα προβλήματα δόθηκαν με μορφή ερωτηματολογίου στα υποκείμενα της έρευνας και μέσα σε ένα διάστημα περίπου μισής ώρας, τους ζητήθηκε να απαντήσουν στα ερωτήματα – προβλήματα που τους τέθηκαν, χωρίς καμία νύξη σχετικά με το είδος των προβλημάτων ή το είδος των απαντήσεων που όφειλαν να δώσουν.

Στην επεξεργασία των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν δύο είδη κωδικοποιήσεων. Η κωδικοποίηση των Verschaffel, De Corte & Lasure (1994) & Verschaffel, De Corte & Borghart (1997): (RA) ρεαλιστική απάντηση (realistic answer): όταν το υποκείμενο της έρευνας απαντά ρεαλιστικά, λαμβάνοντας υπόψη τις πραγματικές συνθήκες της ζωής, (NA) μη ρεαλιστική απάντηση (non realistic answer): όταν απαντά χωρίς να λαμβάνει υπόψη τα ρεαλιστικά δεδομένα και προχωρά σε πράξεις για να βρει μια καθαρή αριθμητική απάντηση στο πρόβλημα, σύμφωνα με το διδακτικό συμβόλαιο, (TE) τεχνικό λάθος (technical error), (αναφέρεται σε λάθη εκτέλεσης πράξεων), (OA) άλλη απάντηση (other answer), (απάντηση που δεν κατηγοριοποιείται σύμφωνα με τις παραπάνω κατηγορίες), (NOA) καμία απάντηση (no answer).

2.4. Τα προβλήματα

1. *(Πλάκες)*. Ο Νίκος αγόρασε 4 πλάκες των 2.5 μέτρων η κάθε μία. Πόσες πλάκες του ενός (1) μέτρου μπορεί να κόψει από αυτές;
2. *(Λεωφορείο)*. 450 Στρατιώτες πρέπει να πάνε στο στρατόπεδο με λεωφορεία. Κάθε λεωφορείο χωράει 36 στρατιώτες. Πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν;
3. *(Δρομέας)*. Ο Γιάννης τρέχει τα 100 μέτρα σε 17 δευτερόλεπτα. Πόσο χρόνο θα κάνει για να τρέξει το 1 χιλιόμετρο;
4. *(Σχολείο)*. Η Έλενα και η Νίκη πηγαίνουν στο ίδιο σχολείο. Η Έλενα ζει σε απόσταση 17 χιλιομέτρων από το σχολείο και η Νίκη σε απόσταση 8 χιλιομέτρων από το σχολείο. Πόσα χιλιόμετρα μακριά ζει η μία από την άλλη;

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1. Οι απαντήσεις των δασκάλων της έρευνας στα ρεαλιστικά προβλήματα

	RA: Ρεαλιστική Απάντηση	NA: Μη Ρεαλιστική Απάντηση	TE: «Τεχνικό» λάθος	OA: Άλλη Απάντηση	NOA: Καμία Απάντηση
Πρ. 1. Πλάκες	68%	24%	7%	1%	1%
Πρ.2Λεωφορεία	90%	7%	1%	2%	
Πρ. 3. Δρομέας	45%	48%	7%		
Πρ. 4. Σχολείο	35%	63%		2%	

Πίνακας 1: Οι απαντήσεις των δασκάλων στα προβλήματα

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό ρεαλιστικών απαντήσεων οι δάσκαλοι το δίνουν στο πρόβλημα 2 των λεωφορείων (90%), στο πρόβλημα 1 με τις πλάκες δίνουν ρεαλιστικές απαντήσεις το 68% και στο πρόβλημα 3 του δρομέα και πρόβλημα 4 του σχολείο το ποσοστό πέφτει στο 45% και 35% αντίστοιχα.

Στο πρώτο πρόβλημα, οι σωστές ρεαλιστικές απαντήσεις των δασκάλων που αναφέρουν πως μπορούν να κοπούν 8 πλάκες του 1μ, φτάνουν το 60,5%, ενώ οι σωστές απαντήσεις που προσθέτουν πως είτε περισσεύουν 4 πλάκες του μισού μέτρου, είτε πως αν ενώσει κανείς τα υπόλοιπα, τότε έχουμε άλλα 2 μέτρα, φτάνουν το 6%.

Συνηθέστερη λανθασμένη απάντηση στο πρόβλημα είναι αυτή που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό 4x2,5 και στη συνέχεια τη διαίρεση με το 1 για να δοθεί αποτέλεσμα 10 πλάκες του 1 μ. (ποσοστό 24%).

Αρκετοί δάσκαλοι (13%) είτε έγραψαν το σχόλιο: *«Είναι λάθος η εκφώνηση»*, είτε απάντησαν στο σκεπτικό του προβλήματος με ερώτηση όπως: *«τι πλάτος έχουν οι πλάκες», «τι σχήμα έχουν»* ή *«επειδή μιλάμε για επιφάνεια, για να απαντήσω πρέπει να δοθεί το σχήμα και το πλάτος»*.

Στο δεύτερο πρόβλημα με τα λεωφορεία, αν και το ποσοστό των ρεαλιστικών απαντήσεων είναι πολύ μεγάλο (90,1%), ένας στους 10 δασκάλους απάντησε λάθος στο πρόβλημα. Το 5% των δασκάλων έγραψε στο ερωτηματολόγιο μόνο τη διαίρεση με αποτέλεσμα 12,5 λεωφορεία, χωρίς άλλη αναφορά, ενώ το 2% κάνει τη διαίρεση με το υπόλοιπό της.

Στο τρίτο πρόβλημα με τον δρομέα οι περισσότερες ορθές (ρεαλιστικές) απαντήσεις δόθηκαν με σχόλιο, αφού όμως έγιναν και οι πράξεις (με αναλογία) και δόθηκε το αποτέλεσμα 170 δευτερόλεπτα ή 2 λεπτά και 50 δευτερόλεπτα. Πιο συγκεκριμένα, το 38,3% των δασκάλων του δείγματος, αφού βρήκε το αποτέλεσμα, προχώρησε σε σχόλια του τύπου: *«είναι κατοστάρης», «Τα χίλια μέτρα είναι δρόμος αντοχής», «για ανθρώπους το παραπάνω αποτέλεσμα προφανώς δεν ισχύει», «το αποτέλεσμα ισχύει μόνο αν η ταχύτητα του δρομέα είναι σταθερή»* ή *«μόνο υπό μαθηματικές συνθήκες»* κ.α. Έτσι οι δάσκαλοι δήλωσαν φανερά πως υπολογίζουν τον παράγοντα της κούρασης, αλλά δίνουν το αποτέλεσμα καθαρά για μαθηματικούς λόγους. 11 δάσκαλοι (7%) απάντησαν γράφοντας μόνο πως είναι αδύνατο να υπολογιστεί ο χρόνος του δρομέα με βάση το χρόνο του στα 100 μ., αφού ο ένας είναι δρόμος ταχύτητας ενώ τα 1000 μ. δρόμος αντοχής.

Στις μη ρεαλιστικές απαντήσεις, που φθάνουν το 48%, οι δάσκαλοι εφαρμόζουν την αναλογία και βρίσκουν αποτέλεσμα τα 170 δευτερόλεπτα ή 2 λεπτά και 50

δευτερόλεπτα. Οι δάσκαλοι αυτοί δεν κάνουν κανένα ρεαλιστικό σχόλιο για την κούραση του δρομέα.

Στο τέταρτο πρόβλημα όπου ήταν ζητούμενη η απόσταση μεταξύ των σπιτιών των δύο παιδιών υπήρχε το χαμηλότερο ποσοστό ρεαλιστικών απαντήσεων (35,2%) Αναλυτικότερα, το 16% των δασκάλων, απάντησε πως είναι αδύνατο να λυθεί το πρόβλημα αν δεν γνωρίζουμε ακριβώς τη θέση των σπιτιών. Στις απαντήσεις αυτές δεν υπάρχουν πράξεις, αλλά μόνο λεκτικά σχόλια του τύπου: *«είναι αδύνατη η λύση αν δεν γνωρίζουμε τη θέση των σπιτιών», «χρειάζεται σχεδιάγραμμα»* κ.α.

Στις μη ρεαλιστικές απαντήσεις των δασκάλων υπάρχουν διάφοροι τύποι απαντήσεων:

Το 18% των δασκάλων επιλέγουν την αφαίρεση για να λύσουν το πρόβλημα. Θεωρούν δηλαδή πως τα σπίτια των παιδιών βρίσκονται στην ίδια ευθεία, από την ίδια πλευρά, επομένως δίνεται το αποτέλεσμα 17 – 8 = 9 χλμ, χωρίς οι απαντήσεις τους να έχουν κάποιο άλλο ρεαλιστικό σχόλιο.

Στη συχνότερη λανθασμένη (μη ρεαλιστική) απάντηση, η οποία δίνεται από ένα ποσοστό 35,8% των δασκάλων, δίνονται δύο λύσεις στο πρόβλημα. Πραγματοποιούν μια πρόσθεση και μια αφαίρεση και βρίσκουν ως αποτελέσματα τα 9 και τα 25 χλμ. Θεωρούν δηλαδή πως τα σπίτια είναι στην ίδια ευθεία, είτε από την ίδια πλευρά του δρόμου, είτε αντιδιαμετρικά.

Αρκετοί δάσκαλοι, σε ποσοστό 7%, θεωρούν πως τα σπίτια με το σχολείο μπορεί να σχηματίζουν τρίγωνο (συνήθως ορθογώνιο) και επομένως προσθέτουν και αυτόν τον παράγοντα στις λύσεις, υπό την αίρεση πως πρέπει να βρεθεί το μήκος της υποτείνουσας που ενώνει τα δύο σπίτια (πυθαγόρειο θεώρημα). Έτσι, η απάντησή τους περιλαμβάνει τρία αποτελέσματα, ενώ στην πλειοψηφία των απαντήσεων αυτού του τύπου υπάρχει σχήμα που εξηγεί το σκεπτικό τους.

3.2. Οι απαντήσεις των δασκάλων της έρευνας σε σύγκριση με διεθνείς έρευνες

Πρόβλημα	Παρούσα έρευνα (δάσκαλοι εν ενεργεία)	Chen, Van Dooren & Verschaffel (2011) (υποψήφιοι δάσκαλοι)	Verschaffel, De Corte & Borghart (1997) (υποψήφιοι δάσκαλοι)	Lemonidis (2007) (υποψήφιοι δάσκαλοι)	Verschaffel, De Corte & Lasure (1994) (μαθητές)	Lemonidis (2007) (μαθητές)
Πλάκες	**66,7%**	**94%**	**64%**	**62%**	13%	3,2%
Λεωφορεία	**90,1%**	**98%**	**90%**	**89,5%**	49%	56,1%
Δρομέας	**45,1%**	**58%**	**31%**	**11,5%**	3%	4,2%
Σχολείο	**35,2%**	**84%**	**48%**	**17%**	3%	12,2%

Πίνακας 2 : Ποσοστά ρεαλιστικών απαντήσεων από διάφορες έρευνες σε υποψήφιους δασκάλους και μαθητές

Στον πίνακα 2 συγκρίνουμε τα αποτελέσματα αυτά με αποτελέσματα από άλλες έρευνες στα ίδια προβλήματα με υποψήφιους εκπαιδευτικούς από το Βέλγιο (Verschaffel, et al. 1997) και την Κύπρο, (Lemonidis, 2007) και με μαθητές της πέμπτης τάξης από το Βέλγιο (Verschaffel, et al. 1994) και της έκτης τάξης από την Κύπρο. Παρατηρούμε ότι τα ποσοστά των ρεαλιστικών απαντήσεων στους υποψηφίους δασκάλους είναι παρόμοια με αυτά των δασκάλων. Μόνο που στους υποψήφιους δασκάλους της Κύπρου, στα δύο τελευταία προβλήματα του δρομέα και του σχολείου, τα ποσοστά των ρεαλιστικών απαντήσεων είναι πιο χαμηλά. Βεβαίως τα ποσοστά των ρεαλιστικών απαντήσεων στους μαθητές είναι πολύ πιο χαμηλά από αυτά των δασκάλων αλλά και των υποψήφιων δασκάλων, γι' αυτό παρατίθενται μόνο για ένα απλό πλαίσιο αναφοράς.

Ιδιαίτερη προσοχή ωστόσο θα πρέπει να δοθεί στις απαντήσεις των υποψήφιων δασκάλων στην Κίνα: (Chen et al., 2011). Ενώ στους Κινέζους μαθητές οι επιδόσεις στην επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων είναι παρόμοιες με αυτές άλλων χωρών (Chen et al., 2007), στους εκπαιδευτικούς τα ποσοστά ρεαλιστικών απαντήσεων διαφέρουν σημαντικά, ιδίως στους τριτοετείς φοιτητές που συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο.

Παρατηρούμε ότι σε όλους τους πληθυσμούς το πρόβλημα του λεωφορείου είναι αυτό που συγκεντρώνει τα υψηλότερα ποσοστά ρεαλιστικών απαντήσεων. Αυτό συμβαίνει επειδή αφενός το μαθηματικό μέρος του προβλήματος είναι εύκολο –μια διαίρεση – και αφετέρου το περιεχόμενο παραπέμπει σε μια πραγματική κατάσταση που είναι αρκετά γνωστή σε όλους – σχολικές εκδρομές – επιπλέον η μη ρεαλιστική απάντηση οδηγεί σε μια παράλογη απάντηση – κλάσμα ή δεκαδικός αριθμός λεωφορείου.

Επίσης, το πρόβλημα με τις πλάκες είναι ότι το περιεχόμενο είναι τέτοιο ώστε μια μη ρεαλιστική απάντηση να είναι αντίθετη με την πραγματικότητα – πλάκες των 0,5 μ. που δεν μπορούν να ενωθούν σε πλάκες του 1 μ. Εξαίρεση σε αυτό το πρόβλημα, το ποσοστό των ρεαλιστικών απαντήσεων των Κινέζων φοιτητών, όπου οι ρεαλιστικές απαντήσεις φτάνουν το 94%.

Στο πρόβλημα του δρομέα η μη ρεαλιστική απάντηση δίνει μια αντίφαση με την πραγματικότητα αλλά αυτή η αντίφαση δεν φαίνεται μόνο από το αριθμητικό αποτέλεσμα του προβλήματος. Θα πρέπει να αμφισβητηθεί και να συμπληρωθεί το περιεχόμενο της εκφώνησης του προβλήματος. Ομοίως με το πρόβλημα με τις πλάκες, σε αυτό το πρόβλημα πρέπει να σημειωθούν οι επιδόσεις των Κινέζων υποψήφιων δασκάλων, των οποίων οι ρεαλιστικές απαντήσεις φτάνουν το 58%.

Το πρόβλημα του σχολείου διαφέρει από τα άλλα τρία προβλήματα στο ότι είναι πιο δύσκολη η μαθηματική του επεξεργασία. Δεν υπάρχει όπως στα άλλα προβλήματα

ένα εύκολο αριθμητικό αποτέλεσμα που να έρχεται σε αντίφαση με την πραγματικότητα. Το πρόβλημα αυτό απαιτεί μια διερεύνηση πολλών περιπτώσεων. Από την άποψη αυτή δεν είναι εύκολη για κάποιον η νοητική αναπαράσταση του περιεχομένου του προβλήματος. Και σε αυτό το πρόβλημα οι ρεαλιστικές απαντήσεις των Κινέζων υποψηφίων δασκάλων είναι αξιοσημείωτα περισσότερες από αυτές των συναδέλφων τους στις άλλες χώρες, ακόμα και από αυτές των δασκάλων εν ενεργεία της έρευνάς μας.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μια γενική διαπίστωση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι και στους εν ενεργεία δασκάλους οι συνήθειες και το διδακτικό συμβόλαιο σχετικά με τη λύση του προβλήματος είναι πολύ ισχυρό. Έτσι οι δάσκαλοι, καθώς και οι υποψήφιοι δάσκαλοι αλλά και οι μαθητές δεν εξετάζουν με κριτικό τρόπο τη ρεαλιστικότητα της εκφώνησης ενός προβλήματος αλλά την παίρνουν ως δεδομένη. Αυτό βέβαια μπορεί να θεωρηθεί φυσικό σε μια παραδοσιακή διδασκαλία όπου δεν συνδέονται τα μαθηματικά με την πραγματική ζωή και δημιουργείται το διδακτικό συμβόλαιο σύμφωνα με το οποίο συνηθίζεται να παίρνεται ως δεδομένο το περιεχόμενο του προβλήματος και κάθε πρόβλημα να έχει μια πραγματική λύση. Αυτή η συμπεριφορά έρχεται να επιδεινωθεί από το γεγονός ότι στα μαθηματικά συνήθως κινούμαστε από το συγκεκριμένο προς το αφηρημένο και στην προσπάθεια της αφαίρεσης και της γενίκευσης κάνουμε πολλές συμβάσεις και υπερβάσεις σχετικά με την πραγματικότητα. Έτσι, γίνεται για ακόμα μια φορά ακόμα πιο αισθητό το πρόβλημα της «γεφύρωσης» των μαθηματικών με την πραγματικότητα (Depaepe, 2010).

Ιδιαίτερης αναφοράς χρήζουν οι επιδόσεις των Κινέζων φοιτητών της πιο πρόσφατης έρευνας σε υποψηφίους δασκάλους: τα ποσοστά των ρεαλιστικών απαντήσεών τους είναι αρκετά ψηλότερα από όλες τις σχετικές έρευνες στα ίδια προβλήματα στα οποία απάντησαν οι δάσκαλοι και οι φοιτητές. Φυσικά, είναι ψηλότερα και από αυτά των Κινέζων μαθητών (Chen et al, 2007, Chen et al, 2011).

Εδώ θα πρέπει να πρέπει να εγερθούν ερωτήματα σχετικά με το αν τα δείγματα των ερευνών ήταν αρκετά μεγάλα και αντιπροσωπευτικά, αλλά και η χρονική διαφορά που χωρίζει τις έρευνες, ιδίως αυτή των Verschaffel et al (1997), με αυτή των Chen et al (2011). Εάν, ωστόσο, αυτά τα δεδομένα επιβεβαιωθούν για τους Κινέζους φοιτητές και σε μελλοντικές έρευνες, θα αποτελούσαν ένα ισχυρό αντεπιχείρημα στις αναφορές ότι οι Κινέζοι μπορεί να είναι καλοί στα κλασσικά προβλήματα, αλλά αδύνατοι στα προβλήματα με ανοικτές λύσεις (Cai & Nie, 2007). Αν, τέλος επιβεβαιωθεί η τάση των Κινέζων να τα πηγαίνουν καλύτερα στις απαντήσεις τους στα ρεαλιστικά προβλήματα, αυτό θα αποτελούσε αφορμή για έρευνα σχετικά με την κουλτούρα της εκπαίδευσής τους και τις τεχνικές που τους οδηγούν στο να έχουν τόσο καλές επιδόσεις στα «προβληματικά» προβλήματα (P problems), τα οποία,

όπως ειπώθηκε, απαιτούν ρεαλιστική σκέψη, έξω από τη συνηθισμένη «ρουτίνα» (non – routine thinking) (Chen et al, 2011).

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subject – state, trends, and issues in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37-68.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 7-2*, 33-115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield). Dordrecht: Kluwer.

Cai,J., & Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: Research and practice. ZDM – *The International Journal on Mathematics Education, 39*, 459-473.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics. 62*, 211-230.

Chen,L., Van Dooren, W.,Chen, Q., & Verschaffel.,L., (2007). The relationship between posing and solving arithmetic word problems among Chinese elementary school children. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, 11 (1)*, 1-31.

Chen,L., Van Dooren, & Verschaffel.,L., (2011). An Investigation on Chinese Teachers' Realistic Problem Solving Abilities and Beliefs. *Journal of Mathematics Education, 4 (2)*, 80-96.

Contreras, J.N. and Martínez-Cruz, A.M. (2001). An investigation of preservice elementary teachers' solution processes to problematic story problems. In M. van den Heuvel- Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME Conference 2*, 289-296.

De Corte. E., & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 4*. 3-21.

Depaepe,F., De Corte, E.,& Verschaffel,L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education, 26*, 152-160.

Greer, B. (1993). The modeling perspective on wor(l)d problems. *Journal of Mathematical Behaviour 1.2*, 239-250.

Lemonidis Ch. (2007). Les comportements des élevés de l'école élémentaire et des futurs enseignants face aux problèmes réalistes. *Colloque COPIRELEM, 11*, 13-juin, Troyes 2007.

Lemonidis, Ch., Panagiotopoulos, I., et Nikolantonakis, K., Les enseignants Grecs face aux problemes realistes – Les caracteristiques des enseignants qui influecent les reponses realistes. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 14*, 195-212 .

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss, D. N. Perkins & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution. The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics. *Learning and Instruction, 7*, 309-328.

Verschaffel, L., De Corte, E. & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction, 4*, 273-294.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction, 4*, 339-359.

Verschaffel, L., Greer, B. and De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. Swets & Zeitlinger, Lisse.

Xin, Z. (2009). Realistic Problem Solving in China. In L. Verschaffel, B. Greer, W.Van Dooren, & S. Mulkhopadhyay (Eds.), *Words and Worlds: Modeling verbal descriptions of situations.* (pp. 161-176). RotterdamQ Sense Publishers.

Yoshida, H., Verschaffel, L. and Corte, E. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning and Instruction, 7 (4)*, 329-338.

ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΛΛΑΓΗ ΤΟΥ ΔΑΣΚΑΛΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΣΚΙΑΓΡΑΦΗΣΗ ΕΝΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Γιώργος Κόσυβας
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Α΄ Αθήνας
gkosyvas@yahoo.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Μια μικρο-κοινότητα διερεύνησης 11 εκπαιδευτικών μετείχε σε ένα ετήσιο πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης στο οποίο αξιοποιήθηκαν επίμαχες διδακτικές περιπτώσεις. Το υλικό των περιπτώσεων βασίστηκε σε παρακολουθήσεις διδασκαλιών μαθηματικών σε δύο Πρότυπα-Πειραματικά Σχολεία και τις ατομικές συνεντεύξεις με τους εκπαιδευτικούς, αμέσως μετά από κάθε διδασκαλία. Από τα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτει ότι η διεργασία του αναστοχαστικού διαλόγου παρακίνησε τους συμμετέχοντες να αντιληφθούν τη διδασκαλία τους ως συλλογική υπόθεση, να αρχίσουν να επανεξετάζουν κρίσιμες περιοχές των διδακτικών ενεργειών τους και να σκέπτονται να επιφέρουν αλλαγές στη διδασκαλία τους.

1. ΕΠΑΓΓΛΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Κατά τις τρεις τελευταίες δεκαετίες, υπάρχει αυξανόμενο ερευνητικό ενδιαφέρον για την επαγγελματική ανάπτυξη των δασκάλων των μαθηματικών και την αλλαγή της διδασκαλίας τους στη σχολική τάξη (Σακονίδης, κ.ά., 2007; Lampert, 2001). Η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών αποτελεί διαρκή μαθησιακή διεργασία. Καθώς οι διδάσκοντες εμπλέκονται σε προγράμματα ενδοσχολικής ή διασχολικής επιμόρφωσης, μετέχουν σε ομάδες διερεύνησης και ανάλυσης της πρακτικής τους και εξετάζουν τρόπους για την αλλαγή της διδασκαλίας των μαθηματικών (Zeichner & Liston, 1996; Jaworski, 1998).

Μέχρι πρόσφατα, η επαγγελματική ανάπτυξη των δασκάλων των μαθηματικών ταυτιζόταν με την απόκτηση επιστημονικών και παιδαγωγικών γνώσεων. Η συμμετοχή τους σε δραστηριότητες επαγγελματικής ανάπτυξης αφορούσε κυρίως την ενημέρωσή τους για τις νεότερες μαθηματικές ανακαλύψεις και τις πλέον επίκαιρες παιδαγωγικές θεωρίες. Στα σύγχρονα προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης προεξάρχει η σύνδεση με την πραγματικότητα των σχολικών τάξεων. Οι εκπαιδευτικοί μαζί με άλλους συναδέλφους τους και ερευνητές αναλογίζονται, διερευνούν και αναλύουν επίμαχες περιπτώσεις της διδακτικής πρακτικής τους και προβληματίζονται πώς θα αλλάξουν ορισμένες πλευρές της διδασκαλίας τους (Potari, κ.ά., 2010; Σακονίδης, 2012; Tirosh & Graeber, 2003).

Ο αναστοχασμός αποτελεί βασική δεξιότητα σκέψης των αναπτυξιακών προγραμμάτων επιμόρφωσης των δασκάλων μαθηματικής ειδικότητας (Hall & Hord, 2001; Wood, 1999). Στα εν λόγω προγράμματα, οι μαθηματικοί καλούνται να σκεφτούν σχετικά με τη διδασκαλία, τη μάθηση, το δικό τους ρόλο, το ρόλο των μαθητών τους, το εκπαιδευτικό πλαίσιο και τους παράγοντες που το προσδιορίζουν. Αξιοποιούν εποικοδομητικά την πρακτική γνώση που αποκτούν μέσω της εμπειρίας τους, ανακαλύπτουν με ποιον τρόπο λειτουργούν και συνειδητοποιούν την προσωπική εκπαιδευτική θεωρία τους, τις παγιωμένες αντιλήψεις τους και τις καθημερινές πρακτικές τους (Jaworski, 1998; Σακονίδης, κ.ά., 2007; Kaldrimidou, κ.ά. 2013).

Οι Jaworski κ.ά. (2006), αναγνωρίζοντας τη σημασία της συνεργατικής διερεύνησης μεταξύ εκπαιδευτικών και διευκολυντών (επιμορφωτών, μεντόρων, προωθητών, ερευνητών, συμβούλων), με στόχο τη μελέτη της διδασκαλίας, εισήγαγαν την έννοια της κοινότητας διερεύνησης. Κοινότητα διερεύνησης είναι μια κοινότητα πρακτικής στην οποία οι συμμετέχοντες μαθαίνουν από κοινού μέσα από την κριτική συμμετοχή στην έρευνα της διδακτικής πρακτικής τους και του αναστοχασμού πάνω σε αυτήν. Η συνεργατική διερεύνηση της διδασκαλίας, καθώς και ο αναστοχασμός πάνω σε αυτήν αποτελούν θεμελιώδεις διεργασίες που οδηγούν προοδευτικά στην ανάπτυξη της επαγγελματικής ταυτότητας των εκπαιδευτικών (Σακονίδης, 2012). Κατά τις πρακτικές αναστοχασμού οι εκπαιδευτικοί συνδιαμορφώνουν ένα μαθησιακό κλίμα αναζητήσεων και οικοδομούν γνώσεις και ερμηνείες μέσα από την ανταλλαγή και την ανασυγκρότηση των εμπειριών τους (Potari κ.ά, 2010). Προοδευτικά ανοίγονται δυνατότητες στους εκπαιδευτικούς να κατανοούν καλύτερα τις αποφάσεις που λαμβάνουν κατά τη διδασκαλία τους, να επανεξετάζουν τις επιλογές τους και να επιδιώκουν την αλλαγή τους (Lerman, 1994; Goodell, 2006). Με τον αναστοχασμό, οι εκπαιδευτικοί σκέφτονται κριτικά τη διδασκαλία τους και αναπτύσσουν ικανότητες μεταφοράς από τα σεμινάρια επιμόρφωσης στην καθημερινή διδασκαλία (Schön, 1987; Tirosh & Graeber, 2003).

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης που οργανώσαμε εξελίχθηκε κατά το σχολικό έτος 2012-13 παράλληλα προς αντίστοιχο πρόγραμμα του Υπουργείου Παιδείας, για την αξιολόγηση των εκπαιδευτικών των Πρότυπων-Πειραματικών Σχολείων (ΠΠΣ). Με στόχο να συνδέσουμε την αξιολόγηση με την επαγγελματική ανάπτυξη προχωρήσαμε στη διαμόρφωση μιας μικρο-κοινότητας πρακτικής/διερεύνησης (Jaworski, κ.ά., 2006). Στην εν λόγω κοινότητα μετείχαν 11 εκπαιδευτικοί (5 από ένα ΠΠ Γυμνάσιο και 6 από ένα ΠΠ Λύκειο) και ο σχολικός σύμβουλος μαθηματικών σε ρόλο διευκολυντή. Ο σχολικός σύμβουλος παρατήρησε 11 διδασκαλίες μαθηματικών στην πρώτη φάση και ισάριθμες στη δεύτερη φάση, σε σχολικές τάξεις Γυμνασίου και Λυκείου. Αμέσως μετά τη διδασκαλία ακολούθησαν ατομικές συνεντεύξεις. Το υποστηρικτικό επιμορφωτικό πρόγραμμα σχεδιάστηκε

από κοινού με τους εκπαιδευτικούς. Οργανώθηκαν 10 επιμορφωτικές συναντήσεις τρίωρης διάρκειας από τις οποίες 8 μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης διδασκαλίας τους. Κατά την εκτύλιξη του προγράμματος οι εκπαιδευτικοί δίδασκαν στα σχολεία τους και μπορούσαν να ελέγχουν την ισχύ των γνώσεων, δεξιοτήτων και στάσεων που ανέπτυσσαν κατά τη συμμετοχή τους στην κοινότητα πρακτικής/διερεύνησης.

Οι ιστορίες και τα θέματα των περιπτώσεων διαμορφώθηκαν από το σχολικό σύμβουλο μετά από την παρατήρηση των διδασκαλιών της πρώτης φάσης. Οι επίμαχες περιπτώσεις αποτελούν γνώριμες περιστάσεις, κρίσιμα συμβάντα, αφηγήσεις από τη σχολική πραγματικότητα και προβλήματα για επίλυση, τα οποία διευκολύνουν την ανάπτυξη του αναστοχασμού (Merseth, 1996; Barnett & Tyson, 1999; Walen & Williams, 2000). Το επιμορφωτικό υλικό συζητήθηκε πρώτα σε ομάδες των 3-4 εκπαιδευτικών (βιωματικά εργαστήρια) και ύστερα στην ολομέλεια.

Αξιοποιώντας ως βάση ανάλυσης το υλικό των επίμαχων περιπτώσεων και χρησιμοποιώντας τα δεδομένα παρατήρησης των διδασκαλιών και των ακόλουθων μεταδιδακτικών συνομιλιών του σχολικού συμβούλου με κάθε εκπαιδευτικό, θα συγκεντρώσουμε το ερευνητικό ενδιαφέρον μας στη συλλογική αναστοχαστική διεργασία, η οποία αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια των ενδιάμεσων επιμορφωτικών συναντήσεων. Οι επίμαχες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται κυρίως ως μέσο διερεύνησης των αντιλήψεων και των πρακτικών των εκπαιδευτικών κλάδου ΠΕ3.

Τέλος, κατά το δεύτερο κύκλο διδασκαλιών ερευνούμε αν οι συζητήσεις κατά τη διάρκεια του ενδιάμεσου ανατροφοδοτικού μέρους του προγράμματος επέφεραν αλλαγές στη διδακτική πρακτική των εκπαιδευτικών. Θα εξετάσουμε αν ο αναστοχασμός ήταν μια μεταφέρσιμη ικανότητα που χρησίμευσε ως μέσο για την ανάπτυξη διδακτικών δεξιοτήτων που συνέβαλαν στη βελτίωση της διδακτικής πράξης.

3. Ο ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΠΑΝΩ ΣΕ ΜΙΑ ΕΠΙΜΑΧΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Θα εκθέσουμε μια ενδεικτική περίπτωση, στρέφοντας την προσοχή μας στη σύγκριση σχεδιασμού και διεξαγωγής της διδασκαλίας ως προς τους στόχους μάθησης, τη διαχείριση του χρόνου τη στρατηγική διδασκαλίας και τα Φύλλα Εργασίας των μαθητών. Το εν λόγω κείμενο αξιοποιείται ως μέσο για αναστοχασμό και διάλογο μεταξύ των εκπαιδευτικών.

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ Α:

Η κ. Αντωνίου είναι καθηγήτρια μαθηματικών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με το γραπτό σχέδιο μαθήματος οι διδακτικοί στόχοι της εκπαιδευτικού επικεντρώθηκαν στην ανακάλυψη της απόδειξης του τύπου εμβαδού του τραπεζίου από τους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους και την εφαρμογή του σε ασκήσεις. Η καθηγήτρια έχει σοβαρές αντιρρήσεις για την εκπόνηση του σχεδίου μαθήματος. Όμως η σύνταξή του ήταν υποχρεωτική στο πρόγραμμα αξιολόγησης των εκπαιδευτικών.

«*Εγώ δεν συμφωνώ με το σχέδιο μαθήματος. Έχω 17 χρόνια διδασκαλίας και δεν το εφαρμόζω στο καθημερινό μάθημα. Το σχέδιο το έχω στο μυαλό μου και δεν χρειάζεται να σπαταλώ το χρόνο μου για να το γράψω στο χαρτί. Η διδακτική εμπειρία μού έχει δείξει ότι είναι περιττό. Έφτιαξα το σχέδιο που ζητήθηκε, αλλά αισθάνθηκα να δεσμεύει πολύ τη διδασκαλία μου. Η μαθηματική γνώση είναι δεδομένη και υπάρχει στο σχολικό βιβλίο του μαθητή. Όλα αυτά τα ξέρω. Γι' αυτό δεν χρειάζεται προετοιμασία*».

Η καθηγήτρια προετοίμασε το Ατομικό Φύλλο Εργασίας (ΑΦΕ) για τους μαθητές, στο οποίο υπάρχουν 4 νύξεις αποδείξεων μέσω κατάλληλων γεωμετρικών σχημάτων. Όμως πέρασαν 25 λεπτά χωρίς η καθηγήτρια να ασχοληθεί με το ΑΦΕ και το τραπέζιο:

«*Αφιέρωσα χρόνο για να κάνω ασκήσεις πάνω στα εμβαδά των προηγούμενων μαθημάτων. Σχεδίασα καλά σχήματα στον πίνακα, παρουσίασα τις λύσεις… Μετά δίδαξα έναν τρόπο για την εύρεση του εμβαδού του τραπεζίου, αυτόν που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο. Έθεσα ερωτήματα και έδωσα πλήρεις και ακριβείς απαντήσεις. Εξήγησα τα πάντα. Επανέλαβα τον τρόπο για να τον εμπεδώσουν οι μαθητές. Ύστερα τον μετέφεραν από τον πίνακα στο ΑΦΕ… Οι άλλοι τρεις τρόποι που περιγράφονται στο ΑΦΕ είναι εμπλουτισμός του μαθήματος. Δεν πρόλαβα να διδάξω όσα είχα προγραμματίσει, όμως οι μαθητές έμαθαν τον τρόπο του σχολικού βιβλίου, δηλαδή αυτό που ζητάει το Αναλυτικό Πρόγραμμα. Δεν είχαν απορίες. Γι' αυτό και δεν μίλησαν πολύ*».

Στο ερώτημα αν οι μαθητές ανακάλυψαν τον τύπο εμβαδού του τραπεζίου η καθηγήτρια έδωσε τις ακόλουθες εξηγήσεις:

«*Οι μαθητές δεν μπορούν να ανακαλύψουν τα πάντα. Εγώ θα προσφέρω τη νέα γνώση. Υποβάλλω ερωτήσεις στην τάξη, διαλέγω τον μαθητή που θα απαντήσει από εκείνους που σηκώνουν το χέρι τους και κρίνω αν η απάντηση είναι σωστή ή λάθος. Οι μαθητές έχουν ανάγκη από καθοδήγηση… Πρώτα θα μάθουν να εφαρμόζουν τύπους, να λύνουν ασκήσεις και ύστερα θα ανακαλύψουν δικούς τους τρόπους*».

«*Η διδασκαλία πέτυχε τους στόχους της. Ασκήσεις για το εμβαδόν του τραπεζίου θα κάνω στο επόμενο μάθημα. Θα πάρω την κιμωλία και θα συνεχίσω… Σε κάθε μάθημα λύνω ασκήσεις στον πίνακα. Μόνο έτσι οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά και ανεβάζουν τις επιδόσεις τους*».

- **Πώς κρίνετε τη διαχείριση του χρόνου και την επίτευξη των στόχων της διδασκαλίας;**
- **Πώς κρίνετε τον τρόπο χρήσης των ΑΦΕ στη διδασκαλία της καθηγήτριας; Τι προτείνετε;**
- **Να σχολιάσετε το ρόλο της εκπαιδευτικού και των μαθητών στη διδασκαλία.**

Στο διάλογο που αναπτύχθηκε μεταξύ των εκπαιδευτικών υπήρξαν δύο κύριες τάσεις: Ορισμένοι εκπαιδευτικοί υποστήριξαν ότι η διδασκαλία ήταν πλήρως αποτυχημένη επειδή στον δεδομένο χρόνο δεν ολοκληρώθηκε η επίτευξη των διδακτικών στόχων που είχαν τεθεί στο σχέδιο μαθήματος. Ορισμένοι άλλοι υποστήριξαν ότι η διδασκαλία πέτυχε τους διδακτικούς στόχους του διδακτικού εγχειριδίου της Β΄ Γυμνασίου και του ΑΠΣ. Η συζήτηση ήταν εκτεταμένη και τα επιχειρήματα και από τις δύο πλευρές ενδιαφέροντα.

Εκπαιδευτικός 1: Δεν μπορείς να σχεδιάζεις να διδάξεις το εμβαδόν του τραπεζίου και να κάνεις μισή ώρα ασκήσεις του προηγούμενου μαθήματος. Δεν μπορείς να θέτεις ως διδακτικό στόχο την απόδειξη του εμβαδού του τραπεζίου με τέσσερις τρόπους και να κάνεις μόνο έναν.

Εκπαιδευτικός 2: Θα μπορούσε η καθηγήτρια να ζητήσει από τους μαθητές να σκεφτούν και να φέρουν κατάλληλες γραμμές στο τραπέζιο ώστε να οδηγηθούν σε εμβαδά γνωστών σχημάτων.

Εκπαιδευτικός 3: Ήταν μια παραδοσιακή διδασκαλία και οι μαθητές ήταν παθητικοί, ενώ ο χρόνος μονοπωλήθηκε από την εκπαιδευτικό.

Εκπαιδευτικός 4: Θα μπορούσε η καθηγήτρια να ξεκινήσει με ένα πραγματικό πρόβλημα· να ζητήσει για παράδειγμα το εμβαδόν ενός οικοπέδου, σχήματος τραπεζίου· να προετοιμάσει κατάλληλους τεμαχισμούς του τραπεζίου με εκπαιδευτικό λογισμικό ή με εποπτικό υλικό.

Εκπαιδευτικός 5: Η καθηγήτρια ετοίμασε ένα σχέδιο μαθήματος με υψηλούς στόχους. Ο σχεδιασμός ήταν αδύνατο να πραγματοποιηθεί σε μία διδακτική ώρα. Γι' αυτό βασίστηκε στην εμπειρία της και παραμέρισε το σχέδιο μαθήματος και το ΑΦΕ που ζητούν οι σχολικοί σύμβουλοι και συγκεντρώθηκε σε ρεαλιστικούς διδακτικούς στόχους. Η διδασκαλία ήταν αποτελεσματική.

Από τη σύγκριση του σχεδίου μαθήματος με την πραγματική διδασκαλία μπορεί θα εκτιμηθεί η ευστοχία και η αποτελεσματικότητά της διδασκαλίας. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι στην αξιολόγηση των εκπαιδευτικών για την κατάληψη θέσεων στα ΠΠΣ το σχέδιο μαθήματος ήταν υποχρεωτικό και η επιτυχία της διδασκαλίας κρινόταν από την εφαρμογή του σχεδίου μαθήματος. Παρότι η εκπαιδευτικός αφιέρωσε χρόνο για την προετοιμασία της διδασκαλίας, οι μαθητές δεν έμαθαν όλα αυτά που ήθελε. Σύμφωνα με την πλειονότητα των εκπαιδευτικών η διδασκαλία δεν ήταν επιτυχημένη.

Η καθηγήτρια απέρριψε την αναγκαιότητα εκπόνησης γραπτού σχεδίου μαθήματος, υποχρεώθηκε όμως να το δημιουργήσει λόγω της αξιολόγησης. Ήταν δύσκολο να σχεδιάσει αποτελεσματικά τη διδασκαλία και να διαμορφώσει ρεαλιστικούς διδακτικούς στόχους. Από την εν λόγω περίπτωση καθίσταται φανερό ότι οι διδακτικοί στόχοι δεν ήταν ρεαλιστικοί και σαφείς, ώστε να μπορεί να ελεγχθεί η επίτευξή τους.

Ο σχεδιασμός της εκπαιδευτικού ήταν φιλόδοξος, αφού το ΑΦΕ των μαθητών περιλάμβανε τέσσερις αποδείξεις, ενώ υλοποιήθηκε μόνο μία. Κατά τη διδασκαλία αναλώθηκε αρκετός χρόνος στην επανάληψη ασύνδετων τύπων εμβαδού. «*Αν διδάξουμε τέσσερις διαφορετικούς τρόπους οι μαθητές θα κουραστούν και θα χαθεί ο έλεγχος. Νομίζω είναι περιττό*». Η ανακάλυψη του εμβαδού του τραπεζίου μέσα από γνωστικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαθητών δεν κατέστη δυνατό να υλοποιηθεί. Οι στόχοι ήταν αδύνατο να επιτευχθούν στο διαθέσιμο χρόνο και υπήρξε δυσαρμονία στη χρονική κατανομή των δραστηριοτήτων. Επιπλέον, δεν προσφέρθηκε χρόνος για διερεύνηση και συζήτηση στην τάξη. Στις ελάχιστες ερωταποκρίσεις η διδάσκουσα επικύρωνε τις απαντήσεις των μαθητών ως ορθές ή λανθασμένες. Δεν διέθεσε καθόλου χρόνο για ουσιαστική ανταλλαγή μαθηματικών σκέψεων και επιχειρημάτων τόσο ανάμεσα στην ίδια και τους μαθητές όσο και μεταξύ των μαθητών. Η πραγματοποιηθείσα διδασκαλία απέχει από το σχεδιασμό της.

Τις ομάδες των εκπαιδευτικών απασχόλησε το ερώτημα: «*πώς επιλέγουμε κατάλληλες μαθηματικές δραστηριότητες για την εισαγωγή μιας έννοιας;*». Οι τρεις μικρο-ομάδες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι «*καλή είναι μια δραστηριότητα όταν έχει ξεκάθαρο και εφικτό στόχο και αποτελεί για τους μαθητές πρόκληση για σκέψη και διερεύνηση*». Η επιλογή των πλέον αξιόλογων μαθησιακών εμπειριών αποτελεί ένα ανοιχτό πρόβλημα για διαρκή στοχασμό των εκπαιδευτικών. «*Η επιτυχημένη διδασκαλία δεν είναι εκείνη που συμφωνεί απόλυτα και μηχανιστικά προς τους προκαθορισμένους διδακτικούς στόχους. Οι εμπειρίες μάθησης στην τάξη είναι αδύνατο να προβλεφτούν με λεπτομέρεια από το σχέδιο μαθήματος*». Σύμφωνα με τους προβληματισμούς των εκπαιδευτικών, η διδασκαλία θα πρέπει να είναι ευέλικτη, χωρίς όμως να καταλήγει στην πλήρη ανατροπή του σχεδιασμού και την εγκατάλειψη των μαθησιακών στόχων. Επιπλέον, κατά το καθημερινό μάθημα θα πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπόψη ο διδακτικός χρόνος και οι περιορισμοί του ΑΠΣ των μαθηματικών.

Σύμφωνα με την κριτική των εκπαιδευτικών δεν έγινε ουσιαστική αξιοποίηση των Ατομικών Φύλλων Εργασίας (ΑΦΕ) των μαθητών κατά τη διδασκαλία της καθηγήτριας. Η καθηγήτρια έγραφε στον πίνακα ή υπαγόρευε τη λύση της δραστηριότητας και οι μαθητές έγραφαν στα ΑΦΕ. Ένας εκπαιδευτικός είπε: «*Τα ΑΦΕ θα μπορούσαν να μην είχαν μοιραστεί και η υπαγόρευση της απόδειξης να είχε γίνει στα τετράδια των μαθητών*». Η επιθυμία της καθηγήτριας ήταν να κάνει η ίδια ασκήσεις στον πίνακα και όχι να ζητήσει από τους μαθητές να γράψουν τα επιχειρήματα και τους συλλογισμούς τους στο ΑΦΕ. Τα ΑΦΕ τής αφαιρούσαν πολύτιμο χρόνο από το μάθημα, γι' αυτό και μηδένισε το ρόλο τους.

Σύμφωνα με τους προβληματισμούς και τις εμπειρίες των συμμετεχόντων τα ΑΦΕ μπορούν να συμβάλουν έτσι ώστε το μάθημα να είναι μια γόνιμη εμπειρία που προωθεί την αυτόνομη μάθηση των μαθητών. Τα ΑΦΕ μπορούν να εμπλέξουν τους μαθητές στη διερεύνηση της γεωμετρικής γνώσης. Για να επιτευχθεί αυτό τα ΑΦΕ θα πρέπει να υποκινούν την αυτενέργεια των μαθητών και να διευκολύνουν τη συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη. Στα φύλλα εργασίας οι μαθητές θα πρέπει να έχουν στη διάθεσή τους άφθονο χώρο, για να μπορούν να αιτιολογούν γραπτά τη σκέψη τους. Πρέπει να έχουν επαρκή χρόνο για να μπορέσουν να αυτενεργήσουν και να αναπτύξουν ανεξαρτησία στη μάθησή τους. Καθώς οι μαθητές γράφουν στα ΑΦΕ έχουν τη δυνατότητα να σταματούν και να σκέφτονται. Προετοιμάζουν τις απαντήσεις και τις λύσεις τους για τη συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν αξιοποιήθηκαν τα προαναφερόμενα εκπαιδευτικά πλεονεκτήματα των ΑΦΕ για την επιτυχή πραγμάτευση των μαθηματικών δραστηριοτήτων.

Κατά τη συζήτηση της προαναφερόμενης επίμαχης περίπτωσης οι εκπαιδευτικοί της μικρο-κοινότητας αποφάνθηκαν ότι η καθηγήτρια εφάρμοσε τη στρατηγική της παρουσίασης και όχι της ανακάλυψης. Η πλειονότητα των εκπαιδευτικών που έλαβαν μέρος στην έρευνά μας αμφισβήτησαν την αποτελεσματικότητα της στρατηγικής της ανακάλυψης στο Λύκειο, ενώ για το Γυμνάσιο οι ίδιοι ανέφεραν ότι

υπάρχουν δυνατότητες να δραστηριοποιηθούν τα κίνητρα των μαθητών για τη νέα γνώση. Σχεδόν όλοι οι εκπαιδευτικοί του σεμιναρίου κατά τη σύγκριση της μελέτης περίπτωσης με τη δική τους διδασκαλία, τόσο στις ρητές ομολογίες τους όσο και στις εκλογικεύσεις τους, φάνηκε ότι ακολουθούν τη στρατηγική της μετάδοσης. Ορισμένοι εκπαιδευτικοί του ΠΠ Γυμνασίου ανέφεραν ότι στο πλαίσιο του πιλοτικού προγράμματος εφαρμόζουν τη μέθοδο ανακάλυψης οργανώνοντας την τάξη τους σε μικρές ομάδες ή δίνοντας βαρύτητα στην εξατομίκευση της διδασκαλίας.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι συζητήσεις στην μικρο-κοινότητα για την επίλυση της επίμαχης περίπτωσης φανέρωσε πλούσιες ιδέες των εκπαιδευτικών. Η ιστορία ήταν ένα έναυσμα που παρακίνησε τους εκπαιδευτικούς σε διερεύνηση και αναστοχασμό. Διευκόλυνε τους συμμετέχοντες να αναγνωρίσουν και να επιχειρήσουν να λύσουν προβλήματα τα οποία υπήρχαν στις τάξεις τους.

Η επίμαχη περίπτωση εστίαζε σε μια προβληματική κατάσταση που ήταν γνώριμη για τους εκπαιδευτικούς. Η κρίσιμη περίπτωση εξασφάλισε κατάλληλο επιμορφωτικό υλικό προς συζήτηση των προβλημάτων της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών (Walen & Williams, 2000). Ορισμένοι εκπαιδευτικοί αισθάνθηκαν ότι η ιστορία ήταν από τις τάξεις τους. Παρότι είχαμε πληροφορήσει τους εκπαιδευτικούς ότι μόνο τα θέματα ήταν πραγματικά μιλούσαν σαν να ήταν πραγματικές περιπτώσεις εκπαιδευτικών: «*Το μόνο ελαφρυντικό είναι ότι η καθηγήτρια ήταν αβοήθητη και αφημένη να κάνει ό,τι νομίζει. Δεν της έδειξε ποτέ κανείς τι να κάνει. Πρέπει να την βρούμε και να συζητήσουμε, να την βοηθήσουμε να θέτει εφικτούς στόχους, να κατανέμει σωστά το χρόνο, να ετοιμάζει αποτελεσματικά ΑΦΕ...*»

Το πρόγραμμα επαγγελματικής ανάπτυξης, παρά τη σύντομη διάρκειά του, υλοποιήθηκε μέσα στο σχολείο, συνδέθηκε με το σχολικό πλαίσιο και στήριξε τον διαμορφωτικό χαρακτήρα της αξιολόγησης. Βοήθησε τους εκπαιδευτικούς της μικρο-κοινότητας να συνειδητοποιήσουν ότι η διδασκαλία δεν αποτελεί απλώς ατομική υπόθεση, αλλά και συλλογική και να εμβαθύνουν στην κατανόηση ορισμένων πτυχών που συνθέτουν τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Η παρούσα εργασία μελετά τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών για ορισμένες από τις διδακτικές επιλογές τους που αφορούν το διδακτικό σχεδιασμό, τους διδακτικούς στόχους, τη στρατηγική διδασκαλίας, τη διαχείριση του χρόνου και την αξιοποίηση των ΑΦΕ.

Οι παρατηρήσεις μας παρέχουν αξιοσημείωτες ενδείξεις μετακίνησης της πλειονότητας των εκπαιδευτικών των ΠΠΣ προς σύγχρονες αντιλήψεις της διδακτικής των μαθηματικών και τροποποίησης των παιδαγωγικών πρακτικών κατά την υλοποίηση του δεύτερου κύκλου διδασκαλιών. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί και με άλλες ανάλογες έρευνες με εκπαιδευτικούς (Σακονίδης, κ.ά., 2007; Potari,

κ.ά., 2010). Η μεταβολή αυτή αποδίδεται στη μεταφερσιμότητα των γνώσεων, δεξιοτήτων και στάσεων που αποκτήθηκαν από την ενεργητική συμμετοχή τους στις επιμορφωτικές συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης. Η γόνιμη ανταλλαγή σκέψεων μεταξύ των συμμετεχόντων συνέβαλε στην ανασυγκρότηση των εμπειριών τους καθώς και στην «προσγείωση» και κριτική ευθυγράμμιση προς το ομαδικό αναστοχαστικό πνεύμα (Jaworski, κ.ά., 2006). Η συνεργασία των εκπαιδευτικών με το σχολικό σύμβουλο κατά τις μεταδιδακτικές συνομιλίες μετά τις παρακολουθήσεις των σχολικών τάξεων και τις ομαδικές διερευνήσεις, βοήθησε τους εκπαιδευτικούς να αναστοχάζονται τις διδακτικές τους ενέργειες και να βελτιώνουν τη διδασκαλία τους. Τα πρώτα αποτελέσματα είναι ενθαρρυντικά. Πάντως η προσπάθεια αυτή βρίσκεται ακόμα μόνο στην αρχή.

Κατά την άποψή μας, αν η επέκταση της υλοποίησης της εν λόγω πρότασης βελτιώνει την ποιότητα και ικανότητα των δασκάλων των μαθηματικών, τότε η εξωτερική αξιολόγηση με στόχο τον έλεγχο και τη σύγκριση των ικανοτήτων των εκπαιδευτικών δεν είναι απαραίτητη. Η συλλογική διερεύνηση επίμαχων περιπτώσεων διδακτικής συμπεριφοράς διαμορφώνει ένα είδος παρακινητικής αξιολόγησης που δίνει βαρύνουσα σημασία στον επαγγελματικό αναστοχασμό και την αυτοαξιολόγηση για τη μελετημένη ανανέωση, την αυτογνωσία και την αλλαγή των εκπαιδευτικών (Λεμονίδης, κ.ά., 2011). Με την αυτοαξιολόγηση οι εκπαιδευτικοί δίνουν λογαριασμό στον εαυτό τους και με την ανατροφοδοτική ετεροαξιολόγηση καθρεφτίζονται στους άλλους συναδέλφους της μικρο-κοινότητας. Οι αναστοχαστικές πρακτικές αποτελούν την κινητήρια δύναμη για τη διαρκή βελτίωση των ίδιων των εκπαιδευτικών και του διδακτικού τους έργου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barnett, C., & Tyson, P. (1999). Case methods and teacher change: Shifting authority to build autonomy. In M. Lundeberg, B. Levin, & H. Harrington (Eds.), *Who learns what from cases and how?* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Goodell, J. E. (2006). Using critical incident reflections: A self-study as a mathematics teacher educator. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 221-248.

Hall, G. & Hord, S. (2001). *Implementing change: Patterns, principles, and potholes*. Boston, MA: Allyn & Bacon.

Jaworski, B. (1998). Mathematics teacher research: Process, practice and the development of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(1), 3–31.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teacher development: critical inquiry as mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 187-211.

Kaldrimidou, M., Sakonidis, Ch., & Tzekaki, M. (2013). Teachers' reflecting on the nature of the mathematical knowledge under construction in the classroom. In *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 305-312. Kiel, Germany: PME.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.

Lerman, S. (1994). *Reflective practice*. In B. Jaworski & A. Watson (Eds.), Mentoring in mathematics teaching (pp. 52-64). London: The Flamer Press.

Merseth, K.K. (1996). Cases and case methods in teacher education. In J. Sikula, T.J. Buttery & E. Guyton (Eds.), *Handbook of research on teacher education*, (pp. 722–744). New York: Macmillan.

Potari, D., Sakonidis, Ch., Chatzigoula, A. & Manaridis, A. (2010). Teachers' and researchers' collaboration in analyzing mathematics teaching: A context for professional reflection and development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 473-485.

Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practioner*. San Francisco: Jossey Bass Publishers.

Tirosh, D. & Graeber, A. O. (2003). Challenging and changing mathematics teaching classroom practices. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.). *Second international handbook of mathematics* (pp. 643–687). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Walen, S. B., & Williams, S. R. (2000). Validating classroom issues: Case method in support of teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 3–26.

Wood, T. (1999). Approaching Teacher Development: Practice into Theory. In B. Jaworski et al. (Eds.), *Mathematics Teacher Education: Critical International Perspectives* (pp. 163-179). London: The Falmer Press.

Zeichner, K. M., & Liston, D. P. (1996). *Reflective teaching: An introduction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Λεμονίδης, Χ., Αρσένης, Κ., Μαρκάδας, Σ. (2011). Οι αναστοχαστικές δεξιότητες αυτοαξιολόγησης υποψήφιων δασκάλων σε διδασκαλίες τους στο μάθημα των Μαθηματικών. Στο Μ. Καλδρυμίδου & Ξ. Βαμβακούση (Επιμ.), *Πρακτικά 4ου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών*. Η τάξη ως πεδίο ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας (σελ. 283-292). Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Σακονίδης, Χ. (2012). Διαχείριση της μαθηματικής δραστηριότητας και συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος στην τάξη: μια κρίσιμη σχέση για την ανάπτυξη της διδακτικής πρακτικής. Στο Ε. Κολέζα, Α. Γαρμπής & Χ. Μαρκόπουλος (Επιμ.).

Καινοτόμες προσεγγίσεις στην εκπαίδευση: σχεδιασμός και δικτύωση- Πρακτικά συνεδρίου (109-132). Πανεπιστήμιο Πατρών.

Σακονίδης, Χ., Πόταρη, Δ., Μαναρίδης, Α. & Χατζηγούλα, Ρ. (2007). Η συνεργασία μεταξύ εκπαιδευτικών και ερευνητών στο πλαίσιο μιας κοινότητας διερεύνησης των διδακτικών πρακτικών στα μαθηματικά: μια μελέτη. Στο Χ. Σακονίδης, Δ. Δεσλή (Επιμ.), *Πρακτικά 2ου Πανελληνίου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών* (556-567), (*Αλεξανδρούπολη)*. Αθήνα: Τυπωθήτω.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ, ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΚΑΙ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΙΚΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤ' ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Τσιτσιρίγκα Ιωάννα
Εκπαιδευτικός Π.Ε., M.ed.
itsitsiriga@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία μελετά μέσα από ένα πείραμα σχεδιασμού που έγινε σε τρεις μαθητές Ε' και Στ' Δημοτικού, τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί ένα ή περισσότερα παραδείγματα να επιδράσουν στη διαμόρφωση μιας εικασίας ή στη διερεύνηση και αιτιολόγησή της. Επίσης, τίθενται τα εξής ερωτήματα: Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές ένα παράδειγμα ισχύος μιας εικασίας και πώς ένα αντιπαράδειγμα; Μπορούν αυτά τα παραδείγματα να επιδράσουν θετικά στη διδασκαλία της απόδειξης ή αποτελούν εμπόδιο; Η μελέτη του παραπάνω θέματος γίνεται με βάση τις αναλύσεις των συζητήσεων.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην καθημερινή εκπαιδευτική πράξη, η πλειοψηφία των διδασκόντων κάνει χρήση των παραδειγμάτων, ιδιαίτερα στις πρώτες βαθμίδες της εκπαίδευσης, ώστε να κατανοηθούν σε βάθος οι έννοιες και τα ερωτήματα που εξετάζονται. Απ' ότι φάνηκε όμως σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε (Τσιτσιρίγκα, 2012) και η οποία μελετούσε τη διαμόρφωση και αιτιολόγηση εικασιών από μαθητές Δημοτικού, τα παραδείγματα, δεν είχαν μόνο αυτό το ρόλο της αποσαφήνισης, αλλά ήταν κι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες διαμόρφωσης εικασιών από τους μαθητές. Αυτές οι εικασίες ή απλά υποθέσεις των μαθητών, μπορεί να είναι σωστές ή λαθεμένες κι επηρεάζουν το συλλογισμό τους. Γι' αυτό και πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στα παραδείγματα που δίνουμε στους μαθητές. Από την άλλη μεριά όμως, όπως φάνηκε και στην έρευνα (Τσιτσιρίγκα, 2012), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εικασίες ως μέσο προσέλκυσης ενδιαφέροντος, ως μέσο εξωτερίκευσης των εσωτερικών αναπαραστάσεων αλλά και ως μέσο διδασκαλίας της επιχειρηματολογίας και του αποδεικτικού μηχανισμού. Στην εργασία αυτή θα δούμε πώς επιδρούν τα παραδείγματα στη διαμόρφωση εικασιών, αν τα παραδείγματα βοηθούν τους μαθητές να αιτιολογήσουν ή να διερευνήσουν εικασίες και αν μπορούν να βοηθήσουν στην κατασκευή μιας απόδειξης.

1.1. Τα παραδείγματα και η σχέση τους με τις εικασίες

Ως παράδειγμα ισχύος ή ορθότητας μιας μαθηματικής πρότασης ορίζεται κάθε ειδική περίπτωση για την οποία ισχύει η πρόταση (Πούλος, 2009). Κάτω από αυτό το σκεπτικό, ένα παράδειγμα ισχύος είναι εύκολο να δημιουργήσει μια εικασία ότι ισχύει μια καθολική πρόταση, ενώ μια υπαρκτική την αποδεικνύει. Επίσης το γεγονός ότι το σύνολο των παραδειγμάτων ισχύος μιας πρότασης διαμορφώνει το πεδίο εγκυρότητάς της, δικαιολογεί και το ότι το πρώτο πράγμα που σκέφτονται να κάνουν οι μαθητές, όταν θέλουν να δουν αν ισχύει μια εικασία, είναι εμπειρικές δοκιμές, για να βρουν παραδείγματα ισχύος της πρότασής τους. Με τη διαδικασία αυτή, πολλές φορές οι μαθητές οδηγούνται κατόπιν αρκετών επιτυχών δοκιμών, στο συμπέρασμα ότι η εικασία τους είναι σωστή. Αν όμως στηριχθεί μόνο στο πλήθος των επιτυχών εμπειρικών δοκιμών τότε μιλάμε για ***εμπειρική γενίκευση*** (Zazkis et al., 2007). Ενώ αν χρησιμοποιήσουν τις επιτυχείς εμπειρικές δοκιμές ώστε να παρατηρήσουν τη δομή τους και αναγνωρίσουν βασικές μεταβλητές, τότε καταλήγουν σε ***δομική ή θεωρητική γενίκευση*** (στο Zazkis et al., 2007).

Τι γίνεται όμως όταν οι εμπειρικές δοκιμές δεν είναι επιτυχείς; Ή όταν βρίσκουν κάποιες που είναι επιτυχείς και κάποιες που δεν επαληθεύουν την εικασία; Ένα τέτοιο παράδειγμα που δεν επαληθεύει την εικασία κι έρχεται σε αντίθεση με τη καθολική ισχύ του ισχυρισμού ονομάζεται ***αντιπαράδειγμα*** (Πούλος 2009, σ.7). Σε περίπτωση καθολικής πρότασης, ένα και μόνο αντιπαράδειγμα την απορρίπτει. Ενώ σε μια υπαρκτική πρόταση ένα αντιπαράδειγμα δεν προσφέρει τίποτα. Αντιθέτως για να απορριφθεί χρειάζεται μαθηματική απόδειξη. Γνωρίζουν όμως αυτό το διαχωρισμό οι μαθητές;

1.2. Ποια η σημασία της διερεύνησης εικασιών στο Δημοτικό;

Η απόδειξη είναι το θεμέλιο για να κάνει και να γνωρίζει κανείς μαθηματικά (Kitcher,1984;Polya,1981 στο Stylianides 2007). Επειδή η εικασία και η διερεύνηση προϋπάρχει της απόδειξης (Lakatos,1976; Polya,1981 στο Πούλος, 2009), αλλά στο σχολείο πολλές φορές δίνεται έμφαση στη μορφή της απόδειξης, παρά στη διαδικασία και οι μαθητές μαθαίνουν τυποποιημένα μερικές φορές αποδείξεις, η διαμόρφωση της έννοιας της απόδειξης από τις μικρές βαθμίδες ίσως αποτελέσει γερό θεμέλιο για συνεκτικότητα. Για το λόγο αυτό, το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), και θέλοντας να πάρει θέση σε ερωτήματα που δημιουργήθηκαν από διαμάχες ακαδημαϊκών και εκπαιδευτικών γύρω από το θέμα της απόδειξης και της επιχειρηματολογίας, στην έκδοση του 'Principles and Standards' (2000, στο Knuth, 2002), προτείνει *ότι επιχειρηματολογία κι απόδειξη πρέπει να είναι μέρος του αναλυτικού προγράμματος σε όλες τις βαθμίδες, ακόμα κι από το νηπιαγωγείο.* Επίσης, δίνει μεγάλη έμφαση στην εξέταση των εικασιών, το σχηματισμό αντιπαραδειγμάτων και την κατασκευή κι εξέταση έγκυρων επιχειρημάτων.

Ο Πούλος επίσης συνιστά οι εικασίες να αποτελέσουν αντικείμενο της διδακτικής πράξης. Οι εικασίες, έχει παρατηρηθεί, πως λόγω του προσωρινού αναπόδεικτου τους, ελκύουν την προσοχή των μαθητών και είναι ένα ερέθισμα για να προκληθεί ενδιαφέρον για τα μαθηματικά προβλήματα και τις διαδικασίες (Πούλος, 2009). Ο Πούλος υπογραμμίζει ότι η ευρετική της μαθηματικής ανακάλυψης σε ερευνητικό επίπεδο διαφέρει από την ευρετική που ακολουθείται κατά τη μελέτη εικασιών σε απλά μαθηματικά προβλήματα. Ωστόσο, παραδέχεται ότι με την εξοικείωση στο χειρισμό εικασιών, ο εκπαιδευόμενος εισέρχεται βαθμιαία στο κλίμα και στη λογική της μαθηματικής ανακάλυψης.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

2.1. Μέθοδος

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε είναι μια μελέτη περίπτωσης, με μέθοδο το πείραμα σχεδιασμού, το οποίο διακρίνεται για την παρεμβατική και πλαισιοθετημένη φύση του. Το πείραμα σχεδιασμού ολοκληρώθηκε σε 12 συναντήσεις με τους μαθητές. Για τις ανάγκες των πειραμάτων, σχεδιάστηκαν ***ανοιχτά ερωτήματα***, που αφορούσαν σχέσεις και ιδιότητες αριθμών και τα οποία θα προκαλούσαν την ελεύθερη διαμόρφωση εικασιών από μεριά των μαθητών και το έναυσμα για επιχειρηματολογία και απόδειξη. Με τον τρόπο αυτό, υπήρχε η πιθανότητα να κάνουν συγκεκριμένο λάθος στην αρχή κι έπειτα να ξεκινήσουν από αυτό την έρευνά τους, όμως τέτοιες δραστηριότητες προωθούν σπουδαίες μαθητικές εμπειρίες κατά την Borasi (1996). Επίσης, τα θέματα αλλά και τα ερωτήματα ήταν τέτοια ώστε να φέρουμε τους μαθητές σε επαφή με μια εμπειρία πέρα από την αριθμητική και υπολογιστική ικανότητα, που να ασχολείται με πιο βαθιά δομή των μαθηματικών και με ένα είδος ***πρώιμης άλγεβρας*** (Blanton & Kaput 2005). Έννοιες που απασχόλησαν τους μαθητές ήταν οι πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί, άρτιοι και περιττοί, διαδοχικοί φυσικοί, διαιρέτες και πολλαπλάσια, γινόμενο πρώτων παραγόντων. Οι μαθητές καλούνταν κυρίως να προβλέψουν και να αιτιολογήσουν ιδιότητες των αριθμών που θα προέκυπταν από πράξεις των παραπάνω.

2.2. Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν τρεις μαθητές ενός ολιγοθέσιου Δημοτικού σχολείου του νομού Βοιωτίας. Τα παιδιά αυτά, τα οποία ήταν και συμμαθητές διότι συνδιδάσκονταν, επιλέχτηκαν ως μία ομάδα βοηθητικής περίπτωσης για τη μελέτη και εμβάθυνση του θέματος που μας απασχολεί και σε καμία περίπτωση δεν αποτελούν αντιπροσωπευτικό δείγμα. Για λόγους δεοντολογίας, στην έρευνα χρησιμοποιήθηκαν ψευδώνυμα: Σοφία (κορίτσι Ε΄ τάξης), Ελπίδα (κορίτσι Στ' τάξης) & Μιχάλης (αγόρι Στ' τάξης)

2.3. Διαδικασία

Σε κάθε συνάντηση, ασχολούμασταν με 1 έως και 4 ανοιχτά ερωτήματα, αναλόγως το βαθμό δυσκολίας και το χρόνο που τελικά απαιτούσε το καθένα. Ο τρόπος που ανταποκρίνονταν οι μαθητές ήταν καθοριστικός στο σχεδιασμό και των επόμενων ερωτημάτων, ενώ μερικές φορές ήταν οι ίδιοι που δημιουργούσαν ερωτήματα. Το μάθημα άρχιζε με τους μαθητές να διερευνούν το πρόβλημα της ημέρας ο καθένας μόνος του. Πολλές φορές διατύπωναν και εικασίες, με το που άκουγαν το ερώτημα, ή τις κρατούσαν για τον εαυτό τους. Έπειτα από λίγη ατομική επεξεργασία, οι μαθητές εξέφραζαν τις απόψεις τους και γινόταν συζήτηση. Με το διάλογο που μεσολαβούσε, λειτουργούσαν επιπλέον σαν ομάδα, λαμβάνοντας σοβαρά υπόψη ο ένας τα επιχειρήματα του άλλου. Ο κάθε μαθητής είχε το δικό του φύλλο εργασίας, όπου έκανε τις διερευνήσεις του κι έγραφε τις απαντήσεις τις δικές του, αλλά και αυτές στις οποίες κατέληγε η ομάδα.

Μετά την διεκπεραίωση των συναντήσεων, οι οποίες είχαν μαγνητοφωνηθεί, έγινε απομαγνητοφώνησή τους κι ακολούθησε ανάλυση των δεδομένων της έρευνας, με την αναγνώριση των κρίσιμων επεισοδίων που προτείνει η Maher (2005) σε συνδυασμό με ορισμένες αρχές της μεθόδου της Ποιοτικής και Ποσοτικής Ανάλυσης Περιεχομένου. Τα κρίσιμα επεισόδια, είναι αυτά όπου φάνηκε μεγάλη πρόοδος, εννοιολογική αλλαγή, συμβαίνουν ενοράσεις ή έρχονται στην επιφάνεια γνωστικά εμπόδια. Επίσης, για τα είδη των εικασιών που διαμορφώθηκαν από τους μαθητές, καθώς και για τους παράγοντες διαμόρφωσής τους, χρησιμοποιήθηκε η επαγωγική μέθοδος ανάπτυξης κατηγοριών, ενώ για τα αποδεικτικά σχήματα που χρησιμοποίησαν εφαρμόστηκε αναγωγική μέθοδος.

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1. Η συμβολή των παραδειγμάτων στη διαμόρφωση εικασιών

Από όλες τις συνεδρίες κατεγράφησαν 18 συνολικά εικασίες που διατύπωσαν ευθέως οι μαθητές. Οι μαθητές σίγουρα διαμόρφωσαν περισσότερες εικασίες, αλλά δεν τις διατύπωναν πάντα. Στις εικασίες αυτές αναγνωρίστηκαν πέντε παράγοντες που επηρέασαν στη διαμόρφωση τους, και ήταν οι εξής: τα παραδείγματα, η φύση των αριθμών, η αναλογία του αντιστρόφου, η πεποίθηση και η επέκταση της δομής άλλων προτάσεων. Ο κυριότερος από αυτούς όμως, παρατηρήθηκε πως ήταν τα παραδείγματα, τα οποία λειτούργησαν διαφορετικά σε κάθε περίπτωση. Από τις 8 περιπτώσεις στις οποίες επέδρασαν, στις 3 ήταν απλά, συγκεκριμένα παραδείγματα που οδηγούσαν σε εικασίες εμπειρικής γενίκευσης ή αφελούς εμπειρισμού με όρους του Balacheff (1988), στις 2 ήταν από το γενικότερο πεδίο παραδειγμάτων του μαθητή ή της μαθήτριας, ενώ στις υπόλοιπες 3 ήταν παραδείγματα, των οποίων η

δομή γενικεύεται (*generic examples*) και οδήγησαν σε εικασίες *δομικής γενίκευσης*. Ενδεικτικά αναφέρουμε κάποιες εικασίες και τα παραδείγματα που τις διαμόρφωσαν:

Α) Περίπτωση διαμόρφωσης εικασίας από ένα παράδειγμα:

«Αφού πολλαπλασιάσαμε πρώτους και βρήκαμε σύνθετο, μήπως αυτό είναι κανόνας και μήπως ισχύει και το αντίστροφο δηλ. αν πολλαπλασιάσουμε σύνθετους θα βγει πρώτος;»: Σε ερώτημα του σχολικού βιβλίου σχετικά με το γινόμενο των δύο τελευταίων πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι από το 100 (89*97), οι μαθητές δε μπορούσαν να απαντήσουν με σιγουριά. Κυρίως υπέθεταν πως το γινόμενο θα είναι κι αυτό πρώτος αριθμός, λόγω της φύσης των αριθμών. Όταν όμως χρησιμοποιήσαμε ένα άλλο αριθμητικό παράδειγμα το 11*11=121, και βρήκαν ότι το 121 είναι σύνθετος γιατί έχει διαιρέτη το 11, τότε, η Ελπίδα έκανε την παραπάνω εικασία. Η εικασία αυτή μας δίνει ορισμένες πληροφορίες. Καταρχήν βλέπουμε πώς ακόμα κι ένα παράδειγμα αρκεί για να διαμορφώσει ένα παιδί μια εικασία ότι ισχύει μία πρόταση. Κατά δεύτερον βλέπουμε ότι έχουν μια μετασχηματιστική σκέψη και αλλάζουν, αντιστρέφουν και δημιουργούν νέες εικασίες, από υπάρχουσες προτάσεις. Τέλος, από την αντιστροφή που κάνει η Ελπίδα, υποψιάζεται κανείς πως δεν κατάλαβε την σημασία του παραδείγματος κι ότι έκανε μια εικασία αφελούς εμπειρισμού. Όπως φαίνεται όμως από τη συνέχεια της διδασκαλίας, η μαθήτρια κατανόησε τη σημασία της δομής του παραδείγματος, αφού τη μετέφερε και στην εξήγηση του άλλου παραδείγματος, που δυσκόλευε τους μαθητές, λέγοντας ότι «*8.633 διά 89 θα δώσει 97 κι άρα είναι σύνθετος γιατί εκτός από τη μονάδα και τον εαυτό του έχει και το 97 και το 89*». Άρα το δεύτερο σκέλος της εικασίας που έκανε ήταν εντελώς αυθόρμητο. Αμέσως μετά, συμβόλισα το γινόμενο πρώτων ως : $\Pi_1 X \Pi_2 = A$. και όλοι οι μαθητές κατέληξαν σε ***δομική γενίκευση*** ότι το γινόμενο οποιωνδήποτε πρώτων είναι σύνθετος αριθμός, εξηγώντας ότι «*ο Α διαιρείται και με το Π_1 και με το Π_2, και άρα ο Α έχει διαιρέτες κι έτσι θα είναι σύνθετος*». Όταν ρώτησα το Μιχάλη πώς το ξέρει, τότε απάντησε πως «*Πήραμε παράδειγμα από το 8633*».

Β) Περιπτώσεις διαμόρφωσης εικασίας από πεδίο παραδειγμάτων

«Εφόσον ένας αριθμός διαιρείται με το 3, θα διαιρείται και με το 6»: Η εικασία αυτή εκφράστηκε από την Ελπίδα κι οφείλεται πιθανώς σε πεδίο παραδειγμάτων από τη γενικότερη μαθητική ζωή, όπου κάποια πολλαπλάσια του 3 διαιρούνται με το 6. Αλλά δεν ισχύει για όλα τα πολλαπλάσια. Έτσι πρόκειται για εμπειρική γενίκευση. Όμως ενδεχομένως να πρόκειται και για μετασχηματισμό της πραγματικής πρότασης που ισχύει και είναι η αντίστροφη, ότι δηλαδή ένας αριθμός όταν διαιρείται με το 6, διαιρείται και με το 3. Η εικασία αυτή προκάλεσε από μέρους μου το σχεδιασμό των ερωτημάτων των επόμενων συνεδριών σε σχέση με αυτή. Στην 8η συνεδρία λοιπόν έθεσα παρόμοιο ερώτημα, αν διαιρούνται όλα τα πολλαπλάσια του 2 με το 4. Η Ελπίδα είχε την ίδια γνώμη, η Σοφία απάντησε «πολλές φορές», ενώ ο Μιχάλης δεν έπαιρνε θέση. Οι μαθητές με διερεύνηση, ξεκαθάρισαν την εικασία τους αλλά πάνω σε αυτό το θέμα, σχεδίασα και τις

επόμενες συνεδρίες ώστε να κατανοήσουν πλήρων ιδιότητες πολλαπλασίων και διαιρετών, καθώς απ' ότι φάνηκε είχαν αρκετές δυσκολίες και παρανοήσεις.

«*Μόνο το άθροισμα τριών περιττών είναι περιττός, ενώ το άθροισμα τεσσάρων περιττών είναι άρτιος*»: Στην 5η συνεδρία οι μαθητές καλούνταν να απαντήσουν αν υπάρχουν 4 περιττοί που αν τους προσθέσουμε δίνουν περιττό. Οι μαθητές έκαναν διάφορες δοκιμές κι αφού είδαν ότι το αποτέλεσμα ήταν πάντα άρτιος αριθμός, τότε αυτοβούλως οι δύο μαθήτριες πραγματοποίησαν δοκιμές με διαφορετικό πλήθος προσθετέων. Οι δοκιμές αυτές τότε τις οδήγησαν σε μια σωστή εικασία. Πρώτη η Σοφία εξέφρασε την παραπάνω εικασία, ενώ προσπαθούσε να εξηγήσει λέγοντας ότι *το* άθροισμα επηρεάζεται από το ότι ο περιττός είναι «ένα παραπάνω από ένα ζυγό». Την ίδια εικασία εξέφρασε και η Ελπίδα αλλά με γενικότερη μορφή, σχετικά με το άρτιο ή περιττό πλήθος των προσθετέων, μέσα από αναγνώριση μοτίβου στις δοκιμές που έκανε. Ενώ λίγο αργότερα, αποδείχτηκε η εικασία από τους ίδιους τους μαθητές, με τη βοήθεια των συμβόλων, αλλά και τον ανατροφοδοτικό διάλογο. Στην περίπτωση αυτή, είδαμε πως το πεδίο παραδειγμάτων έδρασε θετικά, αφού διαμόρφωσε σωστές εικασίες στους μαθητές και ενδιαφέρουσες προς διερεύνηση και αιτιολόγηση.

3.2. Η συμβολή των παραδειγμάτων στη διερεύνηση και αιτιολόγηση των εικασιών

Οι εμπειρικές δοκιμές είχαν καθοριστικό ρόλο σε κάθε ερώτημα και ήταν συνήθως το πρώτο πράγμα που έκαναν οι μαθητές. Ωστόσο, το είδος της αιτιολόγησής τους δεν βασίστηκε μόνο σε αυτές ούτε με τον ίδιο τρόπο κάθε φορά. Αντιθέτως, οι μαθητές χρησιμοποίησαν διάφορα αποδεικτικά σχήματα για να υποστηρίξουν τις εικασίες τους. Οι δοκιμές κυρίως είχαν ως ρόλο, αρχικά να απεικονίσουν τι λέει η εκφώνηση, έπειτα να γίνουν κάποιες προβλέψεις και τέλος να τους βοηθήσουν να εξηγήσουν ή να αποδείξουν.

Κάθε παράδειγμα ισχύος που συναντούσαν ενθάρρυνε τους μαθητές να πιστεύουν πως ισχύει η εικασία που διερευνούσαν. Στην αρχή υπήρξαν φαινόμενα, όπου ακόμα και με ένα ή δύο παραδείγματα, θεωρούσαν ότι μπορούν να απαντήσουν για την καθολική ισχύ κάποιας εικασίας. Στις περιπτώσεις αυτές είχαμε ***αιτιολόγηση με αφελή εμπειρισμό*** (Balacheff, 1988). Στην πορεία όμως, μέσα από το διάλογο και τα αντιπαραδείγματα που συνάντησαν κατάλαβαν πως αυτό δεν είναι αρκετό και μόνο για την επαλήθευση υπαρκτικών εικασιών, αρκούσε. Παρόλα αυτά, συνέχισαν σε όλες σχεδόν τις παρεμβάσεις να κάνουν εμπειρικές δοκιμές για να βρίσκουν παραδείγματα ή αντιπαραδείγματα. Όσον αφορά τα αντιπαραδείγματα, εδώ συνέβαινε το αντίθετο. Αρχικά, δεν αρκούσε στους μαθητές ένα αντιπαράδειγμα για να απορρίψει μια καθολική πρόταση, χρειάζονταν τουλάχιστον ένα δεύτερο. Έπειτα από 2-3 ερωτήματα που απέρριψαν, οι ίδιοι κατάλαβαν πως τελικά ένα αντιπαράδειγμα αρκεί για να απορρίψει μια καθολική πρόταση και το

χρησιμοποίησαν σε αρκετά ερωτήματα, ως ***κρίσιμο πείραμα*** (Balacheff, 1988) για να απορρίψουν μια εικασία.

Ακόμη, ως προς την απόρριψη μιας υπαρκτικής εικασίας, οι μαθητές την πρώτη φορά, αφού βρήκαν 2-3 αντιπαραδείγματα στην εικασία, απάντησαν πάλι με αφελή εμπειρισμό, λέγοντας πως δεν θα ισχύει η εικασία. Με τη συζήτηση όμως, κατάλαβαν τη διαφορετική φύση του ερωτήματος και πως αν υπήρχε έστω κι ένα παράδειγμα ισχύος τότε η υπαρκτική εικασία θα ίσχυε. Εκείνη τη στιγμή αγανάκτησαν στη σκέψη ότι έπρεπε να πάρουν πάρα πολλά παραδείγματα και τότε δημιουργήθηκε ανάγκη για ***μαθηματική απόδειξη.***

Επίσης, ορισμένα παραδείγματα, ήταν αντιπαραδείγματα σε εικασίες των μαθητών κι έτσι μετατράπηκαν σε ***παραδείγματα στροφής*** της σκέψης τους (Zazkis & Chernoff, 2008) και τους έκαναν να αναζητήσουν ορισμούς και ιδιότητες για να εξηγήσουν αυτό που παρατηρούσαν. Στην περίπτωση αυτή, οι μαθητές είτε εξέφραζαν ***πειράματα σκέψης*** (Balacheff, 1988) είτε εξηγούσαν σε ***γενικεύσιμα παραδείγματα*** (Balacheff, 1988) γιατί ισχύει η εικασία, ενώ δεν έλειψαν μερικές φορές και οι *συμβολικοί χειρισμοί*, με μερική καθοδήγηση της ερευνήτριας, αλλά αφού οι μαθητές είχαν εξηγήσει τα παραδείγματα και αναζητούσαν τον τρόπο να εξηγήσουν γιατί ισχύει γενικά η πρόταση.

Περιπτώσεις αιτιολόγησης με αφελή εμπειρισμό και κρίσιμο πείραμα

Στη 2η συνεδρία, οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν αν το άθροισμα 3 πρώτων θα είναι πρώτος ή όχι. Η Ελπίδα έκανε μία δοκιμή (3+5+7=15) και το άθροισμα βγήκε σύνθετος. Τότε διατύπωσε ότι «εφόσον κάναμε ένα παράδειγμα πρόσθεσης τριών πρώτων και βγήκε το άθροισμά τους σύνθετος, άρα πάντα θα βγαίνει σύνθετος». Η απάντηση αυτή της Ελπίδας, που χαρακτηρίζεται ως αφελής εμπειρισμός, μετατράπηκε σε εικασία υπό διερεύνηση. Για τον έλεγχο ισχύος της εικασίας εργάστηκαν και οι τρεις μαθητές, και βρήκαν αντιπαράδειγμα. Έτσι είχαμε απόρριψη της εικασίας με κρίσιμο πείραμα. Στην 4η συνεδρία, το ερώτημα «το άθροισμα 4 άρτιων αριθμών είναι άρτιος;» απαντήθηκε επίσης με αφελή εμπειρισμό, μόνο που οι μαθητές αυτή τη φορά έκαναν πιο πολλά παραδείγματα. Η Ελπίδα και η Σοφία έκαναν τρία, ενώ ο Μιχάλης έξι. Οι δύο δοκιμές του Μιχάλη ήταν με μεγαλύτερους αριθμούς, και μπορούν κι αυτές να θεωρηθούν κρίσιμα πειράματα γι' αυτόν.

Περίπτωση παραδείγματος που οδήγησε σε πείραμα σκέψης

Στην 3η συνεδρία, το 2ο ερώτημα ήταν «αν κάνουμε διαίρεση πρώτου με πρώτο, τι είδους αριθμός θα είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης;» Για το ερώτημα αυτό περιμένει κανείς να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές τον ορισμό του πρώτου αριθμού και να απαντήσουν. Έτσι θα είχαμε ένα πείραμα σκέψης. Τα παιδιά όμως έλεγξαν το ερώτημα ξανά εμπειρικά. Οι μαθητές παραξενεύτηκαν με τα πηλίκα των διαιρέσεων που δοκίμαζαν, καθώς περίμεναν να βγει πρώτος ή σύνθετος, ενώ το

πηλίκο ήταν δεκαδικός. Όμως για τη μια μαθήτρια το ένα παράδειγμα ήταν αρκετό να δράσει ως παράδειγμα 'στροφής' και να την κάνει να απαντήσει με επιφώνημα ενθουσιασμού, με βάση τον ορισμό και τις ιδιότητες του πρώτου: «*βγαίνει δεκαδικός αριθμός γιατί ο πρώτος διαιρείται μόνο με την μονάδα και τον εαυτό του!*».

3.3. Η συμβολή των παραδειγμάτων στην αποδεικτική διαδικασία

Η εισαγωγή του συμβολισμού από την ερευνήτρια έγινε με μεγάλη επιφύλαξη, αλλά τελικά ανέτρεψε τη δυσκολία των μαθητών να εκφραστούν και τους βοήθησε να εξηγήσουν αρκετές εικασίες τους με συμβολικό χειρισμό όπου ήταν δυνατό. Στις περιπτώσεις που *η* παρατήρηση κι εξήγηση των παραδειγμάτων έδρασε ως απαγωγικό βήμα για την διαμόρφωση ενός πειράματος σκέψης ή και ενός συμβολικού χειρισμού, είχαμε αυτό που ονομάζει η Pedemonte (2007) ως ***γνωστική ενότητα*** μεταξύ δομημένης επιχειρηματολογίας των εικασιών και απόδειξής τους, αλλά και δομική συνέχεια. Τέτοιες περιπτώσεις είχαμε σε αρκετές συνεδρίες. Επιβεβαιώθηκε έτσι και στη δική μας έρευνα, πως ένα βήμα απαγωγικού συλλογισμού μέσα από τη σημασία των αριθμητικών παραδειγμάτων, μπορεί να βοηθήσει στην κατασκευή αλγεβρικών μεταβλητών που θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη.

Μία τέτοια περίπτωση είχαμε στην 6^{η} συνεδρία, όπου ζητούνταν από τους μαθητές να απαντήσουν αν «το άθροισμα 5 οποιωνδήποτε διαδοχικών φυσικών αριθμών διαιρείται με το 5». Αρχική γνώμη των μαθητών ήταν πως δεν θα διαιρείται το άθροισμα με το 5, γιατί δε διαιρούνται όλοι με το 5. Λίγο αργότερα και μέσα από συζήτηση, η Ελπίδα παρατηρούσε ένα παράδειγμα 5 διαδοχικών (8+9+10+11+12), και προσπαθώντας να βρει τη λύση, παρατήρησε πως μπορούμε να αφήσουμε τον πρώτο αριθμό ως έχει (8) και να γράψουμε τους υπόλοιπους με βάση αυτόν γιατί «είναι +1» όπως είπε (8+1, 8+2, 8+3, 8+4). Έτσι ο μετασχηματισμός αυτός στο παράδειγμα και η εξήγησή του, χρησιμοποιήθηκε ως απαγωγικό βήμα για την μαθηματική απόδειξη με σύμβολα που ακολούθησε. Οι μαθητές βέβαια χρειάστηκαν βοήθεια από την ερευνήτρια στο συμβολικό χειρισμό, αλλά από τη συμμετοχή τους φάνηκε ότι κατανόησαν, ενώ επίσης ήταν πιο οικείοι στο συμβολικό χειρισμό στην επόμενη συνεδρία (7^{η}), όπου χρειάστηκε να απορρίψουν δύο υπαρκτικές εικασίες με μαθηματική απόδειξη. Επίσης, στην 7^{η} συνεδρία μέσω της απόδειξης έγινε κατανοητό και ένα αριθμητικό μοτίβο που παρατήρησαν στα αριθμητικά παραδείγματα (ότι τα πηλίκα τελειώνουν σε 0,5) κι έτσι συνδέθηκαν ακόμα μία φορά οι παρατηρήσεις τους από τα παραδείγματα με τη μαθηματική απόδειξη.

4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην εργασία αυτή είδαμε ορισμένες περιπτώσεις που δείχνουν πώς ένα ή περισσότερα παραδείγματα διαμορφώνουν εικασίες στους μαθητές μας. Οι εικασίες αυτές μπορεί να προκύπτουν με αφελή εμπειρισμό, ή να είναι δομικής γενίκευσης,

όταν οι μαθητές κατανοούν τη δομή του παραδείγματος. Και οι δύο περιπτώσεις μπορούν να φανούν χρήσιμες στη διδασκαλία, όταν όμως οι μαθητές τις κάνουν γνωστές σε εμάς. Το σημαντικό είναι να αποσαφηνίζονται λανθασμένες εικασίες, αλλά και με την ευκαιρία του ενδιαφέροντος, να εισάγονται οι μαθητές στη διαδικασία της διερεύνησης και της αιτιολόγησης με βάση ορισμούς και ιδιότητες, ενώ όπου είναι εφικτό να συνδυάζεται και μαθηματική απόδειξη. Επίσης, φάνηκε πως τα παραδείγματα που προκύπτουν από εμπειρικές δοκιμές συμβάλλουν πολλές φορές στην αιτιολόγηση και στην αποδεικτική διαδικασία. Ωστόσο, ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι καθοριστικός κι απαραίτητος και πρέπει με τη συζήτηση να συνεισφέρει στην αξιολόγηση των επιχειρημάτων των μαθητών και στην αποδεικτική διαδικασία. Τέλος, σημαντικό είναι να διευκρινίζεται, και πάλι με συζήτηση, ο διαφορετικός ρόλος που έχουν τα παραδείγματα σε καθολικές και υπαρκτικές εικασίες, καθώς στην αρχή δεν είναι ξεκάθαρο αυτό για τους μαθητές. Γενικώς, πρέπει να γίνεται σαφές αυτό που υποστηρίζει η Hanna (2000) ότι η διερεύνηση και η απόδειξη είναι ξεχωριστές δραστηριότητες, αλλά ωστόσο συμπληρωματικές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In Pimm D. (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*. (pp.216-235) Kent: The Open University. Ανακτημένο από http://edumat.uab.cat/

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. Invited article in J. Cai & E. Knuth (Ed), Special Edition on Algebraic Thinking, *Zentralblatt fór Didaktik der Mathematik (International Reviews on Mathematical Education), 37*(1), 34-42. Ανακτημένο από http://subs.emis.de/journals/

Borasi, R. (1996). *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors*. USA: Ablex Publishing Corporation

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2): 5-23. Ανακτημένο από: http://www.umaine.edu/

Knuth, E.J. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher*, 95 (7), 486-491. Διαθέσιμο από https://resources.oncourse.iu.edu/

Maher, C. & Weber, K. (2009). Precision in the Teaching, Learning, and Communication of Elementary School Mathematics: A Reply to Wilson's 'Elementary School Mathematics Priorities'. *AASA Journal of Scholarship & Practice, 6 (1), 50-54.* Διαθέσιμο από*:* http://www.aasa.org/

Maher, C. A. (2005). How students structure their investigations and learn mathematics: Insights from a long-term study. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(1), 1-14. doi:10.1016/j.jmathb.2004.12.006

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 23-41. doi:10.1007/s10649-006-9057-x

Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, 68 (3), 195-208. doi:10.1007/s10649-007-9110-4

Zazkis, R., & Leikin, R. (2007). Generating Examples: From Pedagogical Tool to a Research Tool. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 27, No. 2 (Jul., 2007), pp. 15-21

Πούλος, Α. (2009). *Εικασίες και Αντιπαραδείγματα: Για την* κατανόηση των μαθηματικών εννοιών στη σχολική τάξη. Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Μαυρίδη.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1-20. doi:10.1007/s10649-006-9038-0

Τσιτσιρίγκα, Ι. (2012). *Διαμόρφωση και αιτιολόγηση εικασιών από μαθητές Δημοτικού και ο ρόλος τους στην απόδειξη*, (Διπλωματική Εργασία) Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών. Αθήνα. Ανάκτηση από: http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_tsitsiriga%20ioanna.pdf

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΕΠΙΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Βασίλης Καραγιάννης

M.Sc. στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

vasilis_karagiannis@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εισήγηση προτείνουμε ένα νέο είδος μαθηματικών προβλημάτων και διερευνούμε τη συνεισφορά τους στις μετά-δεξιότητες και την εννοιολογική ανάπτυξη. Τη φύση των προτεινόμενων προβλημάτων την καθορίζει η ενσωμάτωση ενός δομικού στοιχείου των πραγματικών προβλημάτων, η επιλογή δεδομένων. Η έρευνα είναι ποιοτική και διεξήχθη σε πραγματική τάξη σε συνθήκες ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας. Τα ευρήματα έδειξαν, ότι τα προτεινόμενα προβλήματα συνεισφέρουν, τόσο στις μετά-δεξιότητες όσο και στην εννοιολογική ανάπτυξη, υπό δύο προϋποθέσεις. Πρώτον, οι μαθητές να κατέχουν τις απαιτούμενες βασικές γνωστικές δεξιότητες του προβλήματος και δεύτερον, να έχουν τη βούληση να συμμετάσχουν σε μαθηματικές δραστηριότητες υπό συνθήκες συνεργατικής μάθησης.

ΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΤΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΑΠΟ ΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Υπάρχει μια ανατροφοδότηση ανάμεσα στη πραγματική ζωή και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Από τη μια, οι καταστάσεις της καθημερινότητας τροφοδοτούν με ιδέες το πώς διδάσκουμε μαθηματικά, από την άλλη, το τί μαθηματικά διδάσκονται οι μαθητές, έχει επίδραση στη δημιουργία βιώσιμων τρόπων προσαρμογής σε τομείς της εμπειρίας τους και στην αντιμετώπιση καθημερινών προβλημάτων, όχι μόνο κατά τη διάρκεια της σχολικής ζωής τους αλλά και μετ' έπειτα.

Σε πολλά προβλήματα της καθημερινότητας, που η αντιμετώπισή τους δεν απαιτεί απαραίτητα μαθηματική γνώση, ενώ έχουμε στη διάθεσή μας μια σειρά δεδομένων που σχετίζονται με το πρόβλημα, χρησιμοποιούμε μόνο ένα μέρος από αυτά. Το ποια θα χρησιμοποιήσουμε εξαρτάται από τον τρόπο που σχεδιάζουμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα. Διαφορετικοί τρόποι αντιμετώπισης απαιτούν διαφορετικό συνδυασμό δεδομένων.

Η ιδέα είναι να μεταφέρουμε και να ενσωματώσουμε στο σχεδιασμό μαθηματικών δραστηριοτήτων το στοιχείο της επιλογής δεδομένων. Στα προβλήματα που προτείνουμε, ορισμένα από τα δεδομένα που απαιτούνται για την επίλυσή τους, επιλέγονται μέσα από ένα σύνολο δεδομένων από τον ίδιο το μαθητή. Τα προς επιλογήν δεδομένα είναι τέτοια ώστε διαφορετικοί συνδυασμοί επιλογών, επιτρέπουν

διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης και μάλιστα κάθε στρατηγική επίλυσης σηματοδοτεί και διαφορετικό επίπεδο μαθηματικής σκέψης.

Το στοιχείο που διαφοροποιεί τα προτεινόμενα προβλήματα είναι η μη επιβεβλημένη χρήση όλων των δεδομένων. Κατά συνέπεια καταργείται η σχέση αντιστοίχισης ανάμεσα στο σύνολο των δεδομένων και τη λύση, παύει να ισχύει ο μονόδρομος που τα συνδέει και που προκαλεί αυτοματοποιημένες ενέργειες των μαθητών. Έτσι δίνεται χώρος για επιλογή και η διαδικασία επιλογής προϋποθέτει ερμηνεία και λήψη απόφασης.

Σύμφωνα με τον Glasersfeld (1983) θα ήταν λάθος να ισχυριστούμε ότι ένας οργανισμός που απλώς δρα και αντιδρά χωρίς να αναστοχάζεται, ερμηνεύει. Η ερμηνεία υποδηλώνει αντίληψη περισσότερων της μιας δυνατότητας, περίσκεψη, σκοπιμότητα και ορθολογιστικά ελεγχόμενη επιλογή. Δεν είναι αρκετό να γνωρίζει κανείς τι κάνει, αλλά να ξέρει γιατί αυτό που κάνει είναι σωστό.

Ο νομπελίστας ιατρικής Edelman (1992), υποστηρίζει ότι η διεργασία της επιλογής είναι χαρακτηριστικό του εγκεφάλου και ακριβώς αυτή η δυνατότητα διεργασίας διαφοροποιεί τα υποκείμενα ως προς τη μάθηση. Προτείνει μια επιλεκτική θεωρία της λειτουργίας του εγκεφάλου, τη θεωρία επιλογής νευρωνικών ομάδων (TNGS), η οποία εξηγεί το συνεχές προσαρμοστικό ταίριασμα των οργανισμών στα γεγονότα του περιβάλλοντος, ακόμα κι' αν αυτά δεν είναι δυνατόν να προβλεφτούν, δηλαδή ακόμη και όταν συνιστούν νεωτερισμούς του περιβάλλοντος.

Τα παραπάνω ενισχύουν την πρόθεσή μας να δημιουργήσουμε μαθηματικά προβλήματα, που η επίλυσή τους απαιτεί την επιλογή δεδομένων. Η ενσωμάτωση του στοιχείου της επιλογής δεδομένων, στοχεύει στο να δημιουργήσει καταστάσεις ελέγχου και συντονισμού των γνώσεων, σκόπιμης επιλογής και λήψης αποφάσεων. Για τη διδασκαλία που έχει ως βασικό συστατικό τα προτεινόμενα προβλήματα, πρωταρχικής σημασίας είναι η επιστημολογική αρχή της προσαρμογής, δηλαδή της επιλογής, παρά της αντιστοίχισης.

Το ακόλουθο πραγματικό πρόβλημα, θα λειτουργήσει ως οδηγός για τη μετάβαση στα μαθηματικά προβλήματα με επιλογή δεδομένων.

Πραγματικό πρόβλημα

Η προβληματική κατάσταση αφορά την κατασκευή ντουλαπιών στην κουζίνα του σπιτιού μας. Έχουμε ήδη αποφασίσει για το είδος του ξύλου και μετά από έρευνα αγοράς έχουμε στη διάθεσή μας τα εξής δεδομένα:

- Μέτρηση διαστάσεων της κουζίνας από ειδικό: 50€
- Αγορά συναρμολογημένων ντουλαπιών: 1800€
- Τοποθέτηση ντουλαπιών από ειδικό: 300€
- Αγορά ξυλείας: 800€
- Κοπή ξυλείας σε κομμάτια που χρειαζόμαστε: 200€
- Μηχανικά εξαρτήματα (μεντεσέδες, πόμολα): 100€

Περιγράφουμε τον τρόπο αντιμετώπισης τεσσάρων διαφορετικών ατόμων:

- Ο Α εκτιμά ότι μπορεί να μετρήσει τις διαστάσεις της κουζίνας, αλλά ότι δεν έχει την ικανότητα ούτε να κόψει την ξυλεία, ούτε να συναρμολογήσει τα ντουλάπια, ούτε να τα τοποθετήσει, οπότε αποφασίζει να αγοράσει έτοιμα τα ντουλάπια και να πληρώσει τον ειδικό να τα τοποθετήσει, κόστος 1800+300=2100€.
- Ο Β, αφού εκτίμησε τι μπορεί και τι δεν μπορεί να κάνει, αποφασίζει να αγοράσει την ξυλεία, να τη δώσει για κοπή, να αγοράσει τα μηχανικά εξαρτήματα και να καλέσει τον ειδικό για τοποθέτηση, κόστος 800+200+300+100=1400€.
- Ομοίως ο Γ αποφασίζει να αγοράσει τα μηχανικά εξαρτήματα και την ξυλεία και να τη δώσει για κοπή, κόστος 800+200+100=1100€.
- Ο Δ εκτιμά ότι μπορεί να τα κάνει όλα μόνος του, οπότε αποφασίζει να αγοράσει μόνο την ξυλεία και τα μηχανικά εξαρτήματα, κόστος 800+100=900€.

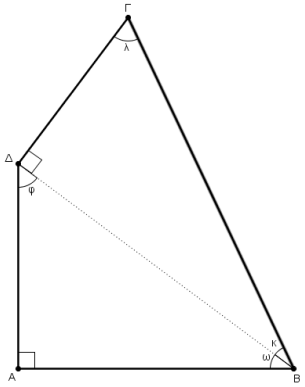
Διακρίνουμε τέσσερεις διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης με διαφορετικό κόστος η καθεμία και παρατηρούμε ότι κάθε στρατηγική χρησιμοποιεί διαφορετικό συνδυασμό δεδομένων. Το κόστος για κάθε δεδομένο μπορούμε να το φανταστούμε ως κόστος πρόσβασης, ενώ το κόστος επίλυσης κάθε στρατηγικής, ως άθροισμα των κόστων πρόσβασης των δεδομένων που χρησιμοποιεί.

Αν κρίνουμε την ικανότητα κάθε εμπλεκόμενου στην κατασκευή των ντουλαπιών μέσω του τρόπου που αντιμετώπισε το πρόβλημα, παρατηρούμε ότι το επίπεδο ικανότητας σηματοδοτείται από το κόστος της στρατηγικής που εφάρμοσε. Όσο μικρότερο είναι το κόστος τόσο υψηλότερο είναι το επίπεδο ικανότητας.

Ενσωματώνοντας το στοιχείο της επιλογής δεδομένων και τη σύμβαση του κόστους πρόσβασης, όπως αυτά απορρέουν από το προηγούμενο πραγματικό πρόβλημα, ανασκευάζουμε ένα σύνηθες μαθηματικό πρόβλημα και το μετατρέπουμε σε πρόβλημα με επιλογή δεδομένων ως εξής:

Πρόβλημα με επιλογή δεδομένων «Πυθαγόρειο – Τριγωνομετρία»

Θέλουμε να περιφράξουμε τον κήπο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος, με συρματόπλεγμα το οποίο πωλείται σε ρολά των 3 μέτρων που το καθένα κοστίζει 25 €. Να υπολογίσετε το κόστος της περίφραξης.



Έχετε τη δυνατότητα να πληροφορηθείτε:

- Το μήκος της πλευράς ΑΒ= ….. (κόστος 3)
- Το μήκος της πλευράς ΑΔ= …… (κόστος 3)

- Το μήκος της πλευράς ΒΓ= …… (κόστος 2)
- Το μήκος της πλευράς ΓΔ= …… (κόστος 2)
- Το μέτρο της γωνίας κ= …… (κόστος 3)
- Το μέτρο της γωνίας λ= …… (κόστος 3)
- Το μέτρο της γωνίας ω= …… (κόστος 2)
- Το μέτρο της γωνίας φ= ……. (κόστος 2)

Να επιλύσετε το πρόβλημα με όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος.

Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε οπωσδήποτε τα αρχικά δεδομένα, αλλά χρειαζόμαστε και κάποια από τα προς επιλογήν δεδομένα. Για να αποκτήσουμε τη δυνατότητα πρόσβασης σε οποιοδήποτε από αυτά, πρέπει να «επωμιστούμε» το αντίστοιχο «κόστος πρόσβασης». Τα αρχικά δεδομένα μαζί με τα επιλεγμένα αποτελούν τα απαιτούμενα δεδομένα μιας στρατηγικής επίλυσης. Το άθροισμα των κόστων πρόσβασης εκφράζει το «κόστος επίλυσης» της συγκεκριμένης στρατηγικής.

Συνολικά οι διαφορετικοί τρόποι επίλυσης του προβλήματος είναι 41. Το μικρότερο κόστος επίλυσης είναι 6 και αντιστοιχεί σε δύο στρατηγικές: να ζητήσουμε πρόσβαση σε 3 δεδομένα, στο μήκος των πλευρών ΒΓ και ΓΔ και στο μέτρο της γωνίας ω ή φ, να εφαρμόσουμε πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΓΔ για να υπολογίσουμε την πλευρά ΒΔ και στη συνέχεια κατάλληλους τριγωνομετρικούς αριθμούς στο τρίγωνο ΑΒΔ για να υπολογίσουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ.

Επειδή η σύμβαση του κόστους πρόσβασης στα προτεινόμενα προβλήματα ιεραρχεί τις στρατηγικές επίλυσης μέσω ενός μηχανιστικού κριτηρίου, του κόστους, τίθεται το ερώτημα αν αυτό δημιουργεί συνθήκες ώστε η μάθηση να συντελείται μέσα σε αυστηρά συμπεριφοριστικά πλαίσια.

Δεδομένου ότι συμπεριφορισμός είναι το είδος του συνειρμισμού που θεωρεί ότι η μάθηση συντελείται μέσω της σύνδεσης μυϊκών αντιδράσεων με εξωτερικά ερεθίσματα (Βοσνιάδου 2001), πιστεύουμε ότι η σύμβαση του κόστους πρόσβασης δεν οδηγεί τη μάθηση σε συμπεριφοριστικά πλαίσια και θεωρούμε, όσον αφορά τα προτεινόμενα προβλήματα, ότι σε πρώτη φάση τουλάχιστον το κόστος πρόσβασης είναι απαραίτητο. Η άποψή μας ενισχύεται, από την ερμηνεία περί ενίσχυσης του Glasersfeld και από τη θεωρία διδακτικών καταστάσεων του Brousseau.

Ο Glasersfeld (1983) αναφέρει ότι υπάρχει η ευρέως διαδεδομένη παρανόηση ότι η ενίσχυση είναι το αποτέλεσμα πολύ γνωστών ανταμοιβών, όπως χρήματα ή κοινωνική αποδοχή. Πρόκειται για μια εσφαλμένη αντίληψη, όχι επειδή οι οργανισμοί δε θα δουλέψουν αρκετά σκληρά για να τα αποκτήσουν, αλλά επειδή αποκρύπτει το μακράν πιο ενισχυτικό για ένα γνωστικό οργανισμό: να επιτύχει μια ικανοποιητική οργάνωση, ένα βιώσιμο τρόπο αντιμετώπισης κάποιου τομέα της εμπειρίας.

Ο Brousseau (1986), στο πλαίσιο της θεωρίας διδακτικών καταστάσεων, επισημαίνει:

> «Οι γνώσεις δεν υπάρχουν και δεν έχουν κανένα νόημα για το μαθητή, παρά μόνο διότι αντιπροσωπεύουν την καλύτερη δυνατή λύση σ' ένα σύστημα συμβάσεων (contraintes)…. Η διδακτική δραστηριότητα έγκειται στο να οργανώσει αυτές τις συμβάσεις και να διατηρήσει τις καλύτερες δυνατές συνθήκες αλληλεπιδράσεων». (σελ. 368-369)

Οι Sierpinska και Lerman (1997) αναφέρουν ότι στη βάση της θεωρίας διδακτικών καταστάσεων του Brousseau, βρίσκεται η επιστημολογική υπόθεση ότι η γνώση υπάρχει και έχει νόημα για το υποκείμενο, μόνο επειδή αντιπροσωπεύει μια προαιρετική επιλογή σε ένα σύστημα εξαναγκασμών (constraints). Καθήκον του δασκάλου είναι να οργανώσει καταστάσεις ή συστήματα εξαναγκασμών, στα οποία ο δοσμένος διδακτικός στόχος να εμφανίζεται ως η πλέον ευνοϊκή (λιγότερο δαπανηρή) λύση.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Σύμφωνα με τον Mayer (1998) η επιτυχής επίλυση προβλημάτων εξαρτάται από τις γνωστικές δεξιότητες, τις μεταγνωστικές δεξιότητες και τη βούληση. Οι γνωστικές δεξιότητες είναι οι βασικές δεξιότητες και αναπτύσσονται στοχευμένα και μεμονωμένα. Οι μεταγνωστικές δεξιότητες είναι η μεταγνώση με τη μορφή μετά-δεξιοτήτων και αφορούν την ικανότητα του μαθητή να ελέγχει και να παρακολουθεί τις γνωστικές διεργασίες του. Είναι κεντρική συνιστώσα στην επίλυση προβλημάτων, διότι υποδηλώνει την ικανότητα διαχείρισης και συντονισμού βασικών δεξιοτήτων.

Δεδομένου ότι στα προτεινόμενα προβλήματα, κάθε στρατηγική επίλυσης απαιτεί χρήση διαφορετικών γνωστικών δεξιοτήτων, η ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προϋποθέτει συντονισμό, έλεγχο και διαχείριση της γνώσης, δηλαδή μεταγνωστική ικανότητα με τη μορφή μετά-δεξιοτήτων. Κατά συνέπεια, τα προβλήματα με επιλογή δεδομένων μπορούν να συνεισφέρουν στον τομέα των μετά-δεξιοτήτων, αρκεί οι μαθητές, στην προσπάθειά τους να μειώσουν το κόστος επίλυσης, να αναπτύσσουν όσο το δυνατόν περισσότερες στρατηγικές επίλυσης.

Μια άλλη θεωρία που μας βοηθά να ερμηνεύσουμε τη σημασία των προτεινόμενων προβλημάτων, είναι το μοντέλο εννοιολογικής ανάπτυξης της Sfard (1992). Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, μια μαθηματική έννοια την κατανοούμε, σ' ένα αρχικό επίπεδο με βάση τη λειτουργία της, δηλαδή τη βλέπουμε ως σύνολο ενεργειών μιας διαδικασίας ενώ σ' ένα ανώτερο επίπεδο με βάση τη δομή της, δηλαδή ως ένα πλήρες μαθηματικό αντικείμενο με ιδιαίτερα δομικά χαρακτηριστικά.

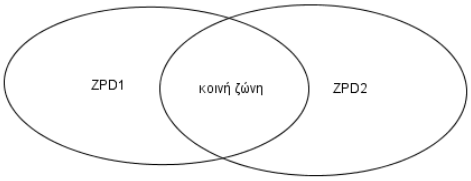
Οι μαθητές, στην προσπάθεια αναζήτησης της βέλτιστης στρατηγικής, αναπτύσσουν πολλαπλούς τρόπους επίλυσης, κατά συνέπεια διαχειρίζονται, συντονίζουν και συνδυάζουν μαθηματικές διαδικασίες, προσπαθώντας να κάνουν συγκρίσεις και γενικεύσεις. Υποθέτουμε ότι αυτή η νοητική διεργασία βοηθάει στο να «δουν» τις διαδικασίες αυτές ως δομή, να τις σκέφτονται με βάση τις σχέσεις εισόδου-εξόδου, κατά συνέπεια ευνοεί τη μετάβαση από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης.

Δανειζόμαστε μια έννοια του χώρου λύσεων που προτείνουν οι Leikin και Lev (2007) και την προσαρμόζουμε στα προτεινόμενα προβλήματα.

Για ένα πρόβλημα με επιλογή δεδομένων, ο ατομικός χώρος λύσεων αφορά τον κάθε μαθητή προσωπικά και χωρίζεται σε δύο υποσύνολα ξένα μεταξύ τους. Τον διαθέσιμο χώρο λύσεων, στρατηγικές που μπορεί να αναπτύξει ο μαθητής μόνος του και ανεξάρτητα, χωρίς τη βοήθεια του καθηγητή ή των συμμαθητών του και τον δυνητικό χώρο λύσεων, στρατηγικές που μπορεί να αναπτύξει ο μαθητής με τη βοήθεια του καθηγητή ή των συμμαθητών του, αλλά όχι μόνος του. Οι στρατηγικές αυτές ανταποκρίνονται στην προσωπική ZPD του μαθητή (Vygotsky, 1978).

Ο ατομικός χώρος λύσεων καθορίζεται από όλες τις στρατηγικές που ανέπτυξε ο μαθητής, μέχρι να φτάσει σ' αυτή που τελικά εφάρμοσε. Για τη μαθησιακή διαδικασία έχει μεγάλη σημασία η δημιουργία δυνητικού χώρου λύσεων, διότι οι λύσεις που ανήκουν εκεί, βρίσκονται στη ZPD του μαθητή και καθορίζουν το εν δυνάμει αναπτυξιακό του επίπεδο.

Σύμφωνα με τον Lerman (2001) η ZPD δεν είναι κάτι που ο μαθητής φέρει μαζί του, δεν εμφανίζεται πριν την αλληλεπίδραση με τους συμμαθητές του ή τον καθηγητή, η ανάδυσή της μπορεί να προκληθεί μέσω της επικοινωνίας και της διαπραγμάτευσης. Οι ZPD δύο μαθητών μπορούν να περιγραφούν ως επικαλυπτόμενες ζώνες. Στην κοινή ζώνη που δημιουργείται, αν δημιουργείται, συντελείται η μάθηση.



Στην περίπτωση των προτεινόμενων προβλημάτων, οι δύο ZPD ταυτίζονται με τους δυνητικούς χώρους στρατηγικών επίλυσης των δύο μαθητών. Στην κοινή ζώνη ανήκουν οι στρατηγικές, που την προκειμένη στιγμή δεν θα μπορούσε κανένας απ' τους δύο να τις αναπτύξει μόνος του και ανεξάρτητα, αλλά θα μπορούσαν να τις αναπτύξουν σε συνθήκες επικοινωνίας, συνεργασίας και διαπραγμάτευσης μεταξύ τους ή με τον καθηγητή. Γι' αυτό, στην έρευνά μας υιοθετήσαμε ως πρακτική της τάξης την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία.

Το αν τα προτεινόμενα προβλήματα ευνοούν την ανάπτυξη επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων, είναι σημαντικό στοιχείο, διότι αποκαλύπτει κατά πόσο συντελείται και αναπτύσσεται η μάθηση διαμέσου αυτών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

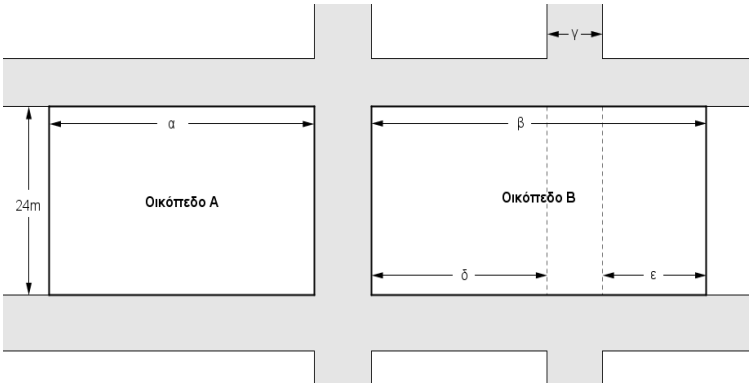
Η έρευνά μας είναι ποιοτική και επιχειρεί να απαντήσει σε δύο ερωτήματα:

1. Τα προτεινόμενα προβλήματα συνεισφέρουν στην ανάπτυξη μετά-δεξιοτήτων;
2. Τα προτεινόμενα προβλήματα συμβάλλουν στην εννοιολογική ανάπτυξη; Ευνοούν τη μετάβαση από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης;

Η έρευνα διενεργήθηκε κατά το σχολικό έτος 2012-13 σ' ένα τυπικό Γυμνάσιο του κέντρου της Αθήνας. Συμμετείχαν οι μαθητές τριών τμημάτων της Α΄ τάξης και ενός της Β΄ τάξης. Στα τμήματα της Α΄ τάξης δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα «Επιμεριστική», ενώ στο τμήμα της Β΄ τάξης το πρόβλημα «Πυθαγόρειο - Τριγωνομετρία» που αναφέραμε πριν.

Πρόβλημα με επιλογή δεδομένων «Επιμεριστική»

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η κάτοψη των οικοπέδων Α και Β. Η αρμόδια διεύθυνση του υπουργείου αποφάσισε να κατασκευάσει δρόμο, ο οποίος θα περάσει μέσα από το οικόπεδο Β όπως δείχνουν οι διακεκομμένες γραμμές. Να υπολογίσετε το συνολικό εμβαδό των οικοπέδων μετά την κατασκευή του δρόμου.



Έχετε τη δυνατότητα να πληροφορηθείτε:

- Πόσο είναι η απόσταση α …….. (κόστος 4)
- Πόσο είναι η απόσταση β …….. (κόστος 4)
- Πόσο είναι το πλάτος του δρόμου γ …….. (κόστος 4)
- Πόσο είναι η απόσταση δ …….. (κόστος 5)
- Πόσο είναι η απόσταση ε …….. (κόστος 5)
- Πόσο είναι η διαφορά β-γ …….. (κόστος 3)
- Πόσο είναι το άθροισμα δ+ε …….. (κόστος 4)
- Πόσο είναι το αποτέλεσμα της πράξης α+β-γ …….. (κόστος 3)
- Πόσο είναι το αποτέλεσμα της πράξης α+δ+ε …….. (κόστος 4)

Να επιλύσετε το πρόβλημα με όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος.

Και στις 4 παρεμβάσεις οι μαθητές εργάστηκαν κατά ομάδες. Ηχογραφήσαμε 12 ομάδες, 3 από κάθε τμήμα και εξετάσαμε λεπτομερώς τις απομαγνητοφωνήσεις.
Η ανάλυση των δεδομένων στηρίχτηκε σε δύο άξονες:

1. Καταγράψαμε όλες τις διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης που ανέπτυξε κάθε ομάδα στην προσπάθεια αναζήτησης της βέλτιστης στρατηγικής. Σχετίζεται άμεσα και με τις μετά-δεξιότητες και με την εννοιολογική ανάπτυξη.
2. Εντοπίσαμε σημεία στους διαλόγους που φανερώνουν με ευκρίνεια:

- Φαινόμενα επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων. Σχετίζονται άμεσα με την εννοιολογική ανάπτυξη.

- Μαθητές να χειρίζονται κατ' εξακολούθηση μαθηματικές έννοιες με βάση τα δομικά τους χαρακτηριστικά ή, κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, να μετακινούνται από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης.
- Φαινόμενα αντιπαράθεσης και παλινδρόμησης μεταξύ παλιάς και νέας γνώσης, στοιχείο που σηματοδοτεί πορεία για κατασκευή της νέας γνώσης.
- Αναστοχασμό των μαθητών πάνω στη δραστηριότητα. Σχετίζεται με τις μετά-δεξιότητες, αλλά και την εννοιολογική ανάπτυξη.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Όσον αφορά τα αποτελέσματα των παρεμβάσεων στα τμήματα της Α΄ τάξης, ο παρακάτω πίνακας αποτυπώνει ποιες από τις 6 δυνατές στρατηγικές επίλυσης ανέπτυξε κάθε ομάδα. Οι στρατηγικές είναι χωρισμένες σε 3 κατηγορίες, ανάλογα με το τι είδους επιμεριστική απαιτεί η εφαρμογή τους. Για κάθε μία αναγράφονται τα απαιτούμενα δεδομένα και σε παρένθεση το κόστος επίλυσης.

Τμήμα	Ομάδα	Στρατηγικές επίλυσης					
		Χωρίς επιμερ.		Επιμερ. 2 αριθμών		Επιμερ. 3 αριθμών	
		α, δ, ε (14)	α, β, γ (12)	α, δ+ε (8)	α, β-γ (7)	α+δ+ε (4)	α+β-γ (3)
Α1	1η		√				√
	2η		√				√
	3η		√	√		√	
Α2	1η		√	√			√
	2η		√	√	√		√
	3η		√	√	√	√	√
Α3	1η	√		√	√		√
	2η			√	√		√
	3η	√	√		√		

Επίσης, η μελέτη των απομαγνητοφωνήσεων έδειξε ότι:

- Στις 6 ομάδες αναπτύχθηκαν επικαλυπτόμενοι δυνητικοί χώροι λύσεων.
- Σε 4 περιπτώσεις έλαβαν χώρα φαινόμενα αντιπαράθεσης και παλινδρόμησης ανάμεσα στη παλιά και νέα γνώση.
- Στις 8 ομάδες διενεργήθηκε αναστοχασμός πάνω στο πρόβλημα.
- Σε 5 ομάδες, οι μαθητές στην προσπάθεια κατασκευής της νέας γνώσης, επιχείρησαν έλεγχο εικασιών μέσω παραδειγμάτων ή μέσω μέτρησης.

Όσον αφορά τα αποτελέσματα της παρέμβασης στο τμήμα της Β΄ τάξης, οι 41 δυνατές στρατηγικές επίλυσης χωρίζονται σε 3 επίπεδα. Στο Επίπεδο Ι ανήκει η στρατηγική που δεν απαιτεί ούτε πυθαγόρειο ούτε τριγωνομετρία. Στην πρώτη κατηγορία του Επιπέδου ΙΙ ανήκουν οι 4 στρατηγικές που απαιτούν μόνο

πυθαγόρειο, ενώ στη δεύτερη οι 16 που απαιτούν μόνο τριγωνομετρία. Στο Επίπεδο ΙΙΙ ανήκουν οι 20 στρατηγικές που απαιτούν συνδυασμό πυθαγορείου και τριγωνομετρίας. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει σε ποιες κατηγορίες ανήκουν οι στρατηγικές επίλυσης που ανέπτυξε κάθε ομάδα. Σε παρένθεση αναγράφεται το ελάχιστο και μέγιστο κόστος επίλυσης των στρατηγικών κάθε κατηγορίας.

Τμήμα	Ομάδα	Κατηγορίες στρατηγικών επίλυσης			
		Επίπεδο Ι	Επίπεδο ΙΙ		Επίπεδο ΙΙΙ
		4 πλ. (10)	Πυθαγ. (7-8)	Τριγ. αρ. (7-8)	Συνδ. (6-9)
Β2	1η		√		√
	2η		√	√	√
	3η		√	√	√

Η μελέτη των απομαγνητοφωνήσεων έδειξε ακόμη ότι:

- Το μεγάλο πλήθος των δυνατών στρατηγικών επίλυσης λειτούργησε θετικά στο να αντιμετωπίσουν οι μαθητές το πυθαγόρειο θεώρημα και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με βάση τα δομικά τους χαρακτηριστικά.
- Υπήρξε περίπτωση μαθήτριας, που μετακινήθηκε από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης των τριγωνομετρικών αριθμών.
- Στις 2 από τις 3 ομάδες αναπτύχθηκαν επικαλυπτόμενοι δυνητικοί χώροι λύσεων.
- Υπήρξαν περιπτώσεις δύο μαθητών που γενίκευσαν τις στρατηγικές επίλυσης μιας κατηγορίας και ενός μαθητή που επιχείρησε επιτυχημένη ανασκευή του συγκεκριμένου προβλήματος. Θεωρούμε ότι οι διεργασίες αυτές είναι προϊόν υψηλού επιπέδου αναστοχασμού και το σημαντικό είναι ότι το κίνητρό τους φαίνεται να είναι εσωτερικό και να μην έχει σχέση με το ελάχιστο κόστος επίλυσης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ, ΣΚΕΨΕΙΣ, ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Η έρευνα έδειξε ότι κάθε ομάδα, στην προσπάθεια αναζήτησης της βέλτιστης στρατηγικής, ανέπτυξε ικανοποιητικό πλήθος στρατηγικών επίλυσης. Οι μαθητές με διάθεση συμμετοχής, μπήκαν στη διαδικασία να συντονίσουν και να ελέγξουν βασικές γνωστικές δεξιότητες, να διαχειριστούν μαθηματικές έννοιες βάσει των δομικών τους χαρακτηριστικών ή και να μετακινηθούν από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης. Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις αλληλεπίδρασης επετεύχθη ανάπτυξη επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων. Ανιχνεύσαμε περιπτώσεις, που η δυνατότητα επιλογής δεδομένων συνέβαλε στη δημιουργία φαινομένων αντιπαράθεσης και παλινδρόμησης ανάμεσα στην παλιά και νέα γνώση. Διαπιστώσαμε ότι η ύπαρξη πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης, έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές με ενεργητική διάθεση, να επιχειρηματολογήσουν για την

επιλογή τους ή και να κρίνουν επιλογές συμμαθητών τους, να αποστασιοποιηθούν από τη δράση τους και να την εκλάβουν ως αντικείμενο αναστοχασμού.
Τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα, ότι η ενασχόληση των μαθητών με τα προτεινόμενα προβλήματα, σε συνθήκες ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, συνεισφέρουν τόσο στις μετά-δεξιότητες όσο και στην εννοιολογική ανάπτυξη, υπό δύο προϋποθέσεις. Πρώτον, ο μαθητής πρέπει να κατέχει τις βασικές γνωστικές δεξιότητες που απαιτεί το πρόβλημα και δεύτερον, να έχει τη βούληση να συμμετάσχει σε μαθηματικές δραστηριότητες υπό συνθήκες συνεργατικής μάθησης.

Αναφέρουμε ορισμένες σκέψεις, προεκτάσεις και ερωτήματα, που απορρέουν από τη φύση των μαθηματικών προβλημάτων με επιλογή δεδομένων.

- Ένα πλεονέκτημά τους είναι ότι επιτρέπουν στους μαθητές να εμπλακούν με το ίδιο πρόβλημα σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, ώστε κάθε φορά, εφαρμόζοντας τη νέα γνώση να μειώνουν το κόστος επίλυσης. Πιστεύουμε ότι αυτή η πρακτική, συμβάλλει στη σύνδεση της παλιάς με τη νέα γνώση. Βοηθάει τους μαθητές να δουν τη μία ως συνέχεια της άλλης, και τις δύο ως μέρη μιας ενιαίας μαθηματικής ολότητας και όχι ξεκομμένες και ασυσχέτιστες μεταξύ τους.

- Τα προτεινόμενα προβλήματα μας παρέχουν τη δυνατότητα, με κατάλληλη αλλαγή στα κόστη πρόσβασης, να διαφοροποιήσουμε τη βέλτιστη στρατηγική επίλυσης, ανάλογα με το διδακτικό στόχο.

- Η εκχώρηση της επιλογής των δεδομένων στους ίδιους τους μαθητές, δημιουργεί μια άλλου είδους σχέση ανάμεσα στο μαθητή και τη πορεία επίλυσης. Η πορεία επίλυσης δεν προκαθορίζεται από το ίδιο το πρόβλημα, αλλά ο μαθητής, μέσω της επιλογής δεδομένων, συμμετέχει ενεργά στον καθορισμό της. Το ερώτημα είναι αν αυτό το πλαίσιο δημιουργεί κίνητρα ενδιαφέροντος, αν ενισχύει τη βούληση του μαθητή για την ενασχόλησή του με τα μαθηματικά.

- Όσες στρατηγικές επίλυσης αναπτύσσουν ο μαθητές, κατά την ενασχόλησή τους με ένα προτεινόμενο πρόβλημα, τόσα διαφορετικά προβλήματα, εν μέρει κατασκευάζουν και επιλύουν. Η κατασκευή και η επίλυση διενεργούνται ταυτόχρονα, με αποτέλεσμα να μην τις βλέπουν ως δύο διακριτές διαδικασίες όπως γίνεται συνήθως. Δεν καταπιάνονται μόνο με τη μία, την επίλυση, αλλά και με τις δύο ως αλληλοεξαρτώμενες δικές τους δράσεις.

- Οι πολλαπλοί τρόποι επίλυσης διαβαθμισμένου γνωστικού επιπέδου, επιτρέπουν την επιτυχή αντιμετώπιση του προβλήματος από ένα ευρύ φάσμα μαθητών. Το ερώτημα είναι αν αυτό το πλαίσιο μπορεί να λειτουργήσει θετικά στους μαθητές που επιδεικνύουν συστηματική αποτυχία και αποστροφή στα μαθηματικά, ώστε να δουν με άλλο μάτι και τα μαθηματικά και τις ικανότητές τους στα μαθηματικά.

- Μια προοπτική και μια εναλλακτική μορφή των προτεινόμενων προβλημάτων είναι, τα προς επιλογήν δεδομένα να μην προκαθορίζονται εξ' αρχής, αλλά να τα αναζητούν και να τα συλλέγουν οι ίδιοι οι μαθητές χωρίς κανένα περιορισμό.

- Τα προβλήματα με επιλογή δεδομένων φαίνεται να είναι πιο κοντά στη φύση των πραγματικών προβλημάτων. Σ' ένα πραγματικό πρόβλημα, πάντα τίθεται το ερώτημα, όχι όμως ποια δεδομένα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οπωσδήποτε για την αντιμετώπισή του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des Phénomènes d'Enseignement des Mathématiques*, Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences, Université de Bordeaux I.

Edelman, G. (1992). *Bright Air, Brilliant Fire*. Basic Books, Inc. (ed.) Για την ελληνική γλώσσα: Εκδόσεις Κάτοπτρο 1996.

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161–168). Seoul, South Korea: PME.

Lerman, S. (2001). Accounting for accounts of learning mathematics: reading the ZPD in videos and transcripts. In D. Clarke (Ed.), *Perspectives on practice and meaning in mathematics and science classrooms*, (pp. 53-74). Dordrecht: Kluwer.

Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science* ***26***: 49-63.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. In Harel, G. and Dubinsky, E. (Eds.) *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, pp.59-84, Washington:MAA.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1997). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. *International Handbook of Mathematics Education* Kluwer International Handbooks of Education Volume 4, 827-876.

Von Glasersfeld, E. (1983). Learning as a constructive activity. In: J. C. Bergeron & N. Herscovics (ed) *Proceedings of the 5th Annual Meeting of the North American Group of Psychology in Mathematics Education*, Vol. 1 Montreal: PME-NA 41–101

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Βοσνιάδου Σ. (2001). *Εισαγωγή στην ψυχολογία. Τόμος Α΄*. Εκδόσεις Gutenberg.

«ΕΡΓΑΣΙΑΚΑ» ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΝΟΣ ΨΑΡΑ

Τσιτσέλη Κωνσταντίνα

Απόφοιτος Παιδαγωγικού τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης – Πανεπιστήμιο Αλεξανδρούπολης

konstantin-t@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Έρευνες στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης ενισχύουν την άποψη ότι τα μαθηματικά αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι όχι μόνο της σχολικής πραγματικότητας αλλά και της καθημερινής ζωής. Μάλιστα, τα τελευταία χρόνια παρατηρείται αυξημένη ερευνητική κίνηση για τον εντοπισμό των μαθηματικών σε διάφορους χώρους εργασίας. Στόχος της παρούσας μελέτης είναι να ανιχνευθούν οι μαθηματικές πρακτικές στο επάγγελμα του ψαρά, καθώς και ο ρόλος της μαθητείας στην ανάπτυξη αυτών. Περιγράφεται επίσης ο τρόπος με τον οποίο γίνονται αντιληπτές και συνδέονται με τα συμβατικά μαθηματικά από τον εργαζόμενο. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το πολιτισμικό υπόβαθρο του ατόμου επιδρά σημαντικά στην κατασκευή της μαθηματικής γνώσης και προτείνουν την επανεξέταση της μαθηματικής εκπαίδευσης.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τις τελευταίες δεκαετίες η μάθηση των μαθηματικών προσεγγίζεται με διαφορετικό τρόπο, καθώς λαμβάνονται υπόψη οι κοινωνικές και πολιτισμικές διαστάσεις της. Γενικά, επικρατεί η άποψη ότι η μαθηματική γνώση μπορεί να αναπτυχθεί εκτός σχολικού περιβάλλοντος και καθοδήγησης[i]. Όπως αναφέρει η Millroy (1991)

> «Οι άνθρωποι συχνά επινοούν δημιουργικές μεθόδους για να επιλύσουν ικανοποιητικά τα προβλήματα της καθημερινής ζωής. Το σχολείο δεν μονοπωλεί τη μαθηματική γνώση… Η μαθηματική γνώση αναπτύσσεται σε ένα πλαίσιο και μορφοποιείται σε αυτό»*[ii]*.

Μάλιστα, σύμφωνα με τον Lester (1989) η γνώση εκτός σχολείου, προκύπτει από δραστηριότητες της καθημερινότητας, οι οποίες συμβαίνουν σε οικεία περιβάλλοντα, χαρακτηρίζονται από στόχους, απατούν τη λήψη αποφάσεων και συνήθως συντελείται μέσα σε πλαίσια μαθητείας[iii]. Οι Lave και Wenger (1991) υποστηρίζουν ότι η μάθηση είναι κάτι που συμβαίνει «μεταξύ ανθρώπων», μέσα από την εμπλοκή τους σε κοινές πρακτικές. Τα άτομα μεταφέρουν μία ποικιλία από οπτικές, προοπτικές και εξειδικεύσεις στην εργασία που καλούνται να επιτελέσουν και δημιουργούν από κοινού νέες μορφές κατανόησης, με αποτέλεσμα την παραγωγή της γνώσης[iv].

Ο χώρος εργασίας αποτελεί ένα περιβάλλον κοινωνικής πρακτικής και δραστηριοποίησης όπου τα μέλη συνεργάζονται και αναπτύσσουν μαθηματικές πρακτικές, επηρεασμένες από το εκάστοτε πολιτισμικό πλαίσιο. Μάλιστα, εθνογραφικές μελέτες που έγιναν με σκοπό να μελετηθούν τα μαθηματικά που χρησιμοποιούν οι ενήλικες και τα παιδιά στην καθημερινή ζωή έδειξαν ότι οι μαθηματικές μέθοδοι για την επίλυση προβλημάτων εκτός του σχολείου διαφέρουν ευρύτατα από αυτές που διδάσκονται σε αυτό[v].

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1. Μαθηματικά και χώρος εργασίας

Στο χώρο της έρευνας γίνεται προσπάθεια τα τελευταία χρόνια να ερευνηθούν και να περιγραφούν τα μαθηματικά που αξιοποιούνται σε διάφορα εργασιακά περιβάλλοντα, με στόχο να κατανοηθούν οι τρόποι με τους οποίους οι ενήλικες αντιλαμβάνονται και χρησιμοποιούν μαθηματικά που συνδέονται άρρηκτα με το πολιτισμικό πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσονται[vi].

Έρευνα για τα μαθηματικά που αξιοποιούνται στο χώρο εργασίας επικεντρώνεται στις πρακτικές των επαγγελματιών που τοποθετούν χαλιά και πλακάκια σε σπίτια και επιχειρήσεις (Masingila, 1994). Οι εργαζόμενοι εκτελούν μαθηματικές διαδικασίες, όπως ο υπολογισμός της περιμέτρου και η κατασκευή γωνιών, χρησιμοποιούν αναλογίες και σχολικούς αλγορίθμους. Μάλιστα διαπιστώθηκε ότι είναι σε θέση να προσαρμόσουν τις πρακτικές τους ανάλογα με τις απαιτήσεις των καταστάσεων που προκύπτουν, ωστόσο δεν μπορούν πάντα να επονομάσουν τις μαθηματικές ιδέες που εφαρμόζουν στη δουλειά τους.

Τεχνικοί του Οργανισμού Τηλεπικοινωνιών Ελλάδος επίσης χρησιμοποιούν μαθηματικά στο χώρο εργασίας τους (θεσιακό σύστημα αρίθμησης, μοτίβα, στρατηγικές επίλυσης για την επιδιόρθωση μιας βλάβης), αλλά δε φαίνεται να αναγνωρίζουν τις μαθηματικές διαστάσεις της δουλειάς τους (Τριανταφύλλου και Πόταρη, 2006). Οι εργαζόμενοι χαρακτηρίζονται από προσαρμοστικότητα επιλέγοντας την κατάλληλη προσέγγιση για την κάθε κατάσταση και αποδίδουν νόημα στις διαστάσεις της έννοιας που περιλαμβάνει κάθε τέτοια κατάσταση, όμως δεν καταφέρνουν να φτάσουν στη «γενικευμένη-τυπική» μαθηματικά έννοια. Έτσι

> «η έννοια ‘μαθηματικά’ αποκτά ένα διαφορετικό νόημα απ’ ότι η ‘απόλυτη’ άποψη για τα μαθηματικά που πολλές φορές οικοδομείται μέσα από την τυπική εκπαίδευση»*[vii]*.

Οι Pozzi, Noss και Hoyles (1998) μελετώντας τα μαθηματικά στο χώρο της νοσηλευτικής εντόπισαν τη χρήση αναλογιών κατά τη χορήγηση των φαρμάκων και τη μέτρηση και την καταγραφή δεδομένων κατά τον έλεγχο της ισορροπίας των υγρών των ασθενών. Ταυτόχρονα, παρατηρήθηκε η επιτυχής χρήση πολλών

ανεπίσημων στρατηγικών για διαφορετικά φάρμακα στη πτέρυγα που μελέτησαν. Στην εργασιακή κοινότητα των νοσηλευτών, όπως υποστηρίζουν οι ερευνητές, ο πίνακας δεδομένων των ασθενών για τον έλεγχο της ισορροπίας των υγρών αποτελεί πολιτισμικό προϊόν που χρησιμοποιείται συνέχεια και περιέχει «κρυμμένες» αριθμητικές δομές[viii].

Έρευνα σε αρτοποιούς (Λεμονίδης και Καραννίκης 2008) ανέδειξε την εκτεταμένη χρήση του αναλογικού συλλογισμού από τους επαγγελματίες. Σημαντική διαπίστωση των ερευνητών είναι ότι οι αρτοποιοί που βιώνουν αρνητικά συναισθήματα απέναντι στα μαθηματικά είναι επίσης αποτελεσματικοί και, μάλιστα, δε διαφέρουν στις στρατηγικές που αναπτύσσουν για την επίλυση αναλογικών προβλημάτων από αυτούς που είναι θετικοί απέναντι στα μαθηματικά.

Η χρήση των αναλογιών είναι απαραίτητη και στις καθημερινές δραστηριότητες γυναικών που εργάζονται ως οικιακές βοηθοί στη Βραζιλία κατά την αγορά υλικών και κατά την προετοιμασία του γεύματος (Schliemann και Magalhaes, 1990). Μάλιστα, οι μαγείρισσες που δεν έχουν λάβει σχολική εκπαίδευση εφαρμόζουν στη δουλειά τους μαθηματικές πρακτικές που σχετίζονται με αυτές που εφαρμόζουν στην καθημερινή τους ζωή. Αντίθετα, όταν ζητήθηκε από τις οικιακές βοηθούς να λύσουν προβλήματα αναλογιών παρόμοια με αυτά της δουλειάς τους σε άγνωστες για αυτές καταστάσεις δεν το έκαναν επιτυχώς. Επομένως, το αναλογικό μοντέλο επίλυσης που χρησιμοποιείται σε καθημερινά προβλήματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία κυρίως σε οικείες καταστάσεις.

Συμπληρωματικά, ο Εξαρχάκος (1993) ισχυρίζεται ότι όλοι οι εργαζόμενοι χρησιμοποιούν εκτεταμένα τα μαθηματικά για να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις της δουλειάς τους, όπως οι έμποροι, οι νοικοκυρές όταν προγραμματίζουν το φαγητό της ημέρας, οι αρχιτέκτονες, οι μουσικοί και οι μπακάληδες όταν ζυγίζουν ή κάνουν τις παραγγελίες τους. Ακόμη και στον τομέα της αεροπορικής βιομηχανίας, στον έλεγχο των κραδασμών, είναι απαραίτητη η αξιοποίηση μαθηματικών πρακτικών. Τα μαθηματικά, λοιπόν, χωρίς να είναι πάντοτε φανερά, αποτελούν σημαντική πτυχή της καθημερινότητας των ανθρώπων, οι οποίοι ανεξάρτητα από το φύλο ή την ηλικία τους καταφεύγουν στις πολύτιμες υπηρεσίες τους[ix].

2.2. Ρόλος της μαθητείας

Έρευνα σε κοινότητες ξυλουργών (Millroy, 1991) επιβεβαιώνει την υπόθεση ότι άτομα που δεν έχουν λάβει μαθηματική εκπαίδευση χρησιμοποιούν αποτελεσματικά τα μαθηματικά. Οι ξυλουργοί, παρ' ότι δεν μπορούν να τις επονομάσουν χρησιμοποιούν τυπικές μαθηματικές ιδέες και στρατηγικές, οι οποίες περιλαμβάνουν την έννοια της συμμετρίας, τις παράλληλες ευθείες, την αίσθηση του χώρου, τη χρήση της απόδειξης. Οι μαθηματικές κατανοήσεις τους αναπτύσσονται μέσα σε ένα πλαίσιο παρατήρησης, συνεργασίας και μαθητείας. Η Millroy μάλιστα τονίζει ότι στα πλαίσια της μαθητείας ο μαθητευόμενος έχει το περιθώριο να τολμάει και να

δοκιμάζει νέες πρακτικές, καθώς δεν υπάρχουν συγκεκριμένες απαντήσεις που να είναι αποδεκτές[x].

Στο χώρο εργασίας οι μαθητευόμενοι συνήθως συναντούν μαθηματικά για τα οποία έχουν ήδη σχηματίσει ατομικές κατανοήσεις. Μέσα από την εμπλοκή τους στη μαθηματική δραστηριότητα ίσως χρειαστεί να επανεξετάσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις, να δώσουν νόημα σε αυτές ανάλογα με την εφαρμογή που έχουν και, αν χρειαστεί, να οικοδομήσουν νέες κατανοήσεις[xi]. Συχνά επινοούν δικούς τους τρόπους και αναπτύσσουν άτυπες μαθηματικές πρακτικές με απώτερο σκοπό να επιλύσουν πραγματικά προβλήματα. Η παρούσα εργασία εστιάζει στην ανίχνευση των «εργασιακών» μαθηματικών που αξιοποιούνται στο επάγγελμα ενός ψαρά, που μυήθηκε στο επάγγελμα μέσω της μαθητείας.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η εργασία που παρουσιάζεται αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας που έχει στόχο να εξετάσει τις μαθηματικές πρακτικές που αξιοποιούνται σε διάφορα εργασιακά περιβάλλοντα και την επίδραση του εκάστοτε πλαισίου στην ανάπτυξή τους. Επιπλέον, επιδιώκει να μελετήσει τους τρόπους με τους οποίους αφενός γίνονται αντιληπτές αυτές οι ιδέες και στρατηγικές και αφετέρου συνδέονται με τη σχολική μαθηματική πραγματικότητα από τους εργαζόμενους.

Η παρούσα εργασία στόχο έχει να αναδείξει θέματα μαθηματικής φύσης που αναπτύσσονται στο επάγγελμα του ψαρά ως αποτέλεσμα των απαιτήσεων της εργασίας του. Πιο συγκεκριμένα, στοχεύει να εντοπίσει άτυπες μαθηματικές πρακτικές που αξιοποιούνται σε αυτό το χώρο εργασίας, οι οποίες συνδέονται με τον τρόπο μύησης του ψαρά στο επάγγελμα (μαθητεία). Επίσης, να διερευνηθεί ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνεται τις πρακτικές αυτές ο εργαζόμενος, πόσο χρήσιμα θεωρεί τα «εργασιακά» μαθηματικά και τα μαθηματικά της καθημερινής ζωής γενικότερα και τη σύνδεσή που κάνει με τα σχολικά μαθηματικά.

3.1. Συμμετέχοντες

Η ευρύτερη έρευνα καλύπτει ένα εύρος εργαζομένων με διακυμάνσεις στο μορφωτικό/εκπαιδευτικό επίπεδο και περιλαμβάνει: αρτοποιό, ψαρά, επιπλοποιό, μοδίστρα, τραπεζικό υπάλληλο, νοσηλεύτρια, πολιτικό μηχανικό, ζωγράφο. Τα δεδομένα που αναλύονται στην παρούσα εργασία προέρχονται από τον ψαρά, ηλικίας 27 χρονών. Σταμάτησε το σχολείο με το τέλος του Γυμνασίου και απουσίαζε συχνά από αυτό, επομένως δεν είχε ιδιαίτερη σχέση με τα σχολικά μαθηματικά. Μεγάλωσε σε παραθαλάσσια περιοχή της Θράκης, στο λιμάνι της οποίας μυήθηκε στο επάγγελμα μέσω της μαθητείας. Παρατηρούσε τον πατέρα του και συμμετείχε στις διαδικασίες από την εφηβεία ακόμη, ενώ τα τελευταία δύο χρόνια ασχολείται

επαγγελματικά και εξελίσσεται μέσω της επικοινωνίας και συνεργασίας με άλλους ψαράδες της περιοχής.

Οι μαθηματικές πρακτικές που αξιοποιεί ο ψαράς στη δουλειά του επομένως περισσότερο προέρχονται από το ευρύτερο κοινωνικο-πολιτισμικό του πλαίσιο παρά από το σχολείο. Αποτελεί επομένως ενδιαφέρουσα περίπτωση, που δίνει πληροφορίες για το πώς επιβιώνει ένας άνθρωπος στο χώρο εργασίας του και συχνά κατασκευάζει μαθηματική γνώση που δεν έχει σχέση με αυτή που προσφέρεται στο σχολείο.

3.2. Ερευνητικό εργαλείο – Δεδομένα

Για τη διεξαγωγή της έρευνας υιοθετήθηκε η ποιοτική προσέγγιση και η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε ήταν η μελέτη περίπτωσης, που ωστόσο περιορίστηκε στα δεδομένα που προήλθαν από τη συνέντευξη. Συγκεκριμένα η περίπτωση του ψαρά μπορεί να θεωρηθεί ως «στιγμιότυπο» μιας μελέτης περίπτωσης, που επιχειρείται μέσω της συλλογής και ανάλυσης των δεδομένων που προέρχονται από μια ημι-δομημένη συνέντευξη. Η συνέντευξη ήταν προσωπική, μαγνητοφωνήθηκε και στη συνέχεια απομαγνητοφωνήθηκε και διήρκεσε μία ώρα.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση των δεδομένων αναδείχθηκαν μαθηματικά θέματα στο χώρο εργασίας, τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια.

4.1. Διαμόρφωση και επίλυση προβλημάτων

Για να είναι αποδοτικός στη δουλειά του, ο ψαράς λαμβάνει υπόψη τους παράγοντες εποχή, ώρα, καιρός και άνεμος προτού ψαρέψει. Ψαρεύει άνοιξη και καλοκαίρι, ενώ σημασία έχει και ο μήνας, καθώς διαφέρουν τα είδη των ψαριών που είναι διαθέσιμα. Το πόσο καλή θα είναι μια ψαριά εξαρτάται από την ώρα- έτσι επιλέγει το πρωί και λίγο πριν βραδιάσει γιατί τότε η θάλασσα είναι πιο ήρεμη- και από τον καιρό, καθώς αν έχει νοτιά τα ψάρια βρίσκονται πιο βαθιά και ψαρεύει σε μεγαλύτερο βάθος.

Όταν έχει άνεμο κάνει βαρκαρόλα (είδος ψαρέματος για χταπόδια), δηλαδή η βάρκα δεν κινείται με βενζίνη και ο ψαράς την αφήνει χωρίς άγκυρα, να την ‘ξεσέρνει’ ο αέρας. Παρατηρεί την κατεύθυνση του αέρα και αφήνει τη βάρκα σε σημείο τέτοιο, ώστε ο αέρας να τον πάει εκεί που θέλει. Επίσης, ο αέρας και τα ρεύματα του νερού αποτελούν καθοριστικούς παράγοντες στα βαρίδια που χρησιμοποιεί, τα οποία βρίσκονται στην άκρη του σχοινιού και σέρνονται κάτω στο βυθό. Όταν έχει πολύ αέρα βάζει βαρύ βαρίδιο και μάλιστα ρίχνει στο νερό πλωτές άγκυρες για να κινείται πιο αργά η βάρκα.

Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι η επίλυση προβλήματος γίνεται ασυνείδητα από τον ψαρά, ο οποίος αναπτύσσει λογική σκέψη όταν υπάρχουν πολλοί παράγοντες που

πρέπει να λάβει υπόψη του. Ουσιαστικά δημιουργεί το πρόβλημα ανάλογα με τις καταστάσεις του επαγγέλματος, το διαμορφώνει σύμφωνα με τα δεδομένα που έχει στη διάθεση του και, εν τέλει, το επιλύει.

4.2. Αριθμητικές διαδικασίες

Οι αριθμητικές διαδικασίες αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι των καταστάσεων που περιλαμβάνουν καθορισμό τιμών και υπολογισμό του κέρδους κατά το εμπόριο των ψαριών. Σχετικά με τον τρόπο που σκέφτεται τους υπολογισμούς, κλήθηκε να εξηγήσει πώς θα βρει την τιμή αν κάποιος του ζητήσει 2,5 κιλά τσιπούρα.

Ψαράς: *Ε, θα κάνω… Έχει το 1 κιλό 25 ευρώ, θα κάνω 2,5×25. 25 και 25 κάνει 50…62,5.*

Ερευνητής: Αυτό πώς το υπολόγισες;

Ψαράς: *Ε, λέω 25 και 25 κάνει 50. Και το μισό του 25 είναι το 12,5. 50 και 12,5 κάνει 62,5.*

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο σκέφτηκε το 25×2,5. Παρ' ότι είχε στη διάθεση του χαρτί και μολύβι δε χρησιμοποίησε τον τυπικό αλγόριθμο αλλά έκανε τον πολλαπλασιασμό αναλύοντας στο μυαλό του το 2,5 σε 2+0,5. Ουσιαστικά χρησιμοποίησε την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, αφού η σκέψη του ακολουθείται από την εξής διαδικασία: 25×2,5= (25×2) + (25×0,5)

Επίσης, τον πολλαπλασιασμό 25×2 τον σκέφτεται σαν διαδοχική πρόσθεση 25+25, ενώ το 0,5 το μετατρέπει σε κλασματικό αριθμό ½ , αφού λέει το μισό του 25. Χειρίζεται λοιπόν τους αριθμούς με ευχέρεια, χωρίς να ακολουθεί τυπικές διαδικασίες, αλλά επινοεί τρόπους για να βρει το αποτέλεσμα που απαιτεί το εμπόριο της δουλειάς του με τον πιο σύντομο τρόπο.

4.3. Άτυπες μαθηματικές πρακτικές και μαθητεία

Ο προσανατολισμός του ψαρά στη θάλασσα και ο καθορισμός του σημείου που θα ψαρέψει ανέδειξε την ανάπτυξη του γεωμετρικού λογισμού. Το μέρος από το οποίο ξεκινάει κάθε φορά είναι σταθερό (ντόκος για βάρκες) και κατά το ψάρεμα κινείται πάντα σε παράκτια ακτίνα 20 χιλιομέτρων. Για να ξέρει ότι δε θα απομακρυνθεί από την ακτίνα αυτή, όσο βρίσκεται στα όρια της ακτίνας κοιτάει στη στεριά και βάζει σημάδια για να καταλαβαίνει προσεγγιστικά σε ποιο σημείο βρίσκεται. Πιο συγκεκριμένα, δημιουργεί δύο νοητές ευθείες κάθετες μεταξύ τους (μία ευθεία μπροστά και μία στα δεξιά του). Στην πορεία των ευθειών αυτών βάζει σημάδια, όπως κολώνες, δέντρα ή πετρώματα. Κοιτώντας την απόσταση και από τις δύο πλευρές και ξέροντας περίπου το βάθος στο οποίο βρίσκεται (από την εμπειρία του) γνωρίζει το σημείο που ψαρεύει. Για να καθορίσει δηλαδή το σημείο που βρίσκεται στη θάλασσα δημιουργεί ένα νοητό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, διαδικασία που έμαθε στα αρχικά ακόμη στάδια της μαθητείας του.

Όταν ρωτήθηκε με ποιον τρόπο υπολογίζει το βάθος, είπε ότι τον βοηθούν οι καταδύσεις και το μήκος του σχοινιού, ενώ στην πορεία της συζήτησης προέκυψε μία άτυπη μονάδα μέτρησης του βάθους, η οργιά.

Ερευνητής: Τα μέτρα, όμως, πώς τα καθορίζεις;

Ψαράς: Με το χέρι. Τραβώντας, ας πούμε, ένα άνοιγμα τελείως του ενός χεριού, το λέμε οργιά. Ένα άνοιγμα από το κέντρο του στήθους μέχρι την παλάμη.

Ερευνητής: Η οργιά πόσα μέτρα είναι;

Ψαράς: Ένα μέτρο και κάτι.

Η μονάδα αυτή δεν περιλαμβάνεται στην τυπική μαθηματική εκπαίδευση, αποτελεί κοινωνική κατασκευή και μαθαίνεται εμπειρικά μέσω της μαθητείας. Αρχικά είδε τον πατέρα του να υπολογίζει το βάθος με αυτό τον τρόπο, έπειτα συμμετείχε και αυτός, ώσπου κατέκτησε εξ' ολοκλήρου το «κόλπο» του επαγγέλματος.

Το παραγάδι είναι μία διαδικασία ψαρέματος που άρχισε να μαθαίνει πρόσφατα από τον πατέρα του συμβουλευόμενος και άλλους ψαράδες της περιοχής. Εξήγησε ότι είναι ένα σχοινί που έχει σημαδούρες με βαρίδια στα δύο άκρα του για να στέκεται στην επιφάνεια και να πηγαίνει στο βυθό αντίστοιχα. Στο σχοινί αυτό, που λέγεται μάνα, κρέμονται μικρότερα σχοινιά μήκους ενός μέτρου, τα παράμολα. Τα παράμολα τα τοποθετεί έτσι ώστε να έχουν απόσταση μεταξύ τους 3 οργιές (2,5-3 μέτρα) και είναι περίπου 350-400 στον αριθμό, εφαρμόζει δηλαδή διαδικασίες απαρίθμησης και σειροθέτησης. Στην ερώτηση πόσο επεκτείνεται το παραγάδι υπολόγισε επί τόπου 350 παράμολα επί 2,5 μέτρα η απόσταση μεταξύ τους και βρήκε ότι είναι περίπου ένα χιλιόμετρο. Ρίχνοντας το παραγάδι καθορίζει αυτός την κατεύθυνση που θα έχει και βάζει συγκεκριμένα σημάδια στην στεριά για να προσανατολίζεται και να ξέρει σε τι βάθος είναι. Σε αυτή τη διαδικασία ψαρέματος, επομένως, γίνεται συνδυαστική χρήση αριθμητικών και γεωμετρικών πρακτικών.

4.4. Κατανόηση των «εργασιακών» μαθηματικών και σύνδεση με τα σχολικά

Από τις πρακτικές που αναφέρονται πιο πάνω, ο ψαράς θεωρεί ως μαθηματικές μόνο εκείνες που αφορούν στο εμπόριο των ψαριών, δηλαδή τον υπολογισμό των τιμών και του κέρδους. Όταν ρωτήθηκε συγκεκριμένα για τον προσανατολισμό του στη θάλασσα και τον καθορισμό του σημείου είπε ότι δεν περιλαμβάνουν μαθηματικές διαδικασίες και δεν γνωρίζει τι είναι το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, παρ' ότι η νοητική απεικόνιση αυτού τον βοηθά να προσανατολίζεται. Ωστόσο σε αυτό το σημείο τόνισε ότι η διαδικασία που εκτελεί ίσως να σχετίζεται με τη γεωμετρία. Κάτι τέτοιο υποδηλώνει ότι έστω και διαισθητικά μπορεί να συνδέσει καταστάσεις της δουλειάς του με πτυχές των μαθηματικών.

Όσον αφορά τα σχολικά μαθηματικά θεωρεί ότι τον έχουν βοηθήσει μόνο στο εμπόριο των ψαριών, αντίθετα εξήγησε ότι η μαθητεία έπαιξε καταλυτικό ρόλο στο

να είναι δημιουργικός και αποδοτικός σε όλες τις διαδικασίες της δουλειάς του. Όπως τόνισε, στο σχολείο δεν ήταν ποτέ καλός στα μαθηματικά και κακή ανάμνηση αποτελεί γι' αυτόν η αποστήθιση τύπων και η εκμάθηση των συμβολισμών. Ένιωθε αδιαφορία για τα σχολικά προβλήματα και δυσανασχετούσε ιδιαίτερα όταν για την επίλυσή τους έπρεπε να κάνει χρήση τύπων. Συγκεκριμένα είπε:

> «όταν έβλεπα ότι σταματούσε το παραμυθάκι ότι ανακαλύπτω κάτι και ότι πρέπει να μάθω αυτόν τον τύπο χωρίς να υπάρχει κάποιος λόγος, χωρίς να μου το κάνει ο άλλος εικόνες, τότε άρχιζα να δυσανασχετώ με τους τύπους και τους συμβολισμούς…»

Στο τέλος της συνέντευξης τόνισε ότι μπορεί να χρησιμοποιεί συνεχώς μαθηματικά και να μη το γνωρίζει, προσθέτοντας ότι τα μαθηματικά έχουν εφαρμογή παντού και καθημερινά, στη ζωή και στην εργασία. Ρωτώντας τελικά τι είναι για εκείνον τα μαθηματικά απάντησε με ακρίβεια:

> *«Πιστεύω σε αυτά κατά κάποιον τρόπο. Είναι ένα είδος εργαλείου για τη ζωή. Τα πάντα είναι μαθηματικά. Δεν μπορώ να σκεφτώ κάτι που δεν είναι μαθηματικά».*

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της έρευνας καταδεικνύουν ότι ο εργαζόμενος διαχειρίζεται αποτελεσματικά μαθηματικές ιδέες και διαδικασίες που προκύπτουν στη δουλειά του, παρ' ότι η σχολική μαθηματική του γνώση είναι ελάχιστη. Μάλιστα επινοεί τρόπους επίλυσης για να ανταπεξέλθει σε καταστάσεις που προκύπτουν στη δουλειά του, καθώς αποδίδει νόημα σε αυτές. Σύμφωνα με τη διαπίστωση αυτή, είναι σημαντικό για τους μαθητές να εντοπίζουν την εφαρμογή των σχολικών μαθηματικών στην πραγματική ζωή, ώστε να γίνονται δημιουργικοί και να αναπτύσσουν ολοκληρωμένες κατανοήσεις για αυτά που μαθαίνουν.

Επίσης, η απουσία του αλγόριθμου στο έργο που δόθηκε (πόσο κοστίζουν 2,5 κιλά τσιπούρα) και ο τρόπος ανάλυσης της σκέψης του κατέδειξε ότι ο ψαράς δεν ακολουθεί τον συμβατικό τρόπο σκέψης που ακολουθείται στο σχολείο για την εκτέλεση απλών διαδικασιών. Το εύρημα αυτό συνδέεται με έρευνες των Nunes, Schliemann και Carraher (1993) που έδειξαν ότι η αριθμητική που εκτελείται σε περιβάλλοντα εκτός σχολείου και προκύπτει από τις απαιτήσεις της καθημερινότητας διαφέρει σημαντικά από τις σχολικές διαδικασίες που διδάσκονται.

Όσον αφορά τα «κρυμμένα» άτυπα μαθηματικά στο επάγγελμα του ψαρά, αυτά σίγουρα περιλαμβάνουν το γεωμετρικό λογισμό του ψαρά που εκφράζεται στη χωρική ικανότητα (αίσθηση του χώρου) κατά τον καθορισμό του σημείου στον οπτικό ορίζοντα. Επίσης, οι στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων που χρησιμοποιεί (π.χ. κατασκευή εξισώσεων στο εμπόριο) επινοούνται από τον ίδιο κατά τις εργασιακές του δραστηριότητες και χαρακτηρίζονται ως μαθηματικές. Έρευνα σε αγοραστές την ώρα που ψώνιζαν, έδειξε ακριβώς αυτό – ότι τα προβλήματα

μαθηματικής φύσης προκύπτουν μέσα από καθημερινές δραστηριότητες των ανθρώπων (Murtaugh,1985).

Είναι γεγονός ότι ο ψαράς χρησιμοποιεί μαθηματικά την ώρα που εργάζεται, χωρίς απαραίτητα να το αντιλαμβάνεται. Βασίζεται περισσότερο στην εργασιακή του εμπειρία παρά στα μαθηματικά που έμαθε στο σχολείο και σημαντικό του εργαλείο είναι οι γνώσεις που έχει αποκτήσει κατά τη μαθητεία του. Το πολιτισμικό πλαίσιο μέσα στο οποίο έμαθε να εργάζεται (παρατήρηση του πατέρα του και άλλων ψαράδων με σταδιακή εμπλοκή) συνέβαλε στην ανάπτυξη της μαθηματικής του σκέψης και στην αποτελεσματική αντιμετώπιση καταστάσεων που περιλαμβάνουν μαθηματικά.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, η μαθητεία στο χώρο εργασίας οδηγεί στην απόκτηση γνώσεων και συμβάλλει σημαντικά στην αποτελεσματικότητα του εργαζόμενου. Κατά τη μαθητεία δίνεται σημασία κυρίως στη διαδικασία και όχι στο αποτέλεσμα. Για το λόγο αυτό προτείνεται να λειτουργεί ως μοντέλο διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο, ώστε οι μαθητές να έχουν τα περιθώρια να γίνονται δημιουργικοί και κατ' επέκταση να αποδίδουν νόημα στις πρακτικές που ακολουθούν.

Προτείνεται ακόμη ο χώρος εργασίας να αποτελέσει πηγή μάθησης για τους μαθητές, δηλαδή τα «εργασιακά» μαθηματικά να συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση και αποδοχή των σχολικών μαθηματικών από τη μεριά των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, ο κάθε εκπαιδευτικός θα μπορούσε στα πλαίσια του μαθήματος να φέρει τους μαθητές σε επαφή με επαγγελματίες που εφαρμόζουν μαθηματικά στην εργασία τους, ώστε να κατανοήσουν τις μαθηματικές διεργασίες και να συμμετέχουν σε αυτές. Εξάλλου, η σχολική τάξη αλλά και οποιοδήποτε μαθησιακό περιβάλλον δεν μπορεί να αντιμετωπίζεται ως αποκομμένη από τις κοινότητες στις οποίες τοποθετείται[xii]. Αυτό που έχει ιδιαίτερη σημασία, λοιπόν, είναι η επανεξέταση της μαθηματικής εκπαίδευσης, ώστε τα σχολικά μαθηματικά να συνδέονται με άμεσες εφαρμογές και πραγματικές καταστάσεις της καθημερινότητας, να συνδέονται με το πολιτισμικό υπόβαθρο των μαθητών και οι μαθητές να εντοπίζουν τη χρησιμότητα τους στην καθημερινή ζωή.

---

[i] Schliemann, Araujo, Cassunde, Macedo & Niceas (1994:209)

[ii] Σταθοπούλου (2005:334)

[iii] Masingila (1994:458)

[iv] Σακονίδης (2008:303-304)

[v] Gainsbourg (2005:7)

[vi] Τριανταφύλλου, Πόταρη (2006:624)

[vii] Τριανταφύλλου, Πόταρη (2006:632)

[viii] Pozzi, Noss & Hoyles (1998:115)

[ix] Εξαρχάκος (1993:25)

[x] Σταθοπούλου (2005:343)

[xi] Martin, LaCroix & Fownes (2005:306)

[xii] Shehenaz (2004:49)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Gainsbourg, J. (2005). School mathematics in work and life: what we know and how we can learn more. *Technology in Society*, pp. 1-22.

Lave Jean, W. E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation* . Cambridge: Cambridge University Press.

Lester K.F., J. (1989). Mathematical problem solving in and out of school. *Arithmetic Teacher*, pp. 33-35.

Martin, L. F. (2005). Fractions in the workplace: folding back and the growth of mathematical understanding. *Learners and learning enviroments* (pp. 305-312). Melbourne: Psychology of Mathematics Education.

Masingila, J. O. (1994). Mathematics practice in carpet laying. *Anthropology & Education Quarterly*, pp. 430-462.

Millroy, W. L. (1991). An ethnographic study of the mathematical ideas of a group of carpenters. *Learning and Individual Differences*, pp. 1-25.

Murtaugh, M. (1985). The practice of arithmetic by American grocery shoppers. *Anthropology & Education Quarterly*, pp. 186-192.

Nunes, S. C. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* United States of America: Cambridje Univercity Press.

Pozzi, N. H. (1998). Tools in practice, mathematics in use. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 105-122.

Schliemann A., M. V. (1990). Proportional reasoning: from shopping to kitchens, laboratories, and, hopefully schools. *Fourteenth PME conference* (pp. 67-73). Mexico: Psychology of Mathematics Education.

Schliemann, A. C. (1994). School children versus street sellers' use of the commutative law for solving multiplication problems. *PME XVIII* (pp. 209-216). Lisbon: Psychology of Mathematics Education.

Shehenaz, A. (2004). Ethnomathematical ideas in the curriculum. *Mathematics Education Research Journal*, pp. 49-68.

Εξαρχάκος, Θ. Γ. (1993). *Διδακτική των μαθηματικών: Εκπαίδευση και Μαθηματικά, Ειδική Διδακτική των Μαθηματικών, Ειδικά θέματα Διδακτικής Μαθηματικών.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Λεμονίδης Χαράλαμπος, Κ. Φ. (2008). Η έννοια της αναλογίας στην εργασία και η σχέση της με τη σχολική εμπειρία: μελέτη περίπτωσης σε κύπριους αρτοποιούς από την επαρχία Λεμεσού. *5η Διεθνής Διημερίδα Διδακτικής Μαθηματικών* (pp. 109-119). Κρήτη: Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Σακονίδης, Χ. (2008). Κοινότητες πρακτικής στη μάθηση: Μια αλλαγή προοπτικής για τη μαθηματική εκπαίδευση. In Θ. Δραγώνα, *Πρόσθεση όχι αφαίρεση, πολλαπλασιασμός όχι διαίρεση: η μεταρρυθμιστική παρέμβαση στην εκπαίδευση της μειονότητας της Θράκης* (pp. 289-325). Αθήνα: Μεταίχμιο.

Σταθοπούλου, Χ. (2005). *Εθνομαθηματικά: διερευνώντας την πολιτισμική διάσταση των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης.* Αθήνα: Ατραπός.

Τριανταφύλλου Χρυσαυγή, Π. Δ. (2006). Μαθηματικά και χώρος εργασίας: μια ιδιόμορφη σχέση. *Τα μαθηματικά ως πολιτισμός στο σύγχρονο κόσμο, προεκτάσεις στην κριτική σκέψη, στην επιχειρηματολογία και στην αισθητική* (pp. 624-633). Πάτρα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρία.

ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: Η ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΟΣ ΚΑΙ ΦΟΙΤΗΤΩΝ

Πετροπούλου Γεωργία, Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, Πόταρη Δέσποινα

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

enaprosena@yahoo.gr, tzaharia@math.uoa.gr, dpotari@math.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή μελετάμε τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού στο πανεπιστήμιο και ειδικότερα την αλληλεπίδραση μεταξύ διδάσκοντος και φοιτητών σε πλαίσιο διάλεξης, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο ανάλυσης τη Διδακτική Τριάδα (Jaworski, 1994). Αναλύουμε τρία διδακτικά επεισόδια, χαρακτηριστικά του τρόπου αλληλεπίδρασης, στα οποία ο διδάσκων προσπαθεί να οδηγήσει τους φοιτητές στη διαμόρφωση μιας εικασίας. Στην προσπάθειά του αυτή, αξιοποιεί ιδέες των φοιτητών για να χτίσει σταδιακά την εικασία. Η μορφή αυτή αλληλεπίδρασης αναδεικνύει συγκεκριμένες σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία της Διδακτικής Τριάδας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία είναι μέρος μιας ευρύτερης μελέτης της διδασκαλίας των μαθηματικών σε Μαθηματικά Τμήματα, στο πρώτο έτος. Το πλαίσιο της μελέτης είναι η διδασκαλία των μαθηματικών σε μεγάλο αριθμό φοιτητών υπό τη μορφή διάλεξης, η οποία αποτελεί και την κύρια εκπαιδευτική δραστηριότητα σε πανεπιστημιακά μαθήματα και σύμφωνα με τους Speer, Smith & Horvath (2010), έχει ελάχιστα μελετηθεί. Για παράδειγμα, ο Weber (2004) εξετάζει τη φύση της διδασκαλίας υπό μορφή διάλεξης από γνωστική σκοπιά, ενώ ο Bergsten (2007), εξετάζει τις απόψεις των φοιτητών σχετικά με την ποιότητα μιας διάλεξης. Κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο στο πλαίσιο διάλεξης, η διδακτική πρακτική των διδασκόντων, δηλαδή οι σκέψεις, οι αποφάσεις και οι διδακτικές τους ενέργειες, μπορεί να διαφοροποιείται (Speer et al., 2010). Όπως προκύπτει και από τα δεδομένα της ευρύτερης μελέτης μας, η διδακτική πρακτική στο πλαίσιο μιας διάλεξης, μπορεί να περιλαμβάνει τη μορφή αλληλεπίδρασης διδάσκοντος και φοιτητών. Προφανώς, διαφορετικής φύσης αλληλεπιδράσεις συνιστούν διαφορετικές διδακτικές πρακτικές που με τη σειρά τους μπορούν να παράγουν διαφορετικά μαθησιακά αποτελέσματα. Στο βαθμό επομένως που είναι στο κέντρο του ενδιαφέροντος η μάθηση των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο και προκειμένου να αποκτήσουμε καλύτερη κατανόηση για τις διδακτικές πρακτικές που την υποστηρίζουν, χρειάζεται να διερευνηθεί η φύση της αλληλεπίδρασης μεταξύ διδάσκοντα και φοιτητών. Αυτό το θέμα έχει διερευνηθεί στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση (π.χ. Cobb, Yackel & Wood, 1992, Potari & Jaworski, 2002), καθώς και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, αλλά σε τάξεις με πολύ μικρό

αριθμό φοιτητών (2-3 άτομα) (π.χ. Nardi, Jaworski & Hegedus, 2005, Jaworski, 2002).

Στην εργασία αυτή επιχειρούμε να διερευνήσουμε την αλληλεπίδραση μεταξύ διδάσκοντος και φοιτητών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση στο πλαίσιο της διδασκαλίας υπό μορφή διάλεξης, με εργαλείο ανάλυσης τη Διδακτική Τριάδα (ΔΤ). Η ΔΤ έχει χρησιμοποιηθεί επίσης από την Jaworski (2002), για να διερευνήσει τη διδασκαλία των μαθηματικών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, στο πλαίσιο φροντιστηριακών ασκήσεων σε μικρές ομάδες φοιτητών (tutorials). Μια αρχική χρήση της ΔΤ ως εργαλείο ανάλυσης των αλληλεπιδράσεων στο πλαίσιο των πανεπιστημιακών διαλέξεων σε μεγάλα ακροατήρια, επιχειρήθηκε αρχικά στην εργασία Petropoulou, Jaworski, Potari & Zachariades (2013). Στην παρούσα εργασία, μελετάμε τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού σε άλλο Μαθηματικό Τμήμα, όπου ο προσανατολισμός είναι περισσότερο θεωρητικός και η έμφαση δίνεται στις έννοιες και τις αποδείξεις των θεωρημάτων. Ο διδάσκων του οποίου διδασκαλίες μελετάμε, πολύ συχνά αλληλεπιδρώντας με τους φοιτητές προσπαθεί να τους οδηγήσει στη διατύπωση μαθηματικών εικασιών. Στόχος της εργασίας είναι να διερευνηθεί η διδακτική αυτή πρακτική του διδάσκοντος, βασικό χαρακτηριστικό της οποίας αποτελεί η αλληλεπίδραση με τους φοιτητές του.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Η Διδακτική Τριάδα

Η ΔΤ είναι ένα πλαίσιο ανάλυσης, που προήλθε από μια εθνογραφική μελέτη της διδασκαλίας των μαθηματικών σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Jaworski, 1994). Ο κύριος στόχος ανάπτυξης της ΔΤ ήταν ο εντοπισμός των ουσιαστικών στοιχείων της διδασκαλίας των μαθηματικών μέσα από την ανάλυση των αλληλεπιδράσεων στην τάξη. Η ΔΤ περιέχει τρεις διαστάσεις της διδασκαλίας των μαθηματικών: Τη διαχείριση της μάθησης (ΔΜ), την ευαισθησία προς τους μαθητές (ΕΜ), και τη μαθηματική πρόκληση (ΜΠ). Η ΔΜ αφορά στους τρόπους με τους οποίους ο διδάσκων οργανώνει το μαθησιακό περιβάλλον (π.χ. ομαδοσυνεργατικά, σχεδιάζοντας έργα, θέτοντας νόρμες) και μέσω αυτών καθιερώνει αξίες και προσδοκίες στην τάξη. Η ΕΜ αφορά στη γνώση που έχει ο διδάσκων για τους μαθητές, για τα ιδιαίτερα γνωστικά και συναισθηματικά τους χαρακτηριστικά, καθώς και στο πως αξιοποιεί αυτή τη γνώση στη διδασκαλία του. Η ευαισθησία προς τους μαθητές διακρίνεται σε συναισθηματική (ΣΕ) και σε γνωστική (ΓΕ). Η συναισθηματική ευαισθησία αφορά στην προσπάθεια του διδάσκοντος να καλλιεργήσει θετικά συναισθήματα των μαθητών για τα μαθηματικά, σχετίζεται δε "με την ανάπτυξη μιας «ζώνης άνεσης» μέσα στην τάξη των μαθηματικών, με την αυτοπεποίθηση και την ευεξία που νιώθει ο μαθητής των μαθηματικών" (Jaworski, 1994). Η γνωστική ευαισθησία σχετίζεται με το κατά πόσο το γνωστικό αντικείμενο που είναι κάθε φορά υπό διαπραγμάτευση, προσεγγίζεται με αφετηρία το επίπεδο

της μαθηματικής σκέψης των φοιτητών. Η ευαισθησία ενός διδάσκοντα προς τους μαθητές, ή τους φοιτητές στο πλαίσιο της διδασκαλίας στο πανεπιστήμιο, έχει ως αποτέλεσμα μια διδακτική προσέγγιση κατά την οποία ο διδάσκων δουλεύει μαζί με τους φοιτητές, με τρόπο συνεπή προς τις γνωστικές και συναισθηματικές τους ανάγκες, με την έννοια που αναφέραμε παραπάνω, και επιδρά τόσο στις σχέσεις που αναπτύσσονται μέσα στην τάξη, όσο και στο ήθος που διαμορφώνεται. Τέλος, η ΜΠ εγείρει την εμπλοκή των φοιτητών σε μαθηματική διερεύνηση και επηρεάζει τόσο το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων, όσο και τον τρόπο παρουσίασής τους. Οι τρεις αυτές συνιστώσες είναι στενά αλληλοσυνδεόμενες και αλληλοεξαρτώμενες σύμφωνα με ερευνητικά αποτελέσματα των Potari & Jaworski (2002).

Η θεώρηση της διδασκαλίας των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο

Οι έρευνες της Διδακτικής των μαθηματικών σε αυτό το επίπεδο, αναφέρονται κυρίως στις γνωστικές διαδικασίες και δυσκολίες των φοιτητών σε ανώτερες μαθηματικές έννοιες (π.χ. Artigue, Batanero and Kent, 2007). Ένας μικρός αριθμός ερευνών μελετούν τη διδασκαλία των μαθηματικών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και την ανάπτυξή της μέσα από πειραματικές διδακτικές παρεμβάσεις (π.χ. Nardi et al., 2005, Jaworski 2002). Παρόλα αυτά, σύμφωνα με τους Speer et al. (2010), η διδασκαλία των μαθηματικών σε επίπεδο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, παραμένει ουσιαστικά μια πρακτική που δεν έχει διερευνηθεί. Σύμφωνα με τους Nardi et al. (2005) και Jaworski (2002), φαίνεται να υπάρχει μια σιωπηρή παραδοχή ότι ο συνηθισμένος ρόλος του διδάσκοντος σε αυτό το επίπεδο είναι να μεταφέρει πληροφορίες. Στην πραγματικότητα όμως, η διδασκαλία των μαθηματικών είναι ένα πολύπλοκο φαινόμενο και η ανάλυση των αλληλεπιδράσεων που συμβαίνουν μέσα στην τάξη αποτελεί το μέσο κατανόησης της πολυπλοκότητας (Cobb, Yackel & Wood, 1992, Potari & Jaworski, 2002). Επιπλέον, επειδή κάθε μαθηματική δραστηριότητα πραγματοποιείται μέσα σε ένα ευρύτερο πλαίσιο που με τη δική του κοινωνική/συστημική κουλτούρα επηρεάζει το διδακτικό γίγνεσθαι, μία μελέτη της διδασκαλίας των μαθηματικών χρειάζεται να λαμβάνει υπόψη της και αυτή τη διάσταση (Valero, 2009; Jaworski & Potari, 2009).

Στη μελέτη που κάνουμε, βλέπουμε τη διδασκαλία στο πανεπιστήμιο ως ένα πολύπλοκο πλέγμα κοινωνικών αλληλεπιδράσεων, δηλαδή ως κοινωνική πρακτική. Με αυτή την οπτική, μελετάμε τη διδακτική πρακτική ενός διδάσκοντος εστιάζοντας στην αλληλεπίδραση με τους φοιτητές του, σε μια πανεπιστημιακή διάλεξη μαθηματικών. Ζητάμε να εντοπίσουμε τον τρόπο με τον οποίο ο διδάσκων λαμβάνει υπόψη του τους φοιτητές κατά τη διδασκαλία, καθώς και το σκεπτικό αυτής της διδακτικής πρακτικής του. Η ΔΤ, ως εργαλείο ανάλυσης, μας επιτρέπει μια βαθύτερη πρόσβαση στην πολυπλοκότητα της διδασκαλίας στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, εστιάζοντας στην αλληλεπίδραση διδάσκοντος και φοιτητών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Τα ερευνητικά δεδομένα που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία προέρχονται από τρεις πηγές. Πρώτον, παρατηρήθηκαν 5 δίωρες διαλέξεις του διδάσκοντος, σε ένα ακροατήριο 80-100 περίπου φοιτητών, κατά τη διάρκεια δύο ακαδημαϊκών ετών (2012-13). Κατά τις παρατηρήσεις αυτές τηρήθηκαν σημειώσεις πεδίου. Δεύτερον, αμέσως μετά από κάθε διάλεξη ακολούθησε συνέντευξη με τον διδάσκοντα διάρκειας 1,5 ώρας. Τρίτον, πραγματοποιήθηκαν 5 δίωρες ομαδικές συζητήσεις μεταξύ διδασκόντων του Απειροστικού Λογισμού που συμμετείχαν στην ευρύτερη έρευνα και των συγγραφέων, στις 4 από τις οποίες συμμετείχε και ο διδάσκων. Όλες οι διαλέξεις, οι συνεντεύξεις και συζητήσεις ηχογραφήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν.

Η ανάλυση των δεδομένων βασίστηκε στη θεμελιωμένη θεωρία των Strauss and Corbin (1998). Σε πρώτη φάση η ανάλυση εντόπισε διδακτικές συμπεριφορές που επαναλαμβάνονται, διαμορφώνοντας το διδακτικό προφίλ του διδάσκοντα. Σε δεύτερη φάση, κάθε μία από τις διαλέξεις χωρίστηκε σε επεισόδια με κριτήριο την επίτευξη κάποιου συγκεκριμένου διδακτικού στόχου, που είτε ο διδάσκων έκανε σαφή στο μάθημα ή στη συνέντευξη αμέσως μετά από αυτό, είτε προέκυψε από την πρώτη φάση ανάλυσης. Κάθε επεισόδιο αναλύθηκε με στόχο την ανάδειξη χαρακτηριστικών της διδασκαλίας, ενώ στη συνέχεια, με εργαλείο τη ΔΤ, αναλύθηκαν οι διάλογοι μεταξύ διδάσκοντος και φοιτητών οπότε εντοπίστηκαν σχέσεις μεταξύ των στοιχείων της ΔΤ και έτσι προσδιορίστηκαν βαθύτερα τα χαρακτηριστικά της διδασκαλίας. Μέσα από την ανάλυση των συνεντεύξεων και των συζητήσεων διερευνήθηκε το σκεπτικό της διδασκαλίας και έτσι μελετήθηκε η διδακτική πρακτική. Σε αυτή την εργασία, αναλύουμε τρία διδακτικά επεισόδια, αντιπροσωπευτικά του τρόπου με τον οποίο ο διδάσκων αλληλεπιδρά με τους φοιτητές.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι η τυπική διδακτική πρακτική του συγκεκριμένου διδάσκοντος, χαρακτηρίζεται από την προσπάθεια για εμπλοκή των φοιτητών σε μαθηματικό διάλογο. Δύο βασικές διδακτικές στρατηγικές φαίνονται να επαναλαμβάνονται σε όλες τις διαλέξεις του διδάσκοντα. Πρώτον, η προσπάθεια να οδηγήσει τους φοιτητές στη διατύπωση εικασιών και δεύτερον, η χρήση παραδειγμάτων πάνω στα οποία χτίζει τις λεπτές πτυχές του μαθηματικού αντικειμένου που διαπραγματεύεται. Η πορεία προς την εικασία αποτελεί και την τυπική μορφή αλληλεπίδρασης μεταξύ του ίδιου και των φοιτητών, όπως προκύπτει από τα δεδομένα, στηρίζεται δε στη χρήση παραδειγμάτων. Εμβαθύνουμε σε αυτή την τυπική μορφή αλληλεπίδρασης, αναλύοντας τρία χαρακτηριστικά διδακτικά επεισόδια.

Η αλληλεπίδραση στο πλαίσιο της διάλεξης

Ένα σημαντικό θεώρημα σχετικά με τις συνεχείς συναρτήσεις αφορά στη συνέχεια της αντίστροφης συνεχούς συνάρτησης. Για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος χρειάζεται να αποδειχθεί πρώτα η βασική πρόταση: «μία συνεχής και 1-1 συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα, είναι γνησίως μονότονη». Οι φοιτητές, γνωρίζουν από το σχολείο ότι μία γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι 1-1.

Αρχικά, ο διδάσκων (Δ) υπενθύμισε στους φοιτητές τους ορισμούς της 1-1 και γνησίως μονότονης συνάρτησης αλγεβρικά και γεωμετρικά. Στη συνέχεια, ζήτησε από τους φοιτητές να φέρουν παράδειγμα 1-1 συνάρτησης και τους οδήγησε να παρατηρήσουν ότι η ταυτοτική συνάρτηση που έφεραν ως παράδειγμα, είναι γνησίως αύξουσα. Στη συνέχεια ακολούθησαν τα παρακάτω διδακτικά επεισόδια, που αφορούν στην προσπάθεια του διδάσκοντος να οδηγήσει τους μαθητές στην εικασία της βασικής πρότασης (οι υπογραμμίσεις αντιστοιχούν σε ιδιαίτερο τόνο φωνής στη μαγνητοφώνηση).

Επεισόδιο 1: Αναζήτηση αντιπαραδείγματος

Δ: Ξέρετε εσείς καμία που να είναι 1-1 και να μην είναι αύξουσα ή φθίνουσα;

Φ1: Όχι.

Φ2: Η 1/χ.

Δ: Φθίνουσα. Γνησίως.

Φ1: Αν την ορίσουμε στο R* και όχι στο (0, +∞);

Φ2: Γνησίως μονότονη ή σκέτο μονότονη;

Δ: Αυτή όμως έχει διαστήματα μονοτονίας. Λοιπόν. Είναι γνησίως φθίνουσα στο ένα, γνησίως φθίνουσα στο άλλο, αλλά όχι σε όλο μαζί. Άρα ξέρετε 1-1 οι οποίες δεν είναι σε όλο μαζί φθίνουσες. Πολύ ωραία. Τώρα τι ισχύει: Ότι αν f γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα, το γράφω ή αλλά είναι αποκλειστικό αυτό, τότε είναι ένα προς ένα. Και το ερώτημά μας είναι τι γίνεται για το ανάποδο. Δηλαδή αν μία 1-1 είναι ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Εσείς είπατε ότι όχι και τελειώσατε. Εντάξει; Άρα έχουμε πρόβλημα στο αντίστροφο. [Σχεδιάζει την f(x)=1/x στον πίνακα]

Αναλύοντας το παραπάνω επεισόδιο με τη βοήθεια της ΔΤ, διαπιστώνουμε τα εξής: Ο Δ ζήτησε από τους φοιτητές παράδειγμα συνάρτησης 1-1 και όχι γνησίως μονότονης (ΜΠ) και, διαπραγματευόμενος το πεδίο ορισμού της συνάρτησης 1/χ που συνεισέφεραν (ΓΕ), επικύρωσε το παράδειγμα (ΣΕ) και συνόψισε σχετική γνωστή πρόταση (μία συνάρτηση γνησίως μονότονη είναι 1-1 - ΓΕ). Με βάση το παράδειγμα των φοιτητών, ανέδειξε τέλος, τη μη ισχύ της αντίστροφης πρότασης (δηλαδή ότι μία 1-1 συνάρτηση δεν είναι και γνησίως μονότονη - ΔΜ).

Επεισόδιο 2: Διερεύνηση των συνθηκών για την ισχύ μιας πρότασης

Δ: Αρχίζουμε λοιπόν να βλέπουμε αν αυτή είναι 1-1, εμάς μας απασχολεί η συνάρτηση να είναι γνησίως μονότονη. Να βρούμε δηλαδή συνθήκες που όταν αυτή είναι 1-1, τότε να είναι γνήσια αύξουσα ή φθίνουσα. Το πρόβλημα ποιο ήτανε στην 1/χ; Ήταν συνεχής παντού βέβαια. Τι ήτανε;

Φ2: Δεν είναι συνεχής στο διάστημα όλο.

Δ: Όχι παντού ήτανε.

Φ2: Αν είναι 1-1 και συνεχής τότε μπορούμε να πούμε ότι είναι γνήσια μονότονη.

Δ: Η 1/χ δεν ήταν.

Φ3: Η 1/χ δεν ορίζεται σε διάστημα.

Δ: Αυτό που είπε ο συνάδελφός σας. Λοιπόν αρχίζουμε: Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή αν μία συνάρτηση είναι 1-1 δε σημαίνει ότι είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Παραδείγματος χάρη: πρώτον είπατε εσείς f(x)=1/x στο (-∞, 0) ένωση (0, +∞). Αυτή είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της δηλαδή στο R εκτός του 0. Είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού. Σε όλο. Άρα το πρόβλημα που ήταν; Στο πεδίο ορισμού. Τι δεν ήταν το πεδίο ορισμού;

Φ2, Φ4: Ένα διάστημα.

Δ: Άρα αν αυτή είναι συνεχής και αυτό το πράγμα δεν είναι διάστημα, αυτή δεν είναι γνησίως αύξουσα, δεν είναι γνησίως φθίνουσα. Πολύ ωραία.

Στο επεισόδιο 2, ο Δ προσκάλεσε τους φοιτητές να διερευνήσουν τις συνθήκες που απαιτούνται για την ισχύ της αντίστροφης πρότασης (ΜΠ), προκαλώντας τους να αναστοχαστούν πάνω σε χαρακτηριστικά του παραδείγματος της 1/χ που είχαν συνεισφέρει (ΓΕ). Αξιολογώντας τις απαντήσεις των φοιτητών (ΔΜ) και χρησιμοποιώντας το δικό τους παράδειγμα για να απορρίψει μη έγκυρους ισχυρισμούς (ΔΜ και ΓΕ), οδήγησε τους φοιτητές να διατυπώσουν εικασία για την ισχύ της βασικής πρότασης στην οποία ήθελε να καταλήξει (μία 1-1 συνάρτηση που είναι συνεχής σε διάστημα είναι γνησίως μονότονη - ΓΕ). Ενίσχυσε την απάντηση φοιτητή (ΣΕ), συνόψισε τα αποτελέσματα της διερεύνησης (ΓΕ και πιθανόν ΣΕ προς τους φοιτητές που δε συμμετείχαν στο διάλογο) και καθησύχασε τους φοιτητές ότι αυτά που έχουν συνεισφέρει είναι αποδεκτά (ΣΕ).

Επεισόδιο 3: Διατύπωση της εικασίας

Δ: Όμως εμείς θέλουμε να δούμε πότε είναι αύξουσα, πότε είναι φθίνουσα. Το αντίστροφο δηλαδή. Τώρα θέλουμε μία η οποία να ορίζεται σε διάστημα, και τι θα βγάλω; Εδώ [δείχνει την f(x)=1/x στον πίνακα] πήρα ότι είναι 1-1, το βλέπω ότι είναι 1-1. Είναι συνεχής, αλλά όχι σε διάστημα. Για να βρω τις συνθήκες κάτω από τις οποίες κάτι να ισχύει, ένα θεώρημα, πρέπει να δω βγάζοντας μερικά, εάν ανατρέπεται το θεώρημα. Ωραία. Αν αυτή είναι συνεχής και το πεδίο ορισμού της δεν είναι διάστημα, τότε τελειώσαμε. Θέλω τώρα λοιπόν μία g(x) που το πεδίο ορισμού της να είναι διάστημα, αλλά η g να είναι ασυνεχής. Ούτως ώστε να δω αν θα πάρω και τα δύο. Θέλω μία συνάρτηση να

ορίζεται σε διάστημα, να είναι ασυνεχής, να είναι 1-1 και να μην είναι ούτε γνησίως φθίνουσα, ούτε γνησίως αύξουσα. Μήπως να πάρω το θεώρημα;

Φ2: Το θεώρημα.

Δ: Εντάξει; Βγάζοντας το διάστημα χαλάει, θέλω να βρω ικανές συνθήκες έτσι ώστε αν αυτή είναι 1-1 τότε να είναι ή γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα. Αυτό είναι το πρόβλημά μου.

Φ4: Θα πάρω μία g(x) που στο 0 θα κάνει 0 και στο [-1, 0) ή στο (0, 1] να είναι η 1-χ.

Δ: Πήρες το 0 εδώ (στον 1ο τύπο); Θέλω να είναι 1-1. Αυτή τη συνάρτηση: [γράφει τη συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}-1, x=0\\1-x, x\in(0,1]\end{cases}$ και τη σχεδιάζει στον πίνακα]

Εδώ είναι φθίνουσα (στο (0, 1]) αλλά δεν είναι φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της. Το Ι είναι το [0,1] το οποίο είναι διάστημα, η g είναι 1-1, και τι συμβαίνει με αυτήν; Ούτε αύξουσα, ούτε φθίνουσα είναι. Τι χάλασε εδώ; Για πες μου τι χάλασε;

Φ1: Η συνέχεια.

Δ: Η συνέχεια. Οπότε καταλαβαίνετε από εδώ μπορείτε να φτιάξετε όσες θέλετε. Θα μπορούσα να το προεκτείνω ας πούμε και να τη φτιάξω αύξουσα κ.λ.π. [δείχνει το σχήμα]. Άρα για να αναζητήσω κάποια σχέση, ανάποδη σχέση, δηλαδή αν η f είναι 1-1 και να μας βγαίνει γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της πρέπει καταρχάς να βάλω ποιες υποθέσεις; Η συνάρτηση εκτός του ότι πρέπει να είναι 1-1 πρέπει να είναι και συνεχής και να ορίζεται σε διάστημα. Αυτό είναι το θεώρημα. Δηλαδή το αντίστροφο δεν ισχύει. Όμως με υποθέσεις τη συνέχεια και το διάστημα ισχύει.

Στο επεισόδιο 3, ο Δ επέκτεινε τη διερεύνηση με κατάλληλο ερώτημα σχετικά με την αναγκαιότητα των συνθηκών στην εικασία που είχαν καταλήξει (ΜΠ). Συνοψίζοντας και πάλι τα αποτελέσματα της προηγούμενης διερεύνησης, κάλεσε τους φοιτητές να κατασκευάσουν ένα δικό τους παράδειγμα συνάρτησης που δεν πληροί όλες τις συνθήκες (που δεν είναι συνεχής – ΜΠ). Ο Φ4 έφερε ένα τέτοιο παράδειγμα, ο Δ το τροποποίησε (ΔΜ), το σχεδίασε γεωμετρικά (ΓΕ) και προκάλεσε τους μαθητές να σκεφτούν πάνω στο σχήμα ώστε να μπορούν να κατασκευάζουν και άλλα τέτοια παραδείγματα (ΜΠ). Στη συνέχεια συνόψισε τα αποτελέσματα της τελευταίας διερεύνησης (ΓΕ και πιθανόν ΣΕ προς τους φοιτητές που δε συμμετείχαν).

Από την ανάλυση των παραπάνω διδακτικών επεισοδίων αναδεικνύεται μια εναλλαγή στοιχείων της ΔΤ που χαρακτηρίζει και τις υπόλοιπες διδασκαλίες του συγκεκριμένου διδάσκοντος. Σε καθένα από τα τρία επεισόδια, ο Δ, αξιοποιεί παραδείγματα που φέρνουν οι φοιτητές θέτοντας με βάση αυτά τα παραδείγματα, σημαντικά και μαθηματικά προκλητικά ερωτήματα, που διαπραγματεύεται με γνωστική κυρίως ευαισθησία. Ανταποκρινόμενος στο επίπεδο συλλογισμού που

βρίσκονται οι φοιτητές που συνεισφέρουν στο διάλογο, χτίζει πάνω στα δικά τους παραδείγματα, χρησιμοποιεί γραφικές αναπαραστάσεις για να υποστηρίξει τη διερεύνηση και συνοψίζει τα αποτελέσματά της. Φαίνεται η πραγματοποίηση ουσιαστικής ΜΠ να συνδέεται με τη ΓΕ και εντοπίζεται στην πρακτική του Δ πιθανόν, μία προσπάθεια ισορροπίας της ΜΠ και της ΓΕ. Η ΜΠ των ερωτημάτων που απευθύνει στους φοιτητές εναλλάσσεται με τη ΓΕ να χτίζει τις λεπτές πτυχές της υπό διαπραγμάτευση έννοιας πάνω στα δικά τους παραδείγματα. Ενώ η μαθηματική πρόκληση και η γνωστική ευαισθησία είναι κυρίαρχες στις διδασκαλίες του Δ, η συναισθηματική ευαισθησία προς τους φοιτητές εντοπίζεται κυρίως σε δηλώσεις που ενισχύουν αυτά που λέει κάποιος φοιτητής επαναλαμβάνοντας τα ίδια ή καθησυχάζουν τους φοιτητές ότι αυτά που συνεισφέρουν είναι αποδεκτά.

Το σκεπτικό των διδακτικών επιλογών του διδάσκοντα

Η βασική διδακτική στρατηγική που είναι η πορεία προς την εικασία, φαίνεται να είναι συνειδητή επιλογή του Δ.

> «[Διδάσκω] σε μορφή διάλεξης ναι, αλλά με μαιευτικό τρόπο. Μαιευτικός είναι. Του Σωκράτη. … [Θεωρώ ότι] το να βγάλεις την εκφώνηση του θεωρήματος βάση της λογικής, προτού το αποδείξεις αναλυτικά, είναι πρωταρχικό στη διδασκαλία.» (από συνέντευξη μετά το μάθημα)

Επιλέγει να διδάσκει με «μαιευτικό τρόπο» για να προσομοιάσει την πορεία ανακάλυψης ενός θεωρήματος:

> «Πηγαίνω πίσω σε αυτόν που ανακάλυψε το θεώρημα. Πρώτα το ανακάλυψε και μετά το απέδειξε. Πώς το σκέφτηκε;» (από συνέντευξη μετά το μάθημα)

Επίσης, προσπαθεί συνειδητά να πετύχει κατά τη διδασκαλία του τη μύηση των φοιτητών στην προχωρημένη μαθηματική σκέψη, με αφετηρία τη μαθηματική σκέψη που αυτοί ήδη έχουν:

> «Προσπαθώ να γεφυρώσω το τεράστιο χάσμα ανάμεσα στην απειρία των φοιτητών και στα βαθιά μαθηματικά. Πρέπει να συνδέσεις τη μαθηματική σκέψη τους, όποια είναι αυτή, από το σχολείο, παίρνοντας από εκεί στοιχεία που μπορείς να χρησιμοποιήσεις, για να τα χρησιμοποιήσεις παραπέρα.» (από συνέντευξη μετά το μάθημα)

Οι διδακτικές αυτές επιλογές του έχουν ως αφετηρία κυρίως την ερευνητική του εμπειρία στα μαθηματικά:

> «Οι επιλογές μας είναι ουσιαστικά από την πείρα. Από τη διδασκαλία. Και μέσα από την έρευνα. Η πείρα προέρχεται και μέσα από την έρευνα. Και όπως εκεί στο ψάξιμο, ψάχνεις από εδώ, ψάχνεις από εκεί και το λες με το δικό σου τρόπο στο τέλος, σου βγαίνει και αυτό στο μάθημα.» (από ομαδική συζήτηση)

Σε μια ευρύτερη θεώρηση της διδασκαλίας του κατά τη διάρκεια μιας συνέντευξης, μιλά ακόμα για την ανάγκη μύησης των φοιτητών στη μαθηματική κουλτούρα του Μαθηματικού Τμήματος που φοιτούν:

« [Τ]ώρα πρέπει να τοποθετηθούμε. Γιατί το Τμήμα αυτό εδώ είναι ιδιαίτερα… στηρίζεται πάνω σ' αυτό. Η δομή του, το προσωπικό του, η παράδοσή του, όλα του, στηρίζεται πάνω στη σκέψη αυτή των μαθηματικών. Δηλαδή της αφαιρετικής ουσιαστικά θεώρησης των πραγμάτων, επανασύνδεση και επίσης το ένα έπεται του άλλου. Αυτό το πράγμα.» (από συνέντευξη μετά το μάθημα)

Η συμμετοχή των φοιτητών στην όλη διαδικασία εγείρει και τον σχετικό προβληματισμό:

«Γύρω στα 10 συγκεκριμένα άτομα συμμετέχουν. Σπάνια, πολύ σπάνια, να σηκώσει κάποιος άλλος το χέρι του, που αμέσως του δίνω εκείνου τον λόγο.» (από ομαδική συζήτηση)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην εργασία αυτή μελετήσαμε τη διδακτική πρακτική ενός διδάσκοντα στο πανεπιστήμιο, η οποία χαρακτηρίζεται από την αλληλεπίδραση με τους φοιτητές κατά τη διάρκεια των διαλέξεων. Βασικές διδακτικές στρατηγικές του διδάσκοντα και τυπικές μορφές αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτού και των φοιτητών, αποτελούν η πορεία προς τη μαθηματική εικασία και η διαπραγμάτευση παραδειγμάτων. Η υλοποίηση αυτών των διδακτικών στρατηγικών γίνεται μέσα από την εναλλαγή μαθηματικά προκλητικών ερωτημάτων και την αξιοποίηση των παραδειγμάτων που συνεισφέρουν οι λίγοι φοιτητές που συμμετέχουν στο διάλογο. Η εναλλαγή αυτή είναι πιθανόν ένδειξη προσπάθειας του διδάσκοντος για την επίτευξη ισορροπίας μεταξύ ΜΠ και ΓΕ. Η μαθηματική πρόκληση φαίνεται πάντως να είναι κυρίαρχη, ενώ η ευαισθησία προς τους φοιτητές εκφράζεται κυρίως στη γνωστική της διάσταση. Οι καταβολές των διδακτικών αυτών στρατηγικών ανιχνεύονται στη συμμετοχή του διδάσκοντος στην πρακτική της έρευνας στα μαθηματικά και στη συμμετοχή του στο συγκεκριμένο Μαθηματικό Τμήμα, καθώς προσπαθεί να μυήσει τους φοιτητές στην πορεία ανακάλυψης ενός θεωρήματος και στην κουλτούρα του Τμήματος στο οποίο φοιτούν.

Στο μαθηματικό διάλογο που αναπτύσσεται με τους φοιτητές που συμμετέχουν στην όλη διαδικασία των ερωτημάτων και παραδειγμάτων, διαμορφώνεται μια μαθηματικά προκλητική κατάσταση για αυτούς, προκύπτει όμως και το ερώτημα, αν αυτή η πρόκληση έχει νόημα για όλους τους υπόλοιπους. Επεκτείνοντας τον προβληματισμό και προσπαθώντας να επαναπροσδιορίσουμε το νόημα των στοιχείων της ΔΤ σε αυτό το επίπεδο εκπαίδευσης, αναρωτιόμαστε τι θα μπορούσε για παράδειγμα να σημαίνει γενικότερα ευαισθησία προς τους φοιτητές κατά τη διάρκεια μιας διάλεξης σε ένα μεγάλο ακροατήριο. Θέματα προς περαιτέρω διερεύνηση είναι επίσης, η επίδραση του πλαισίου (π.χ. η παράδοση του Τμήματος, το επίπεδο των φοιτητών που φοιτούν σε αυτό), καθώς και των διαφορετικών αντιλήψεων ή εμπειριών του διδάσκοντα στη διαμόρφωση της διδασκαλίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artigue, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Mathematics Thinking and Learning at Post-secondary Level. In F. K. Lester (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p.1011-1049, US: NCTM.

Bergsten, C. (207). Investigating quality of undergraduate mathematics lectures. *Mathematics Education Research Journal, 19,* 48-72.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies of Mathematics, 23*, 99-122.

Jaworski B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry.* London: Falmer Press.

Jaworski, B. (2002). Sensitivity and Challenge in University Mathematics Teaching. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 71-94.

Jaworski, B. & Potari, D. (2009). Bridging the macro- and micro-divide: using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics,72*, 219-236.

Nardi, N., Jaworski, B., and Hegedus, S. (2005). A Spectrum of Pedagogical Awareness for Undergraduate Mathematics: From tricks to techniques. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*, 284-316.

Petropoulou, G., Jaworski, B., Potari, D. & Zachariades T. (2013). Mathematical challenge and sensitivity to students in university lecturing: an uneasy balance. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.), *Proc. 37th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education, 5,* p.144. Kiel, Germany: PME.

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 351-380. doi:10.1023 /A:1021214604230.

Speer, N. M., Smith, J. P., & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*, 99-114.

Strauss, A., and Corbin, L. (1998). *Basics of Qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Valero, P. (2009). Mathematics education as a network of social practices. *Plenary 2 in Proc. of CERME 6,* Lyon, France.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior, 23(2),* 115-133.

ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Σωτήρης Ζωιτσάκος*, Θεοδόσιος Ζαχαριάδης*, Χαράλαμπος Σακονίδης**

* Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, **Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

s-zoitsakos@math.uoa.gr, tzaharia@math.uoa.gr, xsakonid@eled.duth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία μελετά στοιχεία της μαθηματικής γνώσης καθηγητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μέσα από την αναγνώριση και την ερμηνεία παρανοήσεων μαθητών σχετικά με ρητούς αριθμούς με διπλή δεκαδική αναπαράσταση. Η ανάλυση των απαντήσεων των 106 εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα έδειξε ελλιπή εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου που είχε ως αποτέλεσμα την αδυναμία αναγνώρισης ή ικανοποιητικής τεκμηρίωσης ορισμένων παρανοήσεων. Υποστηρίζεται ότι η «κοινή γνώση περιεχομένου» αποκτά χαρακτηριστικά «εξειδικευμένης γνώσης περιεχομένου», όταν αφορά σε προχωρημένη μαθηματική γνώση που ο εκπαιδευτικός καλείται να διαχειριστεί σε σύνθετα περιβάλλοντα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το περιεχόμενο και το επίπεδο κατανόησης της μαθηματικής γνώσης που είναι αναγκαία για τη διδασκαλία όσο και η σχέση αυτής της γνώσης με την ποιότητα της διδασκαλίας έχουν απασχολήσει επανειλημμένα την έρευνα. Οι σχετικές μελέτες υποδεικνύουν ότι η φτωχή μαθηματική γνώση επηρεάζει αρνητικά τη διδασκαλία (Rowland, Martyn, Barber & Heal, 2000), ενώ η επαρκής ακαδημαϊκή μαθηματική γνώση δεν συνεπάγεται απαραίτητα μια επιτυχή διδασκαλία (Askew, Brown, Rhodes, William & Johnson, 1997).

Το ερώτημα της μαθηματικής γνώσης που είναι απαραίτητη για μια αποτελεσματική διδασκαλία επανήλθε επιτακτικά στο πεδίο της έρευνας για τη μαθηματική εκπαίδευση τα τελευταία χρόνια, ενδεχομένως εξαιτίας της αναζωπύρωσης της συζήτησης για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών. Οι περισσότερες από τις σχετικές μελέτες εστιάζουν στις κλασικές έννοιες της '*γνώσης περιεχομένου*' (*subject matter knowledge*) και της '*παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου*' (*pedagogical content knowledge*), οι οποίες προτάθηκαν από τον Shulman (1987). Η πρώτη αφορά στη γνώση του αντικειμένου αυτή καθαυτή, ενώ η δεύτερη στους τρόπους αναπαράστασης και συγκρότησής της που την καθιστούν κατανοητή στους μαθητές. Στα μαθηματικά, οι αντίστοιχες έρευνες πρότειναν πρότυπα συστήματα κατηγοριοποίησης της *μαθηματικής γνώσης για τη διδασκαλία* (*mathematical knowledge for teaching*), προσφέροντας σχετικές περιγραφές και παραδείγματα.

Χαρακτηριστικές είναι οι μελέτες των Ball, Thames and Phelps (2008), καθώς και των Rowland, Huckstep and Thwaites (2003, 2005). Η προσέγγιση των πρώτων συνιστά το θεωρητικό πλαίσιο της παρούσας εργασίας, η οποία επιχειρεί να ανιχνεύσει στοιχεία της μαθηματικής γνώσης εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μέσα από τον τρόπο που αυτοί πραγματεύονται παρανοήσεις μαθητών αναφορικά με τη διπλή δεκαδική αναπαράσταση ρητών αριθμών που διατυπώνονται στο πλαίσιο ενός σχετικού διδακτικού σεναρίου.

Η δεκαδική αναπαράσταση ενός ρητού αριθμού είναι είτε πεπερασμένη είτε άπειρη και περιοδική. Όμως, ένας ρητός αριθμός με πεπερασμένη δεκαδική αναπαράσταση έχει και μια δεύτερη περιοδική αναπαράσταση με περίοδο 9. Στη βιβλιογραφία (π.χ., Tall & Schwarzenberger 1978, Artique 2000) έχουν επισημανθεί προβλήματα κατανόησης αυτών των αναπαραστάσεων από μαθητές και φοιτητές και έχουν διατυπωθεί κάποιες ερμηνείες (Edwards & Ward 2004). Επίσης, έχουν ανιχνευτεί κάποιες σχετικές νοηματοδοτήσεις από καθηγητές μαθηματικών (Zoitsakos, Zachariades & Sakonidis 2013) με βάση το θεωρητικό πλαίσιο του ‘procept’ (Gray & Tall 1994). Στην παρούσα εργασία επιχειρούμε να συνδέσουμε αυτές τις νοηματοδοτήσεις με τη γνώση περιεχομένου, όπως αυτή περιγράφεται από τους Ball, Thames and Phelps (2008).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Σε μια προσπάθεια επεξεργασίας και εξειδίκευσης της ταξινομίας του Shulman (1987) στην περίπτωση της διδασκαλίας των μαθηματικών, οι Ball, Thames and Phelps (2008) ανέλυσαν τη γνώση περιεχομένου και την παιδαγωγική γνώση περιεχομένου σε επιμέρους συνιστώσες. Ειδικότερα, η γνώση περιεχομένου αναλύθηκε ως ακολούθως: (α) *κοινή γνώση περιεχομένου* (common content knowledge), η οποία είναι η μαθηματική γνώση που χρησιμοποιείται και σε μη διδακτικά πλαίσια, χωρίς να ταυτίζεται με αυτήν που διαθέτει ο μέσος άνθρωπος, (β) *εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου* (specialized content knowledge), που αφορά στη μαθηματική γνώση που χρησιμοποιείται ειδικά στη διδασκαλία και (γ) *γνώση του μαθηματικού ορίζοντα* (knowledge at the mathematical horizon), δηλαδή η γνώση της συσχέτισης των μαθηματικών ιδεών που περιέχονται στο σχολικό πρόγραμμα, μέσα στα ίδια τα μαθηματικά. Η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου επιμερίστηκε επίσης σε τρεις συνιστώσες: (α) *γνώση περιεχόμενου και μαθητών* (knowledge of content and students), (β) *γνώση περιεχομένου διδασκαλίας* (knowledge of content and teaching), και (γ) *γνώση του προγράμματος σπουδών* (knowledge of curriculum) (Ball et al., 2008).

Η Ball και οι συνεργάτες της (2008), αξιοποιώντας δεδομένα κυρίως από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ενέταξαν την αναγνώριση των λαθών των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς στην *κοινή γνώση περιεχομένου*. Έστρεψαν το ενδιαφέρον τους, ωστόσο, ιδιαίτερα στην *εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου,* αναδεικνύοντας κρίσιμα χαρακτηριστικά της, όπως «η αναγνώριση αυτού που περικλείεται στη χρήση μιας

συγκεκριμένης αναπαράστασης», «η σύνδεση ενός θέματος διδασκαλίας με θέματα από τα προηγούμενα ή τα επόμενα χρόνια» και «η κριτική χρησιμοποίηση της μαθηματικής γλώσσας και του συμβολισμού» (Ball, et all 2008, σελ. 400).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στόχος μας στη συγκεκριμένη εργασία είναι να διερευνήσουμε τη μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τους ρητούς αριθμούς με διπλή δεκαδική αναπαράσταση, με βάση τον τρόπο που επιχειρηματολογούν αναφορικά με σχετικές παρανοήσεις μαθητών. Επιδιώκουμε έτσι να συμβάλλουμε στην εξειδίκευση των κατηγοριών της *κοινής γνώσης περιεχομένου* και της *εξειδικευμένης γνώσης περιεχομένου του* μοντέλου της Ball και των συνεργατών της στην περίπτωση μαθηματικών εννοιών που διδάσκονται σε ανώτερες της πρώτης, βαθμίδες της εκπαίδευσης.

Η εργασία εντάσσεται σε μια ευρύτερη μελέτη που βρίσκεται σε εξέλιξη και εστιάζει στις ερμηνείες των εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για τις παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με το συγκεκριμένο θέμα, καθώς και στις προτάσεις τους για τη διδακτική διαχείριση αυτών των παρανοήσεων. Λαμβάνοντας υπόψη το μαθηματικό ορισμό των ρητών αριθμών με διπλή δεκαδική αναπαράσταση, καθώς και τις σχετικές δυσκολίες των μαθητών (π.χ., Tall & Schwarzenberger 1978) διαμορφώσαμε την παρακάτω δραστηριότητα, η οποία αποτελείται από ένα διδακτικό σενάριο και τα σχετικά ερωτήματα.

Σε μια σχολική τάξη Γ΄ Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών θετικής κατεύθυνσης ο καθηγητής ρωτάει τους μαθητές: ‘Τι εκφράζει η παράσταση 0,3999… όταν τα 9 είναι άπειρα;’. Τέσσερις μαθητές δίνουν τις παρακάτω απαντήσεις: Μαθητής Α: Η παράσταση 0,3999… εκφράζει μια διαδικασία που τείνει στο 0,4. Μαθητής Β: Το 0,3999… είναι ένας αριθμός που τείνει στο 0,4. Μαθητής Γ: Ο 0,3999… είναι ο αμέσως πριν τον 0,4 αριθμός. Μαθητής Δ: Η παράσταση 0,3999… εκφράζει το άθροισμα 0,3 + 0,09 + 0,009 +… αλλά επειδή συνεχώς αυξάνεται δεν μπορεί να ισούται με έναν αριθμό. α) Ποιος πιστεύετε ότι μπορεί να ήταν ο στόχος της ερώτησης του καθηγητή; β) Αναφέρατε για κάθε έναν από τους τέσσερις μαθητές: i) πως νομίζετε ότι σκέφτηκε και έδωσε την παραπάνω απάντηση, ii) ποια θεωρείτε θετικά σημεία της άποψής του (αν υπάρχουν) και iii) ποιες είναι οι πιθανές παρανοήσεις του (αν υπάρχουν). γ) Αν είσασταν ο καθηγητής της παραπάνω τάξης πως θα βοηθούσατε τους μαθητές να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις στις οποίες αναφερθήκατε στην απάντηση του ερωτήματος β;

Η μαθηματική γνώση που αφορά στη δεκαδική αναπαράσταση ενός πραγματικού αριθμού, δηλαδή στην αναπαράσταση του ως άθροισμα δεκαδικής σειράς, εντάσσεται στη θεωρία σειρών ενός μαθήματος Απειροστικού Λογισμού (Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας, (1999), σ. 88). Από αυτή προκύπτει ότι 0,4=0,3999.... Οι μαθητές διδάσκονται τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς και τη μετατροπή τους σε κλάσμα με εμπειρικό τρόπο στη Β΄ Γυμνασίου. Στο σχολικό

εγχειρίδιο της Β΄ Λυκείου υπάρχει το άθροισμα άπειρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προοόδου και κάποιοι μαθητές το διδάσκονται, αλλά χωρίς σύνδεση με την δεκαδική αναπαράσταση των ρητών αριθμών. Το υποθετικό σενάριο διαδραματίζεται στη Γ΄Λυκείου στα μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης, όπου οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια του ορίου που συνδέεται άμεσα με την μαθηματική γνώση που αφορά στη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών. Οι μαθητές Α και Β θεωρούν την παράσταση ως μια μεταβλητή ποσότητα που τείνει στο 0,4. Αντίθετα, ο μαθητής Γ θεωρεί ότι η παράσταση εκφράζει ένα σταθερό αριθμό, ενώ ο μαθητής Δ θεωρεί ότι είναι ένα άπειρο άθροισμα το οποίο δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Σε σχέση με το πλαίσιο της Ball και των συνεργατών της, θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε ως *κοινή μαθηματική γνώση* το ότι η αναπαράσταση 0,3999… εκφράζει έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό, ότι κάθε αριθμός αποτελεί μια σταθερή ποσότητα και ότι δεν υπάρχει ο αμέσως προηγούμενος ρητός αριθμός ενός αριθμού. Οι γνώσεις αυτές είναι τυπικά αρκετές για την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών του σεναρίου. Σε ποιο βαθμό, ωστόσο, αυτές οι γνώσεις παραμένουν επαρκείς, δηλαδή, η σχετική γνώση παραμένει «κοινή», όταν το πλαίσιο διαπραγμάτευσή της γίνεται σύνθετο, όπως στην περίπτωση του παραπάνω σεναρίου; Όπου, μάλιστα, ο εκπαιδευτικός καλείται να αντιμετωπίσει ένα ευρύ και ενίοτε πολύπλοκο φάσμα μαθηματικών ιδεών και συνδέσεων που αποτυπώνονται στις παρανοήσεις των μαθητών, οδηγώντας τον συχνά σε κρίσιμα (επιστημολογικά) ζητήματα της μαθηματικής γνώσης και θέτοντας προκλήσεις στο προσωπικό του μαθηματικό οικοδόμημα. Επαρκούν αυτές οι γνώσεις για να μπορέσει ένας εκπαιδευτικός να διαχειριστεί αποτελεσματικά τις σχετικές παρανοήσεις των μαθητών ή ορισμένες απαιτούν πιο εξειδικευμένο και στέρεο θεωρητικό υπόβαθρο, μη απαραίτητο σε άλλους που χρησιμοποιούν γνώσεις Απειροστικού Λογισμού, όπως οι μηχανικοί, οι οικονομολόγοι κ.α.; Με άλλα λόγια, μήπως η *κοινή γνώση του περιεχομένου* δεν είναι αρκετή και απαιτείται *εξειδικευμένη γνώση του*, που θα καταστήσει δυνατή την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών αλλά και την αποτελεσματική τους διδακτική διαχείριση; Ο ανωτέρω προβληματισμός είναι κεντρικός στην ερευνητική ατζέντα της παρούσας εργασίας.

Η παραπάνω δραστηριότητα δόθηκε σε 106 καθηγητές μαθηματικών, με ποικίλη εκπαιδευτική εμπειρία, οι οποίοι απάντησαν γραπτώς. Ακολούθησε προσεκτική ανάγνωση των απαντήσεων και ταξινόμησή τους με βάση την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών και την τεκμηρίωσή τους. Στη συνέχεια, επελέγησαν 10 καθηγητές με απαντήσεις που αποτελούσαν χαρακτηριστικά παραδείγματα των διάφορων κατηγοριών, με τους οποίους πραγματοποιήθηκαν ημιδομημένες συνεντεύξεις με στόχο την αποσαφήνιση πτυχών των νοηματοδοτήσεων που εμπεριείχαν οι απαντήσεις τους. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των γραπτών απαντήσεων.

ΑΝΑΛΥΣΗ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση των γραπτών απαντήσεων των καθηγητών όσον αφορά στην αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών προέκυψαν έξι ανεξάρτητες κατηγορίες οι οποίες φαίνονται στον πίνακα 1.

	Αναγνώριση & μαθηματικά ορθή τεκμηρίωση	Αναγνώριση & μαθηματικά λανθασμένη τεκμηρίωση	Αναγνώριση με ασαφή τεκμηρίωση	Απουσία τοποθέτησης σχετικά με την παρανόηση	Δήλωση συμφωνίας με τον μαθητή	Ασάφεια σχετικά με την παρανόηση
Μαθητής Α	19	13	15	29	14	16
Μαθητής Β	21	18	9	27	14	17
Μαθητής Γ	25	17	25	18	3	18
Μαθητής Δ	27	8	20	20	18	13

Πίνακας 1: Κατηγορίες απαντήσεων με βάση την αναγνώριση της παρανόησης

Στην πρώτη στήλη του Πίνακα 1 εμφανίζεται ο αριθμός των καθηγητών οι οποίοι αναγνώρισαν με ορθή μαθηματικά τεκμηρίωση την παρανόηση του αντίστοιχου μαθητή και από το υπόλοιπο δοκίμιο δεν προκύπτουν αντιφάσεις σχετικά με αυτή την τεκμηρίωση. Όπως φαίνεται στον πίνακα 1, δυσκολότερα αναγνωρίζονται με σωστή τεκμηρίωση οι παρανοήσεις των μαθητών Α και Β (περίπου 20%) από ότι οι παρανοήσεις των μαθητών Γ και Δ (περίπου 25%).

Για παράδειγμα, ο καθηγητής Κ39 δεν αναγνωρίζει κάποια παρανόηση στον μαθητή Α, όμως, αναγνωρίζει παρανοήσεις στους υπόλοιπους μαθητές:

Ο μαθητής Α βάζει στην απάντησή του την έννοια της συνάρτησης και του ορίου. Όμως δεν είναι σίγουρο αν όταν του ζητηθεί μπορεί να δείξει γιατί τείνει στο 0,4. […] Ο μαθητής Β δεν έχει κατανοήσει ότι ένας αριθμός είναι κάτι σταθερό και δεν μπορεί να τείνει κάπου αλλού. […Ο μαθητής Γ] μπερδεύει ότι υπάρχει επόμενος και προηγούμενος όπως στους φυσικούς. […Ο μαθητής Δ] κάνει ένα μεγάλο λάθος αφού αναφέρει ότι ο αριθμός συνεχώς αυξάνεται για να πει τελικά ότι δεν είναι ίσο με 0,4.

Στη δεύτερη στήλη του Πίνακα 1 φαίνεται ο αριθμός των καθηγητών που αναγνωρίζουν την παρανόηση του αντίστοιχου μαθητή, με λανθασμένη, ωστόσο, αιτιολόγηση. Κυρίως οι τοποθετήσεις των μαθητών Β και Γ αναγνωρίζονται ως λανθασμένες, αλλά αυτή η αναγνώριση δεν συνοδεύεται από μαθηματικά ορθό σκεπτικό. Πολλές φορές η λανθασμένη αιτιολόγηση είναι άμεση. Για παράδειγμα, ο καθηγητής Κ21 υποστηρίζει σχετικά με τον μαθητή Γ:

Για το μαθητή Γ οι παρανοήσεις είναι αρκετές.[…] ο αριθμός αυτός συνεχώς πλησιάζει το 0,4 δεν είναι απλά ο προηγούμενός του. Είναι ένας περιοδικός αριθμός που συνεχώς θα πλησιάζει το 0,4.

Σε αρκετές περιπτώσεις, όμως, η λανθασμένη αιτιολόγηση εκφράζεται μέσω της συμφωνίας με την άποψη άλλου μαθητή του σεναρίου. Για παράδειγμα, ο καθηγητής Κ32 φαίνεται να αναγνωρίζει την παρανόηση του μαθητή Β, επειδή ουσιαστικά συμφωνεί με τη γνώμη του μαθητή Α:

Ο 0,3999… είναι μια άπειρη διαδικασία που τελικά τείνει στον 0,4. Τυχόν παρανοήσεις δεν εντοπίζονται ιδιαίτερα στην απάντηση του μαθητή Α.». Σε σχέση με το μαθητή Β αναφέρει: «Η λέξη ‘αριθμός’ κάπου υστερεί σε σύγκριση με τη λέξη ‘διαδικασία’

Σε κάποιες άλλες περιπτώσεις φαίνεται ότι μπορούν να συνυπάρξουν σωστές μαθηματικές γνώσεις με παρανοήσεις τους, όταν το πλαίσιο το ευνοεί. Επίσης, ότι εμπειρικές προσεγγίσεις μπορεί να συνυπάρχουν με αυστηρές μαθηματικές ιδέες στην προσπάθεια αναγνώρισης των παρανοήσεων.

Στην τρίτη στήλη εντάσσουμε εκείνες τις τοποθετήσεις των καθηγητών που αναγνωρίζουν την ύπαρξη παρανόησης στον εκάστοτε μαθητή αλλά η τεκμηρίωση είναι ασαφής. Στην κατηγορία αυτή φαίνεται ότι το μεγαλύτερο πρόβλημα υπάρχει στις περιπτώσεις των μαθητών Γ και Δ. Για παράδειγμα, ο Κ34 αναφέρει:

… για τα αρνητικά [σημεία] του [μαθητή Α] θα έλεγα ότι σκέφτεται ότι μιλάμε για μια διαδικασία (όπως μια ατελής διαίρεση) η οποία θα τον οδηγήσει ότι είναι ντετερμινιστικό μοντέλο και θα πρέπει κάποια στιγμή να τελειώσει απομακρύνοντας τον από την έννοια του απείρου.

Στην τέταρτη στήλη εντάσσονται οι καθηγητές που δεν τοποθετούνται όσον αφορά στην απάντηση του αντίστοιχου μαθητή. Σε κάποιες από τις περιπτώσεις αυτές η απουσία αναγνώρισης παρανόησης για κάποιο μαθητή θα μπορούσε να εκληφθεί ως συμφωνία με την αντίληψη του συγκεκριμένου μαθητή, ειδικά όταν εντοπίζονται θετικά στοιχεία για τον μαθητή αυτό και παρανοήσεις για τους άλλους μαθητές. Σε άλλες περιπτώσεις, βέβαια, έχουμε ελλιπείς τοποθετήσεις για όλους τους μαθητές. Επισημαίνουμε, επίσης, ότι τις λιγότερες απουσίες τοποθέτησης τις συγκεντρώνει η άποψη του μαθητή Γ και τις περισσότερες οι απόψεις των μαθητών Α και Β.

Στην πέμπτη στήλη έχουμε τις τοποθετήσεις εκείνες που φαίνεται να συμφωνούν με την αντίληψη του εκάστοτε μαθητή είτε άμεσα (ρητή δήλωση συμφωνίας) είτε έμμεσα (με βάση τα συμφραζόμενα). Ελάχιστοι συμφωνούν με τον μαθητή Γ (περίπου 3%), ενώ οι υπόλοιποι αυτής της κατηγορίας συμπαρατάσσονται σχεδόν ομοιόμορφα με τη θέση των άλλων τριών μαθητών. Για παράδειγμα, ο Κ32 αναφέρει: «Ο 0,3999… είναι μια άπειρη διαδικασία που τελικά τείνει στο 0,4. Τυχόν παρανοήσεις δεν εντοπίζονται ιδιαίτερα στην απάντηση του μαθητή Α». Επιπλέον, ο Κ3 αναφέρει:

Ο μαθητής Δ ορθά βλέπει στην λέξη παράσταση τη λέξη άθροισμα και σπάει τον αριθμό 0,3999… σε 0,3+0,09+0,009+… κάτι που σωστά αναφέρει αυξάνεται συνεχώς και δεν μπορεί να ισούται με κάποιο αριθμό. Βέβαια πρέπει να τονίσει ότι ο αριθμός αυτός θα είναι πάντα μικρότερος αυστηρά του 0,4.

Στην έκτη στήλη εντάσσονται οι τοποθετήσεις εκείνες από τις οποίες δεν είναι σαφές αν αναγνωρίζεται κάποια παρανόηση στον εκάστοτε μαθητή. Για παράδειγμα, ο καθηγητής Κ16, ο οποίος παραθέτει μια απόδειξη της ισότητας 0,3999… =0,4, αναφέρει:

Οι μαθητές Α και Β προφανώς έχουν διδαχθεί την έννοια του ορίου, (όπως και οι άλλοι δυο μαθητές) και το έχουν εκλάβει με ένα τρόπο διαισθητικό. Συνάμα η νέα τους επαφή με τη μη διακριτή, μετρήσιμη μαθηματική εξέλιξη δημιούργησε φόβο (μαθηματική φοβία) ότι τα μαθηματικά υπερβάλλουν τη νόησή τους.

Συνολικά, το 18% έως 25% των καθηγητών του δείγματος (ανάλογα με το μαθητή) αναγνωρίζουν την παρανόηση που εμπεριέχει η απάντηση των μαθητών Α, Β, Γ και Δ. Αντίστοιχα είναι τα ποσοστά των καθηγητών που δεν απαντούν στην ερώτηση σχετικά με τις παρανοήσεις των μαθητών. Ένα μικρότερο ποσοστό, που δεν υπερβαίνει το 20% για κανένα μαθητή, συμφωνεί με τις τοποθετήσεις μαθητών. Οι υπόλοιπες τοποθετήσεις είτε αναγνωρίζουν λανθασμένες παρανοήσεις, είτε αναγνωρίζουν παρανοήσεις με λανθασμένο σκεπτικό είτε υιοθετούν ασαφείς προσεγγίσεις.

Από τους 106 καθηγητές μόνο 31 αναφέρουν την ισότητα 0,3999… = 0,4 και 22 από αυτούς δίνουν τουλάχιστον μια απόδειξη γι’ αυτή. Παρόλα αυτά, αρκετοί από αυτούς τους 31 εκπαιδευτικούς δεν αναγνωρίζουν απαραίτητα με επαρκή τρόπο τις παρανοήσεις των μαθητών (π.χ., ο Κ16). Μόνο 19 από τους καθηγητές του δείγματος εμφανίζουν σαφή κατανόηση του θέματος, χωρίς αντιφάσεις. Παράλληλα, υπάρχει ένας μικρός αριθμός καθηγητών οι οποίοι, χωρίς να αναφέρουν την αντίστοιχη ισότητα, αναγνωρίζουν τις σχετικές παρανοήσεις των μαθητών.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η μαθηματική γνώση που διαχειρίζεται με ευχέρεια ένας καθηγητής μαθηματικών συνιστά ουσιαστικό παράγοντα για μια αποτελεσματική διδασκαλία. Η γνώση αυτή διαφοροποιείται σημαντικά από εκείνην που απαιτείται σε μη διδακτικό πλαίσιο (Ball et al 2008). Πρόκειται για γνώση που φέρει ειδικά χαρακτηριστικά, τα οποία επιτρέπουν την οργάνωση των διαδικασιών μάθησης και διδασκαλίας με τρόπους που εξυπηρετούν τη μαθηματική επιστήμη (επιστημολογική συνιστώσα), τον μαθητευόμενο (ψυχολογική συνιστώσα) και το κοινωνικό σύνολο (κοινωνικο-πολιτικο-πολιτισμική συνιστώσα). Η απαίτηση για μια τέτοια γνώση αναδεικνύεται, κυρίως, όταν ο εκπαιδευτικός έλθει αντιμέτωπος με παρανοήσεις μαθητών, όπου απαιτείται σε βάθος γνώση του αντικειμένου, ώστε να είναι σε θέση να αναγνωρίσει τις ρίζες αυτών των παρανοήσεων και να τις διαχειριστεί με τρόπους συμβατούς

τόσο με τη μαθηματική γνώση όσο και με τη μαθησιακή διαδικασία. Ιδιαίτερα σε θέματα που αφορούν προχωρημένη μαθηματική γνώση και η διαπραγμάτευσή τους στο σχολείο γίνεται εμπειρικά, θεωρητικά κενά του εκπαιδευτικού μπορεί να έχουν αρνητικές συνέπειες στην επιτυχή αντιμετώπιση παρανοήσεων των μαθητών. Ένα τέτοιο θέμα είναι η διπλή αναπαράσταση μιας κατηγορίας ρητών αριθμών. Στην έρευνά μας διαπιστώνουμε σημαντικά προβλήματα των καθηγητών μαθηματικών να αναγνωρίσουν και κυρίως να τεκμηριώσουν μαθηματικά σωστά, παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με το συγκεκριμένο θέμα. Συχνά αναγνωρίζουν παρανοήσεις μαθητών, αλλά, στην προσπάθειά τους να τις τεκμηριώσουν, υποκύπτουν οι ίδιοι σε κάποια παρανόηση ή πέφτουν σε εσωτερικές αντιφάσεις. Επιπλέον, σε πολλές περιπτώσεις υιοθετούν εμπειρικές και συχνά ασαφείς προσεγγίσεις, προκειμένου να τοποθετηθούν σχετικά με τις παρανοήσεις των μαθητών. Το πλαίσιο του διδακτικού σεναρίου στο οποίο κλήθηκαν οι καθηγητές να τοποθετηθούν στην παρούσα μελέτη φαίνεται ότι συνέβαλλε σημαντικά στη δυσκολία τους να αναγνωρίσουν και να τεκμηριώσουν τις παρανοήσεις των μαθητών, αποκαλύπτοντας ορισμένες φορές προσωπικές τους ασαφείς ή ασταθείς μαθηματικές νοηματοδοτήσεις. Αυτό θα μπορούσε να αποδοθεί στο γεγονός ότι, στην προσπάθειά τους να υπερασπιστούν ή να αποδυναμώσουν ή και να απορρίψουν πτυχές των παρανοήσεων των μαθητών, συχνά εξαιρετικά λεπτές και βασικές, με τρόπους που ήταν συμβατοί με το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα αλλά και το επίπεδο μαθηματικής σκέψης των μαθητών, ήρθαν αντιμέτωποι με θεμελιώδη ζητήματα της μαθηματικής επιστήμης και της προσωπικής μαθηματικής τους γνώσης, ενδεχομένως για πρώτη φορά, αποκαλύπτοντας ένα επισφαλές παρά ένα καλά συγκροτημένο πεδίο γνώσης.

Φαίνεται, λοιπόν, ότι, για την αναγνώριση των παρανοήσεων των μαθητών για λεπτές μαθηματικές έννοιες όπως αυτές της παρούσας μελέτης, δεν αρκεί η *κοινή γνώση του αντικειμένου*, αλλά είναι απαραίτητη και η βαθιά γνώση των επιστημολογικών χαρακτηριστικών των εννοιών. Μια τέτοια γνώση θεωρούμε ότι δεν είναι απλά κοινή μαθηματική γνώση, αλλά εντάσσεται στην *εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου*. Αυτό αναδεικνύει την αναγκαιότητα της συστηματικής ανάπτυξης της εξειδικευμένης γνώσης του γνωστικού αντικειμένου για τη διδασκαλία των μαθηματικών τόσο κατά την εκπαίδευση όσο και κατά την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών. Στην κατεύθυνση αυτή μπορεί να συμβάλλει η διαπραγμάτευση ρεαλιστικών διδακτικών σεναρίων, όπου οι μαθηματικές ιδέες διαπλέκονται, όπως φαίνεται από την παρούσα εργασία. Είναι, επιπλέον, αναγκαία η περαιτέρω μελέτη με στόχο τον προσδιορισμό εκείνων των χαρακτηριστικών της γνώσης που δημιουργούν γνωστικά ασταθές πλαίσιο για το μαθητή και διδακτικά ασταθές πλαίσιο για τον εκπαιδευτικό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artigue, M., (2000). Teaching and Learning Calculus: What Can Be Learned from Education Research and Curricular Changes in France? *CBMS issues in Mathematics Education Research in Collegiate Mathematics Education* (Vol. 8). American Mathematical Society.

Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., William, D. and Johnson, D. (1997). *Effective Teachers of Numeracy*. London: King's College.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59(5)*, 389-407.

Edwards, B. S. & Ward, M. B., (2004). Surprise from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, 111 (5) 411-424.

Gray, E. & Tall, D., (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115-141.

Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε., (1999). *Απειροστικός Λογισμός* (Τόμος Ι). Αθήνα, Συμμετρία.

Rowland, T., Martyn, S., Barber, P. & Heal, C. (2000). Primary teacher trainees' mathematics subject knowledge and classroom performance. In T. Rowland & C. Morgan, (Eds.) *Research in Mathematics Education* (Vol. 2). London: BSRLM.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2003). The knowledge quartet. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* 23(3) pp. 97-103.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematical subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Education Review*, *57*, 1-22.

Tall, D. & Schwarzenberger, L. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44-49.

Zoitsakos, S., Zachariades, Th., and Sakonidis Ch., (2013). Secondary mathematics teachers' understanding of the infinite decimal representation of a rational number. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.) *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 441- 448). Kiel, Germany: PME.

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΓΙΑ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΣΤΗΝ Α΄ ΚΑΙ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ: ΤΙ (ΔΕΝ) ΑΛΛΑΖΕΙ;

Μαρία Μπεμπένη, Ξένια Βαμβακούση

Πανεπιστήμιο Αθηνών/Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

mbempeni@gmail.com, xvamvak@cc.uoi.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με μια εμπειρική μελέτη εξετάσαμε την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα σε δύο ηλικιακές ομάδες παιδιών, μία από την Α΄ Γυμνασίου και μία από την Γ΄ Γυμνασίου. Παρουσιάζουμε μια πρώτη ανάλυση των αποτελεσμάτων, τα οποία δείχνουν ότι μικρές διαφορές υπάρχουν στις δύο ομάδες, ενώ διαφαίνεται ένα σημαντικό έλλειμμα εννοιολογικής γνώσης και στις δύο ομάδες.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το ζήτημα της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές της Γνωστικής Ψυχολογίας και της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Ως διαδικαστική γνώση ορίζεται η ικανότητα του ατόμου να εκτελεί μία σειρά από πράξεις για να επιλύει προβλήματα χωρίς απαραίτητα να κατανοεί γιατί δουλεύει η διαδικασία. Η εννοιολογική γνώση αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να κάνει διασυνδέσεις στη γνώση και να αντιλαμβάνεται τις πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας έννοιας (Rittle-Johnson & Siegler, 2001). Πολλές σχετικές έρευνες πραγματεύονται τον τρόπο με τον οποίο το ένα είδος γνώσης επηρεάζει το άλλο κατά την ανάπτυξή του (για μια επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, βλ. Rittle-Johnson & Schneider, in press). Σύμφωνα με κάποιους ερευνητές, τα παιδιά μαθαίνουν πρώτα τις διαδικασίες και μετά εξάγουν τις έννοιες σταδιακά από την εμπειρία τους. Κατά άλλους, τα παιδιά αναπτύσσουν πρώτα βασικές εννοιολογικές αρχές σε ένα πεδίο και μετά τις χρησιμοποιούν για την επίλυση προβλημάτων. Σε μία προσπάθεια να ερμηνευθούν αντικρουόμενα ευρήματα, προτάθηκε το επαναληπτικό μοντέλο, σύμφωνα με το οποίο τα δύο είδη γνώσης αναπτύσσονται παράλληλα, συσχετίζονται θετικά και δεν προηγείται κάποιο από τα δύο (Rittle-Johnson & Siegler, 2001).

Πρόσφατα, η έρευνα εστίασε στις ατομικές διαφορές που υπάρχουν στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης. Ανασκοπώντας τη σχετική βιβλιογραφία οι Rittle-Johnson και Schneider (in press) συμπεραίνουν ότι, ενώ φαίνεται ότι πράγματι τα δύο είδη γνώσης συσχετίζονται θετικά, η εννοιολογική γνώση έχει μεγαλύτερη επιρροή στην ανάπτυξη της διαδικαστικής απ' ό,τι το αντίστροφο. Επιπλέον, ο βαθμός στον οποίο επηρεάζει το ένα είδος το άλλο σχετίζεται και με τις ατομικές διαφορές που μπορούν εν μέρει να αποδοθούν στο διαφορετικό ιστορικό της διδακτικής διαδικασίας που συμμετείχε το υποκειμένο. Δεδομένου, λοιπόν, ότι

παραδοσιακά η διδασκαλία εστιάζει στις διαδικασίες, η σχολική εμπειρία είναι πιθανό να προκαλεί κυρίως τη βελτίωση της διαδικαστικής και λιγότερο της εννοιολογικής γνώσης.

Τα κλάσματα είναι μια περιοχή στην οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες, κατά κύριο λόγο εννοιολογικής φύσης. Μια μεγάλη ομάδα «εννοιολογικών» λαθών οφείλεται στο φαινόμενο της (ακατάλληλης) μεταφοράς χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των φυσικών σε μη φυσικούς αριθμούς (για μια εκτενή συζήτηση σχετικά με το φαινόμενο αυτό, βλ. Vamvakoussi, Van Doooren, & Verschaffel, 2012). Τέτοιου είδους λάθη εμφανίζονται σε έργα σύγκρισης (π.χ. «όσο μεγαλύτεροι είναι οι όροι του κλάσματος, τόσο μεγαλύτερο το κλάσμα»), πράξεων (π.χ. «ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει και η διαίρεση πάντα μικραίνει τους αριθμούς») και πυκνής διάταξης (π.χ. «ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5 δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί»).

Μεγάλη εννοιολογική δυσκολία φαίνεται να προκαλεί και η κατανόηση του κλάσματος ως λόγου (Clarke & Roche, 2009; Moseley, 2005). Φαίνεται ότι τα παιδιά δεν αντιλαμβάνονται ότι το κλάσμα προσδιορίζεται από τη *σχέση* μεταξύ των όρων του και θεωρούν ότι οι όροι περιγράφουν απόλυτα μεγέθη.

Επιπλέον, πολλοί ερευνητές συνδέουν τις εννοιολογικές δυσκολίες των παιδιών με την αναπαραστατική ευχέρεια σχετικά με τα κλάσματα (π.χ. Moseley, 2005). Ειδικότερα, επισημαίνεται ότι το τυπικό μοντέλο του εμβαδού, με το οποίο το κλάσμα αναπαρίσταται ως μέρος του όλου, περιορίζει την κατανόηση των παιδιών για άλλες πλευρές του, όπως, για παράδειγμα, του κλάσματος ως λόγου. Από την άλλη μεριά, δεν είναι οικείες στα παιδιά άλλες αναπαραστάσεις, όπως αυτή του κλάσματος ως σημείου στην ευθεία, που αναδεικνύουν διαφορετικές όψεις του κλάσματος (π.χ. το κλάσμα σε σχέση με τη μέτρηση, το κλάσμα ως αριθμός) (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001).

Ασφαλώς, οι ερευνητές που ασχολούνται με την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα, αλλά και τη μάθηση των κλασμάτων γενικότερα, επισημαίνουν το ρόλο της εκπαίδευσης, η οποία τυπικά δίνει έμφαση στη διαδικαστική γνώση και αγνοεί τις δυσκολίες των παιδιών στην έννοια και τις αναπαραστάσεις του κλάσματος (Moss, 1999).

Στην παρούσα έρευνα, λάβαμε υπόψη τις συγκεκριμένες δυσκολίες στα κλάσματα και σχεδιάσαμε μία μελέτη με σκοπό να συγκρίνουμε παιδιά της Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου ως προς τη διαδικαστική και εννοιολογική τους γνώση για τα κλάσματα. Δεδομένου ότι η διδασκαλία των κλασμάτων στην Ελλάδα (μέχρι πρόσφατα και διεθνώς) είναι εστιασμένη στη διαδικαστική γνώση, αναμένουμε επιτυχία και των δύο ηλικιακών ομάδων στα έργα που εξετάζουν τη χρήση διαδικασιών. Για τον ίδιο λόγο, προβλέπουμε έλλειμμα εννοιολογικής γνώσης. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψην προηγούμενες έρευνες που συσχετίζουν τη διδασκαλία που στοχεύει στις διαδικασίες

με μικρή βελτίωση της εννοιολογικής κατανόησης, δεν αναμένουμε σημαντικές διαφορές στην εννοιολογική κατανόηση μεταξύ των ηλικιακών ομάδων.

2. ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 30 μαθητές Α΄ και 50 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου από πέντε διαφορετικά σχολεία της Αθήνας.

3. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Σχεδιάσαμε ένα ερωτηματολόγιο με 24 έργα, χωρισμένα σε 4 κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία αφορούσε την αναπαράσταση κλασμάτων και συμπεριελάμβανε 6 έργα με στόχο α) την αναπαράσταση του κλάσματος 1/4 σε κύκλο, ο οποίος ήταν χωρισμένος σε 8 ίσα μέρη, β) την αξιολόγηση της αναπαράστασης του κλάσματος 1/3 σε τρίγωνο, το οποίο ήταν χωρισμένο σε τρία άνισα μέρη, γ) την κατασκευή αναπαράστασης για ένα γνήσιο και ένα καταχρηστικό κλάσμα (2/3 και 5/3, αντίστοιχα) και δ) την αναπαράσταση κλασμάτων στην ευθεία των πραγματικών (2 έργα).

Η δεύτερη κατηγορία αφορούσε τη σύγκριση, τη διάταξη, καθώς και την πυκνή διάταξη κλασμάτων. Συμπεριελάμβανε 8 έργα με στόχο α) τη σύγκριση κλασμάτων με ίσους αριθμητές ή παρονομαστές, β) τη διάταξη τριών ρητών, εκ των οποίων ο ένας ήταν καταχρηστικό κλάσμα και ο άλλος σε δεκαδική μορφή (3/2, 1/9, 0.7), γ) την εκτίμηση σχετικά με το ποιο από δύο κλάσματα (3/4 και 6/7) βρίσκεται πιο κοντά στη μονάδα και δ) τη σύγκριση κλασμάτων, στα οποία το ένα κλάσμα του ζεύγους είχε μεγαλύτερο αριθμητή και παρονομαστή από το δεύτερο κλάσμα (3 έργα). Στα τελευταία αυτά έργα υπήρχε ρητή οδηγία να μην εφαρμοστούν πράξεις, ενώ η σύγκριση μπορούσε να γίνει με αριθμό αναφοράς το 1/2, το 1 και με απλή απλοποίηση του ενός κλάσματος αντίστοιχα. Τέλος, στην κατηγορία αυτή υπήρχε 1 έργο, στο οποίο ρωτήθηκε αν και πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5.

Η τρίτη κατηγορία αφορούσε τις πράξεις κλασμάτων. Συμπεριελάμβανε 4 έργα στα οποία ζητήθηκε η εκτέλεση των 4 πράξεων με κλάσματα. Σε 4 επιπλέον έργα, ζητήθηκε από τα παιδιά να αποφασίσουν ποια πράξη, πολλαπλασιασμός ή διαίρεση, πρέπει να εφαρμοστεί προκειμένου το αποτέλεσμα να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από τον πολλαπλασιαστέο ή το διαιρετέο, αντίστοιχα. Τα δύο ήταν συμβατά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση στους φυσικούς, ενώ τα δύο άλλα δεν ήταν.

Η τέταρτη κατηγορία αφορούσε το κλάσμα ως λόγο και περιελάμβανε 2 έργα. Στο πρώτο παρουσιάστηκε ένα σενάριο σύμφωνα με το οποίο ένα παιδί δήλωνε ότι έφαγε τα 3/4 μιας πίτσας και ένα δεύτερο παιδί συμπέραινε ότι το πρώτο έφαγε 3 κομμάτια πίτσας. Ζητήθηκε από τα παιδιά να πουν αν διαφωνούν ή συμφωνούν με το δεύτερο παιδί. Στο δεύτερο, δόθηκε ένα πρόβλημα στο οποίο δύο παιδιά έφτιαξαν βυσσινάδα,

χρησιμοποιώντας διαφορετικές ποσότητες σιροπιού βύσσινο και νερού το καθένα. Το ερώτημα ήταν ποιο παιδί έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα.

Σε όσα έργα προβλέψαμε ότι η διαδικασία επίλυσης δε θα ήταν προφανής από όσα σημείωνε το παιδί (συνολικά, 11), ζητήσαμε αναλυτική εξήγηση.

4. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Τα παιδιά συμπλήρωσαν τα ερωτηματολόγια σε μία διδακτική ώρα στο πλαίσιο του σχολικού μαθήματος των Μαθηματικών, με την παρουσία του διδάσκοντος.

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα δεδομένα κωδικοποιήθηκαν ως εξής: Λανθασμένη απάντηση (Λ): 0, Μερικώς σωστή απάντηση (Μ.Σ.): 1 και Σωστή απάντηση (Σ): 2. Στις στατιστικές αναλύσεις χρησιμοποιήθηκαν μη παραμετρικά κριτήρια καθώς, μετά από έλεγχο ανά περίπτωση, διαπιστώθηκε ότι παραβιάζονται οι προϋποθέσεις της κανονικότητας ή/και της ομοιογένειας των διακυμάνσεων των κατανομών.

Επιπλέον, εξετάσαμε τις εξηγήσεις των παιδιών για τον τρόπο που εργάστηκαν και κατηγοριοποιήσαμε τις στρατηγικές τους σε εννοιολογικές και διαδικαστικές. Διαδικαστικές θεωρήσαμε αυτές που κατά την εφαρμογή τους χρησιμοποιούνται κανόνες και διαδικασίες που διδάσκονται στο σχολείο. Ως «εννοιολογικές» ορίσαμε τις στρατηγικές που βασίζονται σε κάποιο νοητικό συλλογισμό του υποκειμένου (ανεξάρτητα από την ορθότητα της απάντησής του στο έργο) [βλ. και Clarke & Roche, 2009].

Η συνολική επίδοση (σε όλα τα έργα του ερωτηματολογίου) της Α΄ Γυμνασίου (*μέση θέση*=35,17) συγκρίθηκε με της Γ΄ (*μέση θέση*=43,70) με το κριτήριο Mann-Whitney και δε βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές, U=590,00, z=-1,59, p=0,111.

Επίσης, όσον αφορά το σύνολο όλων των έγκυρων εξηγήσεων από την Α΄ (N=203) και την Γ΄ (N=384) Γυμνασίου, βρέθηκαν περισσότερες εννοιολογικές στρατηγικές στην Α΄ απ' ό,τι στην Γ΄ Γυμνασίου [159 (78,3%) και 204 (53,1%), αντίστοιχα]. Επιπλέον, στην Α΄ Γυμνασίου βρέθηκαν λιγότερες διαδικαστικές στρατηγικές σε σχέση με την Γ΄ Γυμνασίου [44 (21,7%) και 180 (46,9%), αντίστοιχα]. Η διαφορά αυτή ελέγχθηκε με το κριτήριο χ^2 και βρέθηκε στατιστικά σημαντική, $\chi^2(1)= 35,737$, p=0,000.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη συχνότητα και το ποσοστό των απαντήσεων (Σ, Μ.Σ., Λ) για κάθε κατηγορία έργων ξεχωριστά. Για κάθε ένα έργο συγκρίναμε τις επιδόσεις των δύο τάξεων με το κριτήριο Mann-Whitney. Για λόγους οικονομίας χώρου, θα αναφέρουμε μόνο τις διαφορές που βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα έργα σχετικά με τις αναπαραστάσεις. Από τα στοιχεία του Πίνακα 1 φαίνεται ότι και οι δύο ομάδες είχαν καλή επίδοση στα έργα 1 και 3, τα οποία ενδεχομένως τους είναι πιο οικεία από τη

σχολική τους εμπειρία. Μάλιστα, στο έργο 3, η Α΄ Γυμνασίου είχε σημαντικά καλύτερη επίδοση από την Γ΄ Γυμνασίου, U= 630,00, z= -2,295, p=0,022 (*μέση θέση:* 44,50 και 38,10 αντίστοιχα). Είναι ενδιαφέρον, ωστόσο, το εύρημα ότι το 20% της Α΄ Γυμνασίου και το 26% της Γ΄ Γυμνασίου απέτυχε στο Έργο 2, παραβλέποντας το γεγονός ότι για να θεωρηθεί ένα κομμάτι το 1/3 του σχήματος, δεν αρκεί το σχήμα να είναι χωρισμένο σε 3 μέρη- πρέπει τα μέρη αυτά να είναι ίσα. Το έργο 4 προκάλεσε πολλές λανθασμένες απαντήσεις και από τις δύο ομάδες, αλλά κυρίως από την Α΄ Γυμνασίου. Πράγματι, η Γ΄ Γυμνασίου είχε σημαντικά καλύτερη επίδοση από την Α΄ Γυμνασίου, U= 560,00, z= -2,123, p=0,34, (*μέση θέση:* 44,20 και 34,33, αντίστοιχα).

Έργο	Τάξη	Απάντηση			Σύνολο
		Λ	Μ.Σ.	Σ	
1.Το 1/4 σε κύκλο χωρισμένο.	Α΄	0 (0,0%)	0 (0,0%)	30 (100%)	30 (100%)
	Γ΄	2 (4,0%)	0 (0,0%)	48 (96,0%)	50 (100%)
2. Αξιολόγηση αναπαράστασης	Α΄	6 (20,0%)	1 (3,3%)	23 (76,7%)	30 (100%)
	Γ΄	13 (26,0%)	0 (0,0%)	37 (74,0%)	50 (100%)
3. Κατασκευή αναπαράστασης (2/3)	Α΄	0 (0,0%)	0 (0,0%)	30 (100%)	30 (100%)
	Γ΄	8 (16,0%)	0 (0,0%)	42 (84,0%)	50 (100%)
4. Κατασκευή αναπαράστασης (5/3)	Α΄	20 (66,7%)	0 (0,0%)	10 (33,3%)	30 (100%)
	Γ΄	21 (42,0%)	0 (0,0%)	29 (58,0%)	50 (100%)
5.Τα 3/4, 6/7 στην ευθεία	Α΄	21 (70,0%)	1 (3,3%)	8 (26,7%)	30 (100%)
	Γ΄	23 (46,0%)	7 (14,0%)	20 (40,0%)	50 (100%)
6.Τα 1/9, 0,7 και 3/2 στην ευθεία	Α΄	23 (76,7%)	5 (16,7%)	2 (6,7%)	30 (100%)
	Γ΄	17 (34,0%)	10 (20,0%)	23 (46,0%)	50 (100%)

Πίνακας 1: Συχνότητες (ποσοστά%) των απαντήσεων για τα έργα σχετικά με τις αναπαραστάσεις κλασμάτων, ανά τάξη

Μια πρώτη εξέταση των εξηγήσεων δόθηκαν στο έργο 4 δείχνει ότι οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου αποτύγχαναν συστηματικά γιατί προσπαθούσαν να αναπαραστήσουν το κλάσμα με την κατασκευή ενός μόνο και όχι δύο σχημάτων (π.χ. «Πώς είναι δυνατόν να επιλέξω πέντε κομμάτια όταν το σχήμα έχει μόνο τρία;»). Από την άλλη, οι μαθητές της Γ΄, που απάντησαν σωστά, μετέτρεπαν το καταχρηστικό κλάσμα σε μεικτό αριθμό, διαδικαστική στρατηγική που διευκόλυνε τη σχηματική αναπαράσταση του κλάσματος. Τέλος, τα έργα 5, 6 προκάλεσαν τις λιγότερες σωστές απαντήσεις. Η αναπαράσταση κλασμάτων στην ευθεία αποδείχθηκε απαιτητική και

για τις δύο ομάδες. Ωστόσο, στο έργο 6, η Γ΄ Γυμνασίου (*μέση θέση:* 47,85) είχε σημαντικά καλύτερη επίδοση από την Α΄ Γυμνασίου (*μέση θέση:* 28,25), U= 382,50, z= -3,990, p=0,000. Μια πρώτη εξέταση των εξηγήσεων που δόθηκαν στο έργο 6 έδειξε ότι τα παιδιά και των δύο τάξεων που απάντησαν σωστά κατά κύριο λόγο μετέτρεπαν όλους τους αριθμούς στη δεκαδική τους μορφή ή σε ομώνυμα κλάσματα, επιδεικνύοντας μεγαλύτερη διαδικαστική ευχέρεια.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα έργα σχετικά με τη σύγκριση, τη διάταξη, καθώς και την πυκνή διάταξη των κλασμάτων.

Έργο	Τάξη	Απάντηση			Σύνολο
		Λ	Μ.Σ.	Σ	
1.Ομώνυμα	Α΄	3 (10,0%)	0 (0,0%)	27 (90,0%)	30 (100%)
	Γ΄	2 (4,0%)	1 (2,0%)	47 (94,0%)	50 (100%)
2.Ίδιοι αριθμητές	Α΄	3 (10,0%)	0 (0,0%)	27 (90,0%)	30 (100%)
	Γ΄	2 (4,0%)	1 (2,0%)	47 (94,0%)	50 (100%)
3.Σύγκριση με αριθμό αναφοράς το 1	Α΄	1 (3,3%)	8 (26,7%)	21 (70,0%)	30 (100%)
	Γ΄	16 (32,0%)	6 (12,0%)	28 (56,0%)	50 (100%)
4.Σύγκριση με αριθμό αναφοράς το 1/2	Α΄	1 (3,3%)	16 (53,3%)	13 (43,3%)	30 (100%)
	Γ΄	15 (30,0%)	12 (24,0%)	23 (46,0%)	50 (100%)
5. Σύγκριση με απλοποίηση	Α΄	0 (0,0%)	10 (33,3%)	20 (66,7%)	30 (100%)
	Γ΄	9 (18,0%)	8 (16,0%)	33 (66,0%)	50 (100%)
6.Διάταξη των 3/4, 1, 6/7	Α΄	7 (23,3%)	3 (10,0%)	20 (66,7%)	30 (100%)
	Γ΄	12 (24,0%)	4 (8,0%)	34 (68,0%)	50 (100%)
7.Διάταξη των 1/9, 0,7, 3/2	Α΄	4 (13,3%)	11 (36,7%)	15 (50,0%)	30 (100%)
	Γ΄	5 (10,0%)	15 (30,0%)	30 (60,0%)	50 (100%)
8.Πυκνή διάταξη κλασμάτων	Α΄	21 (70,0%)	5 (16,7%)	4 (13,3%)	30 (100%)
	Γ΄	19 (38,0%)	15 (30,0%)	16 (32,0%)	50 (100%)

Πίνακας 2: Συχνότητες (ποσοστά%) των απαντήσεων για τα έργα σύγκρισης, διάταξης, και πυκνής διάταξης, ανά τάξη

Από τα στοιχεία του Πίνακα 2 φαίνεται ότι τόσο η Α΄, όσο και η Γ΄ Γυμνασίου απάντησαν με μεγάλη συχνότητα σωστά στη σύγκριση κλασμάτων, όταν αυτά είχαν ίσους αριθμητές ή παρονομαστές. Η απόδοση, ιδιαίτερα των παιδιών της Γ΄

Γυμνασίου, δεν ήταν το ίδιο καλή στα έργα που απαιτούσαν εννοιολογική στρατηγική σύγκρισης με αριθμό αναφοράς το 1/2 ή το 1. Ωστόσο, περισσότερα παιδιά φαίνεται ότι κατάφεραν να διακρίνουν τη δυνατότητα απλοποίησης του κλάσματος. Επίσης, τα παιδιά και των δύο ομάδων ανταποκρίθηκαν σχετικά καλά στα έργα των διατάξεων, αλλά η πυκνή διάταξη των κλασμάτων δυσκόλεψε σημαντικά την Γ΄ Γυμνασίου, όπου μόνο το ένα τρίτο του δείγματος απάντησε επιτυχώς και ακόμη περισσότερο την Α΄, όπου μόνο το 13% έδωσε σωστή απάντηση. Στο έργο αυτό, η επίδοση της Γ΄ Γυμνασίου (*μέση θέση*: 45,50) ήταν σημαντικά καλύτερη από αυτήν της Α΄ (*μέση θέση*: 32, 17), U=500,00, z=0,007, p=0,007. Μια πρώτη εξέταση των εξηγήσεων που έδωσαν τα παιδιά στο έργο αυτό έδειξε ότι τα παιδιά της Α΄ Γυμνασίου κατέφευγαν κυρίως σε αναλογίες με τους φυσικούς αριθμούς (π.χ. «μετά το 2 έρχεται το 3»), ενώ τα παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου μετέτρεπαν τα κλάσματα σε ισοδύναμα, αναφέροντας ότι υπάρχουν «κι άλλοι», ή «πάρα πολλοί» αριθμοί ενδιάμεσα. Μια μικρή μερίδα μαθητών αναφέρθηκε στην απειρία, δίνοντας μια πιο γενική εξήγηση (π.χ. «Υπάρχουν άπειροι αριθμοί γιατί αν τα μετατρέψουμε σε ισοδύναμα κλάσματα με μεγαλύτερους παρανομαστές ή σε δεκαδικούς πάντα θα βρίσκουμε άλλους αριθμούς ανάμεσα»).

Έργο	Τάξη	Απάντηση			Σύνολο
		Λ	Μ.Σ.	Σ	
1.Πρόσθεση	Α΄	4 (13,3%)	0 (0,0%)	26 (86,7%)	30 (100%)
	Γ΄	2 (4,0%)	0 (0,0%)	48 (96,0%)	50 (100%)
2.Αφαίρεση	Α΄	9 (30,0%)	0 (0,0%)	21 (70,0%)	30 (100%)
	Γ΄	8 (16,0%)	0 (0,0%)	42 (84,0%)	50 (100%)
3.Πολ/μός	Α΄	7 (23,3%)	0 (0,0%)	23 (76,7%)	30 (100%)
	Γ΄	8(16,0%)	0 (0,0%)	42 (84,0%)	50 (100%)
4.Διαίρεση	Α΄	14 (46,7)	0 (0,0%)	16 (53,3%)	30 (100%)
	Γ΄	13 (26,0%)	0 (0,0%)	37 (74,0%)	50 (100%)
5.Πολ/μός, συμβατό	Α΄	0 (0,0%)	0 (0,0%)	30 (100%)	30 (100%)
	Γ΄	7 (14,0%)	0 (0,0%)	43 (86,0%)	50 (100%)
6.Διαίρεση, συμβατό	Α΄	0 (0,0%)	0 (0,0%)	30 (100%)	30 (100%)
	Γ΄	5 (10,0%)	0 (0,0%)	45 (90,0%)	50 (100%)
7.Πολ/μός, ασύμβατο	Α΄	17 (56,7%)	0 (0,0%)	13 (43,3%)	30 (100%)
	Γ΄	21 (42,0%)	0 (0,0%)	29 (58,0%)	50 (100%)

8.Διαίρεση, ασύμβατο	Α΄	18 (60%)	0 (0,0%)	12 (40%)	30 (100%)
	Γ΄	25 (50%)	0 (0,0%)	25 (50%)	50 (100%)

Πίνακας 3: Συχνότητες (ποσοστά%) των απαντήσεων για τα έργα σχετικά με τις πράξεις κλασμάτων, ανά τάξη

Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα έργα σχετικά με τις πράξεις.

Από τα στοιχεία του Πίνακα 3 φαίνεται ότι και οι δύο τάξεις είχαν καλή επίδοση στα έργα που αφορούν την εκτέλεση πράξεων, με τη συχνότητα των σωστών απαντήσεων να μειώνεται στην περίπτωση της διαίρεσης κλασμάτων για την Α΄ Γυμνασίου. Και οι δύο τάξεις προσδιόρισαν με μεγάλη ακρίβεια (που έφτασε στο 100% στην Α΄ Γυμνασίου) ποια πράξη έπρεπε να εκτελεστεί για να ισχύει μια δεδομένη ισότητα, όταν αυτό είναι συμβατό με τη «συμπεριφορά» του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στους φυσικούς αριθμούς. Ωστόσο, η εικόνα αυτή αντιστράφηκε στην αντίθετη περίπτωση, όπου και για τις δύο τάξεις η επικρατούσα απάντηση είναι η λανθασμένη. Φαίνεται ότι και οι δύο τάξεις τα κατάφεραν με τη διαδικαστική πλευρά των πράξεων, αλλά δυσκολεύτηκαν με τη συγκεκριμένη εννοιολογική.

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα έργα σχετικά με το κλάσμα ως λόγο.

Έργο	Τάξη	Απάντηση			Σύνολο
		Λ	Μ.Σ.	Σ	
Έργο 1 (πίτσα)	Α΄	15 (50,0%)	0 (0,0%)	50 (50,0%)	30 (100%)
	Γ΄	23 (46,0%)	0 (0,0%)	27 (54,0%)	50 (100%)
Έργο 2 (βυσσινάδα)	Α΄	9 (30,0%)	1 (3,3%)	20 (66,7%)	30 (100%)
	Γ΄	9 (18,0%)	10 (20,0%)	31 (62,0%)	50 (100%)

Πίνακας 4: Συχνότητες (ποσοστά%) των απαντήσεων για τα έργα σχετικά με το κλάσμα ως λόγο, ανά τάξη.

Από τα στοιχεία του Πίνακα 4 φαίνεται ότι οι δύο ομάδες τα πήγαν σχετικά καλά στο έργο 2, αλλά το έργο 1 προκάλεσε λανθασμένες απαντήσεις από περίπου τα μισά παιδιά σε κάθε ομάδα. Εξετάζοντας τις εξηγήσεις, παρατηρήσαμε ότι, ενώ στο έργο 2 παρουσιάστηκε ένα σχετικά ευρύ φάσμα διαδικαστικών στρατηγικών (π.χ. μετατροπή όλων των λόγων σε δεκαδικούς και σύγκρισή τους, αναγωγή όλων των ποσοτήτων στην ίδια ποσότητα νερού), στο έργο 1 οι λανθασμένες απαντήσεις βασίζονταν στο συλλογισμό «Είναι σωστό, γιατί το 4 δείχνει στα πόσα κομμάτια την έκοψε και το 3 δείχνει πόσα κομμάτια έφαγε».

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Παρουσιάσαμε μια πρώτη ανάλυση των δεδομένων μιας εμπειρικής μελέτης που εξέτασε την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση παιδιών της Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου σχετικά με τα κλάσματα. Ασφαλώς, απαιτείται πιο εκτεταμένη ποσοτική και εις βάθος ποιοτική ανάλυση προκειμένου να εξαχθούν ισχυρά συμπεράσματα, ωστόσο, τα αποτελέσματά μας επιτρέπουν τη διατύπωση ορισμένων αρχικών συμπερασμάτων.

Καταρχήν, κοιτάζοντας την επίδοση των δύο ομάδων στα έργα του ερωτηματολογίου συνολικά, βρήκαμε ότι δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές στην κατανόηση του κλάσματος από την Α΄ μέχρι την Γ΄ Γυμνασίου. Ο ισχυρισμός αυτός είναι, εν μέρει, σωστός: Συγκρίνοντας την επίδοση των δύο ομάδων ανά έργο, βρήκαμε σημαντικές διαφορές στην επίδοση σε μόνο 4 από τα 24 έργα. Φαίνεται ότι η διαδικαστική γνώση για τις πράξεις με κλάσματα, καθώς και για τις συγκρίσεις και διατάξεις έχει σε μεγάλο βαθμό κατακτηθεί ήδη στην Α΄ Γυμνασίου και δε μεταβάλλεται σημαντικά μέχρι την Γ΄ Γυμνασίου. Αυτό ενδεχομένως σημαίνει ότι το έλλειμμα που προκαλείται από τη μη έγκαιρη κατάκτηση της διαδικαστικής γνωσης, συνοδεύει τους μαθητές και μελλοντικά. Βέβαια, ένα τέτοιου είδους ερώτημα απαιτεί μια μακροχρόνια μελέτη για να απαντηθεί.

Όσον αφορά τις πράξεις, είναι μάλλον προφανές ότι η εννοιολογική γνώση, τουλάχιστον αυτή που εξετάσαμε, αποτελεί ένα ζητούμενο και για τις δύο ηλικιακές ομάδες. Συγκεκριμένα, η επίδραση των πράξεων στους αριθμούς δεν προβλέπεται ικανοποιητικά από τα παιδιά, όταν οι πράξεις δε «συμπεριφέρονται» όπως στους φυσικούς (Vamvakoussi et al., 2012).

Σχετικά με τις συγκρίσεις και τις διατάξεις, φαίνεται ότι όταν δεν υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν διαδικαστικές στρατηγικές, παρατηρείται πτώση της επίδοσης και στις δύο ομάδες, η οποία είναι ενδεικτική της δυσκολίας που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εφαρμογή εννοιολογικών στρατηγικών. Με τα συγκεκριμένα κλάσματα που χρησιμοποιήσαμε (στα οποία οι όροι του ενός ήταν μεγαλύτεροι από τους όρους τους άλλου), ενδεχομένως κάποια παιδιά υπέπεσαν στο λάθος που οφείλεται στην παρανόηση «όσο μεγαλύτεροι οι όροι, τόσο μεγαλύτερο το κλάσμα». Η παρανόηση αυτή αποτελεί ένα παράδειγμα της μεταφοράς χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των φυσικών στους μη φυσικούς αριθμούς (Vamvakoussi et al., 2012). Το φαινόμενο αυτό ήταν πιο έντονο στο έργο της πυκνής διάταξης των κλασμάτων. Ωστόσο, εδώ η Γ΄ Γυμνασίου είχε σημαντικά καλύτερη επίδοση από την Α΄ Γυμνασίου. Από τις εξηγήσεις των παιδιών που απάντησαν σωστά προκύπτει ότι αυτά αξιοποίησαν με μεγαλύτερη ευχέρεια τη διαδικαστική τους γνώση (π.χ. μετατροπή κλασμάτων σε ισοδύναμα), γεγονός που διευκόλυνε την αντιμετώπιση αυτού του εννοιολογικού έργου, όπως θα προέβλεπαν οι Rittle-Johnson και συνεργάτες (2001).

Μια παρόμοια κατάσταση φαίνεται να συμβαίνει στα έργα σχετικά με το κλάσμα ως λόγο: Η διαδικαστική γνώση φαίνεται να βοηθά όσα παιδιά τη χρησιμοποιούν με ευχέρεια να απαντήσουν σωστά στο έργο με τη βυσσινάδα. Ωστόσο, στο έργο με την πίτσα, το οποίο δεν προσφέρεται για τη χρήση διαδικαστικών στρατηγικών, τα μισά παιδιά από κάθε ομάδα απαντούν λανθασμένα (συμπεριλαμβανομένων και του 16,7% και του 8% των παιδιών από την Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου, αντίστοιχα, που είχαν απαντήσει σωστά στο προηγούμενο). Φαίνεται ότι η κατανόηση του κλάσματος ως λόγου αποτελεί επίσης ένα ζητούμενο και για τις δύο ηλικιακές ομάδες.

Το έλλειμμα σε εννοιολογική γνώση και των δύο ομάδων γίνεται πιο φανερό στα έργα με τις αναπαραστάσεις. Και οι δύο ομάδες τα πήγαν καλά μόνο σε οικεία έργα – παρόλ'αυτά, περίπου το ένα τέταρτο των παιδιών της κάθε ομάδες έδωσαν λανθασμένη απάντηση στην αξιολόγηση μιας οικείας αναπαράστασης (το τρίγωνο, χωρισμένο σε 3 άνισα μέρη). Επιπλέον, η αναπαράσταση της ευθείας προκάλεσε πολλά λάθη, με την Γ΄ Γυμνασίου να τα καταφέρνει καλύτερα, αξιοποιώντας διαδικαστικές στρατηγικές. Η αναπαραστατική ευχέρεια των παιδιών φαίνεται εξαιρετικά περιορισμένη. Τέλος, από τα αποτελέσματά μας διαφαίνεται ότι τα παιδιά της Α΄ Γυμνασίου τείνουν να καταφεύγουν περισσότερο σε εννοιολογικές και λιγότερο σε διαδικαστικές στρατηγικές, σε σχέση με τα παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου. Θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι αυτό οφείλεται στη μεγαλύτερη διαδικαστική ευχέρεια που διαθέτουν τα μεγαλύτερα παιδιά. Ωστόσο, μία πιθανή εξήγηση είναι ότι η διδασκαλία δίνει σαφώς μεγαλύτερη έμφαση στη διαδικαστική γνώση, παραβλέποντας την εννοιολογική (Moss, 1999) – και φαίνεται ότι αυτή η μεγαλύτερη ευχέρεια συχνά «καμουφλάρει» το έλλειμμα στην εννοιολογική γνώση, που όμως, συνεχίζει να υφίσταται.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clarke, D. M., & Roche A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72* (1) (June 12): 127-138.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 60,* 37-69.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 122-147.

Rittle-Johnson, & B., Schneider, M. (in press). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh & A. Dowker (Eds), *Oxford Handbook of Numerical Cognition*. Oxford Press.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*, 346-362.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*, 344-355.

ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΠΡΩΤΟΕΤΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΤΟΥ ΤΕΙ ΑΜΘ

[1]Περσεφόνη Πολυχρονίδου, [2]Βασίλειος Σάλτας, [3]Ιωάννης Πετασάκης, [4]Βασίλειος Τσιάντος

[1,3]Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής, ΤΕΙ ΑΜΘ, [2]Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών, [4]Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Τ.Ε.

[1]polychr@teikav.edu.gr, [2]coin_kav@otenet.gr, [3]jpetasakis@hotmail.com, [4]tsianto@teikav.edu.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία μελετά τα αποτελέσματα της αξιολόγησης του επιπέδου των μαθηματικών των πρωτοετών φοιτητών της Σχολής Τεχνολογικών Εφαρμογών του ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης (ΑΜΘ). Συγκεντρώθηκαν και αναλύθηκαν τα αποτελέσματα της αξιολόγησης των πρωτοετών φοιτητών της Σχολής Τεχνολογικών Εφαρμογών και συγκεκριμένα προσδιορίστηκε το επίπεδο των μαθηματικών σχετικά με τις γνώσεις και δεξιότητες που έχουν αποκτηθεί ή όχι στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση των φοιτητών. Χρησιμοποιήθηκε ένα ερωτηματολόγιο με 20 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής γενικών μαθηματικών γνώσεων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, το οποίο απαντήθηκε από πρωτοετείς φοιτητές των τμημάτων της Σχολής. Οι συμμετέχοντες φοιτητές ομαδοποιήθηκαν σε δύο βασικές κατηγορίες ανάλογα με το λύκειο αποφοίτησής τους: ΕΠΑΛ – ΤΕΕ και Ενιαίο Λύκειο. Οι δύο αυτές ομάδες χωρίστηκαν σε υποομάδες ανάλογα με την ειδικότητα (Μηχανολογία, Ηλεκτρολογία και Βιομηχανική Πληροφορική). Οι δε ερωτήσεις ομαδοποιήθηκαν ως ακολούθως: άλγεβρα, ρίζες, τριγωνομετρία και ανάλυση. Η στατιστική μελέτη των απαντήσεων των ερωτηθέντων φοιτητών θα έχει ως αποτέλεσμα την πρόταση για αναδιοργάνωση ή όχι του τρόπου και του όγκου διδασκαλίας βασικών μαθηματικών εννοιών στην Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος ΑΜΘ.

Λέξεις Κλειδιά: διδασκαλία μαθηματικών, έρευνα, φοιτητή

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έρευνα στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να οριστεί ως σημαντική συγκέντρωση πληροφοριών για ένα ενδεχόμενο, με σκοπό να βοηθήσει ή να επικυρώσει επιστημονικές μελέτες. Το περιεχόμενό της επικεντρώνεται στη διδασκαλία και εμπέδωση των μαθηματικών γνώσεων, στον κοινωνικό ρόλο των μαθηματικών, στις διδακτικές καταστάσεις των μαθηματικών και στη σχέση των μαθηματικών με άλλες επιστήμες [2].

Τα τελευταία χρόνια οι έρευνες που διεξάγονται στο αντικείμενο της διδακτικής των μαθηματικών αυξάνονται συνεχώς [4]. Τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών, καθώς και τα ευρήματα από σχετικές έρευνες σε άλλα επιστημονικά πεδία, όπως η γνωστική

ψυχολογία, χρησιμοποιούνται για να αναγνωρίσουμε επιτυχείς στρατηγικές διδασκαλίας και πρακτικές. Ένας μεγάλος αριθμός από αυτές τις έρευνες πραγματοποιήθηκε με σκοπό την μελέτη των πιθανών επιδράσεων στην επιτυχία των φοιτητών ([5] - [14]. Από την άλλη πλευρά, πολλές μελέτες έχουν επιβεβαιώσει την σχέση μεταξύ προηγούμενης γνώσης και βαθμολογίας ([15] -[19]).

Στην παρούσα έρευνα προσδιορίζεται το γνωστικό μαθηματικό επίπεδο σχετικό με τις γνώσεις και δεξιότητες που έχουν αποκτηθεί ή όχι στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση από τους πρωτοετείς φοιτητές της ΣΤΕΦ. Η μελέτη των απαντήσεων των ερωτηθέντων φοιτητών θα έχει ως αποτέλεσμα την πρόταση για αναδιοργάνωση ή όχι του τρόπου διδασκαλίας βασικών μαθηματικών εννοιών στο ΤΕΙ ΑΜΘ και συγκεκριμένα στη Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών.

2. ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Σκοπός της εν λόγω έρευνας ήταν η αξιολόγηση των μαθηματικών γνώσεων που έχουν αποκτήσει οι πρωτοετείς φοιτητές της Σχολής Τεχνολογικών Εφαρμογών του ΤΕΙ ΑΜΘ, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Συνεπώς αφορά την αξιολόγηση του ενός από τους τρεις συμμετέχοντας στην εκπαιδευτικής διαδικασία, δηλαδή του φοιτητή (οι άλλοι δύο είναι ο καθηγητής και το σύστημα).

Οι δε επιμέρους στόχοι της έρευνας επικεντρώνονται στα ακόλουθα: αποτύπωση των μαθηματικών γνώσεων των νεοεισαχθέντων φοιτητών, μελέτη επίδρασης παραγόντων στην ικανότητα επίλυσης ασκήσεων, σύγκριση της ικανότητας επίλυσης ασκήσεων, σύνδεση των γνώσεων Λυκείου με τα Μαθηματικά Ι της Σ.Τ.ΕΦ. – ΤΕΙ ΑΜΘ και αναμόρφωση του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών της Σ.Τ.ΕΦ. – ΤΕΙ ΑΜΘ.

Σχετικά με την ανακάλυψη νέων γνώσεων για τις διάφορες πλευρές της διδασκαλίας των μαθηματικών, τέθηκαν και επιπλέον στόχοι [3]: εύρεση ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της εκπαιδευτικής διαδικασίας των μαθηματικών, με απώτερο σκοπό την αύξηση της αποτελεσματικότητάς τους, εύρεση φιλοσοφικών – μεθοδολογικών βάσεων της αναλυτικής – συνδυαστικής μεθόδου στη διδασκαλία των μαθηματικών και μελέτη της λογικής σειράς των μαθηματικών και την επιρροή τους πάνω στις μαθηματικές ενέργειες κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο της συμπλήρωσης ερωτηματολογίου, το οποίο αποτελούταν από 20 ερωτήσεις - ασκήσεις. Κάθε ερώτηση περιείχε μια άσκηση μαθηματικών σε επίπεδο δυσκολίας αντίστοιχο με την ύλη που έχει διδαχθεί ο φοιτητής στο Γυμνάσιο και το Λύκειο. Στη συνέχεια του ζητείται να εκτιμήσει αν έχει τη δυνατότητα να την επιλύσει και στη συνέχεια να επιλέξει μια από τις τέσσερις δυνατές απαντήσεις: «Ναι», «Ναι με σχετική βοήθεια», «Μάλλον όχι» και «Όχι».

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν οι φοιτητές που παρακολουθούσαν το μάθημα των Μαθηματικών Ι στο Α΄ εξάμηνο των σπουδών τους το Ακαδημαϊκό Έτος 2009-2010. Κατά τη διάρκεια της δεύτερης εβδομάδας των μαθημάτων του χειμερινού και του εαρινού εξαμήνου μοιράστηκε το ερωτηματολόγιο στην αίθουσα και τους ζητήθηκε να το συμπληρώσουν.

Η συμμετοχή τους στην έρευνα δεν ήταν υποχρεωτική. Στην έρευνα συμμετείχαν 116 φοιτητές των Τμημάτων Μηχανολογίας, Ηλεκτρολογίας και Βιομηχανικής Πληροφορικής της Σ.Τ.ΕΦ. του Τ.Ε.Ι. ΑΜΘ.

Η στατιστική επεξεργασία των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με το λογισμικό πρόγραμμα SPSS 17 και οι μέθοδοι που εφαρμόστηκαν ήταν: η περιγραφική στατιστική, ο έλεγχος t για σύγκριση δύο ανεξάρτητων δειγμάτων, η ανάλυση διακύμανσης και ο έλεγχος συσχέτισης δύο δειγμάτων.

Στις περιπτώσεις που δεν ικανοποιούνταν οι προϋποθέσεις εκτέλεσης ενός παραμετρικού ελέγχου εκτελούταν ο αντίστοιχος μη παραμετρικός [1].

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η κατανομή των φοιτητών που συμμετείχαν στην έρευνα ανά Τμήμα και εξάμηνο παρουσιάζεται στον Πίνακα 1. Παρατηρούμε ότι περίπου το 41% του δείγματος είναι από το τμήμα της, Ηλεκτρολογίας, το 35% από το τμήμα της Μηχανολογίας και το 24% από αυτό της Βιομηχανικής Πληροφορικής.

Πίνακας 1: Κατανομή του δείγματος ανά Τμήμα και εξάμηνο

		Εξάμηνο		
		Χειμερινό	Εαρινό	Σύνολο
Τμήμα	Μηχανολογία	31	10	41
	Ηλεκτρολογία	47	0	47
	Βιομηχανική Πληροφορική	16	12	28
Σύνολο		94	22	116

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα προέρχονται κατά 56% από Γενικό Λύκειο και κατά 44% από ΕΠΑΛ ή ΤΕΕ. Η αναλόγια των αποφοίτων κάθε τύπου Λυκείου στα τρία Τμήματα της ΣΤΕΦ είναι παραπλήσια (Πίνακας 2).

Πίνακας 2: Κατανομή του δείγματος ανά Λύκειο αποφοίτησης

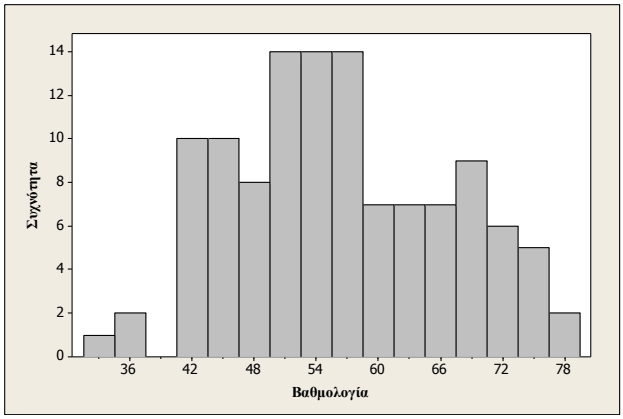
		Συχνότητα	Ποσοστό
Τύπος Λυκείου	Ε.Π.Α.Λ. – Τ.Ε.Ε.	51	44,0
	Γενικό Λύκειο	65	56,0
	Σύνολο	116	100,0

Για την επεξεργασία των απαντήσεων των φοιτητών αντιστοιχήθηκε, σε κάθε μια από τις τέσσερις δυνατές απαντήσεις της κάθε ερώτηση, ένας βαθμός από το 1 έως το 4, όπου: 1 – Όχι, 2 – Μάλλον όχι, 3 – Ναι με σχετική βοήθεια και 4 – Ναι.

Στη συνέχεια δημιουργήθηκε μια νέα μεταβλητή η οποία ισούται με το άθροισμα των 20 αυτών ερωτήσεων και δείχνει συνολικά την ευχέρεια των φοιτητών να λύσουν ασκήσεις μαθηματικών επιπέδου αντίστοιχου του σχολείου. Η νέα μεταβλητή που προκύπτει, την οποία ονομάζουμε «βαθμολογία», μπορεί να πάρει τιμές από 20, εάν ο φοιτητής δηλώσει ότι δεν μπορεί να λύσει καμία από τις ασκήσεις, έως 80, εάν μπορεί να τις λύσει όλες.

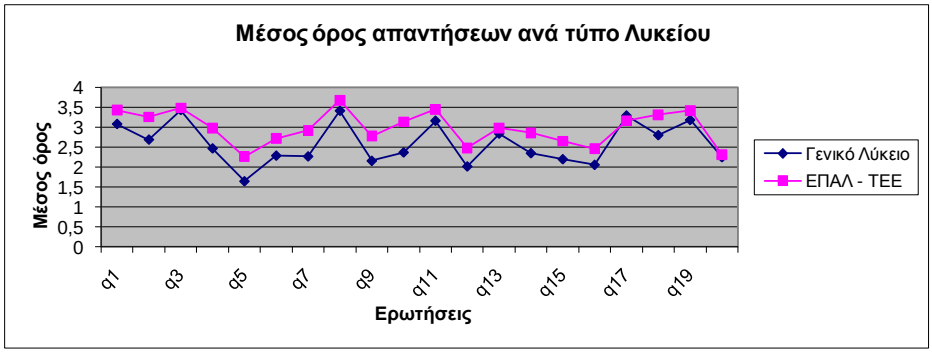
Ο μέσος όρος της βαθμολογίας είναι 56,3 με τυπική απόκλιση 10,2. Η ελάχιστη βαθμολογία που έλαβε κάποιος φοιτητής από το ερωτηματολόγιο είναι 34 και η μέγιστη 77 (Σχήμα 1).

Σχήμα 1: Ιστόγραμμα της βαθμολογίας



Επόμενο βήμα στην επεξεργασία των δεδομένων ήταν ο διαχωρισμός των φοιτητών βάσει του Λυκείου αποφοίτησης. Στο γράφημα του σχήματος 2 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι των απαντήσεων για κάθε μια από τις 20 ερωτήσεις, ξεχωριστά για κάθε τύπο Λυκείου. Τα qi, i=1,…,20 είναι οι 20 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου.

Σχήμα 2: Σχηματική αναπαράσταση του μέσου όρου απαντήσεων σε κάθε ερώτηση ανά τύπο Λυκείου



Υπάρχει συνέπεια στις απαντήσεις, δηλαδή στις ερωτήσεις όπου οι απόφοιτοι ΕΠΑΛ-ΤΕΕ έχουν χαμηλούς μέσους όρους, το ίδιο συμβαίνει και με τους απόφοιτους των Ενιαίων Λυκείων και αντίστροφα.

Αφού διαχωρίστηκε το δείγμα σε δύο κατηγορίες, δηλαδή σε απόφοιτους ΕΠΑΛ-ΤΕΕ ή Ενιαίου Λυκείου, στη συνέχεια συγκρίθηκαν οι βαθμολογίες τους. Ο μέσος όρος βαθμολογίας για τους απόφοιτους ΕΠΑΛ ή ΤΕΕ ήταν 51,9 και αντίστοιχα για αυτούς του Ενιαίου Λυκείου 59,7. Ο μέσος όρος βαθμολογίας ακολουθεί κανονική κατανομή διότι η τιμή του Kolmogorov-Smirnov τεστ είναι 0,065 με 116 βαθμούς ελευθερίας και p-value>0,200. Με τη βοήθεια της παραμετρικής δοκιμασίας t-test για ανεξάρτητα δείγματα διαπιστώθηκε ότι αυτή η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 1‰ (Πίνακας 3).

Πίνακας 3: Σύγκριση βαθμολογίας ανά τύπο Λυκείου αποφοίτησης

Λύκειο Αποφοίτησης	Μέσος όρος βαθμολογίας	Τυπική απόκλιση
ΕΠΑΛ-ΤΕΕ	51,9	8,3
Ενιαίο Λύκειο	59,7	10,4

Στον Πίνακα 4 φαίνεται ότι η μέση βαθμολογία των Πανελλήνιων εξετάσεων των αποφοίτων ΕΠΑΛ-ΤΕΕ στα Μαθηματικά είναι υψηλότερη από την αντίστοιχη των αποφοίτων Ενιαίων Λυκείων. Ο βαθμός αποφοίτησης ακολουθεί κανονική κατανομή (Kolmogorov-Smirnov τεστ = 0,075, βαθμοί ελευθερίας=107 και p-value=0,165). Με τη βοήθεια της δοκιμασίας t-test για ανεξάρτητα δείγματα βρίσκουμε ότι η διαφορά εμφανίζεται σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 1‰. Αυτό όμως δημιουργεί μια πλασματική εικόνα ως προς την πραγματική ικανότητά τους στην επίλυση μαθηματικών ασκήσεων διότι τα θέματα των εξετάσεων στους δύο τύπους Λυκείων έχουν διαφορετικό συντελεστή δυσκολίας.

Πίνακας 4: Σύγκριση βαθμού Μαθηματικών στις Πανελλήνιες εξετάσεις

Λύκειο Αποφοίτησης	Βαθμός Μαθηματικών στις Πανελλήνιες	Τυπική απόκλιση

ΕΠΑΛ-ΤΕΕ	12,2	4,3
Ενιαίο Λύκειο	8,1	4,6

Στη συνέχεια χωρίστηκαν οι 20 ερωτήσεις σε 4 ομάδες ασκήσεων, ανάλογα με το αντικείμενό τους και υπολογίστηκε ο μέσο όρο της κάθε ομάδας ξεχωριστά. Οι εν λόγω ομάδες είναι οι ακόλουθες: Άλγεβρα, Ρίζες, Τριγωνομετρία και Ανάλυση.

Η ομάδα στην οποία αντιστοιχεί η κάθε ερώτηση δίνεται στον Πίνακα 5. Τον υψηλότερο μέσο όρο στις απαντήσεις έχουν οι ερωτήσεις που σχετίζονται με τις Ρίζες ενώ τον χαμηλότερο η ομάδα της Ανάλυσης. Κάθε ομάδα ασκήσεων αποτελείται από πέντε ερωτήσεις.

Πίνακας 5: Σύγκριση μέσου όρου απαντήσεων σε κάθε μια από τις τέσσερις ομάδες ασκήσεων

Ομάδα ερωτήσεων	Ερωτήσεις	Μέσος όρος απαντήσεων	Τυπική απόκλιση
Άλγεβρα	1,2,3,4,5	2,90	0,59
Ρίζες	6,7,8,17,18	3,01	0,62
Τριγωνομετρία	10,13,14,15,16	2,62	0,75
Ανάλυση	9,11,12,19,20	2,74	0,68
Σύνολο	1-20	2,82	0,51

Οι συμμετέχοντες δήλωσαν ότι η ομάδα ασκήσεων που αναφέρεται στις Ρίζες τους φαίνεται ευκολότερη σε σχέση με τις άλλες ομάδες, ενώ δυσκολεύτηκαν περισσότερο στις ασκήσεις Τριγωνομετρίας. Αρχικά ελέγξαμε αν οι μεταβλητές άλγεβρα, ρίζες, τριγωνομετρία και ανάλυση ακολουθούν κανονική κατανομή με τη χρήση του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov. Βρήκαμε ότι:

Άλγεβρα: Kolmogorov-Smirnov τεστ = 0,110, βαθμοί ελευθερίας=116 και p-value=0,002

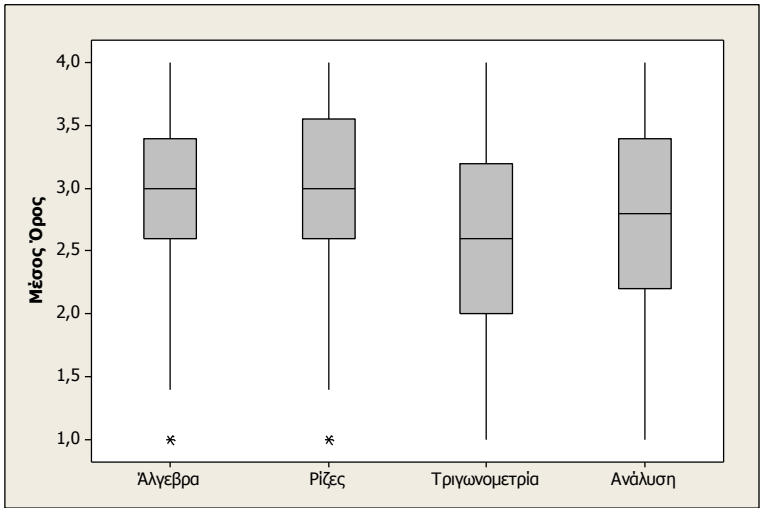
Ρίζες: Kolmogorov-Smirnov τεστ = 0,108, βαθμοί ελευθερίας=116 και p-value=0,002

Τριγωνομετρία: Kolmogorov-Smirnov τεστ = 0,092, βαθμοί ελευθερίας=116 και p-value=0,017

Ανάλυση: Kolmogorov-Smirnov τεστ = 0,122, βαθμοί ελευθερίας=116 και p-value<0,001

Οπότε καμία από τις τέσσερις μεταβλητές δεν ακολουθούν κανονική κατανομή. Στη συνέχεια εφαρμόσαμε τη μη παραμετρική δοκιμασία Kruskal-Wallis από την οποία προκύπτει το συμπέρασμα ότι κάποιοι από τους τέσσερις μέσους όρους διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους σε επίπεδο σημαντικότητας 1‰. Συγκεκριμένα η ομάδα της τριγωνομετρίας εμφανίζει σημαντικά χαμηλότερο μέσο όρο από τους αντίστοιχους της Άλγεβρας και των Ριζών, καθώς και η ομάδα της Ανάλυσης έχει χαμηλότερο μέσο όρο από αυτόν των Ριζών (Σχήμα 3).

Σχήμα 3: Γραφική αναπαράσταση του μέσου όρου βαθμολογίας των φοιτητών ανά ομάδα ασκήσεων



Στη συνέχεια συγκρίθηκαν οι βαθμοί που έλαβαν οι φοιτητές ξεχωριστά σε κάθε κατηγορία ασκήσεων. Στον Πίνακα 6 δίνονται οι συντελεστές συσχέτισης και η σημαντικότητα μεταξύ των μέσων βαθμολογιών των φοιτητών, για κάθε ζευγάρι ομάδων ασκήσεων.

Πίνακας 6: Συσχετίσεις μεταξύ των μέσων όρων βαθμολογίας των τεσσάρων ομάδων ασκήσεων

	Ρίζες	Τριγωνομετρία	Ανάλυση
Άλγεβρα	0,483*	0,475*	0,533*
Ρίζες		0,287**	0,568*
Τριγωνομετρία			0,477*

* Η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 1‰

** Η συσχέτιση είναι σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 1%

Παρατηρείται ότι υπάρχει συνέπεια στις απαντήσεις των φοιτητών. Δηλαδή όταν συγκεντρώνουν υψηλή βαθμολογία σε μια ομάδα ασκήσεων, τότε πετυχαίνουν υψηλή βαθμολογία και στις άλλες ομάδες.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα στατιστικά αποτελέσματα της έρευνας οδήγησαν στα ακόλουθα τέσσερα βασικά συμπεράσματα: επαρκής ικανότητα στην επίλυση ασκήσεων Άλγεβρας και Ριζών, ανεπαρκής ικανότητα στην επίλυση ασκήσεων Τριγωνομετρίας, επίδραση του Λυκείου αποφοίτησης και ανάγκη αναμόρφωσης του Προγράμματος Σπουδών στα Μαθηματικά Ι. Ως γενικό διδακτικό συμπέρασμα αναφέρεται το ακόλουθο: πρόταση για αναδιοργάνωση του όγκου διδασκαλίας βασικών μαθηματικών εννοιών για τα Μαθηματικά Ι της Σχολής Τεχνολογικών Εφαρμογών του ΤΕΙ ΑΜΘ.

Λαμβάνοντας υπόψη τα προαναφερόμενα συμπεράσματα της έρευνας, οδηγούμαστε στις ακόλουθες επτά προτάσεις: βελτίωση ερωτηματολογίου (π.χ. ονομαστικό), παρακολούθηση της εξέλιξης του φοιτητή στα Μαθηματικά Ι και ΙΙ, μελέτη επίδρασης του παράγοντα «φύλο», μελέτη επίδρασης του παράγοντα «κατεύθυνση» αποφοίτησης, μελέτη επίδρασης του παράγοντα «βαθμός πανελληνίων» στα μαθηματικά προσαρμογή σε πρώτο στάδιο των Ασκήσεων Πράξης και ενίσχυση γνώσεων Τριγωνομετρίας. Η ύλη του μαθήματος «Μαθηματικά Ι» πρέπει να προσαρμόζεται κάθε χρόνο στις απαιτήσεις/ελλείψεις των πρωτοετών φοιτητών. Ως εκ τούτου προτείνουμε την αναδιοργάνωση του όγκου διδασκαλίας βασικών μαθηματικών εννοιών στο συγκεκριμένο μάθημα, ώστε να γίνει η μετάβαση από τη δευτεροβάθμια στη τριτοβάθμια εκπαίδευση με σωστό και ομαλό τρόπο, δίνοντας έμφαση στην κάλυψη των οποιοδήποτε βασικών κενών που έχει ο κύριος όγκος των νεοεισαχθέντων φοιτητών. Επιπλέον, ιδιαίτερη σημασία πρέπει να δοθεί στην χρήση περισσοτέρων πρακτικών εφαρμογών και επίλυση προβλημάτων των αντίστοιχων επιστημών, όπου διδάσκονται τα μαθηματικά (Μηχανολογία, Ηλεκτρολογία, Πληροφορική).

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Γκαρούτσος, Ι. (2000). Μαθήματα Στατιστικής, Αθήνα.
2. Σάλτας, Β. (2008). Σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών, Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.
3. Biehler, R., et al (1993). Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Kluwer Academic Publishers.
4. Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In Grouws, D. A., (Ed.), "Handbook of research on mathematics teaching and learning." NY: Macmillan.
5. Siegfried, J., and Fels R. (1979). Research on teaching college economics: A Survey. Journal of Economic Literature: 17(3).
6. Hydea, J. S. and Mertzb, J. E. (2009). Gender, culture, and mathematics performance. PNAS, vol. 106(22), 8801–8807.
7. Romer, D. (1993). Do Students go to class? Should they? Journal of Economic Perspectives 7(3).
8. Lane, A., and Porch, M. (2002). Computer Aided Learning (CAL) and its impact on the performance of non-specialist accounting undergraduates. Accounting Education 11(3).
9. Hammouri, H. A. M. (2004). Attitudinal and motivational variables related to mathematics achievement in Jordan: findings from the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS). Educational Research, 46(3).

10. Wang, D. B. (2004). Family background factors and mathematics success: A comparison of Chinese and US students. International Journal of Educational Research, 41, 40-54.

11. Porter, A. C., and Brophy, J. (1988). Synthesis of research on good teaching: Insights from the work of the Institute for Research on Teaching. Educational Leadership, 45(8).

12. Price-Baugh, R. (1997). Correlation of textbook alignment with student achievement scores. Dissertation Abstracts International, 58-05A, 1529.

13. Mitchell, F. M. (1998). The effects of curriculum alignment on the mathematics achievement of third-grade students as measured by the Iowa Test of Basic Skills: Implications for educational administrators. Unpublished doctoral dissertation, Clark University, Atlanta, GA.

14. Simons, R., Bampton, M., and Bode, M. (2006). Socio-Economic Position Measurement: The Devil in the Detail. PMRT Round Table Conference 2005.

15. Dochy, F., Segers, M., and Buehl, M. M. (1999). The relation between assessment practices and outcomes of studies: The case of research on prior knowledge. Review of Educational Research, 69.

16. Βόσκογλου, Μ. (2006). Διδάσκοντας μαθηματικά στα ΤΕΙ: Εμπειρίες και συμπεράσματα, Μαθηματική Επιθεώρηση, 65.

17. Αλμπέρτι, Α. (1986). Θέματα διδακτικής, Gutenberg, Αθήνα.

18. Biehler, R., Scholz, R.W., Strasser, R., Winkelmann, B. (1994). Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Kluwer Academic Publishers.

19. Βασίλειος Τσιάντος, Βασίλειος Σάλτας, Ιωάννης Πετασάκης, Περσεφόνη Πολυχρονίδου, Mesut Tabuk, «Η Διδασκαλία των μαθηματικών της Σχολής Τεχνολογικών Εφαρμογών του ΤΕΙ Καβάλας», Πρακτικά 27ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, 2010, σελ. 820-832.

Η ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Αγορίτσα Χατζηγούλα[1], Καλλιόπη Σιώπη[2], Αλέξανδρος Μαναρίδης[3], Χαράλαμπος Σακονίδης[4] & Δέσποινα Πόταρη[5]

[1]Εκπαιδευτήρια Θεομήτωρ, [2]Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης, [3]Κολλέγιο Αθηνών, [4]Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, [5]Πανεπιστήμιο Αθηνών

[1]aghatzig@gmail.com, [2]siopi@in.gr, [3]almanaridis@gmail.com, [4]xsakonid@eled.duth.gr, [5]dpotari@math.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διαχείριση των ερωτήσεων αποτελεί κρίσιμη συνιστώσα της διδακτικής πρακτικής. Η παρούσα μελέτη εστιάζει στα μαθησιακά οφέλη που προκύπτουν για τα μέλη μιας κοινότητας διερεύνησης, η οποία αποτελείται από εκπαιδευτικούς και ερευνητές, από τη διερεύνηση αυτής της διαχείρισης στην τάξη των μαθηματικών. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι η συγκεκριμένη δραστηριότητα προσφέρει τη δυνατότητα ανίχνευσης της πολυπλοκότητας των σχέσεων που αναπτύσσονται μεταξύ του μαθητή, του εκπαιδευτικού και του μαθηματικού περιεχομένου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρά το γεγονός ότι οι ερωτήσεις που διατυπώνονται στο πλαίσιο μιας διδασκαλίας, καθώς και η διαχείρισή τους συνιστούν βασική συνιστώσα της διδακτικής πράξης, η σχετική έρευνα είναι εξαιρετικά περιορισμένη. Οι λίγες μελέτες εστιάζουν περισσότερο στην κατηγοριοποίηση των ερωτήσεων στη βάση διάφορων κριτηρίων (π.χ. Sahin & Kulm 2008) και λιγότερο στη συμβολή τους στη διαμόρφωση του μαθηματικού νοήματος. Επιπλέον, αφορούν σχεδόν αποκλειστικά τη μάθηση των μαθητών. Η διερεύνηση της μάθησης των εκπαιδευτικών στο πλαίσιο της επαγγελματικής τους ανάπτυξης, η οποία τα τελευταία χρόνια γίνεται αντιληπτή ως μια συνεχής, συλλογική διαδικασία αναστοχασμού της διδακτικής πράξης, μόνο έμμεσα ασχολήθηκε με τη διαχείριση των ερωτήσεων στην τάξη των μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς.

Η παρούσα έρευνα συνιστά μιας προσπάθεια διερεύνησης της διδακτικής αξιοποίησης των ερωτήσεων στην τάξη των μαθηματικών στην προοπτική της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών. Συγκεκριμένα, εστιάζει στη μάθηση που ενεργοποιείται στο πλαίσιο μιας κοινότητας διερεύνησης εκπαιδευτικών και ερευνητών μέσα από τη μελέτη της διαχείρισης των ερωτήσεων από τους πρώτους στην τάξη, που στοχεύουν στην ανάπτυξη του μαθηματικού νοήματος από τους μαθητές.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΑΙΣΩΣΗ

Στην κοινωνικο-πολιτισμική θεώρηση της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών η διδασκαλία γίνεται κατανοητή ως «μάθηση κατά την άσκηση της πρακτικής» (Jaworski & Goodchild 2006) και η μάθηση ως αλλαγή συμμετοχής σε κοινότητες διδακτικής πρακτικής που προϋποθέτει την ευθυγράμμιση του εκπαιδευτικού με τις νόρμες αυτών των κοινοτήτων (Wegner 1998). Εάν η ευθυγράμμιση γίνεται με κριτικό τρόπο, τότε η διερεύνηση καθίσταται μια από τις νόρμες της πρακτικής, ο αναστοχασμός συνιστά αναπόσπαστο κομμάτι της επαγγελματικής δράσης του εκπαιδευτικού και η κοινότητα πρακτικής μετασχηματίζεται σε κοινότητα διερεύνησης (Jaworski 2006).

Η υιοθέτηση αναστοχαστικής στάσης καθιστά δυνατή την αποστασιοποίηση από την πρακτική και τη θεώρηση εναλλακτικών δυνατοτήτων άσκησης και άρα τροποποίησή της. Ωστόσο, για να προκύψει ανάπτυξη, ο αναστοχασμός χρειάζεται να είναι συλλογικός. Χωρίς την πλαισίωση των σχέσεων, ο αναστοχασμός στερείται του αυθεντικού λόγου που είναι απαραίτητος για προσεκτικές και σε βάθος αλλαγές στη συμπεριφορά (Chapman 2009).

Συχνά τα μέλη μιας κοινότητας πρακτικής περιλαμβάνουν, εκτός από εκπαιδευτικούς, και ερευνητές, σύνθεση που ενδυναμώνει τη διερεύνηση και άρα την ίδια τη διδακτική πρακτική, μέσα από τη συνεργασία των δύο μερών, καθένα από τα οποία καλείται να συμβάλει με την εξειδίκευση που διαθέτει και να μάθει με τη συμμετοχή του σε δραστηριότητες σχεδιασμένες από κοινού για αυτό το σκοπό. Οι δραστηριότητες αυτές αφορούν όψεις της διδακτικής πράξης, ανάμεσα στις οποίες και η διαχείριση ερωτήσεων, που αποτελεί αντικείμενο της παρούσας μελέτης.

Οι έρευνες που ασχολούνται με την αξιοποίηση των ερωτήσεων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών επισημαίνουν τη σπουδαιότητά τους στη διαδικασία της μαθηματικής διερεύνησης αλλά και τη συχνή μετατροπή τους σε μηχανισμό αναζήτησης της «σωστής» απάντησης, δηλαδή σε πηγή περιορισμένης μαθηματικής πρόκλησης. Οι σχετικές έρευνες δείχνουν πως, γενικά, οι εκπαιδευτικοί τείνουν να διατυπώνουν πολλές ερωτήσεις, στην πλειοψηφία τους χαμηλής γνωστικής απαίτησης (McComas & Abraham 2004), οι οποίες προωθούν την ανάκληση γνώσεων παρά τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Ακόμη, υποδεικνύουν την αξιοποίηση διαφορετικού τύπου ερωτήσεων σε διαφορετικά σημεία του μαθήματος. Για παράδειγμα, οι ερωτήσεις διερεύνησης τείνουν να εμφανίζονται στα ανακεφαλαιωτικά μέρη του μαθήματος, ενώ σπανίζουν οι υποστηρικτικές της προσπάθειας επίλυσης προβλημάτων από τους μαθητές (Sahin & Kulm 2008). Τέλος, οι Kawanaka και Stigler (1999) διαπιστώνουν την κυριαρχία των επαναλαμβανόμενων ερωταπαντήσεων από τον εκπαιδευτικό προς τους μαθητές, ενώ οι Aizikovitsh-Udi et al. (υπό έκδοση), εστιάζουν στο καθοριστικό ρόλο της διατύπωσης των ερωτήσεων στην ενασχόληση με τα μαθηματικά.

Η διαχείριση των ερωτήσεων αποτελεί, επομένως, κεντρική διδακτική πρακτική, η διερεύνηση της οποίας μπορεί να είναι ιδιαίτερα αποκαλυπτική σχετικά με τον τρόπο που ενεργοποιείται η επικοινωνία και, κατά συνέπεια, αναπτύσσεται το μαθηματικό νόημα στην τάξη. Η εστίαση σε αυτήν, λοιπόν, ως αντικείμενο διερεύνησης στο πλαίσιο μιας κοινότητας διερεύνησης της διδακτικής πρακτικής στα μαθηματικά, όπως στην παρούσα εργασία, συνιστά δραστηριότητα υψηλής επαγγελματικής αξίας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η κοινότητα διερεύνησης της διδακτικής πρακτικής που αναφερόμαστε αποτελείται από τρεις εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και δύο ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών, και βρίσκεται σε εξέλιξη τα τελευταία οκτώ χρόνια (π.χ. Potari, et al 2010).

Οι τρεις εκπαιδευτικοί (Α, Β, Γ), με περισσότερα από είκοσι χρόνια διδακτικής εμπειρίας ο καθένας τους, ολοκλήρωσαν με επιτυχία το ίδιο μεταπτυχιακό πρόγραμμα στη Διδακτική των Μαθηματικών, στο πλαίσιο του οποίου συνδέθηκαν φιλικά και συνεργάστηκαν μεταξύ τους. Οι μεταπτυχιακές εργασίες των Α και Β, οι οποίες εκπονήθηκαν υπό την εποπτεία των ερευνητών και μια σειρά από δραστηριότητες επαγγελματικής ανάπτυξης που ακολούθησαν και ενισχύθηκαν με την ένταξη της εκπαιδευτικού Γ στην ομάδα, οδήγησαν προοδευτικά στο σχηματισμό μιας κοινότητας διερεύνησης της διδακτικής πρακτικής στα μαθηματικά.

Η δραστηριότητα επαγγελματικής ανάπτυξης (ΔΕΑ) που απασχόλησε τα μέλη της κοινότητας ήταν η διερεύνηση της διαχείρισης των ερωτήσεων από τους τρεις εκπαιδευτικούς σε σχέση με το μαθηματικό νόημα που συγκροτείται από τους μαθητές στην τάξη και συγκεκριμένα: (α) πως οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού ενεργοποιούν την εμπλοκή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία και (β) πως η διαχείριση των ερωτήσεων σχηματοποιεί το μαθηματικό νόημα που διαμορφώνεται στην τάξη.

Πριν αποφασιστεί το αντικείμενο της ΔΕΑ, ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να απομαγνητοφωνήσουν τουλάχιστον τέσσερις αντιπροσωπευτικές διδασκαλίες τους. Μετά την συγκεκριμενοποίηση της διερεύνησης, συμφωνήθηκε για λόγους οικονομίας ο περιορισμός σε διδασκαλίες που αφορούσαν το Γυμνάσιο (7 ωριαίες διδασκαλίες των Α και Γ). Από τους τρεις εκπαιδευτικούς ζητήθηκε να αναγνωρίσουν συνεργατικά σε κάθε διδασκαλία αντιπροσωπευτικά επεισόδια διαχείρισης ερωτήσεων που αφορούσαν την ανάδειξη κάποιου μαθηματικού νοήματος.

Για την ανάλυση κάθε επεισοδίου συμφωνήθηκε η ακόλουθη διαδικασία: ανάλυση από τους τρεις εκπαιδευτικούς συνεργατικά ($1^η$ φάση), αναστοχασμός της ανάλυσης εντός της κοινότητας ($2^η$ φάση), ανάλυση από τους δύο ερευνητές συνεργατικά ($3^η$

φάση), αναστοχασμός εντός της κοινότητας (4η φάση), επανάληψη της διαδικασίας εωσότου διαμορφωθεί μια τελική, συλλογική ανάγνωση / ανάλυση (5η φάση).

Στόχος της όλης διαδικασίας είναι να ανιχνευτούν όψεις της επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών και των ερευνητών και, ειδικότερα, της ενδεχόμενης μάθησής τους στο πλαίσιο της ανωτέρω ερευνητικής δραστηριότητας (ερευνητικό πρόβλημα της παρούσας μελέτης). Ως δεδομένα αξιοποιήθηκαν τόσο τα προϊόντα της ΔΕΑ (επεισόδια και οι αναλύσεις τους) όσο και οι σημειώσεις πεδίου που αφορούσαν στην αναστοχαστική δράση των μελών της κοινότητας.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται η ανάλυση δύο χαρακτηριστικών επεισοδίων από διδασκαλίες των εκπαιδευτικών Α και Γ από τους ερευνητές (3η φάση) και, στη συνέχεια, στοιχεία του αναστοχασμού των εκπαιδευτικών (4η φάση).

Η ανάλυση των ερευνητών: Το επεισόδιο που επιλέχτηκε από την εκπαιδευτικό Γ προέρχεται από μια διδασκαλία σχετική με τη γενίκευση της πρόσθεσης για διάφορες κατηγορίες προσθετέων (Α΄ Γυμνασίου). Αντικείμενο του επεισοδίου είναι το άθροισμα αντίθετων αριθμών.

1. (Ε)κπαιδευτικός: Αν το ασανσέρ μιας πολυκατοικίας ανεβεί τρεις ορόφους και μετά κατεβεί τρεις ορόφους, που θα βρίσκεται;
2. Φωνές: Στο ισόγειο
3. Ε: Το ισόγειο που αντιστοιχεί;
4. Φωνές: Στο μηδέν.
5. Ε: Στο μηδέν. Γιατί θα πρέπει να βρεθεί στο ισόγειο; Αν η πολυκατοικία είχε οχτώ ορόφους και το ασανσέρ ήταν…στον πέμπτο… που θα βρεθεί;
6. Ιγόρ: Εκεί που ήταν..
7. Ε: Εκεί που ήταν… Στον πέμπτο... Άρα, έχουμε καμιά μεταβολή;
8. Φωνές: Όχι
9. Ε: Άρα, είναι πάντα στο ισόγειο;.. Έλενα;
10. Έλενα: Αν είχε οχτώ και ξεκινούσε από τον έκτο, τρεις δε θα μπορούσε.
11. Ε: Τι θα πρέπει λοιπόν;

[Γίνονται υποθέσεις για τον αριθμό των ορόφων, την αρχική θέση του ασανσέρ, το αν υπάρχει υπόγειο, από πού ξεκινάει, κ.ά.]

12. Χρίστος: Αν υπήρχαν τρία υπόγεια … μείον ένα, μείον δύο, μείον τρία.
13. Ε: Που σημαίνει αυτό; …Αν ξεκινάει από το τρίτο υπόγειο, τι θα συμβεί;…
14. Άγγελος: Πρέπει από κει που … ξεκινάει να έχει ακόμα τουλάχιστον τρεις ορόφους.… γιατί αλλιώς δε θα φτάνουν…
15. Ε: Που σημαίνει αυτό; (μιλούν πολλοί μαθητές μαζί, αναφέρονται στην απουσία μεταβολής)
16. Ε: Καμιά μεταβολή… … συμφωνούμε; Πώς θα το γράφαμε;… Αγγελική;
17. Αγγελική. Σε παρένθεση συν τρία συν, παρένθεση μείον τρία ίσον μηδέν.

18. Ε: [γράφει στον πίνακα (+3)+(-3)=0] … Τι είναι οι αριθμοί μείον τρία και συν τρία; .. Πώς τους έχουμε χαρακτηρίσει;
19. Άγγελος: Αντίθετοι.
20. Ε: Αντίθετοι.. Τι συμπεραίνουμε για αυτούς τους αριθμούς; Να το πω αλλιώς … Αυτό ισχύει μόνο γι' αυτούς τους συγκεκριμένους αριθμούς;
21. Ελένη: Όχι,.. Όταν είναι με … αντίθετο πρόσημο, ο ίδιος αριθμός, προκύπτει μηδέν… Οι αριθμοί που έχουν την ίδια…τιμή, …απόλυτη.
22. Φωνές: Οι αντίθετοι αριθμοί.
23. Ε: Οι αντίθετοι αριθμοί, δεν είναι μόνο για το συν και πλην τρία… Άρα, τι θα λέγαμε γι' αυτήν τους τη σχέση γενικά; Πώς θα την περιγράφαμε;
24. Ιγόρ: Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν άθροισμα μηδέν.
25. Ε: Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν άθροισμα … Πώς θα το γράφαμε; Άγγελε;
26. Άγγελος: Άλφα και μείον άλφα ίσο με μηδέν.
27. Ε: Έτσι!... [γράφει στον πίνακα α+(-α)=0].

Η εκπαιδευτικός Γ ξεκινά προσφέροντας ένα ρεαλιστικό πλαίσιο στους μαθητές για τη μαθηματική ιδέα υπό διαπραγμάτευση, το οποίο κυριαρχεί σχεδόν στο μισό επεισόδιο (γραμμές 1-16). Επιχειρεί μέσω άμεσων ερωτήσεων το πέρασμα στο μαθηματικό πλαίσιο, αλλά αυτή η προσπάθεια προσκρούει σε παρανοήσεις στο ρεαλιστικό (γραμμή 3) ή σε αδυναμία μετάβασης στο μαθηματικό (γραμμή 7) εκ μέρους των μαθητών. Γεγονότα που την αναγκάζουν να παραμείνει στο ρεαλιστικό περιβάλλον και με απλές ερωτήσεις διασαφήνισης να επιχειρεί να διευκολύνει τους μαθητές να αποσαφηνίσουν το ρεαλιστικό πρότυπο της μαθηματικής ιδέας. Οι μαθητές φαίνεται να εμπλέκονται ενεργά στις ερωτήσεις που αφορούν το ρεαλιστικό συν-κείμενο, με μερικούς να παραμένουν εγκλωβισμένοι σε αυτό (γραμμή 14) και άλλους να μετακινούνται μερικώς στο μαθηματικό πλαίσιο (γραμμή 12). Οι ερωτήσεις της εκπαιδευτικού μοιάζει να μην καταφέρνουν να διαμορφώσουν «γέφυρα» μεταξύ των δύο πλαισίων. Τελικά, αξιοποιώντας σχετικές διαπιστώσεις μαθητών, η Γ επικυρώνει το ρεαλιστικό πρότυπο της επιθυμητής μαθηματικής ιδέας και ζητά απευθείας μια αριθμητική «μετάφραση» αυτού του προτύπου (γραμμή 16), όχι απαραίτητα ορατής από τους μαθητές. Από αυτό το σημείο και μέχρι το πέρας του επεισοδίου, η ρεαλιστική πλαισίωση «λησμονιέται» και οι μαθητές καλούνται να εργαστούν στο μαθηματικό πλαίσιο, πρώτα στο αριθμητικό και μετά στο αλγεβρικό. Όταν κάποιοι μαθητές ανταποκρίνονται επιτυχώς, μέσα πλέον στο αλγεβρικό περιβάλλον, η εκπαιδευτικός ζητά «περιγραφή» της σχέσης, την οποία και λαμβάνει πάλι από κάποιους μαθητές (γραμμές 23-27).

Γενικά, η εκπαιδευτικός Γ μοιάζει να ενθαρρύνει την ενεργή εμπλοκή των μαθητών στη συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος μέσα από ερωτήσεις που επιχειρούν να διευκολύνουν άμεσα τη σύλληψη και την απεικόνιση αυτού του νοήματος εντός συγκεκριμένων, διακριτών πλαισίων, που διαδοχικά επιδιώκουν να αναδείξουν τα βασικά συστατικά της επιθυμητής μαθηματικής ιδέας. Ωστόσο, αυτή η πορεία συχνά εμφανίζεται αδέξια σε ότι αφορά στα «περάσματα» από το ένα πλαίσιο στο άλλο: εδώ οι ερωτήσεις είτε απουσιάζουν είτε «επιβάλλουν» την επιθυμητή πτυχή του

μαθηματικού νοήματος, αποδυναμώνοντας τόσο την ατομική όσο και τη συλλογική διαδικασία κατασκευής του μαθηματικού νοήματος.

Η διδασκαλία του εκπαιδευτικού Α από όπου προέρχεται το επεισόδιο που επέλεξε αφορά στην ισχύ της ιδιότητας της δύναμης με εκθέτη φυσικό του πηλίκου δύο αριθμών. Αυτό επιχειρείται μέσω του πολλαπλασιασμού κλασμάτων (Α΄ Γυμνασίου).

1. Ε: Μπορώ να πολλαπλασιάζω κλάσματα, ειδικά αν είναι το ίδιο. Ωραία. Για να δούμε λοιπόν αυτό εδώ, Βενετία, τι ιδέα έχεις, τι να το κάνω αυτό; (πρόκειται για την αριθμητική παράσταση $\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}$)
2. Βενετία: Να το κάνουμε δύναμη.
3. Ε: Να το κάνουμε δύναμη. Ποια δύναμη θα γίνει;
4. Βενετία: Θα γίνει δύο εις την τρίτη και τρία εις την τρίτη.
5. Ε: Γιατί όμως;
6. Βενετία. Γιατί πολλαπλασιάζουμε το δύο τρεις και το τρία τρεις φορές.
7. Ε: Γιατί; ….. Με τους φυσικούς το κατάλαβα. Εδώ δεν ξέρω τι γίνεται τώρα. Γιατί, ήδη ο Γιάννης λέει, κύριε πήρατε βολικό αριθμό. Πήρατε το 1, εντάξει, εδώ τι γίνεται όμως, Εύα;
8. Εύα: Πολλαπλασιάζουμε αριθμητές με αριθμητές και παρονομαστές ….
9. Ε: Αααα… Βλέπετε ότι δεν κάνω τίποτε άλλο από το να παίρνω τι μου έχει πει ο πολλαπλασιασμός των κλασμάτων. Εύα, δυνατά λίγο…
10. Εύα: Πως στον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων πολλαπλασιάζω τους αριθμητές με τους αριθμητές και τους….
11. Ε: Άρα τι θα γράψω εδώ;
12. Εύα και Ε: Δύο επί δύο επί δύο και τρία επί τρία επί τρία.
13. Ε: Οπότε τώρα στην ουσία τι έχω κερδίσει με αυτόν τον τρόπο; Παύλε, με την ιδέα της Εύας, τι έχω κερδίσει;
14. Παύλος: Να κάνω το δύο επί δύο ως δύο εις την τρίτη.
15. Ε: Δηλαδή, τι έχουμε κερδίσει να το δούμε λίγο πιο έτσι ..(μαθηματικά)
16. Κωνσταντίνος: Έχουμε φτιάξει μια δύναμη από τους αριθμητές.
17. Ε: Νάτο! Μόνο από τους αριθμητές;
18. Κωνσταντίνος: Και από τους παρονομαστές.

Ο εκπαιδευτικός Α επιχειρεί να αναδείξει την ιδιότητα της δύναμης πηλίκου μέσα από ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Με αυτόν τον τρόπο καλεί τους μαθητές να «εκτελέσουν» μια συγκεκριμένη ενέργεια, πολύ κοντά στις εμπειρίες τους και σχετικά μικρών απαιτήσεων. Τείνει να απευθύνεται σε συγκεκριμένους μαθητές και κατά κανόνα οι ερωτήσεις που θέτει είτε ζητούν άμεσες επεξηγήσεις σχετικά με κάτι που ανέφερε ο μαθητής που απάντησε σε προηγούμενη ερώτηση (γραμμές 5, 7, 8) είτε θέτουν μια περαιτέρω ή ανεξάρτητη πρόκληση, που όμως τροφοδοτείται από τον «επιθυμητό» προβληματισμό από τον ίδιο (γραμμές 7, 9, 13). Το μαθηματικό νόημα που πριμοδοτείται ενθαρρύνει την ανάδειξη εννοιολογικών στοιχείων που, ωστόσο, έχουν διαδικαστικό χαρακτήρα (η δύναμη κλασματικού αριθμού μετατρέπεται σε

διαδικασία εκτέλεσης της πράξης του πολλαπλασιασμού κλασμάτων) και συνδέονται ιεραρχικά.

Γενικά, ο εκπαιδευτικός Α εμφανίζεται να επενδύει στην ατομική και όχι στη συλλογική εμπλοκή των μαθητών στην κατασκευή ενός μαθηματικού νοήματος που παρουσιάζει περισσότερο διαδικαστικά και λιγότερο εννοιολογικά χαρακτηριστικά. Προς αυτήν την κατεύθυνση οι μαθητές οδηγούνται στη γενίκευση μέσα από χαμηλής γνωστικής πρόκλησης ερωτήσεις, που επιζητούν κυρίως την εκτέλεση πράξεων. Οι ερωτήσεις βρίσκονται πολύ κοντά στις δυνατότητες των μαθητών και υπηρετούν περισσότερο την με κάθε τρόπο συμμετοχή τους στα δρώμενα της τάξης. Στην περίπτωση που ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να βάλει νέες μαθηματικές προκλήσεις (γραμμή 15) οι μαθητές παραμένουν στο υπολογιστικό πλαίσιο. Έτσι, το μαθηματικό νόημα που βρίσκεται κάθε φορά υπό διαπραγμάτευση δεν φαίνεται, τελικά, να οικοδομείται.

Ο αναστοχασμός των εκπαιδευτικών επί της ανάλυσης των ερευνητών: Οι εκπαιδευτικοί Α και Γ συμφωνούν με τα χαρακτηριστικά που η ανάλυση των ερευνητών αποδίδει στη διαχείριση των ερωτήσεων από αυτούς. Ωστόσο, διαφοροποιούνται ως προς τη σχέση της με το μαθηματικό προϊόν που τελικά αναδεικνύεται. Συγκεκριμένα, η Γ αναγνωρίζει μια ερμηνεία της αβεβαιότητας που την κατείχε κατά τη διδακτική πράξη αναφορικά με το μαθηματικό νόημα που συγκροτείται από τους μαθητές: «Η οπτική της αδυναμίας των ερωτήσεών μου να λειτουργήσουν ως γέφυρα μεταξύ των δυο πλαισίων (ρεαλιστικό-αλγεβρικό) συγκεκριμενοποιεί την αίσθηση (μου) ότι «κάτι συμβαίνει εδώ» και νηματοδοτεί την οπτική της καθυστέρησης του μετασχηματισμού της ιδέας σε μαθηματικό νόημα». Αντίθετα, ο εκπαιδευτικός Α υποστηρίζει πως η συγκεκριμένη διαχείριση των ερωτήσεων εκ μέρους του ήταν συνειδητή και αποτελεσματική: «Θέλησα να ξεκινήσω με ένα πλαίσιο οικείο στους μαθητές γι΄αυτό ξεκινώ με ένα αριθμητικό παράδειγμα, σε μια προσπάθεια μετάβασης από το ειδικό στο γενικό. Έτσι, οι ερωτήσεις έχουν διαδικαστικό χαρακτήρα συνειδητά. Θεωρώ ότι ανταποκρίνονται στο στόχο». Τέλος, η εκπαιδευτικός Β βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με την ανάλυση των ερευνητών: «Το αποτέλεσμα στο οποίο θέλει να καταλήξει η Γ μοιάζει τόσο έντονο και πιεστικό που από ένα σημείο και μετά απλοποιεί και καθοδηγεί … Οι μαθητές του Α ανταποκρίνονται στις ερωτήσεις του όσο αυτές έχουν κυρίως υπολογιστικό χαρακτήρα και το περιεχόμενο είναι στα "μέτρα" τους».

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παραπάνω ανάλυση καθιστά φανερό ότι και στα δύο επεισόδια ο εκπαιδευτικός επιχειρεί την εμπλοκή των μαθητών στη διαδικασία κατασκευής ενός μαθηματικού νοήματος που ορίζει ο ίδιος μέσω ερωτήσεων που αξιοποιούνται διαφορετικά. Ο εκπαιδευτικός Α απευθύνει κατά κανόνα συγκεκριμένες ερωτήσεις σε μαθητές που επιλέγει, καλώντας τους να εκτελέσουν σύντομες, οικείες πράξεις. Ερωτήσεις που επιδιώκουν τη μετάβαση από το ειδικό στο γενικό σπανίζουν και δεν τυγχάνουν

ιδιαίτερης επεξεργασίας. Η εκπαιδευτικός Γ τείνει να απευθύνει τις ερωτήσεις της γενικά στην τάξη, θέτοντας αρχικά υψηλές νοητικές προκλήσεις, τις οποίες σταδιακά περιορίζει, καθώς διαπιστώνει την αδυναμία ανταπόκρισης των μαθητών. Και στις δυο περιπτώσεις, η πορεία συγκρότησης του μαθηματικού νοήματος παρουσιάζεται αποδυναμωμένη (Stein & Lane 1996).

Τα μαθησιακά οφέλη που προέκυψαν για τα μέλη της κοινότητας διερεύνησης από τη συμμετοχή στη συγκεκριμένη ΔΕΑ θα μπορούσαν να αναζητηθούν στις ευκαιρίες που προσέφερε στη συνειδητοποίηση της πολυπλοκότητας της διδακτικής διαχείρισης στην τάξη.

Ειδικότερα, ο εκπαιδευτικός Α υποστηρίζει ότι οι διαφορετικές αναγνώσεις του μαθήματος ανέδειξαν πτυχές της διδασκαλίας που συνδέονται με τη «μεγιστοποίηση της μαθηματικής πρόκλησης» που δεν είχε συνειδητοποιήσει, σημειώνοντας, ωστόσο, ως εμπόδιο σε αυτήν τη μεγιστοποίηση «το βασανιστικό δίλημμα του χρόνου». Η εκπαιδευτικός Β θεωρεί ότι διαπίστωσε με έκπληξη το πως οι απαντήσεις των μαθητών «παρασύρουν» τον εκπαιδευτικό «προς τα κάτω», με αποτέλεσμα να μην «επιμένει με ερωτήσεις υψηλού επιπέδου, οι οποίες θα μπορούσαν ενδεχομένως να διαφοροποιηθούν χωρίς όμως να χάσουν τη δυναμική τους» και «πολύ γρήγορα να έρχονται στην επιφάνεια τα γνωστά πιεστικά ερώτηματα 'ποιος είναι ο επιθυμητός στόχος;', 'που θέλω να καταλήξω στο σημερινό μάθημα;' και τα πράγματα να παίρνουν το δρόμο τους». Η εκπαιδευτικός Γ αναστοχάζεται σε δύο επίπεδα, το ατομικό και το συλλογικό, εστιάζοντας, κυρίως, στο τι έμαθε η ίδια ως ερευνήτρια: «Καθώς η συζήτηση προχωρούσε μέσα στην ομάδα, η αρχική οπτική της ανάλυσής μου τροποποιήθηκε, γιατί εμπλουτίστηκε με νέα στοιχεία που αφορούσαν αναζήτηση και αναγνώριση συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών χαρακτηριστικών της επιχειρούμενης διδακτικής διαχείρισης ... Οι διαφορετικές αναγνώσεις των διδασκαλιών φαίνεται να σχετίζονται με την ταυτότητα του κάθε μέλους, τα ερμηνευτικά εργαλεία που διαθέτει, τα χαρακτηριστικά του πλαισίου ανάλυσης και την ευθυγράμμισή του με τις νόρμες της κοινότητας».

Η μάθηση των ερευνητών, τέλος, συνδέεται πρωτίστως με τη συνειδητοποίηση του δυναμικού χαρακτήρα της αλληλεπίδρασης μέσα στην τάξη, η οποία διαμορφώνεται τόσο από το τι φέρνει ο εκπαιδευτικός και ο μαθητής στην τάξη όσο και από τις πρακτικές στις οποίες αυτοί συμμετέχουν και έχουν συμμετάσχει (Skott, 2013). Επιπλέον, με τη συνειδητοποίηση της δυσκολίας μετάβασης του εκπαιδευτικού από το διδακτικό στο ερευνητικό πλαίσιο, μέσα από τη συνεχή εναλλαγή του ρόλου του ως μελετητή της δικής του διδακτικής πρακτικής από τα έσω αλλά και από απόσταση (Jaworski, 2004).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aizikovitsh-Udi, Clarke, D. & Star, J. (to appear). Good questions or good questioning: An essential issue for effective teaching. In B. Ubuz, C. Haser, M. A. Mariotti (Eds.) *Proceedings of CERME 8*. Antalya:Turkey.

Chapman, O. (2009). Educators reflecting on (researching) their own practice. In R. Even & D.L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics* (pp. 121-126). Dordrecht: Springer.

Jaworski, B. (2004). Insiders and outsiders in mathematics teaching development: the design and study of classroom activity. *Research in Mathematics Education*, 6 (1), 3-22.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teacher development: critical inquiry as mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 187-211.

Jaworski, B., & Goodchild, S. (2006). Inquiry community in an activity theory frame. In J. Navotnα, H., Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the IGPME* (Vol. 3, pp. 353–360). Prague: Charles University.

Kawanaka, T. & Stigler, J. W. (1999). Teachers' use of questions in 8th grade mathematics classrooms in Germany, Japan and the United States. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(4), 255-278.

McComas, W.F. & Abraham, L. (2004). Asking more effective questions. http://cet.usc.edu/resources/teaching_learning/docs/Asking_Better_Questions.pdf (ανακτήθηκε στις 5-12-2013).

Potari, D., Sakonidis, C., Chatzigoula, A. & Manaridis, A. (2010). Teachers' and researchers' collaboration in analyzing mathematics teaching: A context for professional reflection and development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 473-485.

Skott, J. (2013). Understanding the role of the teacher in emerging classroom practices: searching for patterns of participation. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 45(4), 547-559.

Shahin, A. & Kulm, G. (2008). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 221-241.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2(1), 50–80.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice*. Cambridge: Cambridge University Press.

ΜΙΑ ΣΥΣΤΗΜΙΚΗ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος &Φραγκίσκος Καλαβάσης

Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

amoutsiosrentzos@aegean.gr, kalabasis@aegean.gr

ΣΤΟΧΟΣ

Σε αυτή την Ομάδα Συζήτησης επικεντρωνόμαστε στην περιγραφή και αξιολόγηση της σχέσης της Διδακτικής των Μαθηματικών (ΔΜ) με την Μαθηματική Εκπαίδευση (ΜΕ) στον Ελλαδικό χώρο στο πλαίσιο της παγκοσμιοποίησης. Προτείνεται μια συστημική οπτική για την εγκυρότερη δειρεύνηση αυτής της σχέσης. Στόχος αυτής της Ομάδας Συζήτησης είναι να συμβάλει ώστε η ΕνΕΔιΜ να αναγνωρίσει τις διασυνδέσεις, τα πορώδη σύνορα και τις 'γκρίζες ζώνες' των δύο πεδίων, επιδιώκοντας την ανάπτυξη τρόπων και μορφών επικοινωνίας και συνεργασίας. Σε αυτό το πλαίσιο, θα συζητηθούν:

1) *Ποιες διαστάσεις έχει η σχέση ΔΜ και ΜΕ στον Ελλαδικό χώρο;* Ενδεικτικά: τάξη, θέματα εξετάσεων, εκπαιδευτικό υλικό, αναλυτικά προγράμματα, τύποι διαγωνισμών, αξιολόγηση μαθητών, επιλογή προσωπικού-ΑΣΕΠ, επιμόρφωση εκπαιδευτικών, αξιολόγηση εκπαιδευτικών, σχολική μονάδα-συνεργασίες και διεπιστημονικότητα, σχέση με οικογένεια, σχέση με ΤΠΕ, με κοινωνικά δίκτυα-λέσχες, με κοινωνική δραστηριότητα-μαθηματικές πρακτικές.
2) *Ποια η αλληλεπίδρασή της με το διεθνή χώρο;* Ενδεικτικά, Απολυτήριο/IB, Πτυχίο/BSc/BA, Μεταπτυχιακό/MSc/MA/MEd, Διδακτορικό/PhD, διεθνή συνέδρια, σεμινάρια, περιοδικά, MOOCs, PISA, TIMSS.
3) *Ποια τα χαρακτηριστικά και η συμβολή μιας συστημικής οπτικής στην περιγραφή και βελτίωση αυτής της σχέσης;*

Η ΣΧΕΣΗ ΔΜ ΚΑΙ ΜΕ

Η ΔΜ είναι επιστημονικό πεδίο με αυτόνομους στόχους. Από την άλλη η ΜΕ σχετίζεται με τη Σχολική Μονάδα και, συνεπώς, με το Αναλυτικό Πρόγραμμα (ΑΠ) και τους στόχους του Επίσημου Εκπαιδευτικού Συστήματος (ΕΕΣ). Επομένως, η επίδραση της ΔΜ στην ΜΕ εξαρτάται εκ των πραγμάτων από το ΑΠ και το ΕΕΣ. Στη διεθνή πρακτική η ΔΜ έχει αξιοποιηθεί τόσο στο σχεδιασμό, όσο και στην αξιολόγηση της ΜΕ. Αντίστροφα, το ΑΠ και το ΕΕΣ έχουν καθορίσει και το περιεχόμενο της ΔΜ σε μια χώρα. Αντίστοιχα, διεθνή συστήματα αξιολόγησης της ΜΕ (TIMSS, PISA) έχουν επηρεάσει και την ΔΜ μιας χώρας. Στον Ελλαδικό χώρο πρόσφατα έγινε μια προσπάθεια αξιοποίησης ερευνητών της ΔΜ για το σχεδιασμό των νέων προγραμμάτων σπουδών για την πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια

εκπαίδευση. Παράλληλα, στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών περισσότερο από μια δεκαετία λειτουργεί διατμηματικο-διαπανεπιστημιακό μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών στη ΔΜ με βασική αναφορά τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Διαμορφώθηκε μια ιδιαίτερα παραγωγική κοινότητα των αποφοίτων αυτού του προγράμματος (ΕπΕΔιΜ) με ποικίλο έργο στην ΜΕ. Επιπλέον, παρατηρείται η ανάπτυξη κοινοτήτων πρακτικής εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας ΜΕ, από πρωτοβουλία των ίδιων των εκπαιδευτικών ή/και ερευνητών της ΔΜ. Συνεπώς, η σχέση ΔΜ και ΜΕ είναι αμφίδρομη, επηρεαζόμενη από πάνω προς τα κάτω (π.χ. αναλυτικά προγράμματα), αλλά και από κάτω προς τα πάνω (π.χ. κοινότητες πρακτικών).

ΜΙΑ ΣΥΣΤΗΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Προτείνεται μια οπτική συστημικής θεωρίας για τη διερεύνηση της σχέσης ΔΜ και ΜΕ. Η σχολική μονάδα, το εκπαιδευτικό σύστημα ή/και η σχολική τάξη μπορεί να θεωρηθούν ως σύστημα με υποσυστήματα τα όποια αλληλεξαρτώνται και αλληλεπιδρούν με στόχο την παραγωγή του πολυεπίπεδου εκπαιδευτικού και παιδαγωγικού έργου. Από την άλλη, η σχολική μονάδα αποτελεί υποσύστημα άμεσου και ευρύτερου κοινωνικού πλαισίου, στο οποίο περιλαμβάνεται η οικογένεια, η τοπική και διεθνής κοινωνία και η ψηφιακή πραγματικότητα. Στα πλαίσια μιας τέτοιας θεώρησης προτείνεται η διερεύνηση της σχέσης ΔΜ και ΜΕ εντός του συστήματος 'σχολική μονάδα' με τους εμπλεκόμενους πληθυσμούς (ερευνητές, καθηγητές, διευθυντές, μαθητές, γονείς κτλ) και σε τρεις εστιάσεις: α) *Συμβολικό/κανονιστικό* (οι αντιλαμβανόμενες επίσημες οδηγίες), β) *Πραγματιστικές αναπαραστάσεις* (οι αντιλαμβανόμενες τρέχουσες πρακτικές στις σχολικές μονάδες), γ) *Επιθυμητές/Προτιθέμενες δράσεις* (οι προσωπικές, υποθετικές δράσεις, προϋποθέτοντας την εξουσία και τη δυνατότητα πραγματοποίησής τους).

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Brizuela, B.M., Martinez, M.V., & Cayton-Hodges, G. A. (2013). The impact of early algebra: results from a longitudinal intervention. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 209-241. DOI: 10.4471/redimat.201 3.28

Dossey, J. A., & Wu, M. L. (2013). Implications of International Studies for National and Local Policy in Mathematics Education. In *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 1009-1042). Springer New York.

Even, R. (2003). What can teachers learn from research in mathematics education?. *For the Learning of Mathematics, 23*(3), 38-42.

Goos, M. (2008). Critique and transformation in researcher-teacher relationships in mathematics education. Paper presented at the Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI. Ανακτήθηκε Σεπτέμβριος 13, 2013 από http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008.

Hoyles, C., & Ferrini-Mundy, J. (2013). Policy Implications of Developing Mathematics Education Research. In *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 485-515). Springer New York.

Moutsios-Rentzos, A., Kalavasis, F., & Sofos, A. (υπό δημοσίευση). *The mathematics classroom in the expanded open system of a globalised virtual social network.* Proceedings of the 65th Conference of the International Commission for Study and Improvement of Mathematics Education (CIEAEM 65), 23-27 July 2013, Torino, Italy. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*.

Μούτσιος-Ρέντζος, Α., & Καλαβάσης, Φ. (2013). *Σχολείο, κρίση και συγκριτική τοποθέτηση των μαθημάτων στο σχολικό χωροχρόνο: μια συστημική προσέγγιση 'εν δυνάμει' εκπαιδευτικών στελεχών για τα μαθηματικά*. Στο Α. Κοντάκος & Φ. Καλαβάσης (Επ.). Θέματα Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού 5 «Κρίση και Διακυβέρνηση Εκπαιδευτικών Συστημάτων» (σελ. 167-187). Αθήνα: Διάδραση.

Σκουμπουρδή, Χ., Φεσάκης, Γ., Καφούση, Σ., & Καλαβάσης, Φ. (2011). Η αυξανόμενη πολυπλοκότητα των ερευνητικών εργαλείων στη διδακτική των μαθηματικών. *Ευκλείδης γ΄,75*, 57-76.

Wiliam, D. (2003). The impact of educational research on mathematics education. In A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 471-490). Dordrecht: Kluwer.

Wiliam, D. (2000). Meanings and Consequences of Research in Mathematics Education. Second International Mathematics Education and Society Conference, 26th - 31st March (σελ. 117-126). Montechoro, Portugal: Centro de Investigacao em Educacao da Faculdade de Ciencias, Universidade de Lisboa.

Wu, H. (Απρίλιος 29, 2011). The impact of Common Core Standards on the mathematics education of teachers. Ανακτήθηκε από http://math.berkeley.edu/~wu/CommonCoreIV.pdf

Καλαβάσης, Φ. (2009). Η ένταξη της ποικιλίας των μαθησιακών διαδρομών στον ερευνητικό και διδακτικό σχεδιασμό. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου, Χ. Σκουμπουρδή, & Γ. Φεσάκης (Επ.), *Πρακτικά 3ου συνεδρίου ΕνΕΔιΜ* (σελ. xxi-xxxii). Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Η ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΑΝΑΤΡΟΠΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Μ. Καλδρυμίδου[1], Δ. Πόταρη[2], Χ. Σακονίδης[3], Μ. Τζεκάκη[4], Θ. Ζαχαριάδης[5], Χ. Κυνηγός[6]

[1]Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, [2,5,6] Πανεπιστήμιο Αθηνών, [3]Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, [4]Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

[1]mkladrim@uoa.gr, [2]dpotari@math.uoa.gr, [3]xsakonid@eled.duth.gr, [4]tzekaki@nured.auth.gr, [5]tzaharia@math.uoa.gr, [6]kynigos@ppp.uoa.gr

Η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών στις μέρες μας έχει πλέον απομακρυνθεί από την παλιά μονοδιάστατη αντίληψη της επιμόρφωσης ή κατάρτισης/ εκγύμνασης. Μπορεί οι εκπαιδευτικοί που εμπλέκονται σε δραστηριότητες επαγγελματικής ανάπτυξης να συνεχίζουν να παρακολουθούν μαθήματα και σεμινάρια σε κάποιο Πανεπιστήμιο ή σε κάποιο φορέα εκπαίδευσης, όμως ταυτόχρονα παρακολουθούν κάποιο συνάδελφό τους στην τάξη του, συναντιούνται μετά το σχολείο με συναδέλφους τους, για να μιλήσουν για το σχεδιασμό κάποιου μαθήματος, συζητούν τις απαντήσεις ενός μαθητή σε κάποιο πρόβλημα με άλλους εκπαιδευτικούς, εργάζονται με κάποιο πιο έμπειρο εκπαιδευτικό σε κάποιο νέο εκπαιδευτικό υλικό, κ.ά. Στις περισσότερες από αυτές τις δραστηριότητες οι εκπαιδευτικοί συνεργάζονται με άλλους εκπαιδευτικούς ή και ερευνητές στο πλαίσιο μιας σειράς από δράσεις που συνδέονται με το σχολικό περιβάλλον ή /και τις διδακτικές πράξεις (π.χ. Jaworski 2012).

Τα σύγχρονα προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά, λοιπόν, συνδέονται άμεσα με τις διδακτικές πρακτικές τους. Ο λόγος (discourse) που αναπτύσσεται στο πλαίσιο αυτών των προγραμμάτων εστιάζει στη μάθηση και στη γνώση για τη διδασκαλία των μαθηματικών που αναπτύσσονται τόσο σε σχέση με αυτήν όσο και κατά την άσκησή της (π.χ. Krainer & Llinares 2010, Ball et al. 2008). Σε αυτές τις συζητήσεις, οι εκπαιδευτικοί αναμένεται να έχουν ευκαιρίες συμμετοχής και αναστοχασμού σχετικά με τη δουλειά τους, καθώς στοχεύουν στην επαγγελματική τους ωρίμανση. Οι αφηγήσεις της διδασκαλίας δρουν ως συν-κείμενο για τη μάθηση των εκπαιδευτικών για συγκεκριμένες όψεις της εργασίας τους και ο αναστοχασμός αναμένεται να επαυξήσει τη συνειδητότητα των πρακτικών τους, επιτρέποντάς τους να προχωρήσουν σε σοβαρές αποφάσεις στην αμεσότητα της τάξης τους.

Πολλές από τις παραπάνω προσεγγίσεις στην επαγγελματική ανάπτυξη συνάδουν με μια νέα μεταφορά της μάθησης ως διαδικασίας συμμετοχής (Sfard 1998) και υιοθετούν μοντέλα με δομές που αντανακλούν τις θεωρητικές έννοιες των κοινοτήτων πρακτικής (Lave & Wenger 1991). Περιλαμβάνουν κατά κανόνα μια κοινότητα ατόμων που μοιράζονται πολιτισμικές ιδιαιτερότητες στο σχολείο και σε κοινωνικά επίπεδα, εμπλέκονται με συγκεκριμένους τρόπους στις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης και εστιάζουν σε συγκεκριμένες πτυχές της πρακτικής

τους ως εκπαιδευτικών των μαθηματικών σε μαθητευόμενους σε τυπικά ή άτυπα περιβάλλοντα. Οι συμμετέχοντες συζητούν, διερευνούν, ανταλλάσσουν, τροποποιούν, επεκτείνουν και δημιουργούν γνώση για την πρακτική τους. Τέτοιες προσεγγίσεις περιλαμβάνουν: τη μελέτη μαθήματος, την ανάπτυξη εργαλείων διδασκαλίας, τον αναστοχασμό πάνω στην επικοινωνία και το λόγο στην τάξη, τον αναστοχασμό ή / και το μετασχηματισμό συγκεκριμένων διδακτικών πρακτικών, κ.ά. (π.χ. Ruhama & Ball 2008).

Στην ελληνική πραγματικότητα τα προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης ήταν μέχρι πρόσφατα κατά κανόνα βραχύχρονης διάρκειας, παρείχαν γενικές παιδαγωγικές γνώσεις, με μικρή ή καμία υποστήριξη εφαρμογής τους στην πραγματικότητα της τάξης και προσφερόταν πρωτίστως από την Πολιτεία . Κατά συνέπεια, τόσο το περιεχόμενο όσο και η γενικότερη οργάνωσή τους δεν παρείχαν στους εκπαιδευτικούς τη δυνατότητα να αποκτήσουν ουσιαστική πρόσβαση στα σύγχρονα δεδομένα της μαθηματικής εκπαίδευσης και, πολύ περισσότερο, να αναπτύξουν και να εισαγάγουν στη διδασκαλία τους καινοτόμες πρακτικές, δρώντας μέσα σε ένα πλαίσιο κοινότητας κοινής πρακτικής. Εντούτοις, τα τελευταία χρόνια, τα νέα επιστημονικά δεδομένα η ανάπτυξη της σχετικής έρευνας, η αναβάθμιση των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών σπουδών των εκπαιδευτικών σε ζητήματα μαθηματικής εκπαίδευσης και ένας αξιόλογος αριθμός προγραμμάτων διδακτικής παρέμβασης σε σχολεία της χώρας επέβαλαν την υιοθέτηση από τα προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης αλλαγών που στηρίζουν τους εκπαιδευτικούς να μετακινηθούν πέρα από μια «κλειστή», αδιαπραγμάτευτη κουλτούρα της τάξης. Οι αλλαγές αυτές ενθαρρύνουν την ανάπτυξης της ταυτότητάς τους ως εκπαιδευτικών μέσα από τη συμμετοχή τους σε κοινότητες που αφορούν την πρακτική τους (τη διδασκαλία των μαθηματικών) (Lerman 2000).

Στόχος της συγκεκριμένης συνεδρίας είναι να διαμορφώσει ένα πλαίσιο προβληματισμού και διερεύνησης σχετικά με τα σύγχρονα προγράμματα επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών στην ελληνική πραγματικότητα και, ειδικότερα, αναφορικά με τα ακόλουθα ζητήματα:

- Πως αξιοποίησαν τις διεθνείς εξελίξεις στο σχεδιασμό και την υλοποίησή τους;
- Ποια είναι τα αποτελέσματα των νέων προσεγγίσεων σε σχέση με αυτά των προηγούμενων/ παραδοσιακών;

Η *δομή και η οργάνωση* της συνεδρίας έχουν ως εξής:

Παρουσιάσεις (συνολική διάρκεια 40 λεπτά): Οριοθέτηση του σχετικού προβληματισμού

- *Βασική εκπαίδευση και επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στα μαθηματικά*, Μ. Τζεκάκη & Μ. Καλδρυμίδου
- *Βασική εκπαίδευση και επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης*, Θ. Ζαχαριάδης & Δ. Πόταρη

- *Επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στα μαθηματικά στο πλαίσιο καινοτόμων προγραμμάτων*, Χ. Σακονίδης
- *Επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στα μαθηματικά με την αξιοποίηση Νέων Τεχνολογιών*, Χ. Κυνηγός

Συζήτηση (διάρκεια 20 λεπτά): Κριτική θεώρηση, περαιτέρω επεξεργασία και επέκταση των θέσεων που αναπτύχθηκαν σε αλληλεπίδραση με το ακροατήριο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59(5)*, 389-407.

Even, R. & Ball D.L. (Eds.). (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The 15th ICMI Study*. New ICMI Study Series, 11. New York: Springer.

Jaworski, B. (2012). Mathematics teaching development as a human practice: identifying and drawing the threads. *ZDM -- The international journal of mathematics education*, 44(5), pp.613-625.

Krainer, K., & Llinares, S. (2010). Mathematics teacher education. In P. Peterson, E. Baker, & B. McGraw (Eds.), *International encyclopedia of education* (Vol. 7, pp. 702-705). Oxford: Elsevier.

Lave, J. and Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher, 27(2)*, pp. 4-13.

Lerman, S. (2000). Research perspectives on mathematics teacher education. In F.-L. Lin & T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 33-52). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ
ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ «ΕΥΡΟΑΞΙΟΠΟΛΗ»

Μαρία Μοσκοφόγλου - Χιονίδου

Πανεπιστήμιο Αιγαίου- Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
mchionidou@rhodes.aegean.gr

Η θεωρία της ΕμπλαισιωμένηςΜάθησης, οι Κοινότητες Πρακτικής, η θεωρία της Δραστηριότητας και Επιστημολογικές προκλήσεις υποστήριξαν θεωρητικά την κατασκευή ενός επιτραπέζιου παιχνιδιού της Ευρω-Αξιό-Πολης στο μάθημα της Εφαρμοσμένης Διδακτικής των Μαθηματικών, με σκοπό αυτό να αποτελέσει διδακτικό υλικό το οποίο να δίνει νόημα και σημασία στα ποσοστά και επιτόκια «πλαισιώνοντάς τα» με σύγχρονες βιωματικές κοινωνικοπολιτικές καταστάσεις. Στο σχεδιασμό του παιχνιδιού πέραν της έννοιας των ποσοστών και επιτοκίων, είχαν ενταχθεί προς χρήση και όροι οικονομικοί σχετικά με την αειφόρο ανάπτυξη -οικονομική κρίση και, με έμφαση στις κοινωνικο-πολιτισμικές αξίες.

Τελειόφοιτοι φοιτητές/τριες εργαζόμενοι, σε περιβάλλοντα Τεχνολογικής Παιδαγωγικής Γνώσης στα Μαθηματικά, Κοινοτήτων Διερεύνησης, Θεωρίας της Δραστηριότητας και των τεσσάρων επιστημολογιών της Leone Burton, κατασκευάσαμε ένα εκπαιδευτικό παιχνίδι, την ΕυρωΑξιόΠολη http://www.blod.gr/lectures/Pages/viewlecture.aspx?LectureID=523 για την διδασκαλία ποσοστών και επιτοκίων στην Στ΄ Δημοτικού. Έγινε πιλοτική έρευνα σε φοιτητές/τριες αλλά και σε μαθητές/τριες Στ΄ Δημοτικού, από τα αποτελέσματα της οποίας φάνηκε ότι στο παιχνίδι, κυριαρχούν έννοιες, αξίες, προβληματισμοί, όπως η ισονομία και η αλληλεγγύη, που συνδέονται με την αειφόρο ανάπτυξη ενώ στο αντίστοιχο παιχνίδι Μονόπολη κυριαρχούν οικονομικοί όροι και οι αξίες που αναφέρονται στο κυρίαρχο οικονομικό μοντέλο.

Η μελέτη βέβαια των αποτελεσμάτων που αφορούν στους τρόπους με τους οποίους εφάρμοσαν οι μαθητές/τριες τις γνώσεις τους στα Μαθηματικά και τις τυχόν μαθησιακές δυσκολίες τους κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, βρίσκεται σε εξέλιξη. Εκείνο όμως που επιδιώχθηκε στο σχεδιασμό του, ήταν να βιώσουν αρχικά και να εκτιμήσουν οι «παίκτες» το γεγονός ότι τα συμφραζόμενα της κατάστασης, μέσα στην οποία εντάχθηκαν τα Μαθηματικά, παράγουν εμπλαισιωμένο μαθηματικό λόγο με νόημα, με τη μορφή διαπραγμάτευσης πραγματικών προβλημάτων και ας μην είναι σε θέση να το συνειδητοποιήσουν άμεσα και να το διατυπώσουν θεωρητικά.

Παρακάτω βρίσκεται το ταμπλό της ΕυρωΑξιόΠολης. Οι συμμετέχοντες/ουσες στο εργαστήριο αυτό αναμένεται να εργαστούν και να ασκήσουν κριτική στο παιχνίδι αυτό για την παιδαγωγική και διδακτική του βελτίωση.

Ενδεικτική βιβλιογραφία:

Lerman, S. Murphy B.& Winbourne P. (2012). Big ideas in Teacher Knowledge and Mathematical Pedagogy. Στο Κολέζα κ.α (εκδ.) πρακτικά συνεδρίου: *Καινοτόμες προσεγγίσεις στην Εκπαίδευση. Σχεδιασμός και Δικτύωση*. Πάτρα 20-21 Οκτωβρίου, σελ.133-144. https://dl.dropbox.com/u/34051629/FINAL_Conference_Proceedings_Oct_16_%2010_2012.pdf

Μοσκοφόγλου- Χιονίδου Μ. (2013). Μαθηματικές Επιστημολογικές Προκλήσεις, Οικονομική Κρίση και Απόψεις Τελειόφοιτων Φοιτητών/τριών και μαθητών/τριών Στ΄ Δημοτικού για το Παιχνίδι Ευρω-Αξιό-Πολη. Στο Γ. Κόκκινος κ.α. (εκδ.). *Επιστήμες της Εκπαίδευσης, Από την ασθενή ταξινόμιση της Παιδαγωγικής στη διεπιστημονικότητα και τον επιστημονικό υβριδισμό*. 363-386. Εκδόσεις Ταξιδευτής.

Πόταρη Δ, 2012). Επαγγελματική εξέλιξη των εκπαιδευτικών των Μαθηματικών μέσα από τη σύνδεση έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών και διδακτικής πράξης. Στο Κολέζα κ.α (εκδ.) πρακτικά συνεδρίου: Καινοτόμες προσεγγίσεις στην Εκπαίδευση. Σχεδιασμός και Δικτύωση. Πάτρα 20-21 Οκτωβρίου, σελ. 6-17.

Σακονίδης, Χ. (2012). Διαχείριση της μαθηματικής δραστηριότητας και συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος στην τάξη: μια κρίσιμη σχέση για την ανάπτυξη της διδακτικής πρακτικής. Στο Κολέζα κ.α (εκδ.) πρακτικά συνεδρίου: Καινοτόμες προσεγγίσεις στην Εκπαίδευση. Σχεδιασμός και Δικτύωση. Πάτρα 20-21 οκτωβρίου 2012, σελ.109-133. https://dl.dropbox.com/u/34051629/FINAL_Conference_Proceedings_Oct_16_%2010_2012.pdf

ΟΙΚΟΔΟΜΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΕ ΜΙΚΡΑ ΠΑΙΔΙΑ

Συντονίστρια: Χρυστάλλα Παπαδημήτρη-Καχριμάνη

Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου

C.Papademetri@euc.ac.cy

Μαριάννα Ευσταθιάδου[1], Μαρία Σάντης[2], Χάρις Μαραθεύτου[3], Ευαγγελία Βορκά[3]

Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου[1], Συνεργάτης Ανοιχτού Σχολείου Στροβόλου[2], Εκπαιδευτικός Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού Κύπρου[3]

M.Efstathiadou@euc.ac.cy, m.santis@cytanet.com.cy, charismaratheftou@hotmail.com, evangelia5878@gmail.com

Η συγκεκριμένη Ομάδα Ανταλλαγών δίνει την ευκαιρία για συμμετοχή σε εργαστήριο οικοδόμησης μαθηματικού νοήματος μέσα από διαδικασίες μοντελοποίησης (πρώτη συνάντηση). Το εργαστήριο αντικατοπτρίζει την αντίληψη που θέλει τη μάθηση να επιτελείται μέσα από την εμπλοκή σε αυθεντικές διαδικασίες οικοδόμησης της γνώσης. Στη συνέχεια, (δεύτερη συνάντηση) οι συμμετέχοντες θα έχουν την ευκαιρία μέσα από παρουσιάσεις να δουν και να συζητήσουν τα αποτελέσματα από αντίστοιχες εφαρμογές που έγιναν σε διάφορα μαθησιακά περιβάλλοντα (αυθεντικές τάξεις νηπιαγωγείου, πρόγραμμα απογευματινής απασχόλησης δημιουργικής μάθησης και παιχνιδιού για μικρά παιδιά και προγράμματα εκπαίδευσης εκπαιδευτικών).

Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΑΘΗΣΗΣ

Η έρευνα που αφορά (α) στα μαθηματικά και τη μάθηση και (β) στην εκπαίδευση των μικρών παιδιών τονίζει την ανάγκη για εμπλοκή σε αυθεντικές διαδικασίες οικοδόμησης της γνώσης. Η λέξη 'αυθεντικές' παραπέμπει σε προσεγγίσεις οι οποίες προωθούν όχι μόνο την οικοδόμηση μαθηματικών εννοιών αλλά και την κατανόηση του τρόπου που αυτές οικοδομούνται, προσεγγίσεις όπου η μάθηση θα αντιμετωπίζεται ως μια διαδικασία η οποία επιτελείται μέσα από την εμπλοκή σε διεργασίες, παρόμοιες με τις πρακτικές των επιστημόνων. Αφού στόχος μας θα πρέπει να είναι να μαθαίνουμε τα παιδιά πώς να σκέφτονται σαν μαθηματικοί (Papert, 1972) κερδίζουν ολοένα και περισσότερο έδαφος προσεγγίσεις οι οποίες βασίζονται σε διεργασίες (π.χ λύση προβλήματος, διερεύνηση, μοντελοποίηση). Οι εργασίες αυτής της Ομάδας Ανταλλαγών θα εστιάσουν στη διεργασία της μοντελοποίησης (modeling-based learning) στην οποία εμπλέκονται σημαντικές διαδικασίες που υποτιμούνται στα παραδοσιακά αναλυτικά προγράμματα, και μπορούν να αποτελέσουν αποτελεσματικό μέσο για την ενεργητική οικοδόμηση της γνώσης (English, 2003).

Φαίνεται να υπάρχουν πολλές τομές ανάμεσα στη μοντελοποίηση ως προσέγγιση μάθησης και (α) στη μάθηση όπως αυτή προωθείται από τους κόλπους του κατασκευαστικού οικοδομισμού (constructionism) και (β) βασικές αρχές που επισημαίνει η έρευνα που αφορά στην εκπαίδευση μικρών παιδιών και που προωθούν μοντέλα όπου η μάθηση επιτελείται μέσα από την ανάγκη των παιδιών να αναπαραστήσουν τις εμπειρίες/γνώσεις τους μέσα από την προσπάθεια τους να κατανοήσουν τον κόσμο (Reggio Emilia/Project Approach) και μέσα από την καθημερινή τους φυσική εργασία που είναι το παιχνίδι (μοντέλο High Scope). Οι εφαρμογές που θα παρουσιαστούν στην Ομάδα συνοψίζουν τη βιβλιογραφία που υποστηρίζει την ανάγκη για προσεγγίσεις δημιουργικής μάθησης και παιχνιδιού και βασίζονται στην εποικοδομητική αντίληψη που θέλει τη μάθηση να είναι μια ενεργητική διαδικασία εμπλοκής σε διεργασίες η οποία καθοδηγείται από το έμφυτο πάθος για μάθηση (Resnick, 2007; Stager, 2012).

ΤΟ ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΤΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

Οι εφαρμογές που θα παρουσιαστούν αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο ερευνητικού έργου [1] με σκοπό την ανάπτυξη ενός Ενιαίου Πλαισίου Γραμματισμού (ΕΠΓ) για τα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες στο Νηπιαγωγείο. Βασικός άξονας του έργου είναι το ΕΠΓ να αναπτυχθεί από μια συνεργαζόμενη κοινότητα ερευνητών, νηπιαγωγών με ερευνητική εμπειρία και εν ενεργεία νηπιαγωγών. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε στηρίχτηκε στην πεποίθηση ότι η ανάπτυξη ερευνητικά εγκυροποιημένων μαθησιακών πλαισίων απαιτεί κυκλικές διαδικασίες συλλογής και ανάλυσης δεδομένων από πραγματικά περιβάλλοντα μάθησης και συμμετοχική επιμόρφωση συνεργαζόμενων εκπαιδευτικών (Saracho & Spodek, 2008).

ΔΟΜΗ ΤΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ ΤΗΣ ΟΜΑΔΑΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΩΝ

Μέσα από τις εργασίες της Ομάδας Ανταλλαγών θα παρουσιαστούν εφαρμογές που αφορούν σε είδη και ακολουθίες αριθμών ως ακολούθως:

(α) Εξελικτική πορεία δραστηριοτήτων που εφαρμόστηκε στο πλαίσιο εργαστηρίων που διοργανώθηκαν για τις εν ενεργεία νηπιαγωγούς που συμμετείχαν στο έργο με σκοπό να ενεργοποιηθούν διαδικασίες αναστοχασμού σε σχέση με την υφιστάμενη πρακτική τους (Πρώτη Συνάντηση, συμμετοχή των συμμετεχόντων σε εργαστήριο υπό την καθοδήγηση της συντονίστριας της Ομάδας).

(β) Εξελικτικές πορείες δραστηριοτήτων που εφαρμόστηκαν από εν ενεργεία νηπιαγωγούς που συμμετείχαν στο ερευνητικό έργο (Δεύτερη συνάντηση Ομάδας Ανταλλαγών, παρουσιάσεις εφαρμογών από τις εν ενεργεία νηπιαγωγούς Χάρις Μαραθεύτου και Ευαγγελία Βορκά).

(γ) Δραστηριότητες ελεύθερου παιχνιδιού που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο οργανωμένου προγράμματος απογευματινής απασχόλησης δημιουργικής μάθησης

και παιχνιδιού (Δεύτερη συνάντηση Ομάδας Ανταλλαγών, παρουσιάσεις από τις εκπαιδεύτριες του προγράμματος Μαριάννα Ευσταθιάδου και Μαρία Σάντης).

Μετά από τις παρουσιάσεις που θα γίνουν στη δεύτερη συνάντηση της Ομάδας Ανταλλαγών θα ακολουθήσει συζήτηση (Συντονισμός: Χρυστάλλα Παπαδημήτρη) με σκοπό τη δυναμική σύνδεση των εργασιών της Ομάδας .

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Η δουλειά που παρουσιάζεται στην Ομάδα Ανταλλαγών πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του ερευνητικού έργου ΠΛΕΓΜΑ (2011-2014), το οποίο χρηματοδοτείται από το Ίδρυμα Προώθησης Έρευνας, Αρ.Πρ.ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΕΣ/ΠΑΙΔΙ/0609(ΒΕ)/14.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

English, L. D. (2003). Reconciling theory, research, and practice: A models and modeling perspective. Educational Studies in Mathematics, 54(2,3), 225-248.

Papert, S. (1972). Teaching Children to be Mathematicians versus Teaching Children about Mathematics. In A. Floyd (Ed.), *Developing Mathematical Thinking* (235-245). Working Addison – Wesley.

Resnick, M. (2007). All I really need to know (about creative thinking) I learned (by studying how children learn) in kindergarten. *ACM Creativity and Cognition Conference*, Washington DC. (Ανασύρθηκε από http://web.media.mit.edu/~mres/papers/CC2007-handout.pdf)

Saracho, O., & Spodek, B. (2008). Research Perspectives in Early Childhood Mathematics, In O.N., Saracho & B. Spodek (Eds), *Contemporary Perspectives on Mathematics in Early Childhood Education*, USA: Information Age Publishing, INC, 309-320.

Stager, G. (2012). Friends of Papertian Constructionism. In Kynigos, C., Clayson, J. &Yiannoutsou, N. (2012). *Constructionism: Theory, Practice and Impact. Conference Proceedings.* Athens: 2012.

ΤΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ ΠΟΥ ΕΝΩΝΕΙ ΤΑ ΜΕΣΑ ΔΥΟ ΠΛΕΥΡΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Αναστασία Καρακώστα
1ο Γενικό Λύκειο Βέροιας
tasakarakosta@gmail.com

1.ΤΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Το 2001 στο Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών εισήχθηκαν καινοτομίες στη μαθηματική εκπαίδευση, οι οποίες συνοψίζονται στη φράση: «*Μαθηματικά για όλους, μέσω μιας διαδικασίας σύλληψης, οργάνωσης και τεκμηρίωσης των μαθηματικών γνώσεων.*» Η προτεινόμενη στο Πρόγραμμα Σπουδών διδακτική μεθοδολογία στοχεύει στην εμπλοκή όσο το δυνατόν περισσότερων μαθητών σε κατάλληλες δραστηριότητες[1]. Αυτή η μεθοδολογία περιγράφεται και από τον Freudenthal ως εξής[2]: « …(*η διδακτική φαινομενολογία*): *αντί να παρουσιάσει στο μαθητή οργανωμένα φαινόμενα, με στόχο την ανακάλυψη των κοινών δομών, να ξεκινήσει από εκείνα τα φαινόμενα που ζητούν οργάνωση και έχοντας αυτά ως αφετηρία, να διδάξει το μαθητή πώς να χειρίζεται τα εργαλεία οργάνωσης..*». Όλα τα παραπάνω συνηγορούν στη διαμόρφωση μιας νέας αντίληψης για τη διδασκαλία των μαθηματικών, στην οποία καταλυτικό ρόλο παίζουν οι κατάλληλες δραστηριότητες [3]. Αυτού του είδους η διδασκαλία αναπτύχθηκε στο εργαστήριο Διδακτικής των Μαθηματικών της Φλώρινας και αποκαλείται «*Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής*».

2. Η ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

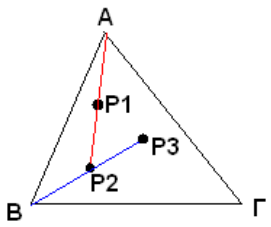
Ήδη από τη δεκαετία το ΄80, προωθείται διεθνώς μια σύνθετη διδασκαλία των μαθηματικών, κατά την οποία η Γεωμετρία, η Άλγεβρα και η Ανάλυση διδάσκονται ως συμπληρωματικές μέθοδοι η μια της άλλης. Ακόμα και στην ελληνική εκπαίδευση, όπου οι κλάδοι των μαθηματικών διδάσκονται ξεχωριστά, επικαλούμαστε τη βοηθητική παρέμβαση της γεωμετρίας και σε άλλα πεδία των μαθηματικών, όπως π.χ. στην Ανάλυση, στην διαισθητική προσέγγιση των πραγματικών ακολουθιών. Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να βρούμε τον τύπο της περιμέτρου του κύκλου στηριζόμαστε στη διαισθητική «απόδειξη» ότι τα κανονικά εγγεγραμμένα πολύγωνα (ν-πλευρών) συγκλίνουν στον κύκλο [4]. Επίσης στη Γ΄ Λυκείου η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης (ολοκλήρωμα Riemann) εισάγεται ως όριο ακολουθίας αθροισμάτων εμβαδών ορθογωνίων[5].

Για τους παραπάνω λόγους, επιλέχθηκε ως θέμα διδασκαλίας η πρόταση της ευκλείδειας γεωμετρίας, η οποία αφορά το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου. Επιπλέον συνέδεε ένα κλασικό θέμα με σύγχρονα μαθηματικά, το τρίγωνο του Sierpinski, επεκτείνοντας τις έννοιες της ομοιότητας και της διάστασης.

Η διδακτική προσέγγιση, πήρε την μορφή παιχνιδιού, για δύο λόγους: Πρώτα για να αντιμετωπίσουν οι μαθητές ένα πρόβλημα και να αναγκαστούν να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης, ώστε να ανασυρθεί η μαθηματική έννοια από μια πραγματική κατάσταση, και δεύτερο, να δραστηριοποιηθούν και οι αμέτοχοι μαθητές και να πάρουν μέρος στην εκπαιδευτική διαδικασία, κάτω από το κίνητρο της ¨νίκης¨.

3. Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Εφαρμόστηκε σε μαθητές Α΄ (2 διδακτικές ώρες) και Β΄ Λυκείου (3 ώρες). Αρχικά οι μαθητές εμπλέκονται στη μαθησιακή διαδικασία με ένα παιχνίδι, παραλλαγή του γνωστού παιχνιδιού του Barnsley «*Το Παιχνίδι του Χάους*», που το κάνει πιο ενδιαφέρον, αφού οι μαθητές παίζοντάς το χάνουν ή κερδίζουν. Αυτό το παιχνίδι παίζεται ως εξής: Παίρνουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Αρχικά, κάθε παίχτης διαλέγει ένα αρχικό σημείο P_1 μέσα στο τρίγωνο. Μετά ενώνει το P_1 με την κορυφή του τριγώνου που βρίσκεται πιο κοντά στο P_1 (αν το P_1 ισαπέχει από δύο κορυφές το ενώνουμε με οποιαδήποτε) και βρίσκει το συμμετρικό αυτής της κορυφής με κέντρο συμμετρίας το P_1, το σημείο P_2. Ακολούθως κάνει για το P_2 την ίδια διαδικασία που είχε κάνει για το P_1, βρίσκοντας έτσι το P_3, κ.ο.κ. Το παιχνίδι συνεχίζεται κατ' αυτόν τον τρόπο, έως ότου το σημείο κάποιου παίκτη βρεθεί εκτός του τριγώνου, οπότε αυτός ο παίκτης χάνει.



Έτσι οι μαθητές ανακαλύπτουν άτυπα το τρίγωνο του Sierpinski, βρίσκοντας ότι τα σημεία που σίγουρα οδηγούν σε νίκη (αρκούμαστε σε αυτό που είναι φανερό για το μαθητή) βρίσκονται στα ευθύγραμμα τμήματα που σταδιακά ενώνουν τα μέσα των πλευρών των τριγώνων που σχηματίζονται κατά τα επαναληπτικά βήματα.

Οι στόχοι της διδασκαλίας είναι οι εξής:

3.1. Γενικοί στόχοι

- Προσέλκυση του ενδιαφέροντος των μαθητών με την εμπλοκή τους σε παιχνίδι.
- Η ανάπτυξη από μέρους των μαθητών της ικανότητας μοντελοποίησης και μαθηματικής επεξεργασίας μιας διαμορφωμένης «πραγματικότητας»
- Η αντιμετώπιση ενός κλασικού θέματος με σύγχρονη ματιά ώστε να γίνει αντιληπτό ότι η γνώση δεν είναι στατική αλλά συνεχώς ανανεώνεται ενταγμένη στην τρέχουσα πραγματικότητα.

3.2. Ειδικοί στόχοι

- Η κατανόηση ορισμένων σύγχρονων ορολογιών, όπως αυτή της τροχιάς και της επανάληψης.
- Η δεξιότητα εφαρμογής μιας επαναληπτικής διαδικασίας (βρόχου).
- Η κατανόηση του σημαντικού ρόλου που παίζει η επιλογή του αρχικού σημείου καθώς και η ευαισθησία αυτής της επιλογής, αφού πολύ κοντινά σημεία οδηγούν σε τελείως διαφορετική κατάληξη.
- Γνωριμία με το τρίγωνο του Sierpinski και υπολογιστική διαπίστωση της σχέσης των λόγων περιμέτρων και εμβαδών.
- Εισαγωγή στην έννοια της ομοιότητας, της αυτοομοιότητας και των Φράκταλς.
- Όριο ακολουθιών
- Εισαγωγή σε σύστημα διευθύνσεων .
- Σύνδεση μαθηματικών, τέχνης και φύσης με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών πινάκων του Escher, τρούλων εκκλησιών, λογοτεχνικών κειμένων, φυσικών αντικειμένων και γενικά οπουδήποτε υπάρχει διαβάθμιση με αλλαγή κλίμακας.
- Η έννοια της διάστασης – κλασματικές διαστάσεις (μόνο για τη Β΄ Λυκείου)

3.3. Διδακτική μεθοδολογία

Εργασία σε ομάδες για ανάπτυξη πνεύματος συνεργασίας και αλληλοβοήθειας

Διδακτικά μέσα:

Α)Φύλλα εργασίας: Τα φύλλα 1α και 1β (το πρώτο για εξάσκηση στην εφαρμογή του επαναληπτικού κανόνα και το δεύτερο για οργάνωση των παρατηρήσεων), το φύλλο (2), το φύλλο (3) για σχεδίαση των τριών πρώτων βημάτων κατασκευής του τριγώνου και συμπλήρωση πίνακα για την εύρεση του ορίου της περιμέτρου και του εμβαδού του τριγώνου του Sierpinski, το (4) για την εισαγωγή συστήματος διευθύνσεων και το (5) (μόνο για τη Β΄ Λυκείου) για εισαγωγή στην έννοια της κλασματικής διάστασης.

Β)Το εργαστήριο των Η/Υ του Σχολείου: i) Για το παίξιμο του παιχνιδιού και την κατασκευή του τριγώνου του Sierpinski (με το λογισμικό Sketchpad) και ii)για χρήση του διαδικτύου με σκοπό τη γνωριμία με το ζωγράφο Escher.

Διαδικασία: Μοιράζουμε το ($1_α$) φύλλο και εξηγούμε το κανόνα του παιχνιδιού. Οι μαθητές δουλεύουν ανά τέσσερις. Τους αφήνουμε λίγο χρόνο, έως 5΄ για να πειραματιστούν.

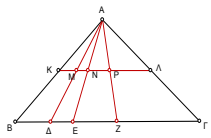
Κατόπιν μοιράζομε το φύλλο (1β), αυτό με το πλέγμα, ή χρησιμοποιούμε το λογισμικό Sketchpad. Στη δεύτερη περίπτωση τα βήματα είναι τα εξής: κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο χρησιμοποιώντας το εργαλείο ευθύγραμμο τμήμα. Κατόπιν ονομάζουμε τις κορυφές Α, Β και Γ. Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο P_1 στο εσωτερικό του τριγώνου και αρχίζουμε να παίζουμε το παιχνίδι. Συγκεκριμένα, κάνουμε την

πλησιέστερη προς το P_1 κορυφή του τριγώνου, κέντρο (αυτό γίνεται διπλοπατώντας την και έχοντας ενεργοποιημένο το βελάκι επιλογής). Με επιλεγμένο το σημείο μας P_1 πάμε στο μενού: Μετασχηματισμός, Αυξομείωση, λόγος 2/1. Προκύπτει ένα νέο σημείο και ακολούθως κάνουμε το ίδιο για αυτό.

Ξετυλίγουμε μία, μία τις παρακάτω ερωτήσεις και αφήνουμε τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν για την ορθότητα των απαντήσεων.

- Που βρίσκονται τα σημεία που αμέσως χάνουν;
- Τι συμβαίνει με τα σημεία που βρίσκονται στις πλευρές; Χάνουν ή κερδίζουν;
- Ποια σημεία καταλήγουν με την πρώτη πάνω στις πλευρές χαρίζοντάς μας γρήγορα νίκη;
- Με ποια διαδικασία μπορούμε να βρούμε τυχερά σημεία που δεν οδηγούν ποτέ έξω από το τρίγωνο;

Σε αυτό το στάδιο οι μαθητές ανακαλύπτουν άτυπα το τρίγωνο του Sierpinski, βρίσκοντας ότι τα σημεία που σίγουρα οδηγούν σε νίκη βρίσκονται στα ευθύγραμμα τμήματα που σταδιακά ενώνουν τα μέσα των πλευρών των σχηματιζόμενων τριγώνων. Μάλιστα μερικοί κάνουν και τη σύνδεση με την παρακάτω άσκηση του βιβλίου Γεωμετρίας του ΟΕΔΒ[6]



Στην διπλανή εικόνα το ευθ. τμήμα ΚΛ διχοτομεί τα ευθ. τμήματα ΑΔ, ΑΕ, κ.λ.π. που ενώνουν την κορυφή Α με οποιοδήποτε σημείο της βάσης.

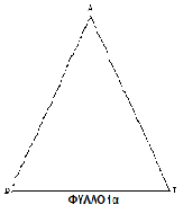
Κατόπιν μοιράζεται το φύλλο (2), με σχεδιασμένο το σχήμα που έχει προκύψει από την παραπάνω δραστηριότητα.

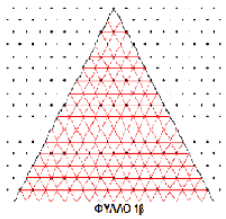
Οι μαθητές πρέπει τώρα να έχουν ξεκαθαρίσει ότι σημεία που σίγουρα οδηγούν σε νίκη βρίσκονται στα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν κάθε τόσο τα μέσα των σχηματιζόμενων πλευρών, σε μια ατελείωτη διαδικασία, ενώ οι μαύρες περιοχές οδηγούν σε χάσιμο, αφού αν το αρχικό σημείο επιλεγεί σε μαύρη περιοχή, πάντα θα δίνει τροχιά που θα μεταπηδά στο αμέσως μεγαλύτερο μαύρο τρίγωνο, με αποτέλεσμα να βρεθεί σταδιακά εκτός του τριγώνου. Μια απειροστή μετακίνηση στην επιλογή του αρχικού σημείου, προς τα πάνω ή προς τα κάτω μπορεί να αλλάξει, με την πάροδο του χρόνου, δραματικά το αποτέλεσμα του παιχνιδιού. Επίσης η παρατήρηση ότι κοντά στις κορυφές του τριγώνου, είναι αδύνατο να διακρίνουμε ποια σημεία οδηγούν σε νίκη και ποια σε ήττα, αφού η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρο, αναδεικνύει το γεγονός ότι το αποτέλεσμα δεν είναι πλήρως προβλέψιμο. Αναδύονται λοιπόν δύο σημαντικές έννοιες, η έννοια του δυναμικού συστήματος και η Θεωρία του Χάους.

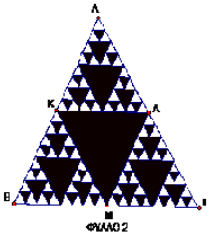
Μετά μοιράζουμε το φύλλο (3) με τα τρία πρώτα βήματα κατασκευής του τριγώνου για την εύρεση των λόγων των πλευρών και των περιμέτρων με τη βοήθεια της συμπλήρωσης πίνακα. Η εργασία στο φύλλο (4) του συστήματος διευθύνσεων εισάγει τρόπο διαχείρισης του απείρου με προτεινόμενη διδακτική πρόταση το σύνολο του Cantor και το ρόλο της κατάλληλης επιλογής αριθμητικού συστήματος.

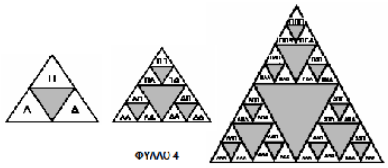
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

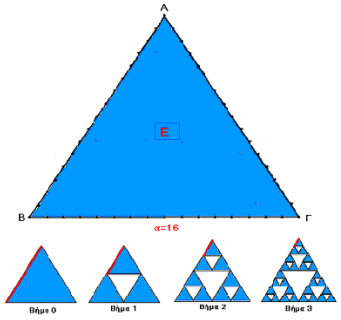
- Η ομαδοσυνεργατική διδασκαλία και το κίνητρο της νίκης υποκινούν τη συμμετοχή όλων των μαθητών. Μάλιστα οι ¨μέτριοι¨ μαθητές αποδείχθηκε ότι τα καταφέρνουν καλύτερα στην αρχική εύρεση των σημείων νίκης, πιθανόν γιατί δεν εγκλωβίζονται προσπαθώντας να εντάξουν ένα πρόβλημα ευθύς εξ αρχής σε προϋπάρχουσα γνώση. Οι ¨καλοί¨ όμως μαθητές είναι καλύτεροι στην οργάνωση και την προσεκτική συμπλήρωση των πινάκων και μόνο αυτοί συνέδεσαν το πρόβλημα με την προαναφερθείσα άσκηση του σχολικού βιβλίου.
- Επειδή στη διδασκαλία η ερώτηση του «*Ποια σημεία καταλήγουν με την πρώτη πάνω στις πλευρές χαρίζοντάς μας γρήγορα νίκη*» έπαιξε σπουδαίο ρόλο στην οργάνωση της σκέψης τους, οι μαθητές μπορούν να τα βρουν πειραματιζόμενοι σε Η/Υ με τη χρήση του Sketchpad δουλεύοντας αντίστροφα, δηλαδή να παίρνουν τυχαία σημεία πάνω στις πλευρές του τριγώνου και με τον μετασχηματισμό της αυξομείωσης με κέντρο τις κορυφές του τριγώνου και λόγο ½ να βρουν τη θέση των ζητούμενων σημείων.
- Επίσης, στη Β΄ Λυκείου, η παρατήρηση που προκύπτει από τη συμπλήρωση του πίνακα του φύλλου (3) ότι το τρίγωνο του Sierpinski έχει άπειρη περίμετρο (3.$(\frac{3}{2})^{\nu}$.α) και μηδενικό εμβαδόν ($(\frac{3}{4})^{\nu}$.Ε), εισάγει την αναγκαιότητα εισαγωγής κλασματικών διαστάσεων. Επομένως τίθεται το θέμα ορισμού μιας άλλης διάστασης που θα μπορεί να μετρά το πόσο χώρο καταλαμβάνουν αυτά τα περίεργα σχήματα (Φράκταλς), που προκύπτουν από την εφαρμογή απείρων επαναλήψεων μιας διαδικασίας, το βαθμό λεπτομέρειάς τους. Συμπληρωματικά τότε μπορεί να δοθεί το φύλλο εργασίας (5).


ΦΥΛΛΟ 1α


ΦΥΛΛΟ 1β

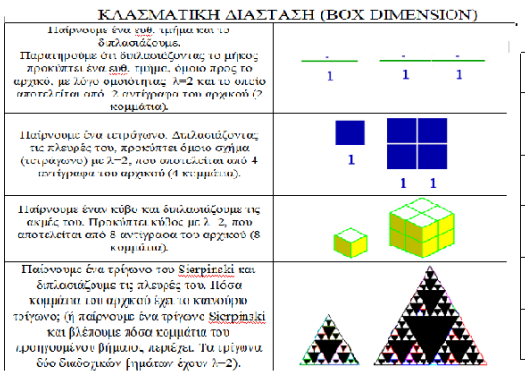

ΦΥΛΛΟ 2


ΦΥΛΛΟ 4



Βήμα	Αριθμός τριγώνων ν που μένουν	Μήκος της πλευράς τους	Κλίμακα: Ο λόγος της πλευράς των μικρών τριγώνων προς την πλευρά του αρχικού (Για τη Β΄ Λυκείου: Λόγος ομοιότητας λ αυτών των τριγώνων σε σχέση με το αρχικό τρίγωνο)	Μήκος της πλευράς τους	Περίμετρός τους	Εμβαδόν ενός από αυτά τα τρίγωνα	Συνολικό εμβαδόν του σχήματος που προκύπτει
0	1	α=16		α	3.α=….	Ε	Ε
1							
2							
3							
…							
ν							

ΦΥΛΛΟ 3



Συμπλήρωσε τώρα τον πίνακα:

Σχήμα	Διάσταση D	Λόγος ομοιότητας λ	Αριθμός κομματιών N
Ευθ. τμήμα	1	2	$2=2^1$
Τετράγωνο	2	2	$4=2^2$
Κύβος	3	2	$8=2^3$
Γενικά	d	2	N=……..
Τρίγωνο του Sierpinski.	;	2	… = …

ΦΥΛΛΟ 5

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2002). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ), 1114.
2. Streefland, Leen (2000). Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, εισαγ.-μτφρ. Ευγενίας Κολέζα, σ.14 . Αθήνα: Leader Books.
3. ώστε ο μαθητής να αισθανθεί «όπως το ψάρι στο νερό», όπως χαρακτηριστικά αναφέρει η Anna Sierpinska (MATH 645: Theory of Situations/ Lecture 1)
4. Αργυρόπουλος, Η. & ά. (2003) Ευκλείδεια Γεωμετρία, 243. Αθήνα: ΟΕΔΒ
5. Ανδρεαδάκης, Σ. & ά. (2012) Μαθηματικά Γ΄Λυκείου Θετική &Τεχνολογική κατεύθυνση, 330. Αθήνα: ΟΕΔΒ
6. Αργυρόπουλος, Η. & ά. (2003) Ευκλείδεια Γεωμετρία, σελ.111, άσκηση 1 (εμπέδωσης). Αθήνα: ΟΕΔΒ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Καψάλης Α. & Λεμονίδης, Χ. (1999). Σύγχρονες τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών. *Μακεδνόν*, τ. 6, 103.

Μαμωνά-Downs. (1998). Οριακές διαδικασίες επιπέδων σχημάτων και η παιδαγωγική τους σημασία. Πρακτικά 15ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΜΕ: Τα Μαθηματικά στις Νέες Εκπαιδευτικές Συνθήκες, 13-14-15 Νοεμβρίου 1998, Χίος.

Cabay, T. (1991). The Activity Theory of Learning and Mathematics Education in the USSR. F. Furinghetti (ed.), Assisi, Italy. *Proceedings of the 15th PME Conference*. Vol. I., p. 49-56

Craine, T. (1985). Integrating Geometry into the Secondary Mathematics Curriculum. In Christian R. Hirsch (Eds.), *The Secondary School Mathematics Curriculum*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, p. 119

"Cynthia Lanius' Fractals Unit." For elementary and middle school grades (http://math.rice.edu/~lanius/frac/pages.html)

"The Dynamical Systems and Technology Project at Boston University" (http://math.bu.edu/DYSYS/index.html)

"The Chaos game." (http://www.jgiesen.de/ChaosSpiel/Spiel1English.html)

http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/node1.html

http://mcescher.com/Gallery/recogn-bmp

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ;

Αγγελική Ζούπα, Κωνσταντίνος Καραντζούλης, Μιχάλης Κασκαντάμης, Διονυσία Μπακογιάννη, Χαρίκλεια Παπακανδεράκη, Περιστέρα Πάσχου

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

mekkapsaki@hotmail.com, koskarnt@math.uoa.gr, mijalis.atenas@gmail.com, dbakogianni@math.uoa.gr, xara.ppk@gmail.com, colomba_pr@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα τελευταία χρόνια, η σύνδεση των στατιστικών εννοιών με έννοιες των πιθανοτήτων και η ενθάρρυνση της Στατιστικής Συμπερασματολογίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αποτελεί κεντρικό ερευνητικό πρόβλημα στο χώρο της διδασκαλίας της Στατιστικής. Στη σύγχρονη αυτή κατεύθυνση, η παρούσα διδακτική παρέμβαση επιδιώκει την ενθάρρυνση εξαγωγής συμπερασμάτων από μαθητές Γ' Λυκείου μέσα από τον έλεγχο υποθέσεων. Ειδικότερα, στόχος της παρέμβασης είναι οι μαθητές, μέσα από τη δημιουργία προσομοιώσεων, να εξάγουν συμπεράσματα για μια συγκριτική πειραματική μελέτη και να αναπτύξουν συνδέσεις ανάμεσα σε έννοιες Στατιστικής και Πιθανοτήτων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε πολλές χώρες, μέσα από τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών για τη μαθηματική εκπαίδευση, δίνεται έμφαση στα Στοχαστικά Μαθηματικά, δηλαδή τη Στατιστική και τις Πιθανότητες. Αρκετά από αυτά τα προγράμματα σπουδών περιλαμβάνουν στοιχεία από τη Στατιστική Συμπερασματολογία (ΣΣ) (NCTM, 2000; Franklin et.al., 2005; MoE, 2007). Στη σχετική βιβλιογραφία, αναγνωρίζεται η δυσκολία που έχει η κατανόηση της ΣΣ και προτείνεται η προσέγγιση των τεστ υπόθεσης ή των διαστημάτων εμπιστοσύνης μέσα από τη λεγόμενη *άτυπη στατιστική συμπερασματολογία* (Budgett et.al., 2013; Rossman, 2007). Η σύνδεση των στατιστικών εννοιών με τις έννοιες των πιθανοτήτων είναι καθοριστικής σημασίας για την ανάπτυξη στοχαστικού τρόπου σκέψης από τους μαθητές (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Μέσα από αυτήν την προσέγγιση οι μαθητές ξεφεύγουν από το πλαίσιο της περιγραφικής στατιστικής, δίνουν νόημα στο περιεχόμενο της στατιστικής και αναπτύσσουν στατιστική συλλογιστική.

Η διδακτική παρέμβαση που σχεδιάσαμε έχει ως στόχο οι μαθητές της Γ' Λυκείου να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο δημιουργείται μια συγκριτική πειραματική μελέτη και μέσα από τη χρήση εννοιών και μεθόδων της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων να οδηγηθούν σε συμπεράσματα.

1. ΠΗΓΕΣ ΚΑΙ ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Ως πηγές για την δημιουργία της συγκριτικής πειραματικής μελέτης χρησιμοποιήθηκαν η GAISE Report (Franklin et. al., 2005), υλικό από τον διαδικτυακό τόπο Annenberg, το τεστ τυχαιοποίησης (randomization test) για τη ΣΣ (Rossman, 2007; Budgett et.al., 2013) ενώ για την δημιουργία των προσομοιώσεων χρησιμοποιήθηκε το Fathom (Finzer, 1999), λογισμικό που έχει αναπτυχθεί ειδικά για την διδασκαλία της Στατιστικής.

Το βασικό ερώτημα που καλούνται να διερευνήσουν οι μαθητές και να απαντήσουν με επιστημονικό τρόπο είναι το εξής: «Επηρεάζεται η ικανότητα απομνημόνευσης λέξεων από το αν οι λέξεις έχουν νόημα ή όχι;». Οι βασικές έννοιες που χρειάζεται να διαπραγματευτούν οι μαθητές προκειμένου να απαντήσουν στο ερώτημα αυτό είναι η έννοια της διαμέσου και η έννοια της πιθανότητας μέσα από τη σχετική συχνότητα. Τα μέσα που θα χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή των συμπερασμάτων από τους μαθητές είναι η μέθοδος της τυχαιοποίησης και η προσομοίωση. Κυρίαρχος στόχος είναι οι μαθητές, μέσα από τη σύνδεση εννοιών στατιστικής και πιθανοτήτων, να αντιληφθούν σε ένα πρώτο επίπεδο πως μπορεί να γίνει ο έλεγχος μιας υπόθεσης σε μια στατιστική μελέτη.

2. ΤΑ ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΟΙ ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΣΤΟΧΟΙ

Η διδακτική παρέμβαση που σχεδιάστηκε προτείνεται για μαθητές Γ’ Λυκείου και ο εκτιμώμενος χρόνος που απαιτείται για την υλοποίησή της είναι 3 διδακτικές ώρες. Η δραστηριότητα περιλαμβάνει τέσσερις επιμέρους δράσεις, οι οποίες περιγράφονται παρακάτω.

2.1.Το πρόβλημα και η συλλογή των δεδομένων

Προκειμένου οι μαθητές να απαντήσουν στο ζητούμενο ερευνητικό ερώτημα τους δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα: «Σας δίνονται δύο ομάδες είκοσι λέξεων. Η μία ομάδα περιέχει λέξεις με νόημα ενώ η άλλη χωρίς νόημα. Αφού διαβάσετε προσεκτικά τις λέξεις, για δύο λεπτά, προσπαθήστε να απομνημονεύσετε όσο το δυνατόν περισσότερες. Μετά από ένα λεπτό παύσης καταγράψτε μέσα σε δύο λεπτά όσες λέξεις θυμάστε».

Στόχος αυτής της δράσης είναι οι μαθητές να εμπλακούν στη διαδικασία του πειράματος και να συγκεντρώσουν οι ίδιοι δεδομένα. Για να έχει νόημα η δραστηριότητα, χρειάζεται ο αριθμός των μαθητών που θα συμμετέχουν στο πείραμα να μην είναι πολύ μικρός (τουλάχιστον 20 μαθητές), ώστε τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από τα δεδομένα να βοηθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων.

Προκειμένου οι μαθητές να προβληματιστούν σχετικά με παράγοντες, κυρίως μη μαθηματικούς, που χρειάζεται να ελεγχθούν ώστε να προκύψει ένα έγκυρο στατιστικό αποτέλεσμα, η συλλογή δεν θα γίνει καθ’ υπόδειξη του διδάσκοντα αλλά καλώντας τους μαθητές να επιλέξουν οι ίδιοι μια κατάλληλη μέθοδο συλλογής των

δεδομένων. Έτσι δίνονται στους μαθητές 5 εναλλακτικά σενάρια, κάποια κατάλληλα και κάποια όχι, από τα οποία καλούνται να επιλέξουν τη μέθοδο που θα συλλέξουν τα δεδομένα τους.

2.2. Επεξεργασία των δεδομένων

Αφού εκτελεστεί το πείραμα οι μαθητές καλούνται να καταγράψουν τον αριθμό λέξεων από κάθε κατηγορία που αναπαρήγαγε ο καθένας και να υπολογίσουν τη διάμεσο κάθε κατηγορίας λέξεων για το σύνολο των δεδομένων. Στη συνέχεια καλούνται να ερμηνεύσουν την τιμή της διαφοράς των διαμέσων των δύο κατηγοριών στο πλαίσιο του προβλήματος που μελετούν και να εντοπίσουν πιθανούς παράγοντες που επηρεάζουν το αποτέλεσμα. Εδώ αναμένουμε να δούμε τι ερμηνείες θα κάνουν οι μαθητές και αν αντιλαμβάνονται τους περιορισμούς του πειράματος ή προχωρούν σε γενικεύσεις. Ο στόχος είναι οι μαθητές να προβληματιστούν και να ανταλλάξουν επιχειρήματα για την εγκυρότητα του αποτελέσματος αλλά και για το πώς θα μπορούσε να ελεγχθεί κάτι τέτοιο με στατιστικές μεθόδους.

I. Έλεγχος υποθέσεων μέσα από τη διαδικασία προσομοίωσης με φυσικά μέσα.

Στόχος αυτής της φάσης είναι να προετοιμάσει τους μαθητές για τη διαδικασία της προσομοίωσης με τη χρήση στατιστικού λογισμικού. Με βάση τη συζήτηση που έχει προηγηθεί παρουσιάζεται στους μαθητές η μηδενική υπόθεση, ότι δηλαδή δεν παίζει ρόλο στην απομνημόνευση αν οι λέξεις έχουν νόημα ή όχι, οπότε όλα τα δεδομένα που έχουν προκύψει μπορούν να ανακατευτούν και με τυχαίο τρόπο να ανατεθούν εκ νέου σε κάποια από τις δύο κατηγορίες. Οι μαθητές πειραματίζονται με τη διαδικασία τυχαιοποίησης και σχηματίζουν στοιχεία από την κατανομή των διαφορών των διαμέσων των δύο κατηγοριών. Μέσα από αυτή τη διαδικασία οι μαθητές αρχίζουν να παρατηρούν πόσο συχνά εμφανίζεται η διαφορά των διαμέσων που κατέγραψαν αρχικά και κάνουν εικασίες για το αν τελικά η διαφορά που προέκυψε αρχικά είναι σημαντική ή όχι. Τέλος αναδεικνύεται η ανάγκη να επαναληφθεί πολλές φορές η τυχαία ανακατανομή προκειμένου να διαπιστώσουν ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης της αρχικής διαφοράς.

II. Έλεγχος υπόθεσης μέσα από προσομοιώσεις στον Η/Υ

Για τη δράση αυτή χρησιμοποιείται το λογισμικό Fathom. Με τη βοήθεια του λογισμικού γίνεται η προσομοίωση εκατοντάδων τυχαιοποιήσεων και σχηματίζεται ένα σημειόγραμμα με την κατανομή των διαφορών των διαμέσων. Οι μαθητές καλούνται να ερμηνεύσουν το σημειόγραμμα και να εντοπίσουν που βρίσκεται η αρχική διαφορά σε αυτό. Εδώ οι μαθητές θα πρέπει να παρατηρήσουν αν η αρχική διαφορά που υπολόγισαν έχει μικρή ή μεγάλη συχνότητα και να ερμηνεύσουν αυτό το αποτέλεσμα. Επιπλέον, καλούνται να συνδέσουν την έννοια της σχετικής συχνότητας με την πιθανότητα εμφάνισης του αποτελέσματος. Τέλος, οι μαθητές καλούνται να συζητήσουν για την εμπειρία τους και τον τρόπο που τα στατιστικά εργαλεία μπορούν να υποστηρίξουν την εξαγωγή συμπερασμάτων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ

Η διδακτική παρέμβαση που περιγράψαμε παραπάνω δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα, μέσα από τον πειραματισμό με δεδομένα που παράγουν οι ίδιοι, να δουν στατιστικές έννοιες μέσα σε ένα ρεαλιστικό και με σημασία πλαίσιο, να αντιληφθούν πηγές μεταβλητότητας και να κάνουν εικασίες. Τα συμπεράσματα στα οποία καλούνται να οδηγηθούν οι μαθητές, προκύπτουν μέσα από τη σύνδεση των στατιστικών εννοιών με έννοιες πιθανοτήτων και με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένα υπόβαθρο που θα βοηθήσει τους μαθητές στην κατανόηση της ΣΣ.

Για να υποστηριχθεί διδακτικά η προτεινόμενη δραστηριότητα, χρειάζεται οι μαθητές να εμπλακούν ενεργά, να λάβουν αποφάσεις, να κάνουν εικασίες και να πειραματιστούν. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ενθαρρύνει αυτά τα χαρακτηριστικά και να βοηθήσει τους μαθητές όπου χρειάζεται παρεμβαίνοντας και θέτοντας κατάλληλα ερωτήματα. Η εξοικείωση με το περιεχόμενο της στατιστικής και το στατιστικό τρόπο σκέψης και μια σχετική εμπειρία στη χρήση του λογισμικού Fathom, αποτελούν σημαντικό υπόβαθρο για τον εκπαιδευτικό προκειμένου να επιτευχθούν οι στόχοι της δραστηριότητας.

Η δραστηριότητα αυτή δεν έχει δοκιμαστεί στην τάξη μέχρι τη στιγμή συγγραφής του παρόντος κειμένου. Παρόλα αυτά, στην παρουσίαση που θα γίνει θα είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε στοιχεία από την εφαρμογή της σε μαθητές Γ' Λυκείου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Annenberg Learner Web Site (2011). *Teacher resources and professional development across the curriculum*. Ανακτημένο στις 20/12/2012 από την ιστοσελίδα:
http://www.learner.org/courses/learningmath/data/session6/part_c/index.html

Budgett, S., Pfannkuch, M., Regan, M., & Wild, C. (2013). Dynamic Visualizations and the Randomization Test. *Technology Innovations in Statistics Education, 7*(2)

Finzer, W. (1999). Fathom Dynamic Data Software. Key Curriculum Press

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A PreK-12 Curriculum Framework.* American Statistical Association (ASA), Alexandria, VA

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). Developing Students' Statistical Reasoning Research and Teaching Practice. Springer Publishers.

MoE (2007). *The New Zealand Curriculum.* Ministry of Education.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Rossman, A. (2007). Reasoning about informal inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 5-19.

«ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΤΗΣ ΜΟΥΣΟΥΛΜΑΝΙΚΗΣ ΜΕΙΟΝΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗ ΘΡΑΚΗ»: ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΕ ΠΟΛΥΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Χ. Σακονίδης, Α. Κλώθου, Α. Νιζάμ, Ν. Ανταμπούφης, Α. Δραμαλίδης, Χ. Μαργαρίτης & Β. Φακούδης

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

xsakonid@eled.duth.gr, aklothou@eled.duth.gr, anizam@bscc.duth.gr, antanik@otenet.gr, adramali@psed.duth.gr, akis.margaritis@gmail.com, akoudis@sch.gr

Το Πρόγραμμα «Εκπαίδευση των παιδιών της μουσουλμανικής μειονότητας στη Θράκη» αποτελεί την τέταρτη φάση ενός έργου που ξεκίνησε το 1997 και συνιστά μια πολύχρονη προσπάθεια για τη βελτίωση της εκπαίδευσης των παιδιών της μουσουλμανικής μειονότητας στη Θράκη. Η δράση του προγράμματος οργανώνεται σε δύο άξονες: (α) παρέμβαση μέσα στο σχολείο, με νέα βιβλία και εκπαιδευτικά υλικά που διαμορφώθηκαν με βάση την αρχή του σεβασμού της γλώσσας και της ταυτότητας της μειονότητας, καθώς και με τη συστηματική επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και (β) παρέμβαση εκτός σχολείου, κυρίως με τη δημιουργία κέντρων στήριξης του προγράμματος σε πόλεις και οικισμούς της Θράκης.

Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, θεμελιακός στόχος του προγράμματος είναι η ενίσχυση της ελληνομάθειας των μαθητών και η βελτίωση της σχολικής επίδοσής τους σε βασικά αντικείμενα του αναλυτικού προγράμματος. Ειδικότερα για τα Μαθηματικά, η διδακτική παρέμβαση αναπτύχθηκε σε περισσότερα από 30 Γυμνάσια και Λύκεια της Θράκης, όπου φοιτά μεγάλος αριθμός μειονοτικών μαθητών, με τη συμμετοχή περισσότερων από 1.500 μαθητές και 60 εκπαιδευτικούς κατά μέσο όρο και σχολικό έτος υλοποίησης του προγράμματος.

Για την παρέμβαση στα μαθηματικά αξιοποιήθηκε το εκπαιδευτικό υλικό «Μαθηματικά προσαρμοσμένα σε περιβάλλον για αυτόνομη μάθηση», η συγκρότηση του οποίου ξεκίνησε στο πλαίσιο παλαιότερου αντίστοιχου προγράμματος και ενισχύθηκε σε προηγούμενες φάσεις του προγράμματος. Για τη στήριξη των εκπαιδευτικών που δίδαξαν στο πλαίσιο της δράσης σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε ένα πρόγραμμα αρχικής επιμόρφωσης και συνεχούς υποστήριξής τους.

Μια πρώτη ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν και περιλαμβάνουν κυρίως σημειώσεις πεδίου, συνεντεύξεις και εργασίες των μαθητών αναδεικνύουν σημαντικά οφέλη των μειονοτικών μαθητών κυρίως αναφορικά με τους τρόπους εμπλοκής τους στη μαθησιακή διαδικασία στα μαθηματικά του σχολείου.

ΠΛΕΓΜΑ: ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΝΙΑΙΟΥ ΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

Συντονίστρια Έργου: Χρυστάλλα Παπαδημήτρη-Καχριμάνη
Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου
C.Papademetri@euc.ac.cy

Το ΠΛΕΓΜΑ[1] είναι τριετές ερευνητικό έργο (2011-2014) που αποσκοπεί στο σχεδιασμό, εφαρμογή, αξιολόγηση και ερευνητική επικύρωση ενός πλαισίου ενιαίου μαθηματικού και επιστημονικού γραμματισμού για την εκπαίδευση παιδιών ηλικίας 3-7 ετών.

Οι βασικοί παράμετροι του έργου είναι οι ακόλουθοι:

Συμμετοχικότητα: Το ΠΛΕΓΜΑ δίνει έμφαση στην ανάπτυξη συμμετοχικών διεργασιών οι οποίες εμπλέκουν εκπαιδευτικούς σε όλες τις φάσεις της διαδικασίας ανάπτυξης μαθησιακών πλαισίων με τρόπο που να ενισχύεται η αξιοποίηση κατανεμημένης τεχνογνωσίας, η επιστημονική ταυτότητα των εκπαιδευτικών και η εκπαιδευτική ενημερότητα των ερευνητών.

Επικύρωση Αναλυτικού Προγράμματος: Το έργο προσφέρει μια πρότυπη διεργασία ανάπτυξης ερευνητικά επικυρωμένου αναλυτικού προγράμματος. Η όλη διαδικασία που ακολουθείται στηρίζεται σε σφαιρικές, συμμετοχικές και κυκλικές διεργασίες εφαρμογής και αναθεώρησης μέσα από τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πραγματικά περιβάλλοντα μάθησης.

Ενιαίος Γραμματισμός: Το ΠΛΕΓΜΑ αποτελεί προσπάθεια για τη δημιουργία ενός ενιαίου πλαισίου γραμματισμού το οποίο προσδιορίζεται από συγκεκριμένους μαθησιακούς άξονες (εμπειρίες, δεξιότητες επιστημονικής μεθόδου, επιστημονικές διεργασίες, στάσεις, αναδυόμενη εννοιολογική κατανόηση και επιστημολογική ετοιμότητα).

Το Ενιαίο Πλαίσιο Γραμματισμού που αναπτύχθηκε από το ερευνητικό έργο ΠΛΕΓΜΑ, αποτελεί ένα μοντέλο μάθησης που έχει ως βάση τις διεργασίες (process-based program) και προάγει τη μάθηση μέσω μακροπρόθεσμων διαδικασιών εις βάθος μελέτης θεμάτων (project-based program). Ως διεργασίες ορίζονται η λύση προβλήματος, η μοντελοποίηση και η διερεύνηση. Οι διεργασίες στο Ενιαίο Πλαίσιο αποτελούν την προσέγγιση για την επίτευξη των υπόλοιπων μαθησιακών αξόνων με τρόπο συνδυαστικό, δυναμικό, συνεκτικό και κυρίως με τρόπο που να έχει νόημα για τα παιδιά στην προσπάθεια να κατανοήσουν τον φυσικό και μαθηματικό κόσμο που τα περιβάλλει. Το πλαίσιο αυτό ενισχύεται από την υφιστάμενη βιβλιογραφία όπου

[1] Η δουλειά που παρουσιάζεται σε αυτό το κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος ΠΛΕΓΜΑ, το οποίο χρηματοδοτείται από το Ίδρυμα Προώθησης Έρευνας, Αρ. Πρ. ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΕΣ/ΠΑΙΔΙ/0609(ΒΕ)/14

κερδίζουν ολοένα και περισσότερο έδαφος προσεγγίσεις οι οποίες βασίζονται στη λύση προβλήματος (problem-based learning), στη διερεύνηση (investigative-based learning) και στη μοντελοποίηση (modeling-based learning).

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ: ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

[1]Αλ. Βασιλειάδης και [2]Αθ. Στράντζαλος

[1]Δημοτικό Σχολείο Νάουσας Πάρου/ ΓΑΚ Νεάπολης Λασιθίου

[2] Πρότυπο - Πειραματικό Γυμνάσιο Πανεπιστημίου Κρήτης

ΑΦΟΡΜΗ ΚΙ ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΤΑ

Η μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση - ειδικότερα στο χώρο των Μαθηματικών - απασχολεί τη σύγχρονη επιστημονική βιβλιογραφία και αποτελεί αντικείμενο επιστημολογικής όσο και διδακτικής "εννοιολογικής και πειραματικής/ενδοσχολικής διερεύνησης" και προβληματισμού. Η διαπίστωση "αναντιστοιχιών" στη θέσπιση και θέσμιση εννοιών, διδακτικών αιτημάτων και μεθόδων μας προβλημάτισε, πόσω μάλλον στα πλαίσια της **συνεργασίας εκπαιδευτικών και της συνεργατικής "έρευνας - δράσης"**.

ΠΛΑΙΣΙΟ

Όπως εμφανίζεται και στη σχετική βιβλιογραφία, εξειδικεύοντας στα Μαθηματικά, η "διδακτική ατμόσφαιρα" διαμορφώνεται - στο βαθμό που αξιολογείται με αντικειμενικά κριτήρια - από το "διδακτικό συμβόλαιο της τάξης", που δεν είναι, βέβαια, ανεξάρτητο:

- των θεωριών μάθησης και των πρότερων γνώσεων του διδάσκοντα για το αντικείμενο, κυρίως όσον αφορά τη **μεθοδολογική του επάρκεια και τη δυνατότητά του ν' αποδίδει "ελαφράδα"** και **να "διαμορφώνει το διδακτέο αντικείμενο"** κι όχι **απλώς ν' αναπαράγει το ΑΠΣ**,
- του βαθμού που το ΑΠΣ [1] στο "περιεχόμενο σπουδών για τα Μαθηματικά" **επιβεβαιώνει την "πρόθεση" για "Μαθηματικά που όντας πραγματικά παραμένουν Μαθηματικά"**, αλλά και
- του βαθμού **ανεξαρτησίας** που απολαμβάνει ο διδάσκων ή/και η σχολική μονάδα [2] στη "διαμόρφωση του διδακτέου αντικειμένου".

Μεθοδολογία:

Έχοντας στο μυαλό μας και τη θεωρία του J. Piaget, αλλά και την άποψη του G. Brousseau "*πως η μάθηση στηρίζεται όχι πάνω στη σωστή λειτουργία του "συμβολαίου", αλλά στην επιτυχή ρήξη του*", η "αλλαγή" και οι "ασυμφωνίες" που εντοπίζουμε θα μελετηθούν ως προς τις παραπάνω παραμέτρους. Στοχεύουμε,

- για την πρώτη, να ***διερευνήσουμε στάσεις και αντιλήψεις συναδέλφων, αλλά και επιμορφωτών, και στις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης ως προς "μαθηματικές έννοιες" <u>που θ' αξιολογηθούν ως κρίσιμες από τη διερεύνηση των δύο άλλων παραμέτρων</u>***, χωρίς, βέβαια, ν' αγνοούμε πρότερες τέτοιες έρευνες,
- για τη δεύτερη, ν' αξιολογήσουμε (για έννοιες που επιλέγονται ό.π.) κατά πόσον οι μαθητές μας ***προσλαμβάνουν κι αντιλαμβάνονται τ' αναμενόμενα από το ΑΠΣ*** [3], ενώ
- για την τρίτη και **κύρια** παράμετρο, σκοπεύουμε - χρησιμοποιώντας και μεθοδολογικές προτάσεις και πορίσματα προηγουμένων ερευνών μας - να συμβάλλουμε στη ***διαμόρφωση και αξιολόγηση προγραμμάτων σπουδών για κρίσιμες τάξεις*** [4] ***της "μετάβασης"***.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

[1] ή/και το ΔΕΠΠΣ

[2] σε συμφωνία ***και*** με τις πρόσφατες αναλύσεις των αποτελεσμάτων του "διαγωνισμού PISA"

[3] προς τούτο θα διευρύνουμε το εύρος των πειραματιστών, ώστε ν' αποφύγουμε τον επηρεασμό από προσωπικές θετικές ή αρνητικές στάσεις

[4] Ε, Στ Δημοτικού και Α Γυμνασίου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γαγάτσης, Α. - Λοίζου, Ά. - Στυλιανού, Μ. - Τόφαρου, Στ. (2006) Διδακτικό Συμβόλαιο και Μάθηση των Μαθηματικών, *στο Φτιάκα, Ε., Γαγάτσης, Α., Ηλία, Ι., & Μοδέστου, Μ. (2006). 'Η Σύγχρονη Εκπαιδευτική Έρευνα στην Κύπρο, Πρακτικά 9ου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου, 2-3 Ιουνίου, 2006, Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου,* 39-54.

Γαγάτσης, Α. (1995),.*Διδακτική των Μαθηματικών: Θεωρία - Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ART of TEXT Α.Ε.

Καλαβάσης, Φ. (1991). Το περιεχόμενο της εκπαίδευσης των διδασκόντων τα σχολικά μαθηματικά. Ευκλείδης Γ', No29.

Καλαβάσης, Φ. - Κινικλής, Ι. - Γιαλαμάς, Β. (1992). Μορφή και περιεχόμενο σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*, Issue: 9, page 181-196, ανακτήθηκε 28/04/11, από http://www.hdml.gr/pdfs/conferences/456.pdf.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, in N. Bednarz et C. Garnier (Eds): CONSTRUCTION DES SAVOIRS. pp 41-63.

Brousseau, G. (1992), Didactique : What it can do for the teacher , Research in Didactique of Mathematics, selected Papers, Recherches en didactique des mathématiques, special issue for Berkeley meeting of ICME, La pensée sauvage traduction du texte de petit x de 1989, pp 7-40.

Panaoura, A. - Gagatsis, A. - Deliyianni E. - Elia, I. (2009). The structure of students' beliefs about the use of representations and their performance on the learning of fractions. *Educational Psychology, 29*(6), 713-728.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2011). Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην υποχρεωτική Εκπαίδευση, ΕΣΠΑ 2007-13\Ε.Π. Ε&ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3 «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ(Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450

Steiner, H.-G. (1976). Forschung als strukturierendes Element in der Mathematikdidaktik. *Mathematisch Physikalische Semesterberichte, Band XXIII, Heft 2*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 279-286.

Steiner, H.-G. (1978). Mathematische Präzisierungen und didaktisch relevante Modelle zum Piagetschen Gruppierungsbegriff. *Didaktik der Mathematik, 3*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 223-245.

Fernández, C. - Llinares, S. - Modestou, M. - Gagatsis, A. (2010). Proportional reasoning: How task variables influence the development of students' strategies from primary to secondary school. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics, 10*, 1-18.

ΠΟΛΥΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟΤΗΤΑ, ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΥΣΗ, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΓΛΩΣΣΑ[1]

Χαρούλα Σταθοπούλου, Ελένη Γκανά, Franco Favilli

hastath@uth.gr, egana@uth.gr, favilli@dm.unipi.it

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο σχεδιασμός του προγράμματος επιχειρεί να απαντήσει σε ζητήματα- προκλήσεις που αναδύονται όταν η διδασκαλία των μαθηματικών πραγματοποιείται σε τάξεις στις οποίες φοιτούν και μαθητές που προέρχονται από διαφορετικές γλωσσικές και πολιτισμικές καταβολές, δηλαδή μια εκπαιδευτική συνθήκη που είναι σήμερα ευρέως διαδεδομένη στις χώρες τις Ευρωπαϊκής Ένωσης.

ΣΤΟΧΟΙ-ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

- Ανταλλαγή πληροφοριών για σχετικές εθνικές δράσεις και σχεδιασμός διδακτικών πρακτικών από τα μέλη-εταίρους του προγράμματος για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε πολυπολιτισμικά και πολύγλωσσα σχολικά περιβάλλοντα. Πιλοτική εφαρμογή των διδασκαλιών στις χώρες συμμετοχής.
- Παραγωγή διδακτικού υλικού το οποίο να λαμβάνει υπόψη επιμέρους λειτουργικές παραμέτρους, όπως: το πολιτισμικό και γλωσσικό πλαίσιο της τάξης, το κοινωνικό περιβάλλον των μαθητών έξω από το σχολείο, το σχολικό σύστημα και την κυρίαρχη κουλτούρα της χώρας, καθώς και πολλές κουλτούρες των μειονοτήτων που υπάρχουν στα ευρωπαϊκά σχολεία κλπ. Αναμένεται ότι αυτό το διδακτικό υλικό, αφού δοκιμαστεί στις χώρες - εταίρους, θα αποτελέσει μια σύνθεση των διαφορετικών εθνικών εμπειριών και ένα εργαλείο για προβληματισμό σχετικά με τις μεθόδους διδασκαλίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευσης των μαθηματικών.
- Η συνεργασία μεταξύ μαθηματικών και γλωσσολόγων από έξι—διαφορετικών ως προς την κουλτούρα και τη γλώσσα—χώρες προτίθεται να αποτελέσει ένα έγκυρο εργαλείο/μέσο για την ανάδειξη και συνειδητοποίηση των διδακτικών στρατηγικών που συνεπάγεται η γλωσσική και πολιτισμική ποικιλότητα της τάξης. Οι προτάσεις για το παιδαγωγικό υλικό αναμένεται να αντικατοπτρίζουν τις διαδικασίες αυτές, επιτρέποντας έτσι στους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές να επωφεληθούν από το νέο πολιτισμικό περιβάλλον στην τάξη.

[1] **LLP Comenius project: M3EaL – Multiculturalism, Migration, Mathematics Education and Language (526333-LLP-1-2012-1-IT-COMENIUS-CMP).** The members of the team are: F. Favilli, R. Peroni (CAFRE - Università di Pisa, Italy), A. Ulovec, A. Stachelberger, A. Brychta (Universität Wien, Austria), J. Novotná, H. Moraová, N. Vondrová (Univerzita Karlova v Praze, Czech Republic), M. Piccione, L. Doretti (Università di Siena, Italy), Ch. Stathopoulou, E. Gana (University of Thessaly, Greece), B. Grevholm, C.V. Berg (Universiteteti Agder, Norway), M.-H. Le Yaouanq, J.-F. Chesné, B. Marin, Y. Alvez (Université Paris Est Créteil - IUFM, France)

ΟΜΑΔΕΣ ΣΤΟΧΟΙ

Οι κύριες ομάδες-στόχοι είναι μαθηματικοί στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (γυμνάσιο) καθώς και φοιτητές μαθηματικών. Για τη διάδοση θα αξιοποιηθούν συνεχείς επαφές με εκπαιδευτικούς οι οποίοι θα κληθούν να παρακολουθήσουν και να συμμετάσχουν σε εργαστήρια, σεμινάρια και συνέδρια.

Η διάδοση των εμπειριών που θα αποκτηθούν μέσω της πιλοτικής εφαρμογής του εκπαιδευτικού υλικού αναμένεται να αυξήσει την εμπιστοσύνη των εκπαιδευτικών στην ικανότητά τους να αντιμετωπίσουν την πολυπολιτισμική τάξη. Βιντεοσκοπήσεις, διδακτικό υλικό, αναστοχαστικές αναφορές κλπ θα αποτελέσουν πρόσθετη πηγή για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και αναμένεται να συμβάλλουν στην αλλαγή της εκπαιδευτικής προσέγγισης.

Οι μαθητές, ιδιαίτερα εκείνοι από διαφορετικές κουλτούρες και με διαφορετικές γλώσσες θα ωφεληθούν από τις πιθανές αλλαγές στη διδακτική προσέγγιση των εκπαιδευτικών.

ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «MATHEMATICS AND SCIENCE FOR LIFE» (MASCIL)

Δ. Πόταρη, Θ. Ζαχαριάδης, Γ. Ψυχάρης

Ε.Κ.Π.Α.

dpotari@math.uoa.gr, tzaharia@math.uoa.gr, gpsych@math.uoa.gr

Το πρόγραμμα Mascil έχει στόχο τη διάχυση της διερευνητικής διδασκαλίας και μάθησης στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση μέσα από τη σύνδεση της διδασκαλίας των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών με το χώρο εργασίας. Μέσα από αυτή τη σύνδεση επιδιώκεται να αποκτήσουν νόημα τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες για τους μαθητές. Για το σκοπό αυτό προβλέπεται η δημιουργία προγραμμάτων επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών καθώς και ανάπτυξη διδακτικού υλικού και εφαρμογή του στη σχολική τάξη. Οι διδακτικές δραστηριότητες που θα αναπτυχθούν έχουν ως στόχο να εμπλέξουν τους μαθητές σε διερευνήσεις με ρόλο παρόμοιο με αυτό του επιστήμονα, ώστε να αποκτήσουν ικανότητες χρήσιμες για την μελλοντική τους επαγγελματική πορεία αλλά και την καθημερινότητα. Η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών θα στηρίζεται στη συνεργασία στο πλαίσιο κοινοτήτων, θα προβλέπει δια ζώσης και εξ αποστάσεως εκπαίδευση καθώς και δίκτυα επικοινωνίας εκπαιδευτικών τόσο σε εθνικό όσο και σε ευρωπαϊκό επίπεδο. Το έργο ακολουθεί συστημική προσέγγιση και έτσι η διάχυσή του θα γίνει σε συνεργασία με διάφορες ομάδες, όπως εκπαιδευτικούς διαφορετικών εκπαιδευτικών βαθμίδων, μαθητές, γονείς και υπεύθυνους εκπαιδευτικής πολιτικής. Ειδικές επιτροπές εμπειρογνωμόνων σε εθνικό και ευρωπαϊκό επίπεδο θα έχουν συμβουλευτικό ρόλο σε όλη τη διάρκεια του έργου.

Το πρόγραμμα χρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Επιτροπή και στο πλαίσιο του συνεργάζονται 18 φορείς από 13 ευρωπαϊκές χώρες. Συντονιστικό Ίδρυμα είναι το University of Education Freiburg της Γερμανίας. Από την Ελλάδα συμμετέχουν το Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών μέσω του Τμήματος Μαθηματικών (ΕΚΠΑ) και το Ίδρυμα Έρευνας και Τεχνολογίας (Κρήτη). Επίσης από την Κύπρο συμμετέχει το Πανεπιστήμιο Λευκωσίας. Η ερευνητική ομάδα του ΕΚΠΑ αποτελείται από την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Δέσποινα Πόταρη, η οποία είναι και συντονίστρια του έργου, τον Καθηγητή Θεοδόση Ζαχαριάδη, τον Λέκτορα Γιώργο Ψυχάρη, την Καθηγήτρια Βασιλική Σπηλιωτοπούλου (ΑΣΠΑΙΤΕ) και την Δρ. Χρυσαυγή Τριανταφύλλου (ΑΣΠΑΙΤΕ). Το πρόγραμμα άρχισε τον Ιανουάριο του 2013 και θα διαρκέσει μέχρι το τέλος του 2016.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΦΥΛΛΩΝ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΜΙΚΡΟΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ

Δουκάκης Σπύρος[1], Σαράφης Ιωάννης[2]

[1]Αμερικανικό Κολλέγιο Ελλάδος-Pierce, [2]Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί

[1]sdoukakis@acg.edu, [2]sarafis@kalamari.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο πλαίσιο τροποποίησης της διδακτικής πρακτικής στις μαθηματικές τάξεις γυμνασίου, παρουσιάζεται μία ολοκληρωμένη διδακτική παρέμβαση, μέσω της οποίας οι μαθητές/τριες εμπλέκονται με τα μαθηματικά εργαζόμενοι σε φύλλα εργασίας. Τα φύλλα εργασίας περιλαμβάνουν θέματα διερεύνησης, εμπέδωσης και εξάσκησης. Τα θέματα προσεγγίζονται μέσω δραστηριοτήτων, εφαρμογών, παραδειγμάτων και ασκήσεων που προέρχονται από το διδακτικό πακέτο, τα μικροπειράματα του ψηφιακού βιβλίου και υλικό των συγγραφέων. Από τα αποτελέσματα έρευνας που πραγματοποιήθηκε, φάνηκε ότι ποσοστό 56% των μαθητών θεωρεί ότι έχει αποκομίσει επιπλέον μαθησιακά οφέλη λόγω της διδακτικής παρέμβασης, σε σχέση με παραδοσιακές διδακτικές προσεγγίσεις.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ

Στο πλαίσιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών η αξιοποίηση αναπαραστασιακών μέσων, χειραπτικών εργαλείων και ψηφιακών τεχνολογιών συνεισφέρει στον πειραματισμό των μαθητών/τριών, στην ανάπτυξη εικασιών, στην ανακάλυψη μαθηματικών ιδεών και εντέλει στην τεκμηρίωση των εικασιών των μαθητών με μαθηματική επιχειρηματολογία (von Glasersfeld, 1991).

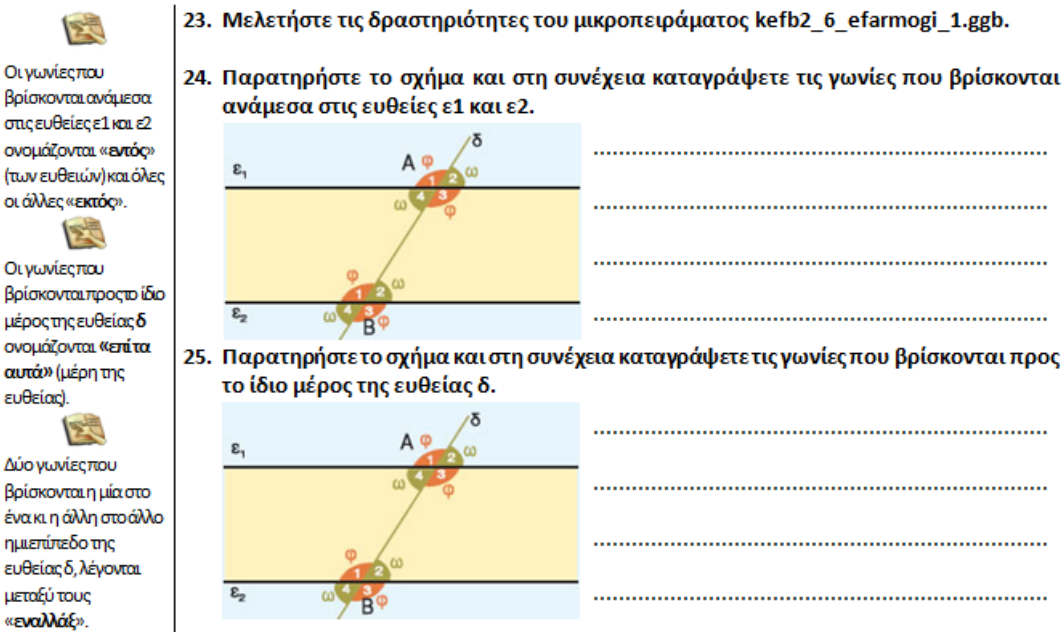
Στην εργασία παρουσιάζεται το πλαίσιο λειτουργίας της μαθηματικής τάξης σε τμήματα γυμνασίου της σχολικής μονάδας. Το πλαίσιο δομήθηκε το σχολικό έτος 2012-2013 και υλοποιείται για δεύτερη χρονιά το 2013-2014. Μέσω ποσοτικής έρευνας στην οποία έλαβαν μέρος οι μαθητές στα μέσα του σχολικού έτους 2012-2013 διερευνήθηκε η αποτελεσματικότητα του πλαισίου (Doukakis et al., 2013). Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιαστεί το πλαίσιο λειτουργίας, δείγματα του υλικού και στοιχεία για την αποτελεσματικότητα της διδακτικής παρέμβασης.

ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΤΑΞΗΣ

Για την υλοποίηση των διδακτικών παρεμβάσεων, αρχικά οι μαθητές –μέσω της πλατφόρμας διαχείρισης μαθήματος που αξιοποιείται στην εκπαιδευτική μονάδα–

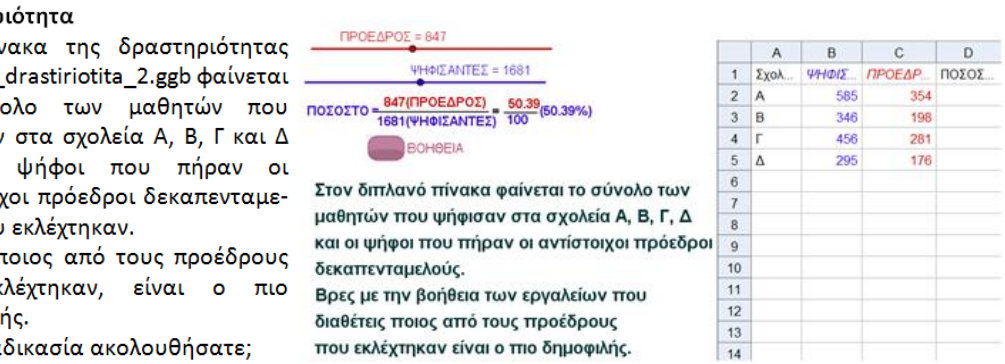
εφοδιάζονται με το φύλλο εργασίας (το οποίο εκτυπώνουν ώστε να το έχουν σε έντυπη μορφή στο πλαίσιο της σχολικής τάξης) και τα μικροπειράματα του ψηφιακού σχολείου.

Τα φύλλα εργασίας, έχουν δομηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να περιλαμβάνουν δύο ανεξάρτητες ενότητες, οι οποίες όμως βρίσκονται σε αντιστοιχία ώστε να αλληλοσυμπληρώνεται η θεωρία με το υπόλοιπο υλικό (Εικόνα 1). Η αριστερή στήλη περιλαμβάνει τη θεωρία, τις χρήσιμες πληροφορίες και ζητήματα που οι μαθητές χρειάζεται να προσέξουν, τα οποία έχουν επισημανθεί με ειδικά εικονίδια (για παράδειγμα στην Εικόνα 1 υπάρχει το εικονίδιο «θεωρία» και στην Εικόνα 3 το εικονίδιο «χρήσιμη πληροφορία»).



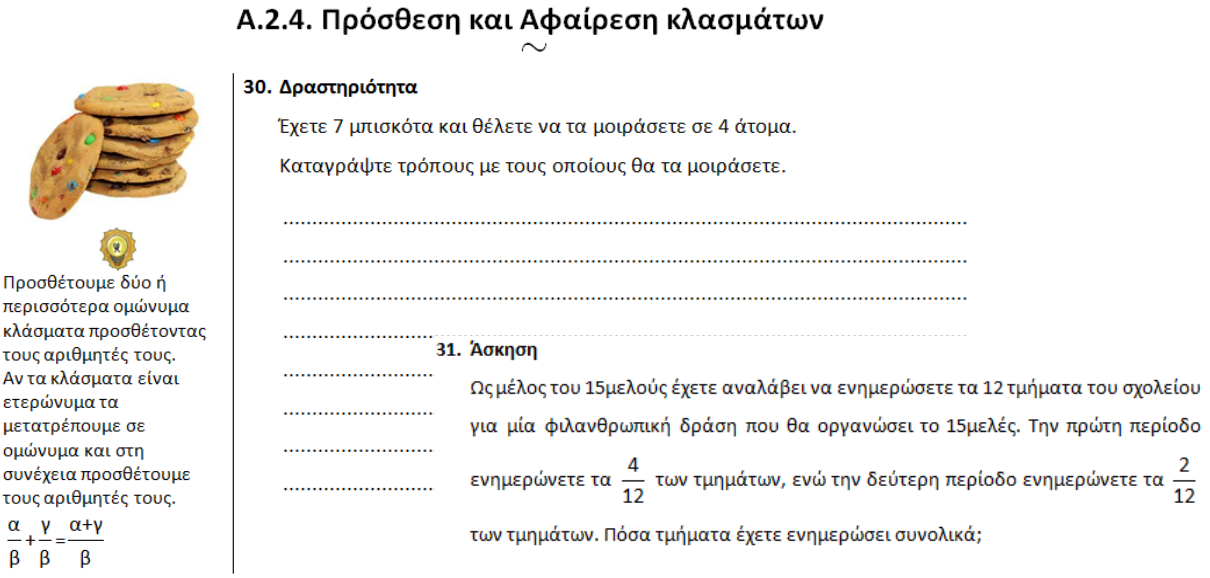
Εικόνα 1: Σύνδεση της θεωρίας με το υπόλοιπο υλικό

Ταυτόχρονα, τα φύλλα εργασίας περιλαμβάνουν υλικό (ορισμένες φορές τροποποιημένο) από το διδακτικό πακέτο και μικροπειράματα (ίδια ή τροποποιημένα) από το ψηφιακό σχολείο (Εικόνα 2).



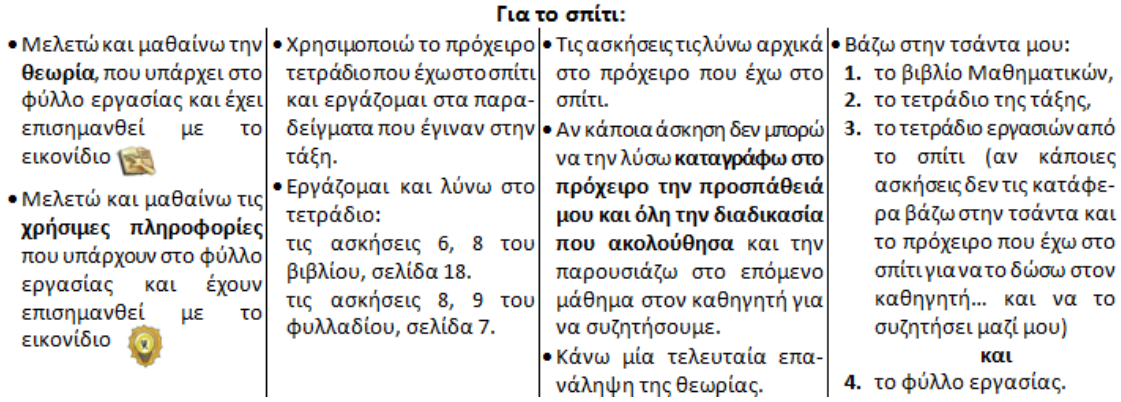
Εικόνα 2: Τροποποιημένο σενάριο μικροπειράματος (http://tiny.cc/q3hv8w)

Επιπρόσθετα, έχει συμπεριληφθεί υλικό των δύο παραπάνω μορφών που έχει αναπτυχθεί από τους συγγραφείς (Εικόνα 3), με τέτοια δομή ώστε να είναι σε αντιστοιχία με υπάρχον υλικό (έντυπο και ψηφιακό) που σχετίζεται με την καθημερινή ζωή των μαθητών τόσο μέσα στο σχολείο, όσο και έξω από αυτό (Κυνηγός κ.α., 2007).



Εικόνα 3: Επιπλέον παραδείγματα

Τέλος, στους μαθητές δίνεται εργασία για το σπίτι, η οποία προσδιορίζεται στο φύλλο εργασίας (Εικόνα 4).



Εικόνα 4: Εργασία για το σπίτι

ΠΙΘΑΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΟΦΕΛΗ

Η ανάγκη τροποποίησης των παραδοσιακών διδακτικών πρακτικών στα Μαθηματικά έχει επισημανθεί από πλήθος ειδικών, με απώτερο στόχο οι μαθητές να αποκτήσουν ενεργό ρόλο και να εμπλακούν ουσιαστικά στο πλαίσιο της μαθηματικής τάξης (von Glasersfeld, 1991; Potari & Jaworski, 2002; Kynigos κ.α., 2007). Η αξιοποίηση εκπαιδευτικών σεναρίων, φύλλων εργασίας, χειραπτικών εργαλείων και

μικροπειραμάτων φαίνεται ότι μπορεί να συνεισφέρει στην ανάπτυξη συνειδητής μαθηματικής σκέψης.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας (Doukakis et al., 2013) που πραγματοποιήθηκε το σχολικό έτος 2012-2013 στους μαθητές των τμημάτων στα οποία η μαθηματική εκπαίδευση υλοποιήθηκε με τον τρόπο που περιγράφηκε προηγουμένως, φάνηκε ότι ποσοστό 56% των μαθητών θεωρεί ότι έχει αποκομίσει πρόσθετα μαθησιακά οφέλη από το πλαίσιο λειτουργίας της μαθηματικής τάξης. Επιπλέον δήλωσαν ότι το πλαίσιο τους βοήθησε στη διερεύνηση μαθηματικών ιδεών και στην καλύτερη μάθηση των Μαθηματικών. Τέλος, φάνηκε από τα αποτελέσματα ότι ενισχύεται το κλίμα ομαδοσυνεργατικότητας μεταξύ των μαθητών, στοιχείο που ευνοεί τον αναστοχασμό, την ενεργό συμμετοχή και τον πλουραλισμό λύσεων.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στην προτεινόμενη διδακτική παρέμβαση επιχειρείται η μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών με ποικίλα αναπαραστασιακά μέσα με απώτερο στόχο τη βελτίωση της μάθησής τους και την ανάπτυξη θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά. Ωστόσο, το υπάρχον σχολικό πλαίσιο, η έλλειψη κατάλληλου εργαστηριακού περιβάλλοντος και η μεγάλη διδακτέα ύλη, προκαλούν εμπόδια σε εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις τέτοιας μορφής. Παρόλα αυτά, τα οφέλη που φαίνεται ότι είχαν οι μαθητές, οδηγούν στην προσπάθεια ένταξης ανάλογων διδακτικών παρεμβάσεων. Στο πλαίσιο αυτό, το σύνολο του υλικού πρόκειται να διατεθεί σε ψηφιακή μορφή στην εκπαιδευτική κοινότητα για περαιτέρω αξιολόγηση και αξιοποίηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Doukakis, S., Vrontakis, M., Diamadis, C., & Mihalopoulou, G. (2013). Exploring students' attitudes to learning mathematics with the use of microexperiments via Information and Communication Technologies, *International Journal of Information Technology & Computer Science*, *12*(1), 25- 29.

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(4), 351-380.

von Glasersfeld, E. (1991). *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Κυνηγός, Χ., Ψυχάρης, Γ., Γαβρίλης, Κ., & Κεΐσογλου, Σ. (2007). *Επιμορφωτικό υλικό για την εκπαίδευση των επιμορφωτών στα Πανεπιστημιακά Κέντρα Επιμόρφωσης*. Πάτρα.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

Δημήτριος Μέμτσας

2ο Πρότυπο Πειραματικό Γυμνάσιο Θεσσαλονίκης

dmemtsas@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιαστεί διδασκαλία για τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών με την βοήθεια συστήματος συντεταγμένων. Η διδασκαλία απευθύνεται σε μαθητές της Γ' Γυμνασίου και περιλαμβάνει χρήση σύγχρονων Web 2.0 εργαλείων όπως το μαθηματικό λογισμικό Geogebra και το λογισμικό εννοιολογικών χαρτών Inspiration. Στο Geogebra αναπτύχθηκαν δραστηριότητες για το θεωρητικό μέρος και για την αξιολόγηση της παρέμβασης, ενώ ο εννοιολογικός χάρτης αξιοποιείται για την συνοπτική παρουσίαση της θεωρίας. Ουσιαστική θεωρείται η χρήση διαδραστικού πίνακα ώστε να επιτευχθεί ο αναγκαίος συντονισμός της τάξης και η ενεργός συμμετοχή όλων των μαθητών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι μαθητές στο Γυμνάσιο έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με την τριγωνομετρία στην Β' τάξη. Εκεί μαθαίνουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών για τις οξείες γωνίες με την βοήθεια του ορθογωνίου τριγώνου. Στην Γ' τάξη οι ορισμοί επεκτείνονται και στις αμβλείες γωνίες με χρήση καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων το οποίο είναι γνωστό στους μαθητές ήδη από την Α΄ τάξη. Η προτεινόμενη διδασκαλία απευθύνεται στους μαθητές της Γ' τάξης ως εισαγωγικό μάθημα της ενότητας στα πλαίσια μιας διδακτικής ώρας.

Ως προς τους διδακτικούς στόχους της παρέμβασης οι μαθητές πρέπει:

- Να ανακτήσουν γνώσεις στα θέματα του ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας στο ορθογώνιο τρίγωνο και του ορισμού των συντεταγμένων σημείων του επιπέδου με την βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.
- Να μάθουν πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μίας οξείας ή αμβλείας γωνίας με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.
- Να μάθουν το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών στα δύο πρώτα τεταρτημόρια.
- Να μάθουν να υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μίας γωνίας ω, $0^o < \omega < 180^o$ με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.

ΥΛΙΚΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

Οι μαθητές καλούνται να συμμετάσχουν σε μία από κοινού διερεύνηση ολόκληρης της τάξης καθοδηγούμενης από τον εκπαιδευτικό και από φύλλο εργασίας. Κατά τη διάρκειά της και μέσω των δραστηριοτήτων των εφαρμογών του λογισμικούGeogebra, διατυπώνονται εικασίες και υποθέσεις ο έλεγχος των οποίων γίνεται στο φύλλο εργασίας και στον διαδραστικό πίνακα.

Οι εννοιολογικοί χάρτες ως εργαλεία μάθησης προτάθηκαν από τον Novak με βάση την θεωρία του Ausubel σύμφωνα με την οποία η μάθηση επιτυγχάνεται όταν οι νέες έννοιες ενσωματώνονται στην ενυπάρχουσα γνώση (Novak 2006a). Τα μαθηματικά με την ιεράρχηση της γνώσης και την σταδιακή εισαγωγή των νέων εννοιών αποτελούν ένα πρόσφορο πεδίο για την εφαρμογή της μεθοδολογίας (Novak 2006b, Brinkmann 2003). Το Geogebra είναι ένα ελεύθερο λογισμικό που συνδυάζει τα χαρακτηριστικά εκείνα για τα οποία κρίνεται επωφελής η χρήση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία, όπως η διάδραση, η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού και πολλαπλών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας, η δυνατότητα πειραματισμού και διερεύνησης (I.T.Y. 2010).

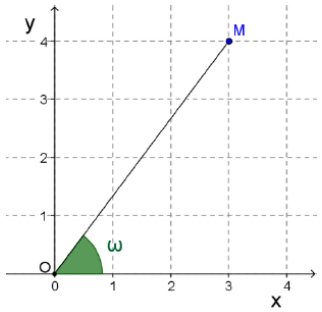
ΑΝΑΠΤΥΞΗ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στην αρχή του μαθήματος γίνεται ανάκληση της γνώσης των μαθητών από προηγούμενες τάξεις που είναι απαραίτητη στην παρέμβαση, δηλαδή ο ορισμός των τριγωνομετρικών αριθμών στο ορθογώνιο τρίγωνο και των συστημάτων συντεταγμένων. Τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών καλούνται να δώσουν οι μαθητές προφορικά, ενώ υπάρχει και σχετική εφαρμογή στο Geogebra. Στη συνέχεια με τη βοήθεια άλλης εφαρμογής στο ίδιο λογισμικό, οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήσεις επί των συστημάτων συντεταγμένων, για να ανακαλέσουν την προϋπάρχουσα γνώση.

Ακολούθως οι μαθητές εφαρμόζοντας στην πράξη όσα προαναφέρθηκαν απαντούν σε σχετικό ερώτημα του φύλλου εργασίας. Δίνεται σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο συστήματος συντεταγμένων και οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της οριζόμενης οξείας γωνίας, σχεδιάζοντας κατάλληλα ορθογώνιο τρίγωνο (βλέπε εικόνα 1).

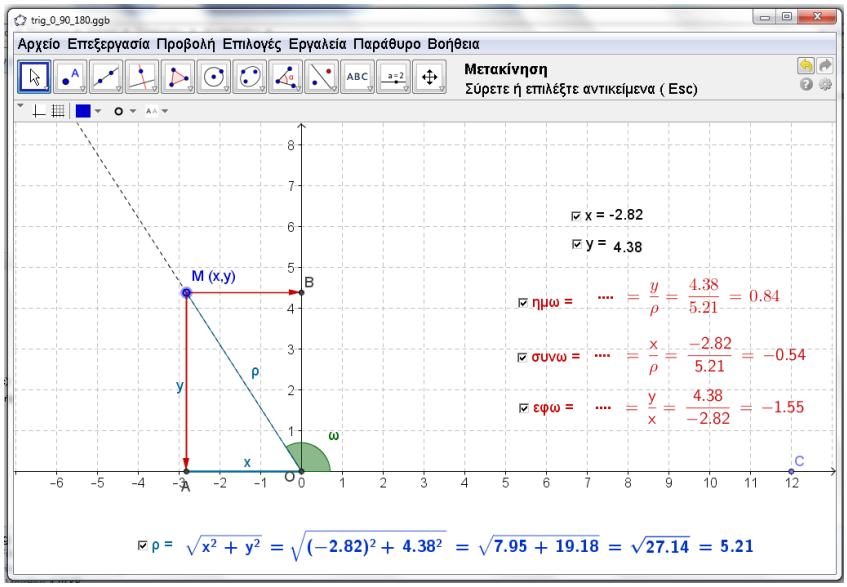
Φύλλο εργασίας

1. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy πήραμε την ημιευθεία ΟΜ που σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία ω. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Μ. Αν ρ=ΟΜ η απόσταση του Μ από την αρχή Ο, να υπολογίσετε το ρ και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.



Εικόνα 1: Το πρώτο ερώτημα του φύλλου εργασίας

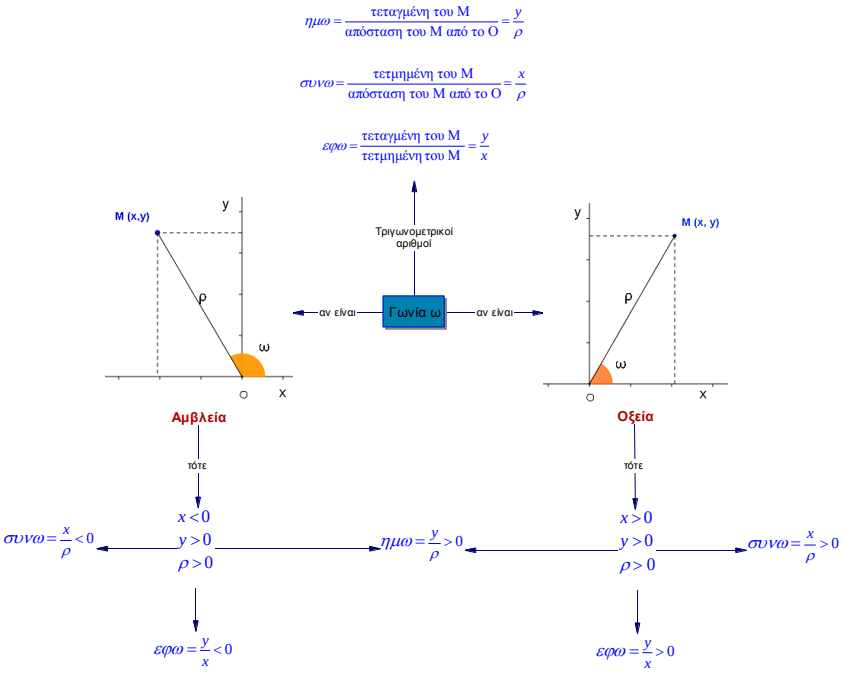
Με την επόμενη βασική εφαρμογή στο Geogebra καλούνται οι μαθητές να διατυπώσουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών με χρήση των συντεταγμένων σημείου και της διανυσματικής του ακτίνας. Οι μαθητές καλούνται να μετακινήσουν το σημείο από το 1^o στο 2^o τεταρτημόριο στο διαδραστικό πίνακα και αντιλαμβάνονται ότι η εξεταζόμενη γωνία κάποιες φορές δεν είναι δυνατόν να ενταχθεί σε ορθογώνιο τρίγωνο. Παρόλα αυτά παρατηρούν ότι κάποιοι από τους προηγούμενους υπολογισμούς διατηρούνται και οδηγούνται έτσι με κατάλληλους χειρισμούς και ερωτήματα του διδάσκοντα στη γενίκευση των ορισμών των τριγωνομετρικών αριθμών.(βλέπε εικόνα 2).



Εικόνα2: Εφαρμογή Geogebraγια τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ω, για $0^o < \omega < 180^o$.

Ο εννοιολογικός χάρτης που δημιουργείται στη συνέχεια με την βοήθεια του λογισμικού Inspiration (βλέπε εικόνα 3), βοηθά στην οργάνωση της γνώσης σε ένα ενιαίο πλαίσιο. Με την βοήθεια του χάρτη γίνεται επανάληψη των ορισμών ενώ

παράλληλα ορίζονται τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών στα δύο πρώτα τεταρτημόρια. Παράλληλα οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε ερώτημα ανάλογο αυτού της εικόνας 1 στο φύλλο εργασίας, εφαρμόζοντας τους τύπους των ορισμών, για γωνία ω κατάλληλα τοποθετημένη σε σύστημα συντεταγμένων, όταν δίνεται το σημείο $M'(-3,4)$ της μιας πλευράς της (η άλλη συμπίπτει με τον άξονα Ox).



Εικόνα 3: Ο εννοιολογικός χάρτης για τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ω, για $0^o < \omega < 180^o$.

Για την αξιολόγηση της δράσης στο κλείσιμο του μαθήματος αναπτύχθηκε μία τελική εφαρμογή στο Geogebra. Οι μαθητές καλούνται από τον διδάσκοντα να τοποθετήσουν κατάλληλα στο σύστημα συντεταγμένων προσχεδιασμένες γωνίες με τρόπο που να επιτρέπει τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών μετά την επιλογή κατάλληλου σημείου και των συντεταγμένων του. Ο διδάσκων ελέγχει κατ' αρχή αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει τη σωστή θέση της γωνίας στο σύστημα συντεταγμένων. Επιπλέον με τη διατύπωση κατάλληλων ερωτήσεων έχει τη δυνατότητα να διερευνήσει τη γνώση και την κατανόηση των εννοιών ή ακόμη να διασυνδέσει το θέμα με την προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών στις αναλογίες (ρωτώντας για την επιλογή του σημείου και των συντεταγμένων του).

Η συγκεκριμένη δράση με τη δομή και το περιεχόμενο που αναφέρθηκε έχει εφαρμοστεί στην τάξη και κρίνεται λειτουργική και αποτελεσματική. Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να αυτενεργήσουν, να δράσουν, να ανακαλύψουν και τελικά να χτίσουν τη νέα γνώση. Το φύλλο εργασίας και οι ψηφιακές εφαρμογές είναι τα βασικά εργαλεία που από την μία βοηθούν και δίνουν ρόλο στο μαθητή, από την άλλη δίνουν την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να συντονίσει τη διδασκαλία, να παρατηρήσει, να ελέγξει και τελικά να αξιολογήσει την όλη παρέμβαση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Brinkmann A. (2003). Graphical Knowledge Display – Mind Mapping and Concept Mapping as Efficient Tools in Mathematics Education, Mathematics Education Review, No 16, 36-48.

Novak J.D. (2006a). The Theory Underlying Concept Maps and How to Construct and Use Them, Technical Report IHMC Cmap Tools.

Novak J.D. (2006b). The development of the Concept Mapping Tool and the Evolution of a New Model for Education: Implications for Mathematics Education, Focus on Learning Problems in Mathematics, 28 (3 & 4), 3-31.

ΙΤΥ 2010, Ε.Π. Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση (ΕΣΠΑ 2007-2013), Επιμόρφωση Εκπαιδευτικών για την Αξιοποίηση και Εφαρμογή των ΤΠΕ στη Διδακτική Πράξη, Τεύχος 4, Κλάδος ΠΕ03, Πάτρα.

Ο ΟΜΙΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ Π.Π.Σ.Π.Θ. ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΕΝΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΜΙΚΡΟΚΟΣΜΟΥ

Ανδρέας Πούλος & Βενάρδος Παντελής

Σύμβουλος Μαθηματικών Ανατ. Θεσσαλονίκης & Εκπαιδευτικός Πρότυπο-Πειραματικό Σχολείο του Α.Π.Θ.

andremat@otenet.gr & venardos_p@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Περιγράφουμε δραστηριότητες που πραγματοποιούνται στο πλαίσιο του Ομίλου Μαθηματικών του Π.Π.Σ.Π.Θ., συμπεράσματα και διαπιστώσεις που προέρχονται από τον δεύτερο χρόνο λειτουργίας του. Ο στόχος μας δεν είναι μόνο να προβάλλουμε τον συγκεκριμένο Όμιλο, αλλά να ανοίξουμε ένα παράθυρο διαλόγου για το ρόλο και τους στόχους των Ομίλων Αριστείας των Π.Π.Σ., όχι όπως διατυπώνονται θεωρητικά στο Νόμο και στις εγκυκλίους για τη λειτουργία τους, αλλά τι ακριβώς συμβαίνει στην πράξη και τι θα θέλαμε να συμβαίνει. Η εμπειρία που έχει αποκτηθεί από τη λειτουργία του Ομίλου, θεωρούμε ότι πρέπει όχι μόνο να καταγραφεί, αλλά και να εκτιμηθεί και να διαδοθεί ευρύτερα. Με δεδομένο ότι παρατηρείται μία γρήγορη ανάπτυξη μαθηματικών ομίλων στα Π.Π.Σ. προβάλλει, κατά την άποψη μας, την αναγκαιότητα η πολιτεία να εξετάσει πολύ σοβαρά τη δημιουργία δομών για την υποστήριξη των μαθητών με ιδιαίτερη κλίση στα μαθηματικά.

Ο ΟΜΙΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Οι Όμιλοι Αριστείας είναι ένας θεσμός, ο οποίος προβλέπεται από το Άρθρο 45 του Νόμου 3966/2011 που αφορά το θεσμικό πλαίσιο λειτουργίας των Προτύπων Πειραματικών Σχολείων (Π.Π.Σ.). Το Υπουργείο Παιδείας και η Δ.Ε.Π.Π.Σ. έδωσε το έναυσμα για τη λειτουργία των ομίλων αυτών από το σχολικό έτος 2012-2013, ένα χρόνο μετά την ψήφιση του Νόμου. Παρ' όλα αυτά στο Πειραματικό Σχολείο του Α.Π.Θ. από τον Οκτώβριο του σχολικού έτους 2011-2012 λειτούργησε Όμιλος Μαθηματικών για την εξοικείωση με τα αποκαλούμενα διαγωνιστικά προβλήματα.

Ο σκοπός του Ομίλου είναι να γνωρίσουν, όσοι μαθητές έχουν αυξημένο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά, τεχνικές και μεθόδους επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων που τίθενται σε μαθηματικούς διαγωνισμούς, όπως αυτοί που διοργανώνει κυρίως η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (Ε.Μ.Ε.), αλλά και άλλοι διαγωνισμοί όπως ο Kangaroo, ο Διαγωνισμός Πόλεων κλπ. Ευρύτερα όμως, μας ενδιαφέρει η προαγωγή της μαθηματικής παιδείας, η γνωριμία με σύγχρονους τομείς

εφαρμογής των Μαθηματικών όπως η Κρυπτογραφία, η θεωρία παιγνίων κτλ. και μία γενικότερη ξενάγηση στον κόσμο των Μαθηματικών.

Στον Όμιλο παραδίνονται μαθήματα και αναπτύσσονται δραστηριότητες σε μαθητές των τάξεων Ε' και ΣΤ' Δημοτικού, Α', Β' και Γ' Γυμνασίου και Α' Λυκείου όχι μόνο του Σχολείου μας, αλλά και άλλων σχολείων της Θεσσαλονίκης, από τα δυτικά ως τα ανατολικά, δημόσιων και ιδιωτικών, από μαθηματικούς του Σχολείου και εθελοντές μαθηματικούς, κάθε Δευτέρα από 18:00-20:00. Συνολικά, στον Όμιλο συμμετέχουν περί τους 120 μαθη-τές, η σταθερή συμμετοχή τους αποδεικνύει ότι οι μαθητές είναι ευχαριστη-μένοι με αυτό που κάνουν, χωρίς επιπλέον κίνητρα για βαθμούς κλπ.

Ο Όμιλος έχει ήδη πάρει μορφή μιας κοινότητας, καθώς συμμετείχαν και συμμετέχουν ως ακροατές, ως βοηθοί και ορισμένες φορές παραδίδουν μαθήματα φοιτητές και μεταπτυχιακοί, μαθηματικοί, δάσκαλοι, ακόμη και από το Πολυτεχνείο. Αρκετοί, είναι παλιοί μας μαθητές που βοηθούν τους μικρότερους με μοναδικό κίνητρο την αγάπη τους για τα Μαθηματικά.

Θεωρούμε ότι η συμμετοχή των μαθητών των δύο τελευταίων τάξεων του Δημοτικού που φοιτούν στο Σχολείο μας και η συμμετοχή μαθητών από άλλα Δημοτικά σχολεία αποτελεί μία πολύ καλή βάση για τη δημιουργία μιας αξιόλογης ομάδας για μαθηματικούς διαγωνισμούς, για την οποία δείχνει ενδιαφέρον σε τοπικό επίπεδο το Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας της Ε.Μ.Ε., διότι από αυτές τις ομάδες προέρχονται και μαθητές που μπορεί να συμμετέχουν στη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα και στη Διεθνή μαθηματική Ολυμπιάδα. Να λάβουμε υπόψη ότι έως τώρα αρκετά μέλη αυτών ομάδων στη χώρα μας, προέρχονται από ιδιωτικά σχολεία, τα οποία παρέχουν κίνητρα και μαθήματα προετοιμασίας για τους μαθητές αυτούς. Αν ο Όμιλος Μαθηματικών του Π.Π.Σ.Π.Θ. συνεχίσει τη λειτουργία του και τα επόμενα σχολικά έτη, τότε θα διαμορφωθεί μία ομάδα μαθητών με ικανοποιητικό επίπεδο και τεχνικές ικανότητες στην επίλυση δύσκολων μαθηματικών προβλημάτων.

Η λειτουργία του Ομίλου εκτός ωρών λειτουργίας του σχολείου, ή ορθότερα τέσσερεις ώρες μετά τη λήξη του τυπικού υποχρεωτικού προ-γράμματος, είναι ένα από τα θετικά του χαρακτηριστικά, διότι δίνει την ευκαιρία να συμμετέχουν και μαθητές από άλλα σχολεία – όπως είναι ζητούμενο από το σχετικό Νόμο για τα Π.Π.Σ. Αυτή η πρακτική ενισχύει τους μαθητές του σχολείου μας που συμμετέχουν στον Όμιλο, επειδή ωφελούνται πολλαπλά από την επαφή τους με μαθητές άλλων σχολείων που ενδιαφέρονται πραγματικά για τα Μαθηματικά.

Ο Όμιλος Μαθηματικών, έτυχε της ιδιαίτερης προσοχής εκ μέρους του Ε.Π.Ε.Σ. του σχολείου, διότι αυτός έχει παράγει συγκεκριμένο έργο, έχει μία δυναμική ανάπτυξης, έχει την αποδοχή μαθητών και γονέων από διάφορα σχολεία της πόλης, τυγχάνει της συμπαράστασης του Παραρτή-ματος Κεντρικής Μακεδονίας της Ε.Μ.Ε.

και εν τέλει φαίνεται ότι είναι ένας μαζικός και παραγωγικός όμιλος που διαθέτει το σχολείο μας.

Η ιδέα για τη δημιουργία Ομίλου Μαθηματικών προηγήθηκε της προτροπής της ΔΕΠΠΣ για Ομίλους. Έχει ένα παρελθόν το οποίο έχουμε περιγράψει στη Μαθηματική Εβδομάδα 2013 που διοργανώνει η Ε.Μ.Ε.

Κατά τη λειτουργία του Ομίλου των Μαθηματικών συγκεντρώσαμε ένα σύνολο παρατηρήσεων που χρειάζονται παραπέρα μελέτη. Κατ' αρχάς, φαίνεται να υπάρχει μία βασική έλλειψη κουλτούρας επίλυσης προβλημά-των. Αυτή διαφαίνεται σε όλα τα στάδια της διαδικασίας επίλυσης προβλη-μάτων με κάποιο σοβαρό περιεχόμενο και δομή. Αυτό είναι ένα ουσιώδες παιδαγωγικό ζητούμενο, στο οποίο η συμμετοχή των μαθητών στον Όμιλο θεωρούμε ότι το ικανοποιεί.

Για πολλούς μαθητές, αλλά και ενήλικες, τα Μαθηματικά αφορούν μόνο ευφυείς και σε πολύ δευτερεύουσα μοίρα εργατικούς ανθρώπους. Αγνοούν ότι οι ευφυείς ιδέες και οι κομψές λύσεις είναι προϊόν εντατικής προσπάθειας και διανοητικού μόχθου. Αυτός είναι ένας δεύτερος στόχος της λειτουργίας του Ομίλου μας. Μας ενδιαφέρει να αναδεικνύεται και η αξία των διαγωνιστικών ή με πιο ήπια ορολογία, των απαιτητικών προβλημάτων. Αυτά δεν αφήνουν σχεδόν καθόλου περιθώρια καλλιέργειας μιας αφελούς συμπεριφοράς. Απαιτούν έναν οργανωμένο σχεδιασμό μιας προσπάθειας για τη επίλυσή τους, που περιλαμβάνει πολλαπλούς ελέγχους και εναλλαγές στην τακτική αντιμετώπισής τους.

Το εκπαιδευτικό υλικό με το οποίο εργαζόμαστε στον Όμιλο μας είναι κυρίως αυτό που προέρχεται από τις σημειώσεις για τα καλοκαιρινά σχολεία της Ε.Μ.Ε. και από βιβλία για μαθηματικούς διαγωνισμούς που έχουν εκδοθεί στην ελληνική γλώσσα. Υλικό αντλούμε από τα περιοδικά «*Μικρός Ευκλείδης*», «*Ευκλείδης Α και Β*» της Ε.Μ.Ε. και από άλλα μαθηματικά έντυπα Δεδομένα και πληροφορίες από τη διεθνή εμπειρία, προφανώς προσαρμοσμένη στις ιδιαίτερες συνθήκες και τους σκοπούς του Ομίλου, αντλούμε από ένα πλήθος δικτυακές σελίδες. Ένα αρκετά φιλόδοξο σχέδιο μας είναι να ολοκληρώσουμε τα μαθήματα σε ένα εύλογο χρονικό διάστημα από το βιβλίο «*Mathematical Circles, Russian Experience*» προσαρμοσμένο στις ιδιαίτερες ικανότητες και απαιτήσεις των μαθητών των τμημάτων του Ομίλου μας.

Διαπιστώσαμε ότι λογισμικά όπως το Geogebra και το Sketchpad είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για τις δραστηριότητες του Ομίλου. Ο Όμιλος διαθέτει σήμερα ιστολόγιο και ομάδα στο facebook με περίπου 300 μέλη. Σε αυτά αναρτούμε υλικό αλλά και αναδημοσιεύουμε τα νέα που αφορούν στα μαθηματικά από έγκυρες ιστοσελίδες και από τον ελληνικό και διεθνή τύπο.

Θεωρούμε ότι η εμπειρία μας και οι παρατηρήσεις που προέκυψαν και θα προκύψουν από την ανάπτυξη του Ομίλου είναι χρήσιμες και για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο πλαίσιο της συνηθισμένης σχολικής τάξης των Π.Π.Σ. και όχι μόνον.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΙΣΟΤΗΤΑ, ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ, ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΗΝ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΕΜΜΕΣΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ, RADAR,GPS

Βενάρδος Παντελής
Πρότυπο Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκης
venardos_p@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Από το 1983, όταν συμμετείχαμε στον Όμιλο Ιστορίας Μαθηματικών που είχε δημιουργηθεί στη Θεσσαλονίκη, θεωρούσαμε ότι η Ιστορία των Μαθηματικών και οι εφαρμογές τους θα καταστήσουν το αντικείμενο τους «πραγματικά» διδάξιμο. Ο φορμαλισμός απαιτείται να είναι το τελευταίο στάδιο στη διδασκαλία των Μαθηματικών, αλλά δεν προσφέρεται για την μύηση των νεοεισερχόμενων. Ο στόχος για μία αποτελεσματική διδασκαλία καθιστά νόμιμη και την κατασκευή ιστορικών μύθων, παρά το γεγονός ότι για την επιστήμη είναι απαγορευμένοι, προκειμένου να γίνει γοητευτικό το μάθημα. Εφαρμογές και ιστορία διαμορφώνουν μέσα στην τάξη το κλίμα της «μύησης στα Μαθηματικά», μία πρακτική πολύ αποτελεσματική. Σημειώνουμε ότι ο συγκεκριμένος σχεδιασμός για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Γ' τάξη Γυμνασίου προέκυψε από την μαθητική μου απορία γιατί η ισότητα, η ομοιότητα τριγώνων και η Τριγωνομετρία διδάσκονταν με αυτή τη σειρά.

Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΩΣ ΒΑΣΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ένα είναι το μεγαλύτερο βάσανο του καθηγητή των Μαθηματικών, όταν καλείται να διδάξει γεωμετρία. Η δύσκολη στιγμή όπου συνήθως ένας από τους «κακούς» μαθητές του θα διατυπώσει τη θανατηφόρα για το μάθημα πρόκληση του: «Γιατί κύριε παλεύουμε να αποδείξουμε ότι δυο τμήματα είναι ίσα με κριτήρια ισότητας και τέτοιες αηδίες, ενώ μπορούμε απλά να τα μετρήσουμε με το χαράκι;». Τότε είναι που αρχίζουν οι αόριστες απαντήσεις που πείθουν, συνήθως, μόνο τους «καλούς» μαθητές.

Μερικές χαρακτηριστικές απαντήσεις είναι ότι μόνο με τη θεωρητική Γεωμετρία οξύνεται η σκέψη, ή ότι αυτή είναι μια αρχαία παράδοση και πρέπει να τιμούμε τους προγόνους μας, ή ακόμη χειρότερα ότι αυτό κάνουν σε όλα τα κράτη του κόσμου, ή ότι είστε μικροί ακόμη για να καταλάβετε πόσες εφαρμογές έχουν αυτά τα Μαθηματικά (ωσάν να είναι απόκρυφες αυτές οι άτιμες οι εφαρμογές και απαιτούν

ενηλικίωση, σαν εκείνες τις κρυφές συζητήσεις που κάνουν μόνο οι μεγάλοι μεταξύ τους), κτλ. Ο κατάλογος θα μπορούσε να είναι και ανθολόγιο της αγωνίας να βρει ο εκπαιδευτικός σοβαρότερους λόγους για τη διδασκαλία των Μαθηματικών πέρα από τον προφανή, ότι από αυτά κερδίζει το ψωμί του.

Επιστρέφουμε στην προσπάθεια κατανόησης πρώτα απ' όλα της απορίας του μαθητή μας. Η απορία του δεν έχει τίποτα το επιλήψιμο. Είναι πηγαία, δεν έχει δόλο, και είναι φαινομενικά απλοϊκή. Τι να ανταπαντήσουμε; Το μόνο ''σοβαρό'', και πιο συνηθισμένο, είναι να του πούμε πως η μέθοδος του χρειάζεται τέλειο σχήμα και αυτό είναι σχεδόν ακατόρθωτο, αν όχι αδύνατο. Έτσι δικαιολογούμε συνήθως το πέρασμα από την Πρακτική Γεωμετρία στην Θεωρητική. Από τον καιρό που ήμουν μαθητής όλο αυτό μου φαινόταν ένα ιδιότυπο σάλτο που σε φτάνει εκεί που θέλει ο συνομιλητής σου. Σαν να σου τραβάνε την προσοχή για ένα λεπτό και να βλέπεις ξαφνικά κάτι άλλο. Αυτό έχει όνομα. Λέγεται ταχυδακτυλουργία.

Πρέπει νομίζω να αποδεχθούμε ότι έχουμε χάσει αυτό το παιχνίδι της έντιμης διδασκαλίας. Πράγματι, πώς να απαντήσουμε στο προφανές. Ο μαθητής έχει αρχικά δίκιο. Κανένας σώφρονας δεν θα έκανε κάτι άλλο από το να μετρήσει με τον χάρακα. Ούτε και κανείς θα έπαιρνε μάστορες στην οικοδομή του που θα αναλώνονταν σε θεωρητικές περί την Γεωμετρία συζητήσεις. Οι ακατανόητες προτάσεις για αρρητότητες και άλλα μαθηματικά τέρατα δεν μπορούν να αφορούν την πράξη. Οι μετρήσεις που γίνονται άμεσσα ίσως και να ακυρώνουν τη χρησιμότητα όλων των γνωστών εργαλείων, ακόμη και τον «ιησουίτικο» τρόπο εκπαίδευσης (Μαθηματικά για τα Μαθηματικά).

ΚΑΙ ΟΤΑΝ Η ΜΕΤΡΗΣΗ ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΑΜΕΣΗ;

Υπάρχει μια ομάδα πρακτικών προβλημάτων όπου η αθώα άμεση μέτρηση του «προκλητικού» μαθητή καταρρέει. Το χτύπημα είναι θανάσιμο στη συνηθισμένη ερώτηση σε τι χρειάζονται θεωρίες πέρα από την απλή άμεση μέτρηση. Και το επιβεβαιώνει ο ίδιος ο μαθητής. Δηλώνει αδυναμία να κάνει κάτι με μια μεζούρα στα προβλήματα που ακολουθούν.

Πως θα μετρήσουμε την απόσταση ενός πλοίου από την ακτή; Το ύψος ενός δέντρου, μιας πολυκατοικίας ή μιας πυραμίδας; Μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος του Ολύμπου ή του Χορτιάτη από την παραλία της Θεσσαλονίκης; Πώς θα μετρήσουμε την ακτίνα της Γης; Μπορεί ένας ναυτικός να βρει πόσο απέχει από τον Λευκό Πύργο αν γνωρίζει το ύψος του; Το μήκος της γέφυρας που θα κατασκευάσουμε σε ένα ποτάμι ή σε μια λίμνη; Ο Ναπολέοντας έφτιαξε έναν ισχυρό στρατό, επειδή είχε μηχανικούς με έτοιμες μαθηματικές απαντήσεις στα ζητήματα των βολών των κανονιών. Επρεπε όμως να μετρήσουν και την απόστασή τους από το στρατόπεδο του εχθρού. Πώς όμως θα γίνει αυτό; Για την απάντηση τέτοιων ερωτημάτων, ο γνωστός - άγνωστος μαθητής θα καταφύγει πια σε ανέκδοτα. Θα βάλει κόσμο να κολυμπάει κτλ. Η αντίδραση αυτή δείχνει μια σοβαρή ήττα των απλοϊκών μεθόδων.

Επιλέγουμε λοιπόν, ένα πρόβλημα, π.χ. την απόσταση του πλοίου από την ακτή και το πραγματευόμαστε σε όλη την διάρκεια που διδάσκονται τα παραπάνω θέματα στη Γ' Γυμνασίου.

ΜΥΗΣΗ ΣΤΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Αρχίζουμε με ένα εισαγωγικό πρόβλημα στην ισότητα τριγώνων.

Εκπαιδευτικός: Πως παραγγέλνεις σε έναν μάστορα μια τριγωνική πινακίδα;

Μαθητής: Κατασκευάζω ένα χάρτινο μοντέλο.

Εκπαιδευτικός: Κι αν η πινακίδα είναι μεγάλου μεγέθους πως θα την στείλεις; Υπάρχει άλλος τρόπος να κάνεις την παραγγελία;

Εδώ τα παιδιά δείχνουν ασυγκράτητη δημιουργικότητα, με αναγκάζουν να περιορίσω την παραγγελία μόνο με πλευρές και γωνίες, ξεκαθαρίζοντας ότι οι δυνατότητες είναι πολλές. Παριστάνω δε τον μάστορα, που όταν το κριτήριο είναι αποτυχημένο, δηλώνει αδυναμία να κατασκευάσει μια μόνο πινακίδα. Αντίστοιχα, αυτός είναι ευχαριστημένος, όταν η παραγγελία δεν είναι αόριστη. Ετσι εισάγουμε την αναγκαιότητα για κριτήρια ισότητας τριγώνων, αλλά κυρίως ικανοποιούνται οι μαθητές επειδή λύνουν αληθινά προβλήματα. Μετά την συζήτηση έχουν συμπεράνει εμπειρικά τα κριτήρια ισότητας τριγώνων που θέλουμε να διδάξουμε.

Πως θα βρούμε τώρα την απόσταση του πλοίου από την ακτή (πάντα παριστάνοντας τον απλό μάστορα και λειτουργώντας πρακτικά); Οι μαθητές βρίσκουν πάνω από μια λύσεις χωρίς ή με ελάχιστη βοήθεια. Τους ενημερώνουμε ότι η μία από αυτές –αυτήν βρίσκουν συνήθως - κυκλοφορεί με το όνομα του Θαλή.

ΜΥΗΣΗ ΣΤΗΝ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Όταν έρθει η ώρα για ομοιότητα διατυπώνεται η προκλητική απορία του μαθηματικού.

Εκπαιδευτικός: *Σωστή μαθηματικά η λύση του Θαλή, αλλά στην πράξη έχει εμπόδια. Χρειάζεται μια τεράστια σε βάθος ακτή. Είναι φορές που οι μαθητές βρίσκουν το πρόβλημα κι άλλες φορές που το αναδεικνύει ο γνωστός μάστορας. Χρειαζόμαστε συνεπώς όχι μόνο μία μαθηματικά σωστή, αλλά και ρεαλιστική λύση.*

Στην φάση αυτή οι μαθητές σχεδόν πάντα ανακαλύπτουν διαισθητικά την λύση με την μικρογραφία του μεγάλου τριγώνου χωρίς να έχουν την παραμικρή ιδέα για ομοιότητα. Έτσι ήδη έχουμε μια πρώτη ρεαλιστική λύση του προβλήματος. Η μέτρηση του ύψους ενός δέντρου από τη σκιά του είναι, επίσης, ένα πρόβλημα το οποίο λύνουν διαισθητικά οι μαθητές. Στο σημείο αυτό, αναφέρουμε την ιστορία του Θαλή με το ύψος της πυραμίδας, όπως και την μέτρηση με το Τ στους μεσαιωνικούς χρόνους. Ζητάμε την μέτρηση ύψους κτιρίου με Τ στο σχολείο. Αναρωτιόμαστε επίσης, πως θα εξηγούσαμε την μέτρηση της ακτίνας της Γης από τον Ερατοσθένη με

την ομοιότητα. Εννοείται ότι μόλις προσεγγίσουμε κάθε νέο εργαλείο έμμεσης μέτρησης, το απλώνουμε μετά στις διαστάσεις που παίρνει θεωρητικά στη συγκεκριμένη τάξη. Είναι βέβαια πολύ δύσκολο να ανακαλύψουν οι μαθητές τα κριτήρια ομοιότητας. Στα σημεία αυτά παρεμβαίνουμε με υποδείξεις.

ΜΥΗΣΗ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Εκπαιδευτικός: *Υπάρχει άραγε τρόπος τηλεμέτρησης χωρίς να ζωγραφίσει κανείς τίποτα στην ακτή;*

Στο σημείο αυτό, τα πράγματα δυσκολεύουν πολύ και όλα τα χρόνια που αναπτύσσουμε το μάθημα με αυτόν τον τρόπο δεν έχουμε πάρει καμία απάντηση. Αμέσως μετά, εξηγούμε πώς η ομοιότητα μεταγλωτίζεται σε ‘’χαρακτηριστικό’’ αριθμητικό φορτίο κάθε γωνίας, που το κουβαλά μαζί της σε όποιο ορθογώνιο (αρχικά) τρίγωνο βρεθεί. Αυτό είναι και το «χοντρό κόλπο» της τριγωνομετρίας. Αρκεί να μπορούμε να μετρήσουμε τη γωνία με την οποία «βλέπουμε» ένα ευθύγραμμο τμήμα. Κι αυτό είναι δυνατό από τα αρχαία χρόνια με τη «διόπτρα». Μας χρειάζεται βέβαια και ένας κατάλογος με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών, τουλάχιστον ανά μία μοίρα. Η πιο «πρωτόγονη» κατασκευή του είναι κάνοντας μετρήσεις σε τρίγωνα «τετραδίου». Οι μαθητές μετά από όλα αυτά λύνουν όλα τα προβλήματα που έχουμε αναφέρει στην αρχή. Από τις πρώτες φορές εντυπωσιάστηκα από το πόσο εύκολα έλυναν τα προβλήματα τηλεμέτρησης. Η ανάπτυξη του μαθήματος με ιστορία μαθηματικών και εφαρμογές είναι πολύ αποτελεσματική.

Η ΕΠΕΛΑΣΗ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Στο τέλος των τηλεμετρήσεων μήκους, και ιστορικά, βρίσκεται το ραντάρ αλλά και τα αντίμετρα του, όπως η τεχνολογία στελθ, τα πολύ φθηνά πια «πιστόλια» laser με τα οποία οι μάστορες μετράνε αποστάσεις, οι αντίστοιχες εφαρμογές στα έξυπνα κινητά τηλέφωνα και το GPS.

ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ

Στο τέλος της χρονιάς, όπου ο κύκλος θεωρίας έχει πια κλείσει, καλέσαμε τοπογράφους από το Α.Π.Θ. οι οποίοι εξηγούν στους μαθητές τη λειτουργία του θεοδόλιχου και του GPS στην αυλή του σχολείου. Επίσης έχουμε αναθέσει ομαδικές εργασίες για τη χρήση του εξάντα που παρουσιάζουν οι μαθητές σε ηλεκτρονική μορφή, ενώ μια χρονιά μια ομάδα μαθητών επιδιόρθωσε έναν μεταχειρισμένο εξάντα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ανάπτυξη ενός μαθήματος Μαθηματικών με μη συμβατικό τρόπο, με βάση την ιστορία και τις εφαρμογές τους, δημιουργούν το απαραίτητο για την διδασκαλία κλίμα μύησης, όμοια με την πανάρχαια τεχνική των παλιών μαστόρων, που οδηγούν στην μετάληψη των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Σαφέστατα πρόκειται για εργαστηριακή μέθοδο, δεν πρόκειται για μηχανή χρόνου που αναπαράγει τις συνθήκες «ανακάλυψης» ή πιο σωστά διαμόρφωσης της κάθε έννοιας, γι αυτό και απαιτεί τις παρεμβάσεις του μαθηματικού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Λεμονίδης, Χ. & Κολλινιάτη, Β. (2007). Τα Μαθηματικά της φύσης και της ζωής. Αλλαγές στο έργο του εκπαιδευτικού των μαθηματικών. Πρακτικά 9ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης, Πάφος 2-4 Φεβρουαρίου, σελ. 39-49.

Gulsah Batdal Karaduman (2010), A sample study for classroom teachers addressing the importance of utilizing history of math in math education, *Procedia - Social and Behavioural Sciences*, Volume 2, Issue 2, , p. 2689-2693, Elsevier

Kline, Morris, (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Vol. 1, Vol. 2, Vol. 3. New York: Oxford University Press

Lesh R., Galbraith P.L., Haines C.R., Hurford A., (2010). *Modelling students' mathematical modelling competencies*: ICTMA 13. New York; London: Springer.

Nunes, T., Schliemann, A., & Carraher, D., (1993). *Street Mathematics and school Mathematics*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

ΠΙΛΟΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΗ ΣΤ' ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Μποζέλου Μαρία

Μαθηματικός στο Πρότυπο – Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

bozelou@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε μια πιλοτική διδασκαλία των αρνητικών αριθμών (της έννοιας των αρνητικών αριθμών και της πρόσθεσης μεταξύ ρητών αρχικά, θα ακολουθήσουν όμως και οι υπόλοιπες πράξεις) που έγινε στο Πειραματικό Σχολείο του ΑΠΘ. Στόχος ήταν να δούμε κατά πόσο οι μαθητές της Στ' τάξης Δημοτικού μπορούν να αντιληφθούν την έννοια των αρνητικών αριθμών και να κάνουν πράξεις μεταξύ θετικών και αρνητικών αριθμών. Κατά την πιλοτική διδασκαλία, εκτός από κάποιες δραστηριότητες, έγινε ανάγνωση αποσπασμάτων από το βιβλίο «Ο Τσάρλι και ο Μεγάλος Γυάλινος Ανελκυστήρας». Επίσης, οι μαθητές έπαιξαν ένα επιτραπέζιο παιχνίδι με στόχο την εκμάθηση της πρόσθεσης. Τελικά, από τη διαδικασία που ακολουθήσαμε, φαίνεται ότι οι μαθητές αυτής της ηλικίας μπορούν να πραγματευτούν ικανοποιητικά ερωτήματα σχετικά με αρνητικούς αριθμούς.

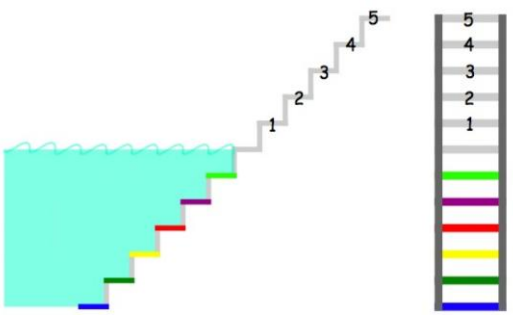
1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το θεωρητικό πλαίσιο του πειραματισμού μας ήταν η αποκαλούμενη ρεαλιστική διδασκαλία, δηλαδή η διδασκαλία που συνδέεται με μία σειρά δραστηριοτήτων που αντιστοιχούν σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής των μαθητών.

2. ΠΟΡΕΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

2.1. Έννοια των αρνητικών αριθμών

Αρχικά έγινε μια εισαγωγή από τις δασκάλες της τάξης: Παρουσιάστηκαν θέματα που συνδέονται με τους αρνητικούς αριθμούς και έχουν συναντήσει οι μαθητές στη Φυσική (μέτρηση θερμοκρασίας – θερμόμετρα) και στη Γεωγραφία (κατακόρυφος διαμελισμός – πάνω και κάτω από τη θάλασσα), χωρίς όμως να γίνει καμιά νύξη σε αυτούς.



Στη συνέχεια, ακολούθησε η δραστηριότητα "*Μάθημα Κολύμβησης*". Δόθηκε φύλλο εργασίας στους μαθητές και ζητήθηκε από αυτούς να βοηθήσουν τη δασκάλα κολύμβησης απαντώντας σε κάποιες ερωτήσεις, όπως «Πώς μπορεί να "ονομάσει" το σκαλοπάτι που βρίσκεται στο ίδιο ύψος με το νερό;» και «Πώς μπορεί να ονομάσει όλα τα χρωματιστά σκαλοπάτια;». Στη συνέχεια, ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν πόσα σκαλοπάτια ανέβηκαν ή κατέβηκαν κάποιοι από τους κολυμβητές (με δεδομένα σε ποιο σκαλοπάτι ήταν και σε ποιο πήγαν) και να αποφασίσουν ποιος ανέβηκε ή κατέβηκε τα περισσότερα σκαλοπάτια. Αφού ολοκληρώσαμε τη δραστηριότητα, συζητήσαμε σχετικά με το ποιοι είναι οι θετικοί και ποιοι οι αρνητικοί αριθμοί και ακολούθησαν ερωτήσεις κατανόησης, όπως ερωτήσεις διάταξης των αριθμών (π.χ. ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος το 4 ή το –6), πού συναντάμε αρνητικούς αριθμούς στην καθημερινή μας ζωή (π.χ. θερμόμετρα, πλήκτρα μέσα σε ασανσέρ) και τι σημαίνει για έναν αριθμό το ότι είναι αρνητικός.

Τέλος έγινε ανάγνωση κάποιων αποσπασμάτων από το βιβλίο "Ο Τσάρλι και ο Μεγάλος Γυάλινος Ανελκυστήρας".

> Στο βιβλίο αυτό, ο τρελός εργοστασιάρχης Βίλι Βόνκα, έχει εφεύρει τα χάπια της νεότητας: κάθε χάπι σε κάνει νεότερο κατά 20 χρόνια. Η γιαγιά του Τσάρλι, που είναι 78 χρονών, παρά τις υποδείξεις του κ. Βόνκα για προσεκτική χρήση των χαπιών, παίρνει 4 χάπια και εξαφανίζεται. Πανικοβάλλονται όλοι με την εξαφάνισή της, αλλά μετά από συζήτηση καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι έγινε –2 χρονών και ότι βρίσκεται πλέον στη "Χώρα του Πλην". Έτσι, αντί να περιμένουν 2 χρόνια μέχρι να εμφανιστεί πάλι η γιαγιά Τζοτζίνα, αποφάσισαν να πάνε στη "Χώρα του Πλην" να τη φέρουν πίσω.

2.2. Πρόσθεση μεταξύ θετικών και αρνητικών αριθμών

Αρχικά, συνεχίσαμε την ανάγνωση από το βιβλίο:

> Έφυγαν αμέσως ο κ. Βόνκα με τον Τσάρλι για τη χώρα του πλην, να προλάβουν τη γιαγιά Τζορτζίνα "πριν ... αφαιρεθεί" και να τις δώσουν το αντίδοτο, που θα τη φέρει πίσω. Επειδή, όμως δεν μπορούν να υπολογίσουν ακριβώς τη δόση, την ψεκάζουν πολύ και γίνεται 358 ετών, οπότε πρέπει τώρα να υπολογίσουν πόσα χάπια νεότητας πρέπει να της δώσουν για να ξαναγίνει 78 χρονών.

Ακολούθησε η εξής δραστηριότητα: «*Ο Πέτρος χρωστάει στο Σταύρο 3€ και επειδή πεινάει μια μέρα στο σχολείο δανείζεται από τον Κυριάκο 2€ για να αγοράσει φαγητό*.» Ακολούθησαν οι εξής ερωτήσεις: «*Πώς μπορούμε να γράψουμε πόσα χρωστάει ο Πέτρος με τη βοήθεια αριθμών με πρόσημο*;», «*Μπορούμε να γράψουμε πόσα χρήματα συνολικά πρέπει να δώσει ή να πάρει από τους συμμαθητές του μόνο με ένα νούμερο*;» και «*Πώς μπορούμε να εκφράσουμε αυτό που βρήκαμε με μία πράξη*;». Οι μαθητές απάντησαν σωστά σε όλες τις ερωτήσεις, αλλά στην τελευταία είπαν πως μπορούμε να βρούμε πόσα χρήματα χρωστάει συνολικά ο Πέτρος με την πράξη –2 + –3 = –5, χωρίς να σκεφτούν τις απαραίτητες παρενθέσεις. Μετά, με τον παρακάτω διάλογο, βάλαμε και τις παρενθέσεις:

Εκπαιδευτικός: Επειδή, όμως, είναι χειμώνας, οι αριθμοί κρυώνουν, οπότε πρέπει να τους φορέσουμε ρουχαλάκια, για να μην αρρωστήσουν. Τι θα μπορούσαμε να τους φορέσουμε για να μην κρυώσουν;

Μαθητής1: Το μηδέν.

Εκπαιδευτικός: Ναι, όμως, το 0 δεν είναι ρούχο, είναι αριθμός. Ποιο ρουχαλάκι θα μπορούσαμε να φορέσουμε στους αριθμούς;

Μαθητής2: Τις παρενθέσεις.

Τελειώσαμε τη δραστηριότητα σχολιάζοντας την πράξη που κάναμε και ότι πρέπει να βάζουμε παρενθέσεις.

Στη συνέχεια, χωρίστηκαν τα παιδιά σε ομάδες των 4 ή 5 και παίξαμε το εξής επιτραπέζιο παιχνίδι:



Το ταμπλό έχει κουτάκια αριθμημένα από το –17 έως το +17. Βάζουν όλοι οι παίχτες τα πιόνια τους στο 0. Όταν είναι σειρά κάποιου να παίξει, γυρίζει το ρολογάκι (το οποίο έχει τους ακέραιους από το –3 έως το +3) και πρέπει να προχωρήσει τόσα τετράγωνα όσα είναι ο αριθμός που έφερε (αν έφερε θετικό πρέπει να προχωρήσει προς τα δεξιά και αν έφερε αρνητικό πρέπει να προχωρήσει προς τα αριστερά). Κάθε ομάδα έχει έναν γραμματέα, ο οποίος καταγράφει κάθε φορά τις πράξεις που «παίζουν». Για παράδειγμα, αν βρίσκεται κάποιος στο –4 και φέρει +2 θα γράψει την πράξη (–4) + (+2) = –2.

Αφού έπαιξαν για 15 λεπτά, πήραμε τα ταμπλό από μπροστά τους και συνέχισαν να παίζουν, απλά γράφοντας τις πράξεις, που πλέον έκαναν με το μυαλό τους. Για να έχουν λίγη αγωνία τα είπα ότι όποια ομάδα κάνει τις περισσότερες σωστές πράξεις θα κερδίσει σοκολατάκια – Άγιους Βασίληδες (η δραστηριότητα έγινε όταν πλησίαζαν τα Χριστούγεννα).

Στη συνέχεια, καταγράψαμε στον πίνακα κάποιες από τις πράξεις που έκαναν οι ομάδες και τις συζητήσαμε. Αφού, γράψαμε κάποια επιπλέον παραδείγματα στον πίνακα, τους δόθηκε μια φωτοτυπία για να εκτελέσουν κάποιες προσθέσεις.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η χρήση της λογοτεχνίας ήταν κάτι που άρεσε πολύ στους μαθητές, οι οποίοι άκουγαν την ανάγνωση κάνοντας απόλυτη ησυχία και ανυπομονούσαν για τη συνέχεια. Το κομμάτι της διδασκαλίας, όμως, που τους κέρδισε περισσότερο ήταν το επιτραπέζιο παιχνίδι. Δεν ήθελαν να σταματήσουν να παίζουν και όταν μαζέψαμε τα

παιχνίδια για να συνεχίσουμε τις δραστηριότητες ζητούσαν να πάρουν το ταμπλό και τα πιόνια σπίτι τους για να παίξουν.

Γενικά, οι συγκεκριμένοι μαθητές αντιλήφθηκαν πολύ εύκολα την έννοια του αρνητικού αριθμού, κάποια, μάλιστα, ήξεραν και τη φράση «*αρνητικός αριθμός*» από μεγαλύτερα αδέρφια. Μόνοι τους είπαν ότι συναντάμε τέτοιους αριθμούς στην καθημερινή ζωή. Με τη δραστηριότητα για την πρόσθεση ρητών και τα χρέη του Πέτρου, εύκολα διατύπωσαν την πράξη που χρειάζεται να κάνουμε και στη συνέχεια παίζοντας εξασκήθηκαν στην πρόσθεση ρητών. Η άσκηση που τους δόθηκε στο τέλος επιβεβαιώνει ότι οι περισσότεροι μαθητές κατάλαβαν πώς γίνεται η πρόσθεση μεταξύ ρητών, καθώς οι περισσότεροι είχαν περισσότερες από 9 (στις 12) σωστές απαντήσεις:

Σωστές απαντήσεις	Πλήθος μαθητών
4/12	2
8/12	1
9/12	5
10/12	2
11/12	8
12/12	4

Πίνακας 1: Σωστές απαντήσεις στην άσκηση

Η πιλοτική διδασκαλία των θετικών – αρνητικών αριθμών θα συνεχιστεί μετά τις διακοπές των Χριστουγέννων με την πράξη της αφαίρεσης, την οποία η μαθητές περιμένουν με μεγάλη αγωνία και εγώ προσωπικά ως εκπαιδευτικός – ερευνήτρια με ακόμη μεγαλύτερη.

Ο στόχος μου είναι να αναδείξω τις δυνατότητες των μαθητών του Δημοτικού ως προς την κατανόηση της έννοιας «αρνητικός αριθμός» και να πειραματιστώ σε συνεργασία με τις δασκάλες της αντίστοιχής τάξης του Σχολείου μου για μία μελλοντική επέκταση του Αναλυτικού Προγράμματος στην έννοια αυτή.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Ανδρέα Πούλο, Σχολικό Σύμβουλο Μαθηματικών Ανατολικής Θεσσαλονίκης, για τις υποδείξεις του και τις πολύτιμες συμβουλές του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ματθαίου Σοφία, (2005), *Διδασκαλία των θετικών αρνητικών αριθμών βασισμένη στις αρχές της Ρεαλιστικής εκπαίδευσης.* Διπλωματική εργασία για το μεταπτυχιακό δίπλωμα στο Τμήμα Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.

Νταλ Ρόαλντ, (2008). *Ο Τσάρλι και ο Μεγάλος Γυάλινος Ανελκυστήρας*, (Δεύτερη έκδοση). Αθήνα: Εκδόσεις Ψυχογιός Α.Ε., σελ. 112-181.

University of Cambridge, Swimming Pool, http://nrich.maths.org/5836

ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΙΚΡΟΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Δημήτρης Διαμαντίδης
2ο Πρότυπο Πειραματικό Γυμνάσιο Αθήνας
dimdiam@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο κείμενο περιγράφονται δύο μονόωρες διδακτικές παρεμβάσεις με χρήση μικροπειραμάτων. Εστιάζονται στις διαφορετικές ερμηνείες του συμβόλου της ισότητας και αποτελούν μέρος ενός σχεδίου μαθήματος που εφαρμόστηκε στη Β΄ Γυμνασίου με θέμα τις εξισώσεις 1ουβαθμού, στο πλαίσιο των πιλοτικών προγραμμάτων σπουδών. Αφού καθοριστεί το πλαίσιο αυτό, γίνεται ανάλυση του σκεπτικού και της αναγκαιότητας μιας τέτοιας παρέμβασης σύμφωνα με τη ΔτΜ και περιγράφονται οι διδακτικοί στόχοι που προκύπτουν. Τέλος περιγράφονται οι δραστηριότητες μέσα από την εφαρμογή τους και σε σχέση με το πλαίσιο που έχει προκαθοριστεί.

ΤΑ ΜΙΚΡΟΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΠΠΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Κεντρική θέση για την επίτευξη των στόχων του πιλοτικού προγράμματος σπουδών (ΠΠΣ) του Γυμνασίου κατέχουν τα ψηφιακά εργαλεία που χρησιμοποιούνται ως εργαλεία έκφρασης (Π.Ι., 2011). Στο πλαίσιο αυτό προτείνονται μικροπειράματα που ενσωματώνονται σε διαφορετικά σημεία της ύλης και συνδέονται με ορισμούς, ιδιότητες ή δραστηριότητες και ασκήσεις (http://ebooks.edu.gr/). Τα μικροπειράματα των διαδραστικών βιβλίων μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτούσια, αλλά και σαν γεννήτορες άλλων μικροπειραμάτων.

Στο ΠΠΣ η ανάπτυξη του περιεχομένου γίνεται με βάση την έννοια της τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας (ΤΜΔ) που είναι σημαντικό εργαλείο για την κατασκευή κατάλληλων περιβαλλόντων μάθησης που ευνοούν την υλοποίηση των διδακτικών στόχων του ΠΠΣ (Clements & Samara, 2009). Το παράδειγμα της χρήσης μικροπειραμάτων που δίνω παρακάτω αναφέρεται στη θεματική ενότητα της Άλγεβρας και στη λύση εξισώσεων που είναι βασικός σταθμός της ΤΜΔ «ισότητα & ανισότητα» (Π.Ι., 2011).

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΤΟΧΩΝ ΤΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Σύμφωνα με το ΠΠΣ ανάμεσα στους σημαντικούς σταθμούς της ΤΜΔ «ισότητα & ανισότητα» είναι η έννοια της ισότητας και οι διαφορετικές χρήσεις του ίσον (=). Σύμφωνα με την Kieran (1992) και τους Cortes, Vergnaud και Kavafian (1990) το ίσον στο δημοτικό διδάσκεται ως ένα σύμβολο μιας πράξης σε αναμονή όπως στην περίπτωση $1+9=$, ή και σε απλές εξισώσεις όπως $3+x=7$ (Dickinson & Eade., 2004). Από την άλλη μεριά, το ίσον στην εξίσωση συμβολίζει την ισοδυναμία του πρώτου και του δεύτερου μέλους για κάποια συγκεκριμένη τιμή (αν υπάρχει) του αγνώστου. Αργότερα έρχεται μια σχεσιακή ερμηνεία του ίσον (π.χ. $f(x)=2x+1$), με την έννοια του προσδιορισμού της ποσότητας που βρίσκεται στο 1ο μέλος (Warren & Cooper, 2005). Για την επίλυση εξισώσεων οι μαθητές χρησιμοποιούν κυρίως τη μέθοδο «αλλάζω μέλος-αλλάζω πρόσημο» που δεν τους βοηθά να δουν την εξίσωση σαν ένα μαθηματικό αντικείμενο δηλαδή σαν μια ισοδυναμία των δύο μελών, παρόλο που μπορεί να τη λύνουν σωστά (Greeno, 1982; Kieran, 1989). Τη βλέπουν διαδικαστικά (Kieran, 1992) ή λειτουργικά (Sfard, 1991). Από την άλλη είναι δύσκολο να πείσει κανείς τους μαθητές να μην τη χρησιμοποιούν, αλλά να μετασχηματίζουν την εξίσωση κάνοντας πράξεις και στα δύο μέλη, καθώς η πρώτη επίλυση είναι πιο γρήγορη και εξίσου αποτελεσματική.

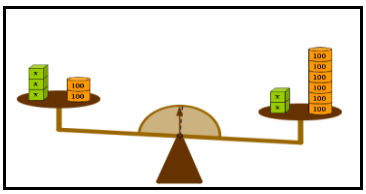
Οι κεντρικοί στόχοι των δραστηριοτήτων που θα περιγράψω στην επόμενη παράγραφο είναι κατά πρώτον να αναγνωρίζουν οι μαθητές τις διαφορετικές χρήσεις του συμβόλου = πέρα από τη λειτουργική του σημασία και κατά δεύτερον (ειδικότερα) μέσα από αυτή τη θεώρηση να δουν την εξίσωση ως ένα μαθηματικό αντικείμενο κι όχι σαν μια διαδικασία. Σε αυτή την κατεύθυνση χρησιμοποίησα το μοντέλο της ζυγαριάς (Warren & Cooper, 2005) ενός έτοιμου μικροπειράματος. Ένας τρίτος στόχος που απορρέει από τους δύο προηγούμενους ως προέκτασή τους είναι η σύνδεση του ίσον ως συμβόλου προσδιορισμού του 1ου μέλους (Warren & Cooper, 2005) με τη χρήση του σε μια εξίσωση ως συμβόλου ισοδυναμίας των δύο μελών.

ΟΙ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

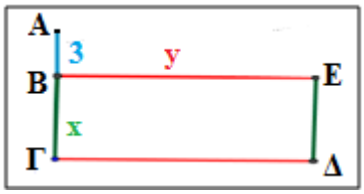
Στο πρώτο μικροπείραμα [1] που σχετίζεται με τον πρώτο και δεύτερο στόχο, απεικονίζεται μια ζυγαριά (εικόνα 1) με δύο ειδών βάρη που οι μαθητές μπορούσαν να βάζουν ή να βγάζουν. Αυτά με βάρος x και εκείνα με βάρος 100. Χρησιμοποιήσαμε το εργαστήριο η/υ και ζήτησα από τους μαθητές (χωρισμένους σε τετράδες) να κάνουν τη ζυγαριά να ισορροπήσει. Αυτό δεν συμβαίνει με μοναδικό τρόπο και η κάθε τετράδα έφτιαξε άλλη «εξίσωση», δηλαδή ισορροπία της ζυγαριάς. Στη συνέχεια ζήτησα από τους μαθητές να βρουν το βάρος του αγνώστου. Σημειώνω ότι ακόμα δεν είχαν γράψει την εξίσωση, έτσι η τακτική «αλλάζω μέλος-αλλάζω πρόσημο» δεν είχε νόημα. Βρήκαν το x προσθαφαιρώντας ίσα βάρη από τις δύο πλευρές της ζυγαριάς (Filloy, Rojano, &

Puig, 2008). Στη συνέχεια τους ζήτησα να γράψουν την αρχική εξίσωση και να επαναλάβουν τις κινήσεις τους γράφοντας κάθε φορά την αντίστοιχη μετασχηματισμένη εξίσωση. Έτσι ουσιαστικά έλυσαν την εξίσωση αλγεβρικά κάνοντας προσθέσεις και αφαιρέσεις στα δύο μέλη πράγμα που σύμφωνα με την Kieran (1988, 1989) τους βοηθά να προσεγγίσουν την εξίσωση σαν ισοδυναμία των δύο μελών.

Η επόμενη δραστηριότητα σχετίζεται με τον πρώτο και τρίτο στόχο. Η Kieran (1988) υποστηρίζει ότι οι μαθητές χρησιμοποιώντας δοκιμές είναι δυνατόν να κατανοήσουν το σύμβολο της ισότητας ως ισοδυναμία των δύο μελών. Σε αυτή την κατεύθυνση έφτιαξα την παρακάτω δραστηριότητα [2]. Στην εικόνα 2 φαίνεται το σχήμα στο Geogebra, που παριστάνει τη συνολική διαδρομή της καθημερινής προπόνησης ενός δρομέα. Το ένα μήκος (γαλάζιο) είναι η απόσταση από το σπίτι του (Α) μέχρι την είσοδο ενός γειτονικού πάρκου (Β). Τα μήκη x και y μεταβάλλονται καθώς δεν τρέχει κάθε μέρα την ίδια απόσταση μέσα στο πάρκο. Για τη δραστηριότητα αυτή χρησιμοποιήθηκε ο διαδραστικός πίνακας στην ολομέλεια της τάξης και ο κάθε μαθητής είχε εκτυπωμένο το σχήμα αλλά και δύο ερωτήματα που τους έθεσα στη συνέχεια. Αρχικά ζήτησα να εκφράσουν το συνολικό μήκος L της διαδρομής, χωρίς να γνωρίζουν τα μήκη των x και y και προέκυψε ένας τύπος όπου το = είναι σύμβολο προσδιορισμού (Warren & Cooper, 2005). Αφού ζήτησα από τους μαθητές να υπολογίσουν το μήκος L για διάφορα ζεύγη των x και y με επαλήθευση των αποτελεσμάτων στο διαδραστικό πίνακα, έθεσα το δεύτερο ερώτημα. «Για ποιες τιμές των x και y το συνολικό μήκος της διαδρομής θα παραμένει 34 μονάδες μήκους;» Οι μαθητές πειραματίστηκαν μεταβάλλοντας τα x και y. Υποστηρίζω ότι μέσω του δυναμικού χειρισμού (Κυνηγός, 2006) ενσάρκωσαν τη διαφορετικότητα των δύο ερωτημάτων της δραστηριότητας. Αρχικά η ισότητα σημαίνει προσδιορισμό του L ενώ στο δεύτερο μέρος η ισότητα πρέπει να επιτευχθεί ως ισοδυναμία των δύο μελών. Έχω τη γνώμη ότι οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με τη δραστηριότητα διατύπωσαν απόψεις και ερωτήματα που σχετίζονταν με τις διαφορετικές χρήσεις του = και έγιναν αφορμή για συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης. Επίσης οδηγήθηκαν στο ερώτημα, «πότε ένα γράμμα είναι άγνωστος και πότε μεταβλητή;» Από τις απόψεις που ακούστηκαν πιο πειστική τους φάνηκε ότι «εξαρτάται από το πρόβλημα». Φαίνεται ότι σημαντικό ρόλο στην προσέγγιση της έννοιας της εξίσωσης παίζουν και οι διαφορετικές ερμηνείες του γράμματος (Booth, 1982). Αν και εντάσσεται σε άλλη ΤΜΔ (αλγεβρικές παραστάσεις) έχω την άποψη η σχέση του αγνώστου μιας εξίσωσης και της ανεξάρτητης/εξαρτημένης μεταβλητής μιας παράστασης είναι χρήσιμο να διερευνηθεί αρχικά στο πλαίσιο των εξισώσεων. Άλλωστε με αυτό τον τρόπο προετοιμάζεται η σύνδεση των εξισώσεων 1ου βαθμού με τις συναρτήσεις $y=\alpha x+\beta$, όπως προτείνεται και στα ΠΠΣ.



εικόνα 1



εικόνα 2

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Δραστηριότητα 3 παραγράφου Α.1.2. διαδραστικών βιβλίων.
2. Βασίζεται σε ιδέες από τα μικροπειράματα της εφαρμογής 3 και της άσκησης 10 της Α.1.2, αλλά και από τα μικροπειράματα της Α.3.1 των διαδραστικών βιβλίων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Booth, L. R. (1982). Developing a teaching module in beginning algebra. In A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the 6th PME International Conference.*(Vol. 1, pp. 280-285). Antwerp: Organizing Committee of the VIth Conference PME.

Clements, D. H., & Samara, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectory Approach.* New York & London: Routledge.

Cortes, A., Vergnaud, G., & Kavafian, N. (1990). From arithmetic to algebra: Negotiating a jump in the learning process. In G. Booker, P. Cobb, & T. d. Mendicuti (Ed.), *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. II*, (pp. 27-34). Mexico: PME.

Dickinson, P., & Eade., F. (2004). Using the number line to investigate the solving of linear equations. *For the Learning of Mathematics*, 24(2), 41-47.

Filloy, E., T., R., & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach.* New York: Sringer.

Greeno, J. G. (1982, March). A cognitive learning analysis of algebra. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*. Boston, MA.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. F.Coxford, & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 91-96). VA: NCTM.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner, & C. Kieran (Ed.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in*

Mathematics, 2, 1-36.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2005). Young Children's Ability to Use the balance Strategy to Solve for Unknown. *Mathematical Education Research Journal*, 17(1), 58-72.

Π.Ι. (2011). *Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση (Γυμνάσιο) - Οδηγός για τον εκπαιδευτικό "Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων"*. Αθήνα.

ΣΧΕΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΜΕ ΤΗ GEOGEBRA

[1]Μπούτσκου Λεμονιά, [2]Μακρής Σταμάτης

[1]Γυμνάσιο Αμυνταίου, [2]Εκπαιδευτήρια Καίσαρη Αθήνα

[1]lemonmp3@gmail.com, [2]stamatismakris@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα τελευταία χρόνια δίνεται ολοένα και μεγαλύτερη έμφαση στις μεθόδους διδασκαλίας και παιδαγωγικών προσεγγίσεων των μαθηματικών, προκειμένου να αυξηθεί το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών και να γίνεται καλύτερη αποσαφήνιση και εμπέδωση των μαθηματικών εννοιών (Wong, 2013). Αυτό οφείλεται σε πολύ μεγάλο βαθμό στο γεγονός ότι τα μαθηματικά είναι ένα πολύπλοκο και δυναμικό αντικείμενο, με αποτέλεσμα και η διδασκαλία τους να είναι μία δυναμική διαδικασία (Begg, 2011). Τα λογισμικά που συνδυάζουν την μάθηση των μαθηματικών εννοιών και το παιχνίδι κερδίζουν συνεχώς έδαφος. Ένα από τα πιο γνωστά λογισμικά αυτού του είδους είναι η GeoGebra. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιαστεί και να αναλυθεί η σχέση μαθηματικών και παιχνιδιού, μέσα από το λογισμικό GeoGebra.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ-ΤΠΕ

Τα λογισμικά που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία των μαθηματικών, όπως είναι η GeoGebra, εντάσσονται στο ευρύτερο πεδίο των Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ). Η ένταξη των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία υποστηρίζει νέους τρόπους μάθησης και διδασκαλίας, πιο μαθητοκεντρικούς, τρόπους που εμπλουτίζουν τις μαθησιακές εμπειρίες και τις μαθησιακές δυνατότητες, αναθεωρώντας το αναλυτικό πρόγραμμα και ανεβάζοντας τα μαθησιακά στάνταρτ (Yang, 2012; Hammond, 2013). Ο κύριος στόχος της ένταξης των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην εκπαιδευτική διαδικασία είναι η δημιουργία ενός νέου μοντέλου μάθησης, το οποίο αποσκοπεί στην απόκτηση γνώσης και είναι μαθητοκεντρικό (Γκούφας, 2007).

Οι ΤΠΕ που συμβάλλουν στην εκμάθηση φυσικών επιστημών και ειδικότερα μαθηματικών εννοιών εντάσσονται στο ευρύτερο πλαίσιο του gamification. Ο όρος gamification περιγράφει τη δημιουργία ευχάριστων εμπειριών με σκοπό την κινητοποίηση των ατόμων (Kuo, 2013). Ουσιαστικά πρόκειται για την τεχνολογία εκείνη που ενσωματώνει στοιχεία παιχνιδιών σε δραστηριότητες που δεν εντάσσονται καθαρά στην έννοια ‘παιχνίδι’, αλλά χρησιμοποιείται για να εμπλέξει τους μαθητές και άλλους χρήστες σε δραστηριότητες μέσω της ανταμοιβής και άλλων μεθόδων παρακίνησης (Prince, 2013). Η έννοια του παιχνιδιού χρησιμοποιείται για να ενισχύσει την εμπειρία που αποκομίζουν οι χρήστες από τη δραστηριότητα στην οποία συμμετέχουν (Becker, 2013). Αρκετοί ερευνητές (Huntley και Flores, 2011; Berger, 2011; Nolan και McBride, 2013; de Freitas και de

Freitas, 2013) υποστηρίζουν ότι τα εκπαιδευτικά παιχνίδια στα οποία οι μαθητές έχουν κάποια ανταμοιβή κατά την επιτυχή απάντησή τους σε ένα ερώτημα, αλλά και εν γένει η ένταξη λογισμικών με παιχνίδια κατά τη διδασκαλία των μαθημάτων και ειδικά των μαθηματικών, έχουν θετική επίδραση στη διαδικασία μάθησης.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ GEOGEBRA

Το GeoGebra είναι ένα από τα πιο δημοφιλή λογισμικά που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Στην περίπτωση της άλγεβρας, ο Ράπτης (2012) αναφέρει ότι το GeoGebra είναι ένα Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας (ΠΔΓ), το οποίο «επιτρέπει στο χρήστη να δημιουργήσει γεωμετρικές κατασκευές παρόμοιες με αυτές που θα έκανε στο χαρτί, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές και αλγεβρικές οντότητες (π.χ. σημεία, ευθείες, ευθύγραμμα τμήματα, κωνικές τομές, γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων κ.ά.) και να τις μεταχειριστεί δυναμικά». Σύμφωνα με τις Sinclair και Yurita (2008, όπως αναφέρονται στον Ράπτη, 2012), «το πιο χαρακτηριστικό γνώρισμα ενός ΠΔΓ είναι ο φαινομενικά συνεχής, εκτελούμενος σε πραγματικό χρόνο μετασχηματισμός που ονομάζεται σύρσιμο (dragging): δηλαδή, όταν τα στοιχεία ενός σχήματος κινούνται, αυτό το χαρακτηριστικό επιτρέπει στην κατασκευή να ανταποκρίνεται δυναμικά στις νέες συνθήκες ενώ διατηρεί τις αμετάβλητες ιδιότητες της δεδομένης κατασκευής. Κατά το σύρσιμο, οι δυναμικές εικόνες στην οθόνη είναι ακριβώς τόσο αυστηρές όσο οι βασικές μαθηματικές ιδιότητες που τις προσδιορίζουν».

Για παράδειγμα, οι Tomiczková και Lávička (2013) αλλά και οι Hall και Chamblee (2013) εξετάζουν στην έρευνά τους την χρήση του GeoGebra στη διδασκαλία τριγωνομετρίας. Οι Tomiczková και Lávička (2013) επισημαίνουν ότι αποτελεί ένα κατάλληλο εργαλείο για τα πρώτα βήματα από την περιγραφική γεωμετρία έως τη γεωμετρική μοντελοποίηση. Επιπλέον, οι ερευνητές επισημαίνουν ότι το λογισμικό GeoGebra υποστηρίζει τη διαδραστική κατασκευή σημείων, γραμμών, τμημάτων. Το πρωταρχικό χαρακτηριστικό του GeoGebra είναι η δυνατότητα που προσφέρει στους μαθητές να αναπαραστήσουν ένα μαθηματικό αντικείμενο τόσο σε αλγεβρική μορφή, όσο και σε γράφημα.

Οι Λεμονίδης και Αποστόλου (2011) εξέτασαν την συμπεριφορά μαθητών Γ΄ γυμνασίου σε αποδείξεις προβλημάτων γεωμετρίας με το πρόγραμμα GeoGebra. Τα αποτελέσματα της έρευνας κατέδειξαν ότι μετά από την χρησιμοποίηση του GeoGebra: α) οι μαθητές απέκτησαν ήδη μετά από τρίωρη διδακτική παρέμβαση την ικανότητα να χρησιμοποιούν το GeoGebra για να δημιουργήσουν με σχετική ευκολία γεωμετρικά σχήματα παρόμοια με αυτά που πρέπει να σχεδιάσουν κατά την συμβατική διδασκαλία της γεωμετρίας, β) η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών προτίμησε την εμπειρική απόδειξη που προσφέρει το περιβάλλον του λογισμικού GeoGebra έναντι της τυπικής μαθηματικής απόδειξης, παρά το γεγονός ότι η πλειοψηφία των μαθητών ήταν εξοικειωμένοι με την τυπική μαθηματική απόδειξη πριν από την χρησιμοποίηση του GeoGebra. Παράλληλα, οι μαθητές μπορούν να

κατανοήσουν πώς η αλλαγή σχημάτων επηρεάζει άλλα σχήματα, ή το ίδιο το σχήμα (Tomiczková και Lávička, 2013). Εκτός από την τριγωνομετρία, το λογισμικό GeoGebra μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλίας άλγεβρας, όπως είναι οι πολυωνυμικές εξισώσεις και συναρτήσεις.

Ωστόσο, θα πρέπει να αναφερθεί και ένας σημαντικός περιορισμός του λογισμικού GeoGebra, που σχετίζεται με την τρισδιάστατη απεικόνιση αντικειμένων. Πιο αναλυτικά, η τρισδιάστατη απεικόνιση στο λογισμικό GeoGebra που αναπτύσσεται αυτόν τον καιρό, δεν επιτρέπει και πάλι σε κάποιον να ξεπεράσει το πρόβλημα που υπάρχει σχετικά με την οπτικοποίηση ορισμένων προβλημάτων, όπως αυτά που σχετίζονται με την κατασκευή επιφανειών (Tomiczková και Lávička, 2013). Παρά τους ενδεχόμενους περιορισμούς, η χρήση του GeoGebra μπορεί να συμβάλλει στην αποτελεσματική κατανόηση και μάθηση των μαθηματικών εννοιών από μέρους των μαθητών, κυρίως μέσα από την συμμετοχή των μαθητών και του μαθητοκεντρικού περιβάλλοντος μάθησης (Kul, 2012). Επίσης, ο Kul (2012) σε έρευνά του που αναφέρεται στην συμμετοχή Τούρκων εκπαιδευτικών σε πρόγραμμα για την χρήση και τα οφέλη από την χρήση του GeoGebra βρήκε ότι οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν οδηγήθηκαν σε αλλαγή της συμπεριφοράς τους απέναντι στα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους.

GEOGEBRA ΚΑΙ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ

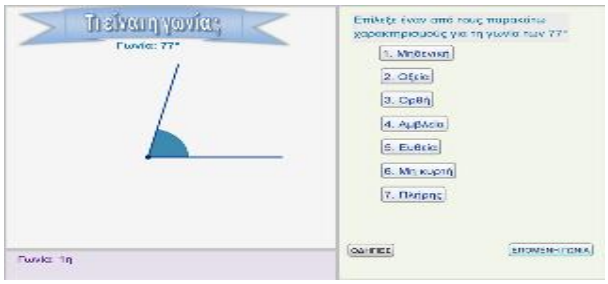
Τα παιχνίδια κατέχουν πρωταρχικό ρόλο στο λογισμικό GeoGebra.

Παιχνίδι 1ο «Αποκάλυψε την εικόνα» Το παιχνίδι αυτό είναι ένας διασκεδαστικός τρόπος για να απαντήσουν οι μαθητές σε ερωτήσεις σχετικές με τις πράξεις των ακεραίων αριθμών.Ο μαθητής επιλέγει κατά σειρά προτίμησης μια από τις εννέα ερωτήσεις και εμφανίζεται η ερώτηση και το πεδίο που θα γράψει την απάντησή του. Αν η απάντησή του είναι σωστή το αντίστοιχο τετράγωνο θα εξαφανιστεί και θα αποκαλύψει ένα μέρος της εικόνας. Σε περίπτωση λάθους απάντησης μπορεί να προσπαθήσει ξανά μέχρι να εισαγάγει τη σωστή απάντηση. Όταν απαντηθούν όλες οι ερωτήσεις αποκαλύπτεται η εικόνα. Το παιχνίδι απευθύνεται σε μαθητές της Α΄καιΒ΄Γυμνασίου.

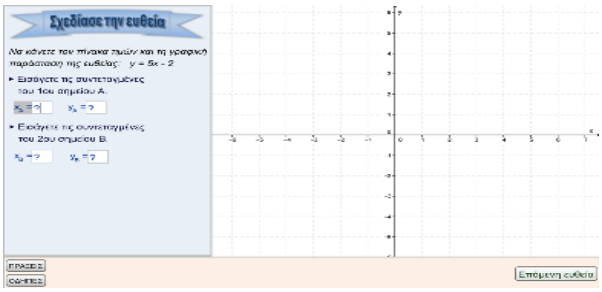


Παιχνίδι 2ο «Χαρακτήρισε τη γωνία» Το παιχνίδι αυτό είναι ένας διασκεδαστικός τρόπος για να εξασκηθούν οι μαθητές στους οκτώ χαρακτηρισμούς που μπορούν να

αποδοθούν σε μια γωνία ανάλογα με το μέτρο της σε μοίρες. Ο υπολογιστής επιλέγει τη γωνία που εμφανίζεται στο αριστερό μέρος της οθόνης και ο μαθητής πρέπει να διαλέξει το σωστό χαρακτηρισμό από το δεξιό μέρος της οθόνης. Για να έχει ενδιαφέρων το παιχνίδι έχει βαθμολογία 10 μονάδες για κάθε σωστή απάντηση και 5 μονάδες αφαιρούνται για κάθε λάθος απάντηση. Το παιχνίδι δεν τελειώνει ποτέ απλά προτείνεται στους μαθητές ως εργασία να μαζέψουν τουλάχιστον 200 βαθμούς. Το παιχνίδι απευθύνεται σε μαθητές της Α΄καιΒ΄Γυμνασίου.



Παιχνίδι 3ο«Σχεδίασε την ευθεία» Σκοπός της δραστηριότητας είναι να βοηθήσει τους μαθητές να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση μιας ευθείας. Ο υπολογιστής επιλέγει μια ευθεία και ο μαθητής πρέπει να εισαγάγει τις τετμημένες και τις τεταγμένες δυο σημείων που πιστεύει ότι ανήκουν στην ευθεία. Κατόπιν κατασκευάζεται ο πίνακας τιμών με τα σημεία που δόθηκαν και αμέσως εμφανίζονται και στο σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν σχεδιάζεται η γραφική παράσταση της ευθείας. Στον έλεγχο που ακολουθεί ο μαθητής μπορεί να διαπιστώσει αν επέλεξε τα σωστά σημεία για την ευθεία ή αν έκανε κάποιο λάθος στις πράξεις. Το παιχνίδι απευθύνεται σε μαθητές της Β΄Γυμνασίου.



ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Μέσω της χρήσης των ΤΠΕ και ειδικότερα του εκπαιδευτικού λογισμικού GeoGebra, τα παιδιά μπορούν καλύτερα να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες. Παρά το γεγονός ότι τα δυναμικά εργαλεία, όπως είναι το GeoGebra και άλλα εκπαιδευτικά

λογισμικά, είναι πιθανό να καταστούν ουσιαστικά βοηθήματα στο σχολικό περιβάλλον για τη διδασκαλία των μαθηματικών, η έλλειψη υλικοτεχνικής υποδομής και ουσιαστικής επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών σχετικά με τα πλεονεκτήματα αυτών των λογισμικών στην εκπαιδευτική διαδικασία και της αποτελεσματικής τους αξιοποίησης μπορεί να αποτελέσουν ανασταλτικό παράγοντα (Hall και Chamblee, 2013). Ωστόσο, κανείς δεν μπορεί να αμφισβητήσει το γεγονός ότι η GeoGebra, όπως και γενικά οι ΤΠΕ και τα εκπαιδευτικά παιχνίδια μπορούν να συμβάλλουν αποτελεσματικά στην ενίσχυση της εκπαιδευτικής διαδικασίας των μαθηματικών, οδηγώντας σε καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και σε αύξηση της αυτοεκτίμησης και των δεξιοτήτων και ικανοτήτων των μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνόγλωσση

Γκούφας, Κ. (2007). ΤΠΕ και Φιλόλογοι: Στάσεις, αντιλήψεις και ανάγκες. 4ο Πανελλήνιο Συνέδριο των Εκπαιδευτικών για τις ΤΠΕ «Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη Διδακτική Πράξη», Σύρος 4-6 Μαΐου 2007, σελ. 1-8. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα www.epyna.gr http://www.epyna.gr/~agialama/synedrio_syros_4/filologoi/207_Goufa.pdf

Λεμονίδης, Χ., Αποστόλου, Χ. (2011). Συμπεριφορές μαθητών Γ΄ Γυμνασίου σε αποδείξεις προβλημάτων γεωμετρίας με το πρόγραμμα Geogebra. Ευκλείδης, Γ΄, 74, 179-195.

Ράπτης, Ν. (2012). 3+1 ψηφιακά εργαλεία που δεν πρέπει να λείπουν από την τάξη των μαθηματικών. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα http://mathedutech.files.wordpress.com/2012/06/mathtools.pdf

Ξενόγλωσση

BECKER, B.W. (2013). GAMIFICATION OF LIBRARY INSTRUCTION. *BEHAVIORAL & SOCIAL SCIENCES LIBRARIAN*, 32(3), 199-202.

Begg, A. (2011). Mathematics 101: reconsidering the axioms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(7), 835-846

Berger, M. (2011). A framework for examining characteristics of computer-based mathematical tasks. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 15(2), 111-123.

de Freitas, A.A., de Freitas, M.M. (2013). Classroom Live: a software-assisted gamification tool. *Computer Science Education*, 23(2), 186-206.

Hall, J., Chamblee, G. (2013). Teaching algebra and geometry with GeoGebra: Preparing pre-service teachers for middle grades/secondary mathematics classrooms. *Computers in the Schools*, 30(1)-2, 12-29.

Hammond, M. (2013). Introducing ICT in schools in England: Rationale and consequences. *British Journal of Educational Technology*, doi:10.1111/bjet.12033.

Huntley, M.A., Flores, A. (2011). Student-Made Games to Learn the History of Mathematics. PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics

Undergraduate Studies, 21(6), 567-576.

Kul, U. (2012). Turkish mathematics teachers' experiences with Geogebra activities: changes in beliefs. *Research in Mathematics Education*, 14(3), 293-294.

Kuo, I. (2013). Jese Schell: Games will lead the future of engagement with pleasure. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα http://www.gamification.co/2013/11/07/jesse-schell-gsummit-sf-2013/

Nolan, J., McBride, M. (2013). Beyond gamification: reconceptualizing game-based learning in early childhood environments. *Information, Communication & Society*, DOI: 10.1080/1369118X.2013.808365.

PRINCE, J.D. (2013). GAMIFICATION. *JOURNAL OF ELECTRONIC RESOURCES IN MEDICAL LIBRARIES*, 10(3), 162-169.

Tomiczková, S., Lávička, M. (2013). Computer-aided descriptive geometry teaching. *Computers in the Schools*, 30(1-2), 48-60.

Yang, H. (2012). ICT in English schools: transforming education?. *Technology, Pedagogy and Education*, 21(1), 101-118.

Wong, A. (2013). Modularizing Remedial Mathematics. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 23(3), 257-273.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2Χ2

Αντωνιάδου Μυροφόρα
4ο ΓΕΛ Κοζάνης
e-mail: myroanto@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διδακτική πρόταση, που αναπτύσσεται στη συνέχεια, αφορά τη γραφική λύση ενός γραμμικού ή μη γραμμικού συστήματος 2x2, με τη χρήση των ΤΠΕ. Εφαρμόζεται στο εργαστήριο Η/Υ με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra και απευθύνεται στους μαθητές της Β΄ Λυκείου. Πρόκειται για μια διδακτική παρέμβαση που στοχεύει, μεταξύ άλλων, να συμβάλει και στην βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους.

Το Σκεπτικό

Η βασική ιδέα της πρότασης είναι η σύνδεση ενός συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (2x2) με τη γεωμετρική του αναπαράσταση με στόχο να μάθουν οι μαθητές να λύνουν ένα σύστημα 2x2 με έναν σύντομο τρόπο, που βέβαια είναι έγκυρος από μαθηματική άποψη.

Η προτεινόμενη διδακτική παρέμβαση, με τη χρήση των Τ.Π.Ε., αποτελεί καινοτομία στο παραδοσιακό πλαίσιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών διότι, με τα ειδικά ψηφιακά εργαλεία, ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να «κάνει μαθηματικά» με τρόπους, που ήταν αδύνατο με τα προ–τεχνολογικά μέσα του χαρτιού, του μολυβιού, του χάρακα και του μοιρογνωμονίου (Κυνηγός, 2006). Επί πλέον, η τεχνολογία μπορεί να υποστηρίξει την καλλιέργεια δεξιοτήτων (όπως: αναζήτηση, αμφισβήτηση, ανακάλυψη, συνεργασία, επικοινωνία, διαπραγμάτευση) που ενισχύουν τη μαθησιακή διαδικασία και που παράλληλα διαφαίνεται ότι θα είναι κρίσιμες για την Κοινωνία της Πληροφορίας (Κυνηγός, 1995).

Οι μαθητές, με τη χρήση των τεχνολογικών εργαλείων, αναμένεται να συνειδητοποιήσουν ότι τα μαθηματικά μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης και μάλιστα ο κάθε μαθητής μπορεί να δοκιμάσει στο πλαίσιο αυτό τις δικές του ιδέες και να καταλήξει σε συμπεράσματα ευρείας αποδοχής, γεγονός που θα συμβάλει και στην αλλαγή – βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους.

Το λογισμικό GeoGebra, που έχει επιλεγεί για τη συγκεκριμένη παρέμβαση, παρέχει την ευχέρεια των πολλαπλών, δυναμικά συνδεδεμένων παραστάσεων με τις οποίες προβάλλονται συγχρόνως η γεωμετρική και η αλγεβρική λύση με τη μέθοδο των οριζουσών, γεγονός που θεωρείται ιδιαίτερα χρήσιμο στην παρούσα φάση.

Διδακτικοί στόχοι

Ως προς το γνωστικό αντικείμενο:

- Να συνδέσουν τη γραφική με την αλγεβρική λύση του συστήματος
- Να διερευνήσουν γραφικά την ύπαρξη ή όχι λύσης ενός συστήματος 2x2
- Να συνδέσουν τα πηλίκα Dx/D και Dy/D με τις συντεταγμένες των σημείων τομής των ευθειών και να διερευνήσουν το ρόλο των D, Dx, Dy σε σχέση με την ύπαρξη και το είδος των λύσεων ενός γραμμικού παραμετρικού συστήματος 2x2
- Να μάθουν να βρίσκουν τη λύση οποιουδήποτε συστήματος 2x2.

Ως προς τη μαθησιακή διαδικασία.

- Να αναπτύσσουν εικασίες και υποθέσεις σχετικές με τις διδασκόμενες έννοιες και διαδικασίες και βέβαια να ελέγχουν την ορθότητά των δεδομένων και των συλλογισμών τους
- Να συζητούν τις παρατηρήσεις τους, να οργανώνουν τις σκέψεις τους και να επιχειρηματολογούν για τα συμπεράσματά τους
- Να συμμετέχουν σε διάλογο και να ανταλλάσουν ιδέες και εκτιμήσεις, οικοδομώντας κώδικες επικοινωνίας ώστε να γίνονται αντιληπτοί από τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας, από τους συμμαθητές τους και από τον καθηγητή τους.

Διδακτική προσέγγιση – Οργάνωση της τάξης

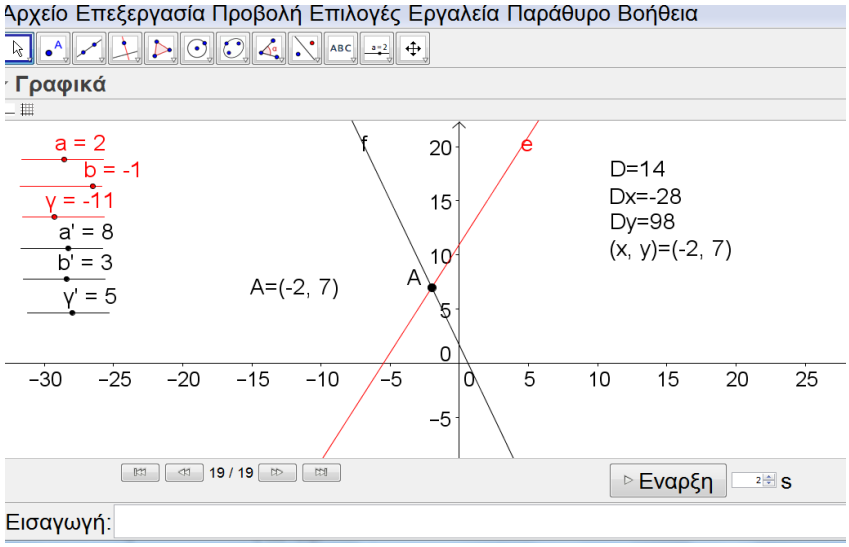
Η παρούσα διδακτική πρόταση εφαρμόζεται στο εργαστήριο Η/Υ με τη χρήση του λογισμικού GeoGebra. Οι μαθητές εργάζονται συνεργατικά σε μεικτές ομάδες 2-3 ατόμων και οι ρόλοι τους εναλλάσσονται τακτικά. Ο χωρισμός των μαθητών σε ολιγομελείς ομάδες έχει ερευνητικά αποδειχθεί ότι αξιοποιεί με τον καλύτερο τρόπο τη δυναμική των μαθητών για τη διερευνητική κατά κανόνα επεξεργασία του διδακτικού υλικού. (Ματσαγγούρας, 2002). Ακόμη, στα πλαίσια των ομάδων μεικτής ικανότητας, και οι «λιγότερο ικανοί μαθητές» βρίσκουν καινούριο ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία και συμμετέχουν χωρίς να αισθάνονται παραγκωνισμένοι. Στην παραδοσιακή διδασκαλία οι μαθητές αυτοί θα είχαν πολύ λιγότερες ευκαιρίες να εμπλακούν ενεργά, με αποτέλεσμα να παρέμεναν ακροατές. (Κίτσου, 2008).

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου, ο εκπαιδευτικός παρακολουθεί τις ομάδες, ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, συνεργάζεται μαζί τους, τους καθοδηγεί ώστε να αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους, τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση, προκαλεί συζητήσεις σ' όλη την τάξη, διευκολύνοντας την επιχειρηματολογία, όταν θεωρεί ότι τα συμπεράσματα κάποιων ομάδων θα είναι χρήσιμα για τη διερεύνηση και των υπολοίπων. Σκοπός του είναι να ενθαρρύνει όλους τους μαθητές να συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία της μάθησης και να ολοκληρώσουν με επιτυχία τις επί μέρους δραστηριότητες.

Δομή Διδασκαλίας – Περιγραφή των Δραστηριοτήτων

I. Λύση και διερεύνηση γραμμικού συστήματος 2x2

Αρχικά ζητείτε από τους μαθητές να ανοίξουν ένα προϋπάρχον αρχείο GeoGebra. Στην οθόνη του υπολογιστή προβάλλονται 6 μεταβολείς α,b,γ, α΄, b΄ και γ΄, δύο ευθείες f και e και το σημείο τομής τους Α. Εμφανίζονται επί πλέον οι τιμές των οριζουσών Dx, Dy και οι λόγοι Dx/D, Dy/D.



Στη συνέχεια καλούνται να αλλάξουν τις τιμές των μεταβολέων της ευθείας e (α, b, γ) και να παρατηρήσουν πως μεταβάλλεται η ευθεία. Σκοπός είναι να αντιληφθούν τη συμπεριφορά της ευθείας όταν αλλάζουν οι συντελεστές α και b και ο σταθερός όρος. Οι μαθητές εδώ θα παρατηρήσουν ότι η ευθεία περιστρέφεται όταν αλλάζουν οι τιμές των α, b ενώ μεταφέρεται όταν αλλάζει το γ. Μετά τους ζητείται να κάνουν το ίδιο με τις τιμές των συντελεστών των εξισώσεων των δύο ευθειών και να βρουν τη σχετική τους θέση σε κάθε περίπτωση.

Τέλος ζητείται να μεταβάλλουν τις τιμές των a, b, γ και a΄, b΄, γ΄ ώστε να συμπίπτουν με τους συντελεστές των συστημάτων:

$$\Sigma_1\begin{cases}2x+3y=3\\4x-9y=1\end{cases} \qquad \Sigma_2\begin{cases}x+2y=3\\2x+4y=-5\end{cases} \qquad \text{και} \qquad \Sigma_3\begin{cases}2x-y=1\\4x-2y=2\end{cases}$$

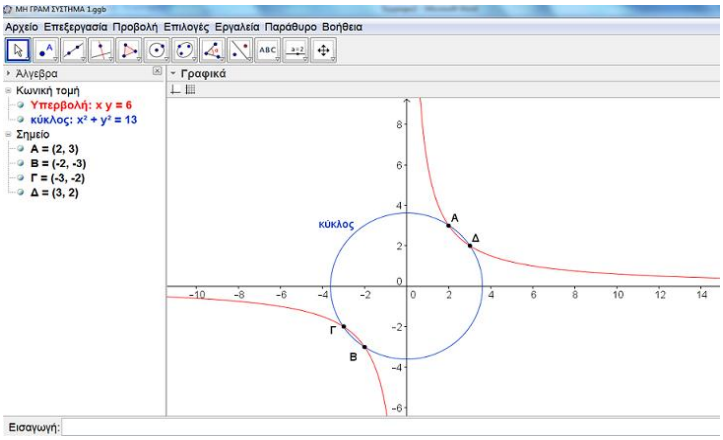
και με οδηγό τη λύση τους και τα προηγούμενα συμπεράσματά τους να διερευνήσουν ένα γραμμικό σύστημα 2x2

Ενδεικτικά ερωτήματα: Ποιες είναι οι εξισώσεις των δύο ευθειών; Τι παριστάνει το σημείο τομής τους; Πως μπορούμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με τη βοήθεια των μεταβολέων; Τι σχέση έχουν οι συντεταγμένες του σημείου τομής με τις ποσότητες Dx/D, Dy/D;

Με τη δραστηριότητα αυτή αναμένεται οι μαθητές να δημιουργήσουν ένα αλγόριθμο λύσης του συστήματος της μορφής.

Μεταβολείς a, b, γ $\Longrightarrow$ Μεταβολείς a΄, b΄, γ΄ $\Longrightarrow$ Σημείο τομής $\Longrightarrow$ Λύση

II. Λύση και διερεύνηση μη γραμμικού συστήματος 2x2



Ζητείται από τους μαθητές να ανοίξουν ένα έτοιμο αρχείο GeoGebra. Στην οθόνη του υπολογιστή προβάλλεται η γραφική λύση ενός μη γραμμικού συστήματος 2x2 όπως φαίνεται δίπλα. Σε πρώτη φάση καλούνται να συγκρίνουν την γραφική λύση με την αντίστοιχη αλγεβρική, που ήδη υπολόγισαν. Να σχολιάσουν και να αιτιολογήσουν το είδος των γραμμών και το πλήθος των λύσεων.

Σε δεύτερη φάση ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να εισάγουν τις εξισώσεις του συστήματος $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$ σε ένα νέο περιβάλλον του GeoGebra, να βρουν τα σημεία τομής των γραμμών -γραφική λύση του συστήματος- και να τη συγκρίνουν με την αντίστοιχη αλγεβρική.

Στο τέλος της δραστηριότητας οι παρατηρήσεις των μαθητών συζητούνται στην τάξη με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, ώστε να καταλήξουν σε γενικευμένη διαδικασία γραφικής επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων.

Σχόλια για την αποτελεσματικότητα της παρέμβασης

Η παρέμβαση, που προτείνεται διδάχθηκε ως εφαρμογή μετά το τέλος της αλγεβρικής λύσης, μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί, με μικρές τροποποιήσεις στο φύλλο εργασίας και ως εισαγωγική δραστηριότητα. Στη δεύτερη περίπτωση οι μαθητές θα αναπτύξουν εικασίες για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να λυθεί ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με τη μέθοδο των οριζουσών ή ένα μη γραμμικό σύστημα.

Κατά την πραγματοποίηση της διδασκαλίας προέκυψαν μικροπροβλήματα, που οφείλονταν κυρίως στο διαφορετικό βαθμό εξοικείωσης των μαθητών με το λογισμικό, τα οποία όμως ξεπεράστηκαν γρήγορα. Η συμμετοχή των μαθητών ήταν ιδιαίτερα αυξημένη. Όλοι έδειξαν ενδιαφέρον, συμμετείχαν στις συζητήσεις, απάντησαν στις ερωτήσεις, προσπάθησαν και τελικά κατάφεραν, στο μέτρο του δυνατού, να ολοκληρώσουν τις δραστηριότητές τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Επιμορφωτικό Υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα ΚΣΕ (2010). *Τεύχος 4, Κλάδος ΠΕ03*, Πάτρα, ΕΑΙΤΥ.

Κίτσου Στ. (2008). *Η διερεύνηση της έννοιας της γωνίας με τη βοήθεια ενός ψηφιακού εργαλείου τρισδιάστατων αναπαραστάσεων*, Διπλωματική εργασία,

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Π. Μ. Σ., "ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ", Αθήνα.

Κυνηγός, Χ. (1995). *Η ευκαιρία που δεν πρέπει να χαθεί: Η υπολογιστική τεχνολογία ως εργαλείο έκφρασης και διερεύνησης στη γενική παιδεία*. Στο Καζαμίας, Α. & Κασσωτάκης Μ., *Ελληνική Εκπαίδευση: Προοπτικές ανασυγκρότησης και εκσυγχρονισμού*, σ.396-416, Αθήνα, Σείριος.

Κυνηγός, Χ. (2006). *Το μάθημα της διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών. Από την έρευνα στη σχολική τάξη*. Αθήνα, Ελληνικά Γράμματα.

Ματσαγγούρας, Η. (2002). *Στρατηγικές διδασκαλίας. Η κριτική σκέψη στη διδακτική πράξη*. Αθήνα, Gutenberg.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2011). *Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση, Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων»*, Αθήνα.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ NIM

[1]**Αρδαβάνη Καλλιόπη – [2]Μαυρουδής Σπυρίδων**
Επιμορφωτές Β΄ επιπέδου
[1]popiardv@hotmail.com, [2]smayroudis@sch.gr

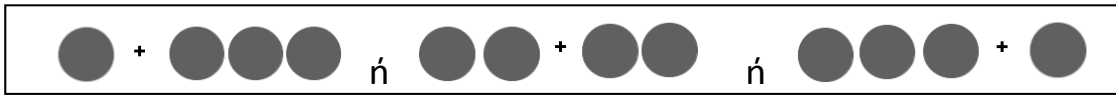
ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι μαθητές προσπαθούν συνεργαζόμενοι μέσα από παιγνιώδεις δραστηριότητες να εφαρμόσουν στρατηγικές για να ανακαλύψουν κανονικότητες που κρύβονται στο παιχνίδι NIM και να τις συνδέσουν με μαθηματικές έννοιες, αλλά και να δημιουργήσουν το δικό τους παιχνίδι.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εδώ και αρκετές δεκαετίες, η έρευνα στο χώρο της διδακτικής μαθηματικών έδειξε, ότι οι στάσεις των μαθητών προς τα Μαθηματικά είναι σχεδόν το ίδιο σημαντικές με τη γνωστική μάθηση στα Μαθηματικά (Φιλίππου, Χρίστου, 2001). Η αναζήτηση διδακτικών μεθόδων που θα βοηθούσαν τους μαθητές να αναπτύξουν θετικές στάσεις απέναντι στα μαθηματικά, οδήγησε στην εισαγωγή διερευνητικών και συνεργατικών δραστηριοτήτων, μέσα από διαδικασίες ελκυστικές, δημιουργικές, χωρίς ανιαρές πράξεις, με τρόπο παιγνιώδη (Φιλίππου, Χρίστου, 2004). Ειδικότερα, η αξιοποίηση παιγνιωδών δραστηριοτήτων, μπορεί να αναπτύξει τη μαθηματική επικοινωνία καθώς οι μαθητές προσπαθούν να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν τους κανόνες, να καταστρώσουν τις στρατηγικές τους και να εξηγήσουν τις κινήσεις τους ο ένας στον άλλο. Η ανακάλυψη των μαθηματικών που είναι ενσωματωμένα στο παιχνίδι, γίνεται μέσα από μια διαδικασία που παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για τους μαθητές, διότι έχουν ως κίνητρο την προσπάθειά τους για νίκη. Με αυτό το σκεπτικό, θελήσαμε να δοκιμάσουμε σε σχολική τάξη μαθητών Β΄ Γυμνασίου, μια παιγνιώδη δραστηριότητα, με βασικό γνωστικό στόχο την ανάδυση συναρτησιακών σχέσεων μέσα από την παρατήρηση κανονικοτήτων. Η δραστηριότητα πραγματοποιήθηκε στην ενότητα $\psi=\alpha x+\beta$, της οποίας τη γραφική παράσταση είχαν ήδη κατασκευάσει στο προηγούμενο μάθημα με τη βοήθεια της $\psi=\alpha x$. Πρόκειται για ένα πανάρχαιο παιχνίδι ίσως από την Κίνα, με πολλές παραλλαγές (Vorderman, 1998), που δεν μπορεί ποτέ να είναι ισόπαλο. Αν ο δεύτερος παίκτης παίζει στρατηγικά, μπορεί πάντα να κερδίζει. Πώς; Ας περιγράψουμε την αναμενόμενη διαδικασία σε σχολική τάξη (μπορεί να παιχτεί και σε διαδραστικό πίνακα ή μέσω λογισμικού).

1η φάση: Γνωριμία με το παιχνίδι. Οι μαθητές χωρίζονται σε δυάδες, απλώνουν σε ένα τραπέζι 21 αντικείμενα σε στοίβα ή σε γραμμή φιδάκι και παίζοντας εναλλάξ μπορούν να πάρουν κάθε φορά 1, 2 ή 3 από αυτά. Όποιος πάρει το τελευταίο, χάνει. Ο εκπαιδευτικός παρακολουθεί την εξέλιξη των παιχνιδιών και όταν βεβαιωθεί ότι οι



Εικόνα 1: οι κινήσεις του δεύτερου παίχτη που του δίνουν τη νίκη

μαθητές κατανόησαν τους κανόνες, τους προκαλεί ότι μπορεί να παίζει δεύτερος και να κερδίζει (εικ1).

2η φάση: Πρόκληση εκπαιδευτικού. Ο εκπαιδευτικός παίζει ως δεύτερος. Οι μαθητές ως πρώτοι επιλέγουν 1, 2 ή 3 αντικείμενα και στο τέλος κερδίζει πάντα ο εκπαιδευτικός. Αρκετοί μαθητές βρίσκουν ότι οι συνδυασμοί είναι (1,3) ή (2,2) ή (3,1) και παρατηρούν ότι το άθροισμα των αντικειμένων που επιλέγει ο πρώτος και ο δεύτερος είναι πάντα 4.

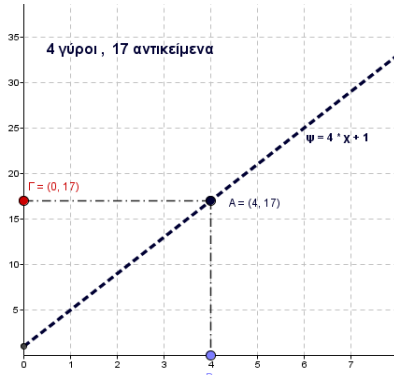
3η φάση: Παιχνίδι με δεύτερο έναν μαθητή. Ο μαθητής που ισχυρίζεται ότι κατάλαβε πώς να κερδίζει, παίζει δεύτερος και ο εκπαιδευτικός πρώτος. Ο εκπαιδευτικός σε πρώτη ευκαιρία αρπάζει από τον μαθητή την νίκη: Αν ο πρώτος πάρει 1 αντικείμενο και ο 2ος παίκτης 1, δηλ. λιγότερα από 3, τότε ο πρώτος συμπληρώνει την τετράδα παίρνοντας 2 αντικείμενα (1+1+2=4) και τότε ο δεύτερος παίρνει τη θέση του πρώτου και ο πρώτος του δεύτερου και ο παίκτης που ξεκίνησε πρώτος χάνει. Το παιχνίδι επαναλαμβάνεται 2-3 φορές μέχρι να βεβαιωθούν πώς θα κερδίσουν ως δεύτεροι.

4η φάση: Εξήγηση του παιχνιδιού. Οι μαθητές προσπαθούν να βρουν γιατί πρέπει ο δεύτερος παίκτης να συμπληρώνει μία τετράδα με τα αντικείμενα που παίρνει. Μερικοί σκέφτονται ότι ο δεύτερος θα πρέπει να αφήσει στον τελευταίο γύρο ένα αντικείμενο για τον πρώτο παίκτη. Άρα μέχρι τότε θα έχουν πάρει και οι δύο τα είκοσι αντικείμενα. Αν ο πρώτος πάρει 1 ή 2 ή 3 αντικείμενα, ο δεύτερος πρέπει να πάρει αντίστοιχα 3 ή 2 ή 1. Οπότε θα παίξουν 5 γύρους, σε κάθε γύρο θα έχουν πάρει 4 αντικείμενα, συνολικά 4*5=20 και έτσι ο πρώτος παίκτης που θα παίξει τελευταίος θα πάρει το τελευταίο μοναδικό αντικείμενο και θα χάσει (δηλαδή 21=4*5+1).

Η εφαρμογή του παιχνιδιού NIM στο σχολείο

Οι μαθητές μας έπαιξαν το παιχνίδι και προχώρησαν σε παρατηρήσεις και ευρήματα, όπως περιγράφεται παραπάνω. Μια ενδιαφέρουσα απάντηση που έδωσε στη 2η φάση ο μαθητής Κ, ήταν ότι το πλήθος των αντικειμένων είναι της μορφής χ+ψ=4, με χ: τα αντικείμενα που παίρνει ο πρώτος παίκτης και ψ: τα αντικείμενα που παίρνει ο δεύτερος. Σε ερώτηση του καθηγητή ποιες τιμές μπορεί να παίρνει το χ και ποιες το ψ συμπλήρωσε ότι οι τιμές του χ μπορεί να είναι 1, 2 ή 3 ενώ του ψ 3, 2 ή 1 αντίστοιχα. Μερικοί μαθητές αναρωτήθηκαν αν μπορούν να φτιάξουν ένα δικό τους παιχνίδι. Ο καθηγητής ζήτησε τότε από τους μαθητές να δοκιμάσουν να φτιάξουν μια δική τους παραλλαγή αλλάζοντας το συνολικό αριθμό αντικειμένων του παιχνιδιού, αφήνοντας τους ίδιους κανόνες έτσι ώστε πάντα να κερδίζει ο δεύτερος. Οι μαθητές εξέτασαν αν θα μπορούσε να παιχτεί το παιχνίδι με 1 λιγότερο ή 1 περισσότερα αντικείμενα. Μετά από υπολογισμούς, αποφάσισαν πολύ γρήγορα ότι δεν παίζεται με 20 ούτε με 22 αντικείμενα. Ακολούθησε ένας χείμαρρος αριθμών. Πρότειναν τους 25, 29, 33, 37, 41, 45 τους 9 και 5, 6, 7, καθώς και τους αριθμούς 52, 57, 23, 31, 24.

Ο καθηγητής ρώτησε: Υπάρχει πίσω από όλα αυτά τα νούμερα που βρήκατε κάποιος κανόνας; Πώς θα ελέγξουμε όλα αυτά τα νούμερα που φέρατε; Θα πρέπει να παίξουμε ένα παιχνίδι για καθένα από αυτά; Μήπως να ψάξουμε για έναν κανόνα; Γρήγορα διαπίστωσαν ότι τα αντικείμενα πρέπει να είναι μόνο 1 περισσότερο από κάποιο πολλαπλάσιο του 4. Με το κριτήριο αυτό, οι μαθητές Α, Μ και Β επέλεξαν τους αριθμούς 25, 29, 33, 37, 41, 45 και 57. Ο μαθητής Κ είπε ότι μπορούν να βρίσκουν πολλούς τέτοιους αριθμούς ψ εφαρμόζοντας τον τύπο ψ=4χ+1, όπου χ μπορεί να είναι φυσικός αριθμός δικής τους επιλογής.



Εικόνα 2: Η ευθεία σημεία της οποίας συνδέουν το πλήθος των "γύρων" του παιχνιδιού και το πλήθος των αντικειμένων

Προβληματίσθηκαν με την νέα ερώτηση του καθηγητή: Υπάρχει άλλος τρόπος να βρίσκουν τον αριθμό αντικειμένων του παιχνιδιού; Ο Κ ο Φ και η Α πρότειναν να βρουν τους αριθμούς από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ=4χ+1, όπου χ είναι ένας φυσικός αριθμός. Δοκίμασαν σε χαρτί μιλιμετρέ τη γραφική παράσταση της ευθείας και βρήκαν πολλά σημεία της που έχουν τετμημένη ακέραιο αριθμό (η αντίστοιχη τεταγμένη τους είναι ο αριθμός των αντικειμένων που αναζητούσαν). Μερικοί νέοι αριθμοί ήταν οι 77, 81, 85, 89. Εξέτασαν τι σημαίνει ο αριθμός χ στο παιχνίδι και απάντησαν ότι οι γύροι του παιχνιδιού θα είναι τόσοι όσοι και ο αριθμός χ, δηλαδή στις προηγούμενες περιπτώσεις θα παίξουν 19, 20, 21, 22 γύρους αντίστοιχα. Ακολούθησαν ερωτήματα όπως: Ποια είναι η κλίση της ευθείας ψ=4χ+1 και ποια η σχέση της με το παιχνίδι; Πώς θα επηρέαζε το παιχνίδι η αλλαγή της κλίσης της ευθείας σε 5; Οι περισσότεροι απάντησαν στο πρώτο ερώτημα και οι μαθητές Β, Κ και Α αποφάσισαν ότι πρέπει να τροποποιήσουν τους κανόνες του παιχνιδιού, όταν η κλίση της ευθείας γίνει 5. Είχαν καταφέρει να συνδέσουν τη κλίση της ευθείας με το παιχνίδι αφού είπαν ότι οι παίκτες μπορούν να παίρνουν 1, 2, 3 ή 4 αντικείμενα. Οι υπόλοιποι συμφώνησαν και υπέδειξαν ότι τότε θα αλλάξει και ο αριθμός αντικειμένων σύμφωνα με τη σχέση ψ=5χ+1. Βρήκαν έναν τέτοιο αριθμό και ζήτησαν να παίξουν, αυτό το δικό τους παιχνίδι.

1ος παίχτης και αναμενόμενος νικητής.	2ος παίχτης
1	1 ή 2 ή 3
3,2,1 αντίστοιχα	Αν πάρει 3
Το	Αν πάρει 2

Για να αναστοχαστούν οι μαθητές πάνω στο πρόβλημα, στο τέλος του μαθήματος τέθηκε το ερώτημα: μπορείτε να δημιουργήσετε ένα σχετικό παιχνίδι που να κερδίζει πάντα ο πρώτος με ίδιους αρχικούς κανόνες; Μια ομάδα μαθητών στο επόμενο μάθημα πρότεινε να γίνουν 22 τα αντικείμενα και να παίξουν όπως φαίνεται στον πίνακα 1.

συμπλήρωμα του 3 ως προς το 4 δηλαδή 1	
2	Αν πάρει 1
3	22-1-(5*4)=1 τελευταίος ο δεύτερος άρα νικητής ο πρώτος

Πίνακας 1: κινήσεις που δίνουν την νίκη στο πρώτο παίχτη με 22 αντικείμενα

Οι διδακτικοί στόχοι είναι ποικίλοι και παρουσιάζουν μια δυναμική, καθώς τα ευρήματα των μαθητών στη διάρκεια του μαθήματος μπορούν να επαναπροσδιορίσουν τη στοχοθεσία του εκπαιδευτικού: Αρχικό ζητούμενο είναι η άσκηση της παρατηρητικότητας των μαθητών ώστε να αντιληφθούν ότι τα ζεύγη αριθμών με τα οποία κερδίζει ο δεύτερος παίκτης έχουν σταθερό άθροισμα 4, καθώς και οι εξηγήσεις που θα δώσουν. Επόμενος στόχος είναι να ανακαλύψουν τη σχέση $\psi=4\chi+1$, χ φυσικός, που ικανοποιούν οι αριθμοί των αντικειμένων παραλλαγών του παιχνιδιού και να βρίσκουν κι άλλους τέτοιους αριθμούς από τη γραφική παράσταση της ευθείας. Στη συνέχεια, η στοχοθεσία μπορεί να εστιασθεί στη σύνδεση του αριθμού των γύρων του παιχνιδιού με την τετμημένη χ σημείου της γραφικής παράστασης της ευθείας και στην εξήγησή της, καθώς και στη συσχέτιση της κλίσης της ευθείας με τον αριθμό 4. Η αλλαγή των κανόνων του παιχνιδιού και του αριθμού των αντικειμένων μπορεί να συσχετισθεί με την νέα κλίση της γραφικής παράστασης της ευθείας.

Συνοψίζοντας, η εφαρμογή του παιχνιδιού παρείχε ένα παράδειγμα της σημασίας εξεύρεσης και αξιοποίησης παιγνιωδών δραστηριοτήτων στη διδασκαλία, με τις οποίες οι μαθητές προσεγγίζουν τις ενσωματωμένες σε αυτές μαθηματικές έννοιες, αναπτύσσοντας συνεργατικές στρατηγικές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Φιλίππου, Γ., Χρίστου, Κ. (2001). *Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των Μαθηματικών*, Αθήνα: Ατραπός

Vorderman, C. (1998). *Ανακαλύπτω τα Μαθηματικά*, Αθήνα: Ερευνητές

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΘΑΛΗ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ

Γιαμαρέλου Μαρία[1], Πάλλα Μαρίνα[2] και Σκαλοχωρίτου Γεωργία[1]

[1]Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Μυτιλήνης του Πανεπιστημίου Αιγαίου

[2]Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών Ν. Λέσβου

giamarel@env.aegean.gr, marinapalla1@gmail.com, gskaloxoritou@aegean.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα πλαίσια του μαθήματος της Γεωμετρίας της Β' τάξης Γενικού Λυκείου, διδάχθηκε με τη χρήση νέων τεχνολογιών το Θεώρημα του Θαλή. Οι μαθητές αρχικά ενεργοποιήθηκαν με τη προβολή βίντεο όπου παρουσιάστηκαν χαρακτηριστικές περιπτώσεις εφαρμογής του Θεωρήματος σε διάφορες πτυχές της ζωής και της επιστήμης. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια κατάλληλων δραστηριοτήτων και φύλλων εργασίας, κατασκεύασαν σχήματα, έκαναν μετρήσεις και διατύπωσαν εικασίες ωσότου τελικά να ανακαλύψουν και να κατανοήσουν το Θεώρημα καθώς και τα πορίσματα που απορρέουν από αυτό. Η πλειοψηφία των μαθητών που συμμετείχαν στη διδασκαλία θεώρησε, ότι ο διαδραστικός και συνεργατικός τρόπος διδασκαλίας και μάθησης είναι πιο ευχάριστος, πιο αποδοτικός στην κατανόηση των εννοιών και τους κινητοποιεί περισσότερο από ότι η μετωπική διδασκαλία.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι το Θεώρημα του Θαλή. Η διδασκαλία του, όμως, μόνο με τα στατικά μέσα της μετωπικής διδασκαλίας αφενός δεν επιτρέπει να φανεί η χρησιμότητα του θεωρήματος και αφετέρου δε δίνει τη δυνατότητα της ενεργής συμμετοχής όλων των μαθητών. Το σχολείο καλείται να καλλιεργήσει νέες γνωστικές και κοινωνικές δεξιότητες των μαθητών, να δημιουργήσει νέα κίνητρα και να τους ωθήσει στο να βλέπουν τα πράγματα από ευρύτερη οπτική γωνία. Η ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες, αξιοποιώντας την τεχνολογία, δίνει την ευκαιρία αυτοδιαχείρισης στη μάθηση, αυτενέργειας, εμπλοκής σε αυθεντικές καταστάσεις και προβλήματα, εποικοδομητικής αμφισβήτησης και κριτικής, επικοινωνίας και συνεργασίας, δημιουργίας και πειραματισμού. Ο δάσκαλος, όμως, πρέπει να είναι πολύ προσεκτικός στην επιλογή του περιβάλλοντος και των δραστηριοτήτων που επιλέγει (Κολέζα, 2000). Η ένταξη της τεχνολογίας στη διδασκαλία πρέπει να στοχεύει στη βελτίωση της παιδαγωγικής πρακτικής όχι μόνο ποσοτικά, αλλά κυρίως ποιοτικά, ενθαρρύνοντας την ενεργητική σκέψη, τις πρωτοβουλίες και τη δημιουργική συνεργασία για μια επαγωγική προσέγγιση της γνώσης. Ο υπολογιστής δεν αποτελεί αντικείμενο μάθησης αλλά εργαλείο παρατήρησης, έκφρασης και διερεύνησης των εμπλεκόμενων μαθηματικών εννοιών (Αργύρης, 2002).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- **Μαθητές:** Το σενάριο διδασκαλίας απευθύνθηκε σε 20 μαθητές της Β΄ Λυκείου.
- **Χρόνος υλοποίησης:** Για την υλοποίηση απαιτήθηκαν 3 διδακτικές ώρες.
- **Χώρος υλοποίησης:** Η διδασκαλία διεξήχθη στο εργαστήριο πληροφορικής, όπου υπάρχει διαδραστικός πίνακας. Δόθηκε φύλλο εργασίας με στόχο την καθοδήγηση των μαθητών στη διερεύνηση του θέματος με το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra, στο οποίο οι μαθητές μπορούσαν να καταγράφουν τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματά τους.
- **Προαπαιτούμενες γνώσεις**: Οι μαθητές ήταν απαραίτητο να γνωρίζουν πότε δυο ευθείες είναι παράλληλες, να επιλύουν απλές εξισώσεις και να έχουν βασικές γνώσεις του λογισμικού.
- **Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης**: Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες των δύο ή τριών ατόμων. Η οργάνωση αυτή θεωρήθηκε απαραίτητη γιατί ο πειραματισμός με τα δυναμικά σχήματα εμπεριέχει στοιχεία διερευνητικής μάθησης με το μαθητή στη θέση του ερευνητή, συνεπώς η συνεργασία με τους άλλους μαθητές της ομάδας, όχι μόνο ήταν καταλυτική στην εξαγωγή συμπερασμάτων αλλά, επιπλέον, δίδαξε στους μαθητές την αξία της ομαδικής συνεργασίας. Η διδάσκουσα περιφερόταν από ομάδα σε ομάδα παρακολουθώντας την πορεία της διερεύνησης, καταγράφοντας και επιλύοντας δυσκολίες και απορίες, συμβουλεύοντας και ενθαρρύνοντάς τους.

ΣΤΟΧΟΙ ΤΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Α) Διδακτικοί και γνωστικοί στόχοι: Οι μαθητές:

- να γνωρίσουν βασικές ιστορικές γνώσεις για τον Θαλή, το Θεώρημά του και τις εφαρμογές αυτού από την αρχαιότητα, καθώς και να μπορούν να αναγνωρίζουν την έννοια σε φυσικές καταστάσεις,
- να μπορούν να κάνουν την σύνδεσή της με προηγούμενες έννοιες που έχουν διδαχθεί και να συνειδητοποιήσουν την αξία του Θεωρήματος στον υπολογισμό απρόσιτων αποστάσεων,
- να αναπτύξουν την ικανότητα «μοντελοποίησης» και επίλυσης πραγματικών προβλημάτων που βασίζονται στην εφαρμογή του Θεωρήματος καθώς και να χρησιμοποιούν λογισμικά κατάλληλα για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

Β) Κοινωνικο-πολιτισμικοί στόχοι: Οι μαθητές, μέσα από τις δραστηριότητες:

- να αποκτήσουν θετική στάση για τη συνεργασία με τους συμμαθητές τους,
- να αμφισβητούν, να διερευνούν και να ανακαλύπτουν τη γνώση,
- να χρησιμοποιούν εκπαιδευτικές εφαρμογές για τη μελέτη και κατανόηση εννοιών.

ΚΙΝΗΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ

Αρχικά δόθηκε στους μαθητές ένα φυλλάδιο με παραδείγματα εφαρμογής του Θ. Θαλή στην καθημερινή ζωή (ύψος πυραμίδας, βάθος φράγματος, πλάτος ποταμού, ύψος κολώνας). Ακολούθησε συζήτηση για το αν γνώριζαν κάτι σχετικό με τη μέτρηση του ύψους των πυραμίδων και του ύψους ψηλών δέντρων ή κτιρίων. Κάποιοι μαθητές απάντησαν *"... οι Αιγύπτιοι μετρούσαν τη σκιά..." ή "... με τον ήλιο μέτραγαν την γωνία και το ύψος από ένα στύλο και τα σύγκριναν..."*. Στο σημείο αυτό προβλήθηκε βίντεο για τον Θαλή από την Εκπαιδευτική Ραδιοτηλεόραση (2001) στο οποίο παρουσιάζεται η μέτρηση του ύψους δέντρων με βάση τις σκιές τους, σύντομη ιστορική αναδρομή και εφαρμογές στην καθημερινή ζωή. Έγινε επίσης αναφορά στον "εξάντα" και σύνδεση της χρήση του με το θεώρημα.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Παρουσιάζουμε συνοπτικά τις δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές. Οι κατασκευές έγινα με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra:

Δραστηριότητα 1 (Θ. Θαλή): Κατασκευάστε τρεις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1//\varepsilon_2//\varepsilon_3$, οι οποίες τέμνονται από τις δ_1 και δ_2. Κατασκευάστε και μετρήστε τα ευθύγραμμα τμήματα: ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ στην δ_1 και Α'Β', Β'Γ', Α'Γ' στην δ_2. Υπολογίστε τους λόγους $\frac{AB}{A'B'}, \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}, \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$. Τι παρατηρείτε για τους λόγους; Μετακινήστε (α) τις παράλληλες ευθείες και (β) τις τέμνουσες ευθείες. Τι παρατηρείτε σε κάθε περίπτωση;

Δραστηριότητα 2 (Αντίστροφο του Θ. Θαλή): Κατασκευάστε δύο παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2 και δύο ευθείες δ_1, δ_2 που τέμνουν τις παράλληλες στα σημεία Α, Γ, Α', Γ'. Θεωρήστε σημείο Β στην δ_1 και Β' στη δ_2. Σχηματίστε και ονομάστε τα ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζονται πάνω στις ευθείες δ_1 και δ_2. Με τη βοήθεια των εργαλείων του Geogebra μετρήστε τα μήκη των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, Α'Β', Β'Γ' και βρείτε τους λόγους $\frac{AB}{B\Gamma}$ και $\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$. Μετακινήστε δυναμικά τα σημεία Β και Β' μέχρι οι λόγοι να είναι ίσοι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$. Τι παρατηρείτε για τις ευθείες;

Δραστηριότητα 3: Ερωτήσεις κατανόησης 1-3, σελ. 156 του σχολικού βιβλίου.

Δραστηριότητα 4 (Πόρισμα): Κατασκευάστε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Ορίστε ένα σημείο Κ στην πλευρά ΑΒ. Από το Κ φέρτε ευθεία παράλληλη προς την ΒΓ. Ονομάστε Λ το σημείο τομής με την ΑΓ. Με τη βοήθεια των εργαλείων του Geogebra μετρήστε τα μήκη των τμημάτων ΑΚ, ΑΛ, ΚΒ, ΛΓ και υπολογίστε τους λόγους $\frac{AK}{KB}$ και $\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma}$. Τι παρατηρείτε; Μετακινήστε το σημείο Κ. Τι παρατηρείτε για τους λόγους; Αν η ευθεία τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών πιστεύετε ότι θα ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα; Τι συμπεραίνετε;

Δραστηριότητα 5 (Θεώρημα): Κατασκευάστε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρτε ευθεία παράλληλη προς μια πλευρά του τριγώνου, π.χ. την ΒΓ, η οποία να τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Μετρήστε τα μήκη των τμημάτων: ΑΚ, ΑΛ, ΚΛ,

ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ που δημιουργούνται. Υπολογίστε τους λόγους $\frac{AK}{AB}$, $\frac{AL}{AG}$ και $\frac{KL}{BG}$. Τι παρατηρείτε; Μετακινήστε το σημείο Κ. Τι παρατηρείτε για τους λόγους;

Δραστηριότητες 6 και 7 (Εφαρμογές): Κατασκευή τέταρτης αναλόγου και διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε δοσμένο λόγο.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το σενάριο προσέφερε στους μαθητές τη δυνατότητα της διερεύνησης και της δυναμικής εξέτασης των γεωμετρικών σχημάτων, δυνατότητες που θα ήταν δύσκολο να παρασχεθούν από τα συμβατικά μέσα που συνήθως χρησιμοποιούνται στην τάξη (πίνακας, κιμωλία, χαρτί, μολύβι). Η χρήση του λογισμικού αποτέλεσε το έναυσμα για τη συζήτηση της σημασίας της απόδειξης αναδεικνύοντας τη διαφορά του "φαίνεται" και του τι "πραγματικά είναι". Οι μαθητές συνειδητοποίησαν την αξία της κατασκευής σωστού γεωμετρικού σχήματος. Επίσης, δόθηκε η δυνατότητα στη διδάσκουσα, να κινητοποιήσει όλους τους μαθητές μέσα από την ομαδική εργασία. Οι μαθητές μπορούσαν να αλληλεπιδρούν και να συνεργάζονται και ο κάθε μαθητής αξιοποίησε τις ικανότητες του. Αξίζει να αναφερθεί ότι μαθητές με χαμηλό υπόβαθρο στη γεωμετρία, αλλά με υψηλές ικανότητες στη χρήση η/υ και του λογισμικού, έγιναν αποδεκτοί από την ομάδα. Ένιωσαν χρήσιμοι και ικανοποιημένοι. Μάλιστα, μετά το τέλος της διδασκαλίας κυρίως αυτοί οι μαθητές ζήτησαν την ένταξη περισσοτέρων παρόμοιων δραστηριοτήτων στο μάθημα. Η πλειοψηφία των μαθητών δήλωσε ότι η χρήση του λογισμικού κατά τη διδασκαλία και η ενεργή συμμετοχή τους, είχε ως αποτέλεσμα την κινητοποίησή τους, κατέστησε την μαθησιακή διαδικασία πιο ευχάριστη και συνετέλεσε στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών (ποσοστά 84%, 83% και 61% αντίστοιχα, απάντησαν στις αντίστοιχες ερωτήσεις "αρκετά" έως "πάρα πολύ"). Το 60% των μαθητών δήλωσε ότι η προβολή του βίντεο στην αρχή του μαθήματος, καθώς και οι εφαρμογές του Θεωρήματος σε ανθρώπινες δραστηριότητες, τους κινητοποίησε και προκάλεσε το ενδιαφέρον τους. Χαρακτηριστικά αναφέρθηκε "*...να το ξανακάνουμε, κάνει το μάθημα της Γεωμετρίας περισσότερο ενδιαφέρον σε εμάς και σε κάποια άτομα που δεν τους αρέσει και πολύ ή που δεν το καταλαβαίνουν πολύ*". Τέλος πρέπει να επισημανθεί ότι με τον τρόπο που υλοποιήθηκε η διδασκαλία μαθητές με χαμηλή επίδοση στα Μαθηματικά, έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και εργάστηκαν με ενθουσιασμό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αργύρης Μ. (2002), «Διερευνητική μάθηση με χρήση υπολογιστικών εργαλείων» στο Κυνηγός Χ. – Δημαράκη Ε. (2002), *«Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα»,* Καστανιώτης, Αθήνα.

Γαβρίλης Κ. (2002), «Μάθηση και διδασκαλία της γεωμετρίας σε υπολογιστικά περιβάλλοντα» στο Κυνηγός Χ. – Δημαράκη Ε. (2002), *«Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα»,* Καστανιώτης, Αθήνα.

Εκπαιδευτική Ραδιοτηλεόραση (2001), *«Πρόσωπα και επιστήμες - Θαλής»*, ΥΠΕΠΘ. http://www.edutv.gr/component/k2/prosopa-kai-epistimes-thalis (4/2/2014).

Κολέζα Ε. (2000), *«Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών»*, Leader books, Αθήνα.

Kynigos C. (1993), "Children's inductive thinking during intrinsic and euclidean geometrical activities in a computer programming environment", *Educational Studies in Mathematics,* 24: p 177-197.

Papert S. (1991), *«Νοητικές Θύελλες: Παιδιά, Υπολογιστές και Δυναμικές Ιδέες»,* Οδυσσέας, Αθήνα.

Η ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0$ ΣΤΗΝ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ελένη Θαρουνιάτη

Καλλιτεχνικό Γυμνάσιο Γέρακα με Λυκειακές Τάξεις

e.tharouniati@math.aegean.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μελέτη της χάραξης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0$ στην Α' Λυκείου αποτελεί εύφορη διδακτική ενότητα για την εφαρμογή μιας διερευνητικής και διαθεματικής διδακτικής προσέγγισης. Η διδακτική πρακτική που θα περιγράψουμε εδώ αξιοποιεί τη χρήση των ΤΠΕ με σκοπό να αναδείξει τη χρησιμότητα των μαθηματικών στην επίλυση προβλημάτων και να ενθαρρύνει τους μαθητές να εμπλακούν ενεργά στη δημιουργία και κατανόηση νέων μαθηματικών εννοιών και εργαλείων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στόχος της διδακτικής μας παρέμβασης είναι να συμμετάσχουν οι μαθητές σε μια γνήσια διερευνητική διαδικασία όπου η δημιουργία νέων μαθηματικών εργαλείων παρουσιάζεται ως φυσιολογική ανάγκη στην πορεία επίλυσης ενός πραγματικού προβλήματος. Η επίτευξη του προαναφερθέντος στόχου αποσκοπεί στο να αποκτήσουν οι μαθητές κατάλληλες διαπροσωπικές και ενδοπροσωπικές εμπειρίες ώστε να αλλάξουν τις πεποιθήσεις τους ως προς τη χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή και να καλλιεργήσουν τις στάσεις τους αναφορικά με τους τρόπους συμμετοχής τους στην πρακτική της τάξης.

Πώς πείθει κανείς τους μαθητές του να εμπλακούν σε μια διερευνητική διαδικασία στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών; Πώς εξασφαλίζει κανείς τη συμμετοχή των μαθητών σε μια χρονοβόρα διαδικασία όπου η επίτευξη του μαθησιακού στόχου απαιτεί τη διατύπωση υποθέσεων, την κατάρτιση ενός σχεδίου και τη δημιουργία νέων μαθηματικών εργαλείων; Η παρούσα διδακτική παρέμβαση επιχειρεί να απαντήσει στα προηγούμενα ερωτήματα με δύο τρόπους: πρώτον, θέτοντας ένα πραγματικό πρόβλημα ως αφετηρία του μαθήματος και δεύτερον, χρησιμοποιώντας τις δυνατότητες πειραματισμού που μας παρέχονται μέσω των ΤΠΕ. Οι τρόποι με τους οποίους οι μαθητές καλούνται να συμμετέχουν στην πρακτική της τάξης έχει ως απώτερο στόχο την προώθηση της επιστημικής πρωτοβουλίας και της μαθησιακής αυτοτέλειας καθώς και την ανάδειξη των μεταγνωστικών συμπεριφορών.

Τα κεντρικά ζητήματα στα οποία εστιάζεται η διδακτική μας παρέμβαση αφορούν τη χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0$, και τις έννοιες της κατακόρυφης και οριζόντιας μετατόπισης μιας γραφικής παράστασης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η διδασκαλία μας στηρίζεται στο θεωρητικό πλαίσιο της επικοινωνιακής προσέγγισης και της πλαισιοθετημένης μάθησης ειδικότερα. Οι διδακτικές μας επιλογές πηγάζουν από τον τρόπο με τον οποίο η θεωρία της πλαισιοθετημένης μάθησης αναδεικνύει τη δυναμική φύση της γνώσης: Ο μαθητής πλάθει τη γνώση μέσα από τις εμπειρίες που του προσφέρονται στα πλαίσια της σχολικής κοινότητας των μαθηματικών. Το είδος και το εύρος των εμπειριών αυτών εξαρτάται άμεσα από τους τρόπους συμμετοχής των μαθητών στην πρακτική της τάξης.

Όμως, ο τρόπος που λειτουργεί η τάξη δεν είναι ανεξάρτητος από τη διδακτική προσέγγιση. Στον τύπο διδασκαλίας που εφαρμόσαμε (Nunokawa, 2005):

Ο στόχος είναι να επιλέξουμε κατάλληλες προβληματικές καταστάσεις οι οποίες έχουν ενσωματώσει τα σημαντικά σημεία ενός μαθηματικού θέματος το οποίο θέλουμε να διδάξουμε. Κατά τη διδασκαλία αυτή αναμένουμε από τους μαθητές μας να αναπτύξουν τη βασική ή τις βασικές ιδέες του νέου θέματος ως μια λογική απάντηση στα ερωτήματα του προβλήματος.

Για εμάς, η προβληματική κατάσταση πήρε τη μορφή ενός προβλήματος Φυσικής και στο πλαίσιο του τύπου διδασκαλίας που περιγράψαμε παραπάνω απέκτησε νόημα η σύμπραξη μαθηματικών και φυσικής σε μια διαθεματική δραστηριότητα. Επιπλέον, η φύση του προβλήματος που τέθηκε στους μαθητές, επέτρεψε από τη μία πλευρά σε εκείνους να εκφράσουν με σαφήνεια τη σκέψη τους και από την άλλη σε εμάς να παρατηρήσουμε τη δεύτερη αρχή του Wittgenstein στην πράξη: 'Η καθημερινή γλώσσα είναι επαρκής'.

Έχοντας επεξεργαστεί το πρόβλημα αρχικά με τις γνώσεις Φυσικής των μαθητών, αρχίσαμε να διαπραγματευόμαστε την μαθηματική αντιμετώπισή του. Συζητώντας τη δυνατότητα λύσης του προβλήματος μέσω της χάραξης γραφικής παράστασης φτάσαμε στην αβεβαιότητα χάραξης της γραφικής παράστασης της συγκεκριμένης συνάρτησης που παρουσιαζόταν στο πρόβλημά μας. Ο τύπος αβεβαιότητας που παρουσιάστηκε, *άγνωστος τρόπος επίλυσης* (Zaslavsky, 2005), τοποθέτησε τους μαθητές στα σύνορα της γνώσης τους και έδωσε στην τάξη την ευκαιρία να εμφανιστεί και να λειτουργήσει σταδιακά η ζώνη της επικείμενης ανάπτυξης σε διαφορετικούς χρόνους για διαφορετικούς μαθητές.

Η χρήση της ΤΠΕ ενθάρρυνε τη συνεργατική, βιωματική, διερευνητική μάθηση δίνοντας έμφαση στη διερεύνηση μέσα από τον πειραματισμό και τον έλεγχο αρχικών υποθέσεων (Κυνηγός, 2002). Αξίζει να σημειωθεί ότι εξαιτίας του διερευνητικού τρόπου προσέγγισης που επιλέξαμε τα εργαλεία των μετατοπίσεων της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης και της συμπλήρωσης τετραγώνου δεν προηγήθηκαν της μελέτης του τρόπου χάραξης της γραφικής παράστασης της $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma, \quad \alpha\neq 0$, όπως στο σχολικό βιβλίο, αλλά, προέκυψαν ως λογική απάντηση στην πορεία επίλυσης του προβλήματος. Ελπίζουμε οι μαθητές μας να πήραν μια γεύση των μαθηματικών ως «διαδικασίας», των μαθηματικών του «μαχόμενου» μαθηματικού, του μαθηματικού που αναπτύσσει ιδέες και θεωρήματα (Κλαουδάτος, 1997, σελ. 3).

ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Η έννοια της μετατόπισης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης έχει μεταφερθεί στην ύλη της Άλγεβρας της Β' Λυκείου, ενώ, η χάραξη της γραφικής παράστασης της $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παραμένει στην ύλη της Άλγεβρας της Α' Λυκείου. Θεωρείται προτιμότερο οι δύο προηγούμενες έννοιες να διδαχθούν στην Α' Λυκείου όπου τα παιδιά διδάσκονται τη γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha x^2$.
Ο τρόπος παρουσίασης που προτείνεται στο σχολικό βιβλίο ακολουθεί την εξής σειρά:

1. Κατακόρυφες μετατοπίσεις
2. Οριζόντιες μετατοπίσεις
3. Μετασχηματισμός της $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου και χάραξη της γραφικής της παράστασης με τη βοήθεια μίας κατακόρυφης και μίας οριζόντιας μετατόπισης

Με τον τρόπο αυτό, οι νέες έννοιες εισάγονται ως μια σειρά εργαλείων τα οποία οι μαθητές καλούνται να προσθέσουν στις μαθηματικές τους γνώσεις.
Αντίθετα, με την παρούσα δραστηριότητα ξεκινάμε με ένα πρόβλημα Φυσικής στοχεύοντας να θέσουμε τόσο το πλαίσιο όσο και την ανάγκη για μαθηματική γνώση ανοίγοντας έτσι με φυσιολογικό τρόπο το δρόμο για την εμφάνιση των νέων εννοιών. Η δραστηριότητα έχει πραγματοποιηθεί τέσσερις φορές με βέλτιστη την τέταρτη. Η δραστηριότητα που αναλύεται εδώ διήρκησε τρεις διδακτικές ώρες και στοχεύει στο να εμπλέξει ενεργά τους μαθητές στη δημιουργία των νέων μαθηματικών εργαλείων τα οποία καλούνται να κατανοήσουν.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Αρχικά, δίνεται στους μαθητές το παρακάτω πρόβλημα:

Πυροβόλο βάλει κατακόρυφα προς τα πάνω μία φωτοβολίδα με αρχική ταχύτητα $v_0 = 72km/$□. Από τη φυσική γνωρίζουμε ότι το ύψος της φωτοβολίδας σε κάθε χρονική στιγμή t είναι:
□$(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$,
όπου $g = 10m/s^2$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Να βρείτε:

i. Τη χρονική στιγμή που η φωτοβολίδα θα φτάσει στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό,
ii. Τη χρονική στιγμή που η φωτοβολίδα θα πέσει στο έδαφος.

- Εφόσον οι μαθητές επεξεργαστούν το πρόβλημα που τους δίνεται με τις γνώσεις Φυσικής που ήδη κατέχουν, γίνεται μια πρώτη συζήτηση για το σχήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

- Στη συνέχεια, οι μαθητές μεταφέρονται στο εργαστήριο πληροφορικής όπου ανοίγουν ένα αρχείο GeoGebra και βλέπουν τη γραφική παράσταση της κίνησης της φωτοβολίδας να χαράσσεται σε πραγματικό χρόνο. Καλούνται τώρα να παρατηρήσουν τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *h* και να εισάγουν τον τύπο της συνάρτησης την οποία αυτή τους θυμίζει.
- Σε δεύτερη φάση, οι μαθητές πειραματίζονται, με τη βοήθεια του λογισμικού, μετατοπίζοντας τη γραφική παράσταση της γνωστής τους συνάρτησης ώστε αυτή να συμπέσει με τη γραφική παράσταση της *h*.
- Οι μαθητές επεξεργάζονται την κατακόρυφη μετατόπιση της $f(x)=-5x^2$ παρατηρώντας την μετατοπισμένη γραφική παράσταση στον καμβά του GeoGebra και συμπληρώνοντας αρχικά έναν πίνακα τιμών. Το μοτίβο που εμφανίζεται με τη συμπλήρωση του πίνακα τιμών μας οδηγεί στον τύπο της συνάρτησης *g* που αντιστοιχεί στη μετατοπισμένη γραφική παράσταση της *f*.
- Οι μαθητές επεξεργάζονται την οριζόντια μετατόπιση της $g(x)=-5x^2+20$ παρατηρώντας την μετατοπισμένη γραφική παράσταση στον καμβά του GeoGebra και συμπληρώνοντας αρχικά έναν πίνακα τιμών. Το μοτίβο που εμφανίζεται με τη συμπλήρωση του πίνακα τιμών μας οδηγεί στον τύπο της συνάρτησης *k(x)* που αντιστοιχεί στη μετατοπισμένη γραφική παράσταση της *g*.
- Οι μαθητές κάνουν τις πράξεις στον τύπο της $k(x)=-5(x-2)^2+20$ και την ταυτοποιούν με την *h*.
- Τέλος, συζητείται ο τρόπος χάραξης της $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Η ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Η χρήση ενός συνοριακού αντικειμένου, ενός προβλήματος φυσικής, με σκοπό την εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών, έδωσε τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό και τους μαθητές να συμμετέχουν αρχικά σε μία συζήτηση η οποία καθόρισε τους ρόλους και των δύο. Στο τέλος του πρώτου μέρους της δραστηριότητας μαθητές και εκπαιδευτικός συζητούν για το σχήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *h*:

Εκπαιδευτικός: Λοιπόν, καμία ιδέα, καμία υπόθεση, πως μπορεί να είναι η γραφική παράσταση;

Μαθητής 1: Καμπύλη.

Εκπαιδευτικός: Καμπύλη, ωραία, το γράφω εδώ…Γιατί λες καμπύλη;

Μαθητής 1: Ε γιατί πρώτα φτάνει σε ένα μέγιστο ύψος και μετά αρχίζει την κάθοδο.

Εκπαιδευτικός: Σωστά, πες ότι θα μπορούσε όμως να πηγαίνει και έτσι (η εκπαιδευτικός φτιάχνει στον πίνακα μια γραφική παράσταση που ανεβαίνει και κατεβαίνει γραμμικά). Έχετε πει εσείς τίποτα; Λέγε.

Μαθητής 2: Σιγά-σιγά επιβραδύνει οπότε το ύψος της αυξάνει πιο σιγά, πιο μαλακά και μετά πάλι επιταχύνει.

Η αιτιολόγηση του πρώτου μαθητή αξιοποιείται δίνοντας στο δεύτερο μαθητή την ευκαιρία να δώσει μια τελική απάντηση. Η εκπαιδευτικός υποστηρίζει και συντονίζει τη συζήτηση επιτρέποντας στους μαθητές να εκφράσουν τις σκέψεις τους και να αποκτήσουν μια αίσθηση σκοπού και ευθύνης αναφορικά με το έργο στο οποίο συμμετέχουν.

Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας δίνονται διάφορες ευκαιρίες στους μαθητές να αναλάβουν πρωτοβουλίες. Οι παρεμβάσεις της εκπαιδευτικού διατυπώνονται προσεκτικά ώστε οι μαθητές να συμμετέχουν με σκοπό να ολοκληρώσουν το έργο το οποίο έχουν αναλάβει και όχι με σκοπό να δώσουν σωστές απαντήσεις στην ίδια:

Εκπαιδευτικός: Έχοντας συμπληρώσει τώρα αυτόν τον πίνακα με τη βοήθεια του πρώτου έχω μια καινούργια διαδικασία. Μπορείτε εσείς τώρα να σκεφτείτε ποιός θα είναι ο τύπος της καινούργιας συνάρτησης;

Μαθητής 3: Εγώ μπερδεύτικα.

Μαθητής 4: g(x)=-20x2.

Εκπαιδευτικός: Αν το δοκιμάσετε θα δείτε ότι δεν σας βγάζει τα νούμερα που πρέπει.

Μαθητής 5: g(x)=-5x2+20.

Εκπαιδευτικός: Ναι, αυτό δουλεύει.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι μαθητές έδειξαν ενδιαφέρον και συμμετείχαν στη δραστηριότητα σε μεγάλο ποσοστό. Επίσης, αν και μόνο λίγοι από αυτούς είχαν ξαναδουλέψει με το λογισμικό Geogebra εντούτοις δεν δυσκολεύτηκαν στο χειρισμό των εργαλείων του. Η καθηγήτρια του τελευταίου τμήματος στο οποίο εφαρμόστηκε η δραστηριότητα αυτή επεσήμανε ότι οι περισσότεροι από τους μαθητές που συμμετείχαν ενεργά δεν ήταν οι «καλοί» της μαθητές. Μια μαθήτρια μάλιστα που ενδιαφέρφηκε στο τέλος της τρίωρης δραστηριότητας να εκφράσει μια απορία ώστε να αποσαφηνίσει τον τρόπο χάραξης της γραφικής παράστασης της $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είχε επίδοση στο πρώτο τετράμηνο κάτω του μετρίου, «Κυρία, το κατάλαβα» γύρισε και είπε στην καθηγήτριά της έχοντας λύσει την απορία της.

Βασιζόμενοι στα δεδομένα που περιγράψαμε έως τώρα, προσδοκούμε η συμμετοχή των μαθητών στην παρούσα παρέμβαση να έχει αντίκτυπο στον τρόπο με τον οποίο αυτοί σκέφτονται για τα μαθηματικά. Η επιλογή της διερευνητικής προσέγγισης για τη διδασκαλία της συγκεκριμένης ενότητας δεν στόχευε στο να εμπλέξει μόνο τους άριστους ή πολύ καλούς μαθητές στη μαθησιακή διαδικασία, αλλά όλους. Επιδιώξαμε να προωθήσουμε μια πρακτική της τάξης όπου οι μαθητές

ενθαρρύνονται να συζητούν για τα μαθηματικά χρησιμοποιώντας την καθημερινή τους γλώσσα, να πειραματίζονται, να υποστηρίζουν τις υποθέσεις τους, να δημιουργούν και να χρησιμοποιούν νέα μαθηματικά εργαλεία για να λύσουν πραγματικά προβλήματα. Ευελπιστούμε οι εμπειρίες που οι μαθητές μας απέκτησαν από τη δραστηριότητα αυτή να επηρεάσουν τις πεποιθήσεις τους ως προς τη χρησιμότητα των μαθηματικών και να συμβάλουν στην καλλιέργεια διερευνητικής σκέψης και στάσης ως προς τα μαθηματικά ειδικά και την αντιμετώπιση προβληματικών καταστάσεων γενικότερα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κλαουδάτος, Ν., 1997. 'Διδασκαλία των μαθηματικών ως λύση προβλήματος: Ο ρόλος των ερευνητικών δραστηριοτήτων', στο *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών,* 2, σελ. 39-72.

Κυνηγός, Π., Βαβουράκη Α., Ιωαννίδης Χ., Παπαϊωάννου Π., Ψυχάρης Γ., 2002. 'Η χρήση της τεχνολογίας της πληροφορίας και της επικοινωνίας στο σχολείο: μελέτη πέντε περιπτώσεων', ανακτήθηκε από http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/3rd/contributions/525.pdf

Nunokawa, K., 2005. 'Mathematical problem-solving and learning mathematics: What we expect students to obtain', in *Journal of Mathematical Behaviour*, 24, p.325-340.

Polya, George. 1973. How To Solve It. Princeton, NJ: Princeton University Press (Originally published in 1945).

Vygotsky, L.S., 1978. Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wenger, E. 1998. *Communities of practice: learning, meaning and identity*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Zaslavsky, O., 2005. 'Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics', in *Educational Studies in Mathematics*, 60, p.297-321.

ΧΡΗΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Φώτιος Ι. Ιορδανίδης
2ο Γενικό Λύκειο Πτολεμαΐδας
fjordaneap@gmail.com

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εύρεση μέγιστου και ελάχιστου μέτρου μεταξύ δύο μιγαδικών στην περίπτωση που ο ένας γράφεται ως συνάρτηση του άλλου, μπορεί να οπτικοποιηθεί και να γίνει δυναμική, αν η διδασκαλία υποστηριχθεί από κατάλληλο λογισμικό. Οι μαθητές θα μπορέσουν να αναγνωρίσουν, να σχεδιάσουν και να κατασκευάσουν τους γεωμετρικούς τόπους των μιγαδικών, να μετρήσουν και να υπολογίσουν την απόσταση των εικόνων δύο μιγαδικών καθώς επίσης και να καθορίσουν την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου μεταξύ των εικόνων δύο μιγαδικών όταν αυτοί αλληλοεξαρτώνται.

1. ΠΡΟΣΤΙΘΕΜΕΝΗ ΑΞΙΑ

Η διδασκαλία της εύρεσης μέγιστου και ελάχιστου μέτρου ενός μιγαδικού ή της διαφοράς δύο μιγαδικών, με βάση το σχολικό βιβλίο, περιορίζεται σε μία εφαρμογή όπου και προτείνεται η επίλυση συστήματος (μεταξύ της εξίσωσης του κύκλου και της διακεντρικής ευθείας).

Κατά την διδασκαλία της συγκεκριμένης περίπτωσης αρκετοί συνάδελφοι, προτείνουμε εναλλακτικά να χρησιμοποιηθεί γεωμετρική ερμηνεία ή η τριγωνική ανισότητα. Δημιουργείται όμως ένα πρόβλημα στην γεωμετρική επίλυση, όταν ο ένας μιγαδικός γράφεται συναρτήσει του άλλου.

Με το παρόν σενάριο οι μαθητές θα αναγνωρίσουν την μεταβολή ενός μιγαδικού ως προς έναν άλλο, θα σχεδιάσουν τον γεωμετρικό τόπο του εξαρτημένου μιγαδικού, θα υπολογίσουν την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών, θα συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους (γεωμετρικά και με τη βοήθεια του λογισμικού) και τελικά θα μπορούν να διαχειριστούν ανάλογες περιπτώσεις ασκήσεων.

2. ΓΝΩΣΤΙΚΑ – ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Η Άλγεβρα, μέσα στο τρέχον αναλυτικό πρόγραμμα του σχολείου και τα εγχειρίδια, προβάλλεται ως μια γενίκευση της αριθμητικής και από το σημείο αυτό εμφανίζονται και οι πρώτες δυσκολίες. Στο χώρο της Άλγεβρας τα αντικείμενα είναι γενικευμένοι αριθμοί και οι σχέσεις είναι σχέσεις μεταξύ γενικευμένων αριθμών ή αλλιώς, ο

ρυθμός με τον οποίο αλλάζουν οι τιμές που μπορεί να πάρει ένας γενικευμένος αριθμός σε σχέση με κάποιον άλλο.

Εάν επιχειρήσουμε να συνοψίσουμε τις δυσκολίες που παρουσιάζονται στην διδασκαλία της άλγεβρας θα έπρεπε να εστιάσουμε στο πρόβλημα της νοηματοδότησης των αλγεβρικών συμβόλων, των αλγεβρικών εκφράσεων και των μετασχηματισμών που οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν.

Έχει θεωρηθεί ότι ένας τρόπος υπέρβασης της δυσκολίας κατανόησης των αλγεβρικών συμβόλων και παραστάσεων είναι η επίλυση λεκτικών προβλημάτων η οποία συνδέει τον αλγεβρικό συμβολισμό με πραγματικές καταστάσεις. Φαίνεται ότι η επίλυση προβλημάτων δεν έχει αποδώσει τα επιδιωκόμενα αποτελέσματα αφού παρατηρήθηκε το φαινόμενο οι μαθητές να περιορίζονται σε αποστήθιση κανόνων και μεθόδων αντιμετώπισης των προβλημάτων χωρίς να κατανοούν τις έννοιες που χρησιμοποιούν.

Η χρήση του τετραδίου και του πίνακα στην αναπαράσταση των αλγεβρικών εννοιών απαιτεί ιδιαίτερες νοητικές και αφαιρετικές δεξιότητες καθώς τα συγκεκριμένα στατικά μέσα δεν διαθέτουν διαδραστικά χαρακτηριστικά δηλαδή δεν αντιδρούν στις ενέργειες του μαθητή.(ΙΤΥ 2010)

3. ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

Σε ποιους απευθύνεται:

Το σενάριο απευθύνεται στους μαθητές της Γ τάξης θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης.

Χώρος υλοποίησης:

Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί εξ' ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Ο πειραματισμός με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού απαιτεί πάνω απ' όλα εργαστήριο με 9 τουλάχιστον θέσεις, ώστε να μπορούν να εργασθούν οι μαθητές ανά δύο ή τρεις. Η επιλογή από τον διδάσκοντα να το υλοποιήσει στην αίθουσα διδασκαλίας με τη χρήση βιντεοπροβολέα θα ακύρωνε το μεγαλύτερο μέρος της προστιθέμενης αξίας.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης:

Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες και καθοδηγούμενοι από το φύλλο εργασίας, καλούνται να επινοήσουν τρόπους αξιοποίησης του ψηφιακού εργαλείου το οποίο διαθέτουν. Επομένως, η διερεύνηση αυτή θα γίνει συνεργατικά. Για να υπάρχει κοινός στόχος και καλή συνεργασία οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν ένα κοινό φύλλο εργασίας που περιέχει ερωτήσεις σχετικές με το θέμα. Φυσικά το φύλλο εργασίας θα πρέπει να αφήνει μια αρκετά μεγάλη ελευθερία στους μαθητές ώστε να θέτουν τα δικά τους ερωτήματα και να απαντούν σε αυτά.

Στη διάρκεια της υλοποίησης του σεναρίου ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών, να συνεργάζεται μαζί τους, να τους καθοδηγεί ώστε να

αντιλαμβάνονται καλύτερα τα αποτελέσματά τους και να τους ενθαρρύνει να συνεχίσουν την διερεύνηση.

Στόχοι:

Οι δραστηριότητες που περιγράφονται στη συνέχεια έχουν ως στόχο την μέσω πειραματισμού σύνδεση και κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών και συγκεκριμένα:

Να μπορούν να αναγνωρίζουν και να σχεδιάζουν τον γεωμετρικό τόπο ενός μιγαδικού.

Να μπορούν να αναγνωρίζουν τόσο εποπτικά όσο και αλγεβρικά:

Το μέτρο ενός μιγαδικού, το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο ενός μιγαδικού.

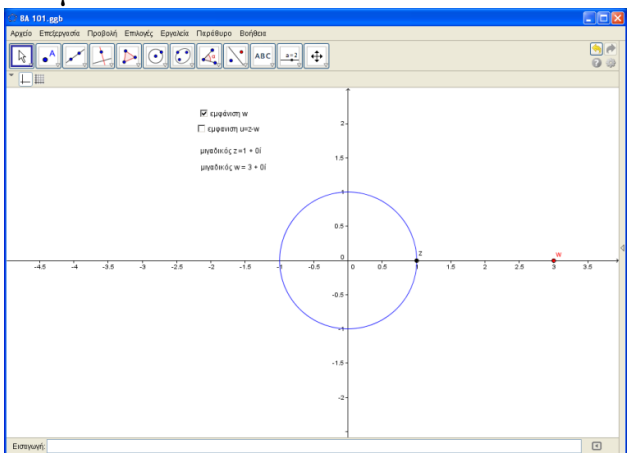
Να μπορούν να υπολογίσουν την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου της διαφοράς δύο μιγαδικών όταν αυτοί αλληλοεξαρτώνται.

Ανάλυση του σεναρίου

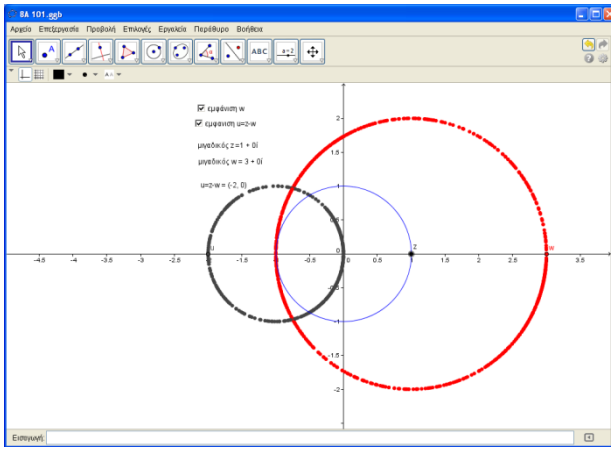
Με κατάλληλες ερωτήσεις – παροτρύνσεις, ο εκπαιδευτικός, ωθεί του μαθητές να πειραματιστούν, να αναγνωρίζουν και διαπιστώνουν τους γεωμετρικούς τόπους των μιγαδικών. Υπολογίζουν την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών, εξηγούν την έννοια της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής, σχεδιάζουν τον γεωμετρικό τόπο της διαφοράς των μιγαδικών και τελικά υπολογίζουν το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο της διαφοράς των μιγαδικών.

Άσκηση 8 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου

Αν για τον μιγαδικό z ισχύει |z|=1, να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με w = 2z+1.



Εικόνα 1: Άσκηση 8 Α' ομάδας σελ 101

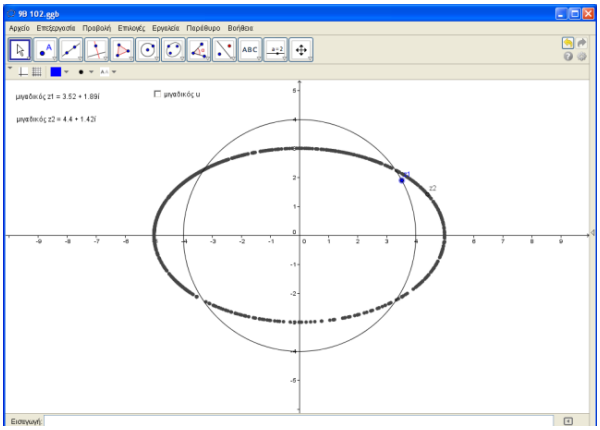


Εικόνα 2: Τροποποίηση άσκησης

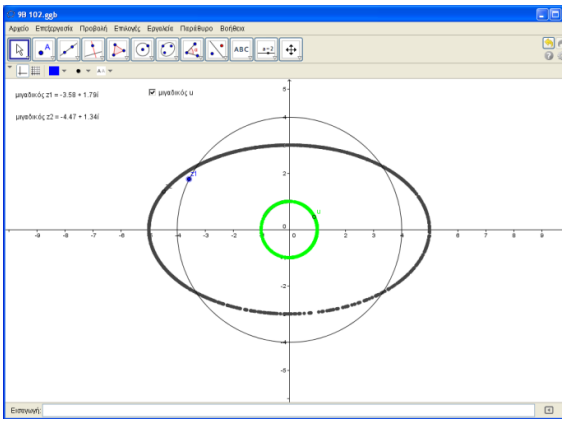
- Μετακινείστε τον μιγαδικό z και παρατηρείστε την αλλαγή του. Μετακινείστε τον μιγαδικό z και παρατηρείστε την μετακίνηση της εικόνας του w καθώς επίσης και τις συντεταγμένες του.
- Αν είχαμε επιπλέον ερώτημα για την εύρεση max και min τιμής του |z-w|, ποια θα ήταν η απάντηση; (η απάντηση να δοθεί με τη βοήθεια το σχήματος).

- Επιλέξτε το κουτί επιλογής για εμφάνιση του μιγαδικού u. Μετακινείστε τον μιγαδικό z και παρατηρείστε την μετακίνηση της εικόνας του u καθώς επίσης και τις συντεταγμένες του. Κάντε δεξί κλικ πάνω στον u και επιλέξτε από το μενού «ίχνος ενεργό». Ελέγξτε γεωμετρικά τα αποτελέσματά σας για τις τιμές του μέτρου του u.

Άσκηση 9 Β' ομάδας σχολικού βιβλίου



Εικόνα 1: Άσκηση 9 Β' ομάδας, σελ. 102



Εικόνα 2: Τροποποίηση άσκησης

Αν M_1 και M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως κα $z_2 = z_1 + \frac{4}{z_1}$, να αποδείξετε ότι: Όταν το M_1 κινείται σε κύκλο κέντρου O(0,0) και ακτίνας 4, τότε το M_2 κινείται σε μια έλλειψη.

- Κάντε δεξί κλικ πάνω στον z_2 και επιλέξτε από το μενού «ίχνος ενεργό». Μετακινείστε τον μιγαδικό z_1 και παρατηρείστε να δημιουργείται ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.
- Αν είχαμε επιπλέον ερώτημα για την εύρεση max και min τιμής του $|z_1 - z_2|$, ποια θα ήταν η απάντηση; (η απάντηση να δοθεί με τη βοήθεια του σχήματος)
- Στη σχέση που συνδέει τους δύο μιγαδικούς, απομονώστε το κλάσμα και βάλτε μέτρο και στα δύο μέλη. Θα άλλαζε η απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα;
- Για να εμφανιστεί ο μιγαδικός $u = z_1 - z_2$ επιλέξτε το κουτί επιλογής για εμφάνιση του. Μετακινείστε τον μιγαδικό z_1 και παρατηρείστε την μετακίνηση της εικόνας του u καθώς επίσης και τις συντεταγμένες του.
- Κάντε δεξί κλικ πάνω στον u και επιλέξτε από το μενού «ίχνος ενεργό». Μετακινείστε τον μιγαδικό z_1 και επιβεβαιώστε γεωμετρικά τα αποτελέσματά σας για τις τιμές του μέτρου του u.

Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή – αναστοχασμός

Τα συγκεκριμένα φύλλα εργασία δόθηκαν σε μαθητές της Θετικής Κατεύθυνσης. Πριν από την πραγματοποίηση της παρουσίασης είχαν διατεθεί δύο διδακτικές ώρες για το συγκεκριμένο θέμα μέσα στην τάξη.

Με τη χρήση του λογισμικού, μας δόθηκε η δυνατότητα να σχεδιάσουμε μια διδακτική πορεία που υποστήριζε το αναλυτικό πρόγραμμα, αλλά μας επέτρεψε να επεκταθούμε σε θέματα τα οποία δεν είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν με τα στατικά μέσα που συνήθως χρησιμοποιούνται.

Ο υπολογιστής, ως εργαλείο μέσα στην τάξη, βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τον τρόπο υπολογισμού του μέτρου της διαφοράς δύο μιγαδικών όταν αυτοί αλληλοεξαρτώνται, προσφέροντας, παράλληλα, τη δυνατότητα οπτικοποίησης και συγκεκριμένης επεξεργασίας τους.

Γενικότερα θα μπορούσαμε να πούμε πως όταν ο υπολογιστής χρησιμοποιείται στην παραδοσιακή διδασκαλία ως συμπληρωματικό μέσο, επιτυγχάνεται μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα απ' ότι όταν χρησιμοποιείται ως η μοναδική βάση για διδασκαλία (Μ. Τουμάσης, Τ. Αρβανίτης).
Η συγκεκριμένη παρουσίαση σε γενικές γραμμές δέχθηκε θετικά σχόλια, αλλά δημιούργησε καινούρια ερωτήματα:

- Είναι χρήσιμη η παρουσίαση τόσο εξειδικευμένου θέματος ενόψει των Πανελλαδικών;
- Πότε τελικά ένας μαθητής θα χρησιμοποιεί επίλυση συστήματος ή γεωμετρική επίλυση ή τριγωνική ανισο – ισότητα;
- Υπάρχει μια γενική μέθοδος – πανάκεια που να επιλύει όλες τις ανάλογες ασκήσεις;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Τουμάσης Μ. Αρβανίτης Τ. (2003) *Διδασκαλία των Μαθηματικών με χρήση Η/Υ*, Εκδόσεις Σαββάλας.

ΙΤΥ(2010). Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης. Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03, Β΄ έκδοση Αναθεωρημένη & Εμπλουτισμένη. Πάτρα: ΙΤΥ.

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕ ΤΟ GEOGEBRA

Καλαϊτσίδου – Λεοντάκη Άννα

[1]**kalan5658@gmail.com**

Η διδακτική μας πρόταση αναφέρεται στην διδασκαλία των εκθετικών συναρτήσεων σε μαθητές Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου. Το θεωρητικό της πλαίσιο είναι η θεωρία της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Freudenthal, 1991), οι θεωρητικές αρχές των Μαθηματικών της φύσης και της ζωής (Λεμονίδης, 2003) και οι αρχές της ενδυναμωτικής παιδαγωγικής του Freire (1985; 1994).

Οι στόχοι της πρότασης είναι:

Η κινητοποίηση των μαθητών ώστε να συμμετέχουν με θετική διάθεση και δημιουργικά στη διδακτική και μαθησιακή διαδικασία.

Η απόκτηση διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης πάνω στις εκθετικές συναρτήσεις.

Η εφαρμογή της νέας γνώσης για την κριτική κατανόηση της πραγματικότητας

και την ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης των μαθητών.

Η ανάπτυξη ικανοτήτων ομαδικής εργασίας και διαλεκτικής επικοινωνίας.

Η ανάπτυξη ικανοτήτων χρήσης της τεχνολογίας στη διδακτική και μαθησιακή διαδικασία.

Για την επίτευξη των στόχων έγιναν καινοτόμες επιλογές. Η εκθετική συνάρτηση προσεγγίζεται μέσα από τη δράση των ίδιων των μαθητών σαν συμμεταβολή δυο μεγεθών σε πλαισιωμένες καταστάσεις ρεαλιστικών προβλημάτων. Η αποπλαισίωση για την απόκτηση θεωρητικής γνώσης γίνεται σταδιακά μέσω επαγωγικού συλλογισμού και γενίκευσης. Η διδακτική μέθοδος που υιοθετείται είναι η καθοδηγούμενη επανα-ανακάλυψη. Το μαθησιακό περιβάλλον διαμορφώνεται από τη στοχευμένη ένταξη του εκπαιδευτικού πολυαναπαραστατικού λογισμικού Geogebra στην διδακτική πρακτική, την ομαδική εργασία των μαθητών και την διαλεκτική επικοινωνία στην τάξη. Το λογισμικό χρησιμοποιείται με διάφορους τρόπους, σαν υπολογιστικό εργαλείο, σαν διερευνητικό εργαλείο και σαν εργαλείο μάθησης, επικοινωνίας και αναστοχασμού, ανάλογα με την περίσταση και τον διδακτικό στόχο. Στο περιβάλλον αυτό οι μαθητές συμμετέχουν δημιουργικά στη διδακτική και μαθησιακή διαδικασία σαν μαθητές και συγχρόνως σαν δάσκαλοι των συμμαθητών. Η καθηγήτρια- φορέας της γνώσης- προσπαθεί να μυήσει τους μαθητές στη νέα γνώση, βρίσκεται ανάμεσά τους, παρακολουθεί τη μαθησιακή τους πορεία, τους καθοδηγεί, τους διευκολύνει, προωθεί τη σκέψη τους, διευθύνει και διευθετεί την επικοινωνία και συγχρόνως διδάσκεται από τον τρόπο που μαθαίνουν οι μαθητές.

Εφαρμόσαμε την διδακτική μας πρόταση σε 25 μαθητές ενός γενικού λυκείου. Την πειραματική διδασκαλία παρακολούθησαν δυο έμπειροι μαθηματικοί του ίδιου σχολείου σαν παρατηρητές τάξης. Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου, διήρκεσε έξι ώρες και χωρίζεται σε τρεις ενότητες. **Η πρώτη δίωρη ενότητα** περιλαμβάνει την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της εκθετικής μεταβολής και τη μελέτη της οικογένειας των εκθετικών συναρτήσεων. **Η δεύτερη τρίωρη ενότητα** περιλαμβάνει την εισαγωγή στον αριθμό e και στο νόμο της εκθετικής μεταβολής καθώς και την επίλυση μιας ποικιλίας ρεαλιστικών προβλημάτων εκθετικής μεταβολής. **Η τρίτη ενότητα** διαρκεί μια ώρα και περιλαμβάνει την συμπλήρωση από τους μαθητές ενός τελικού τεστ αξιολόγησης που εξετάζει τις γνώσεις που απέκτησαν οι μαθητές και τα συναισθήματα που ανέπτυξαν κατά την πειραματική διδασκαλία. Η αξιολόγηση της διδακτικής παρέμβασης έγινε από τις αναφορές της καθηγήτριας και των παρατηρητών τάξης, από την εργασία των μαθητών στην τάξη και στο σπίτι και από τις επιδόσεις των μαθητών στο τελικό τεστ αξιολόγησης. Θα περιγράψουμε γενικά κάθε ώρα της πειραματικής διδασκαλίας και αναλυτικά την πρώτη ώρα. Επίσης θα παρουσιάσουμε την αξιολόγηση της παρέμβασης και τα συμπεράσματα που προέκυψαν από αυτήν.

Α. Περιγραφή της πειραματικής διδασκαλίας

1η ενότητα- 1η ώρα: Εισαγωγή στην έννοια της εκθετικής μεταβολής.

1η φάση: Πειραματισμός

Στους μαθητές δόθηκε το φύλλο εργασίας 1 με το παρακάτω πρόβλημα.

Πρόβλημα 1

Ένας βιολόγος μελετά τη μεταβολή του βάρους μιας κοινωνίας βακτηρίων κατά τη διάρκεια ενός πειράματος. Τη στιγμή της έναρξης του πειράματος, το βάρος των βακτηρίων είναι 1μβ (μονάδα βάρους) και κάθε ώρα διπλασιάζεται. Ο βιολόγος καταγράφει το βάρος των βακτηρίων στο τέλος κάθε ώρας.

-Μπορείτε να βοηθήσετε το βιολόγο,

(α) να υπολογίσει το βάρος των βακτηρίων στο τέλος της 8ης ώρας

(β) να υπολογίσει το βάρος των βακτηρίων στο τέλος της 20ης ώρας

(γ) να υπολογίσει το βάρος των μικροβίων 2,5 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης.

-Αν θεωρήσουμε ότι και πριν την έναρξη της παρατήρησης το βάρος των βακτηρίων μεταβάλλεται ως προς το χρόνο κατά τον ίδιο τρόπο, να υπολογίσετε το βάρος των βακτηρίων 3 ώρες πριν από την έναρξη της παρατήρησης.

-Πότε το βάρος των βακτηρίων θα ξεπεράσει τις 1000 μβ;

-Πως θα απαντούσατε στα ερωτήματα 1 και 2 αν το βάρος των βακτηρίων κάθε ώρα υποδιπλασιαζόταν;

Αρχικά οι μαθητές συμπλήρωσαν το βάρος των βακτηρίων από την 1η ως την 8η ώρα σε ένα πίνακα τιμών χρόνου-βάρους ενός αρχείου του λογισμικού Geogebra στην προβολή λογιστικού φύλλου. Όταν δυσκολεύτηκαν να συμπληρώσουν τον

πίνακα για μεγάλες τιμές του χρόνου αναγκάσθηκαν να αναζητήσουν κάποια κανονικότητα στη συμμεταβολή των δυο μεγεθών και να την εκφράσουν με έναν τύπο. Την ορθότητα των απαντήσεων που έδωσαν αυθόρμητα (y=2x και y=x2) ζητήθηκε τότε να την εξετάσουν γραφικά. Η διαπίστωση ότι, η γραφική αναπαράσταση των τιμών του πίνακα δεν ταίριαζε με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων y=2x και y=x2, έδωσε την αφορμή για καινούργιες αναζητήσεις και δημιουργικό διάλογο στις ομάδες και σε ολόκληρη την τάξη. Οι μαθητές δεν κατάφεραν μέσα από το διάλογο να εκφράσουν αλγεβρικά τη συμμεταβολή των δυο μεγεθών. Στο σημείο αυτό παρενέβη η καθηγήτρια και καθοδήγησε τους μαθητές να συμπληρώσουν στον προηγούμενο πίνακα τιμών μια στήλη με τη διαφορά και μια στήλη με το λόγο των διαδοχικών τιμών του βάρους. Οι μαθητές όλων των ομάδων, αξιοποιώντας την προηγούμενη γνώση τους, αναγνώρισαν ότι πρόκειται για μεταβολή κατά γεωμετρική πρόοδο και έγραψαν y=2x. Στο επόμενο βήμα ζητήθηκε από τους μαθητές να εξετάσουν αν η συγκεκριμένη μεταβολή είναι συνάρτηση και αν μπορεί να επεκταθεί στο σύνολο R. Η απάντηση των μαθητών στηρίχθηκε στον ορισμό της συνάρτησης τον οποίο ελέγξανε 5 ομάδες από τον πίνακα τιμών, 3 από τη γραφική παράσταση και καμία από την αλγεβρική μορφή. Από την καθηγήτρια συμπληρώθηκε ο έλεγχος από την αλγεβρική μορφή. Τα ερωτήματα 1β, 1γ, και 2 απαντήθηκαν αριθμητικά και εύκολα από τις ομάδες των μαθητών στην προβολή λογιστικού φύλλου του Geogebra. Στο ερώτημα 3, οι μαθητές δεν μπορούσαν να λύσουν αλγεβρικά την ανίσωση 2x>1000. Καθοδηγήθηκαν από την καθηγήτρια να κάνουν αριθμητική εκτίμηση του x και στη συνέχεια να λύσουν το πρόβλημα με ακρίβεια γραφικά στην προβολή γραφικών του Geogebra. Η φάση του πειραματισμού ολοκληρώθηκε με την εξέταση από τους μαθητές της περίπτωσης υποδιπλασιασμού του βάρους των βακτηρίων κάθε ώρα.

2η φάση: Επισημοποίηση της νέας γνώσης

Με ερωτήσεις από την καθηγήτρια, όπως «*Τελικά τι είδαμε στο προηγούμενο πρόβλημα», «Με ποια γνωστή μεταβολή συνδέσαμε τη μεταβολή βάρος-χρόνος», «Ποια σχέση εκφράζει το βάρος ως προς το χρόνο;», «Εκφράζει η ισότητα αυτή συνάρτηση», «Ποιας γενικής μορφής είναι αυτή η συνάρτηση», «Ποια συνάρτηση παίρνουμε αν η βάση είναι ίση με 1»* έγινε ανακεφαλαίωση των προηγουμένων δράσεων και διαπιστώσεων από τους μαθητές και ακολούθησε η επισημοποίηση της νέας γνώσης από την καθηγήτρια. Δηλαδή, ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, *με* $0 < \alpha \neq 1$ *και x που παίρνει κάθε πραγματική τιμή, ονομάζεται εκθετική και περιγράφει τη μεταβολή δυο μεγεθών κατά γεωμετρική πρόοδο.*

3η φάση: Εφαρμογή και εμπέδωση

Σ' αυτή τη φάση οι μαθητές αντιμετώπισαν ένα νέο πρόβλημα στο φύλλο εργασίας 2 με στόχο την ένταξη της εκθετικής συνάρτησης στην ευρύτερη δομή των συναρτήσεων και τη σύγκριση της εκθετικής με την γραμμική μεταβολή.

1η ενότητα- 2η ώρα: Μελέτη της οικογένειας των εκθετικών συναρτήσεων.

1η φάση: Πειραματισμός

Στους μαθητές δόθηκε το φύλλο εργασίας 3 του οποίου η πρώτη δραστηριότητα καθοδήγησε τους μαθητές να δημιουργήσουν έναν δρομέα α στην προβολή γραφικών του λογισμικού Geogebra με τιμές αρνητικές και θετικές και να εισάγουν τη συνάρτηση f(x) = αx. Μεταβάλλοντας το δρομέα και αυξάνοντας το εύρος των τιμών του, οι μαθητές παρατήρησαν και γενίκευσαν ότι η οικογένεια των εκθετικών συναρτήσεων f(x) = αx αποτελείται από δυο υποοικογένειες. Η δεύτερη δραστηριότητα αναφέρεται στη μελέτη των ιδιοτήτων κάθε υποοικογένειας ξεχωριστά. Η μελέτη έγινε με πειραματισμό πάνω στη γραφική παράσταση μιας συγκεκριμένης συνάρτησης κάθε υποοικογένειας και ακολουθησε γενίκευση με τη βοήθεια κατάλληλα ορισμένων δρομέων από τους μαθητές και καταγραφή των ιδιοτήτων των δυο υποομάδων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίασε η εύρεση του συνόλου τιμών των εκθετικών συναρτήσεων που γραφικά φαίνεται να περιέχει την τιμή 0, κάτι που έρχεται σε αντίφαση με την έννοια της δύναμης θετικού αριθμού. Αυτή η αντίφαση που διαπίστωσαν οι μαθητές έδωσε την ευκαιρία στην καθηγήτρια να καθοδηγήσει τους μαθητές μέσα από διαδοχικά ζουμ στον ημιάξονα Ox (ή Ox΄) σε μια πρώτη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου και της έννοιας της ασυμπτώτου γραφικής παράστασης συνάρτησης.

2η φάση: Επισημοποίηση της νέας γνώσης

Με ερωτήσεις της καθηγήτριας («με τι ασχοληθήκαμε αυτή την ώρα», «πως το διαπιστώσαμε», «γιατί ισχύει», «πως θα το γράφαμε συμβολικά») οι μαθητές καθοδηγήθηκαν να αναστοχασθούν πάνω στις δράσεις τους και να κοινοποιήσουν τα ευρήματά τους σχετικά με τη μελέτη των εκθετικών συναρτήσεων. Έτσι, κοινοποίησαν ότι, ανακάλυψαν δυο υποιοκογένειες στην οικογένεια των εκθετικών συναρτήσεων, μια με $0<\alpha<1$ και μια με $\alpha>1$, οι οποίες έχουν αναλλοίωτες ιδιότητες. Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, το R. Έχουν το ίδιο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Το 0 δεν είναι τιμή της συνάρτησης όπως φάνηκε με διαδοχικά ζουμ στον άξονα xx΄. Οι τιμές των συναρτήσεων και των δυο υποοικογενειών αυξάνονται απεριόριστα, όσο και να προχωρήσουμε προς τα πάνω στον άξονα y΄y, οι τιμές συνεχίζουν να αυξάνονται. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων της υποοικογένειας με $0<\alpha<1$ είναι κατερχόμενες γραμμές, άρα οι συναρτήσεις είναι γνησίως φθίνουσες, δηλαδή για $x1 < x2$ είναι $\alpha x1 > \alpha x2$, ενώ όταν $\alpha>1$ είναι ανερχόμενες γραμμές, άρα οι συναρτήσεις γνησίως αύξουσες, δηλαδή για $x1 < x2$ είναι $\alpha x1 < \alpha x2$. Και στις δυο υποοικογένειες οι γραφικές παραστάσεις πλησιάζουν αλλά δεν ακουμπούν τον άξονα x΄x. Στην πρώτη περίπτωση ασύμπτωτη είναι ο ημιάξονας Ox και στη δεύτερη ο Ox΄. Η καθηγήτρια, ανακεφαλαιώνοντας, επισημοποίησε τη νέα γνώση για τις εκθετικές συναρτήσεις.

3η φάση: Εμπέδωση και εφαρμογές

Για να εμπεδώσουν τη νέα γνώση οι μαθητές κλήθηκαν να ασχοληθούν με προβλήματα του φύλλου εργασίας 4 που περιέχουν: τη συμπλήρωση πίνακα με τις ιδιότητες των δυο υποοικογενειών που μελετήθηκαν, την αντιστοίχιση γραφικών αναπαραστάσεων εκθετικών συναρτήσεων με αλγεβρικές αναπαραστάσεις, τη λύση απλών εκθετικών εξισώσεων και ανισώσεων, αλγεβρικά, με τη βοήθεια της ιδιότητας

«1-1» και της μονοτονίας των εκθετικών συναρτήσεων και γραφικά, με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra. Σαν εργασία για το σπίτι δόθηκαν στους μαθητές ασκήσεις επίλυσης εκθετικών εξισώσεων και ανισώσεων από το σχολικό βιβλίο.

2η ενότητα : 1η ώρα. Ο αριθμός e, η συνάρτηση f(x) = e^x.

Η εισαγωγή στον αριθμός e έγινε με ένα απόσπασμα από το βιβλίο «**Το θεώρημα του παπαγάλου** » του Denis Guedj (σελ. 498) στο οποίο γίνεται μια υπόθεση σχετικά με τον ανατοκισμό ενός ποσού «άπειρες φορές» το χρόνο και την απόδοση του ανατοκισμού. Οι μαθητές κλήθηκαν να εξετάσουν αν η υπόθεση είναι σωστή. Καθοδηγήθηκαν με φύλλο εργασίας και βοηθήθηκαν από την καθηγήτρια να συμπληρώσουν έναν πίνακα με το ανατοκισμένο ποσό για ανατοκισμό μία, δύο, τρείς, …ν φορές το χρόνο στην προβολή λογιστικού φύλλου αρχείου του Geogebra. Στην πορεία ανακάλυψαν αριθμητικά και γραφικά την οριακή τιμή της ακολουθίας $(1+ 1/ν)^ν$, τον αριθμό e σαν το όριο αυτής της ακολουθίας και τον περιορισμό ότι ένα ποσό K όσες φορές και αν ανατοκισθεί το χρόνο το πολύ να γίνει eK σε ένα χρόνο. Στη συνέχεια γίνεται μελέτη της εκθετικής συνάρτησης με παραγωγικό συλλογισμό από το μοντέλο $f(x) = α^x$, α>1.

2η ενότητα : 2η και 3η ώρα. Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής, προβλήματα.

Στην αρχή της 2ης ώρας έγινε εισαγωγή στο νόμο της εκθετικής μεταβολής μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα και ο υπόλοιπος χρόνος καθώς και η 3η ώρα αφιερώθηκαν στην επίλυση προβλημάτων που αναφέρονται σε πραγματικές καταστάσεις και φαινόμενα εκθετικής μεταβολής, όπως για παράδειγμα είναι ο δανεισμός, η διάσπαση ραδιενεργών υλικών και η καμπύλη μάθησης.

Β. Αξιολόγηση της διδακτικής παρέμβασης- Συμπεράσματα

Σύμφωνα με τους παρατηρητές και την καθηγήτρια κατά την πειραματική διδασκαλία ο χρόνος που διατέθηκε στους μαθητές για να εργασθούν ήταν λίγος. Το περιβάλλον του εργαστηρίου πληροφορικής ήταν ελκυστικό και η χρήση τεχνολογίας ενθουσίασε όλους τους μαθητές. Η τάξη ήταν ζωντανή. Σταδιακά διαλύθηκαν οι αρχικές ανησυχίες των μαθητών με καλές και υψηλές επιδόσεις για φασαρία στην τάξη και χάσιμο πολύτιμου χρόνου και αναπτύχθηκε κλίμα συνεργασίας και εμπιστοσύνης μεταξύ των μαθητών και με την καθηγήτρια. Η επίλυση πραγματικών προβλημάτων προκάλεσε το ενδιαφέρον των μαθητών και οδήγησε στην κριτική κατανόηση πραγματικών καταστάσεων όπως για παράδειγμα, ο δανεισμός και η διάσπαση ραδιενεργών υλικών. Στο τελικό τεστ αξιολόγησης, 18 μαθητές (72%) δήλωσαν ότι η επίλυση πραγματικών προβλημάτων ήταν δράση που τους άρεσε πολύ. Η μεγαλύτερη δυσκολία που συνάντησαν οι μαθητές στα προβλήματα, ιδιαίτερα οι μαθητές μέτριων και χαμηλών επιδόσεων, ήταν η αλγεβρική έκφραση της λεκτικής περιγραφής της εκθετικής μεταβολής. Παρά τις δυσκολίες, οι διευκολυντικές παρεμβάσεις της καθηγήτριας, η αλληλοβοήθεια στις ομάδες και η χρήση του λογισμικού κατάφεραν να κρατήσουν όλους τους μαθητές μέσα στη διδακτική και μαθησιακή διαδικασία και η κατάσταση σταδιακά παρουσίασε βελτίωση. Οι διαπιστώσεις αυτές των παρατηρητών και της καθηγήτριας

επιβεβαιώνονται από τους ίδιους τους μαθητές. Ενώ αρχικά δήλωναν αδυναμία να αντιμετωπίσουν ένα πρόβλημα και είχαν χαμηλή αυτοπεποίθηση και αυτοεκτίμηση («Δεν μπορώ να κάνω τίποτα», «Πώς να αρχίσω;), αυτό άλλαξε («Κάτι κατάλαβα τώρα») και στο τελικό τεστ αξιολόγησης 20 μαθητές (80%) δήλωσαν ότι βοηθήθηκαν από την τεχνολογία και από τη συνεργασία στις ομάδες και όλοι οι μαθητές (100%) παραδέχθηκαν ότι η καθηγήτρια ήταν ο σημαντικότερος βοηθός στη μαθησιακή τους διαδρομή.

Η διαδικαστική και η εννοιολογική κατανόηση των εκθετικών συναρτήσεων αναπτύχθηκαν παράλληλα και σταδιακά στους μαθητές σε διαφορετικό βαθμό. Αν και ο αριθμός των ομάδων που έλυναν τα προβλήματα στην τάξη παρουσίασε αυξητική τάση και όλοι σχεδόν οι μαθητές συμμετείχαν στο διάλογο, στο τελικό τεστ αξιολόγησης που συμπληρώθηκε ατομικά από κάθε μαθητή το μέσο ποσοστό επιτυχίας ήταν 74,33% στις ερωτήσεις που εξέταζαν διαδικαστική γνώση και 58,28% στις ερωτήσεις που απαιτούσαν και εννοιολογική κατανόηση. Από τους 25 μαθητές της τάξης 8 μαθητές ήταν μέτριων και χαμηλών επιδόσεων. Οι επιτυχείς μαθητές στα έξι ερωτήματα διαδικαστικής γνώσης ήταν συνολικά 12,20,25,25,13,19 αντίστοιχα και από αυτούς οι μαθητές μέτριων και χαμηλών επιδόσεων ήταν 0,3,8,8,0,2. Στα εφτά ερωτήματα που απαιτούσαν και εννοιολογική κατανόηση απάντησαν συνολικά 16,20,20,9,4,21,12 μαθητές αντίστοιχα και από αυτούς οι 0,3,3,0,0,4,0 ήταν μαθητές μέτριων και χαμηλών επιδόσεων.

Τα αποτελέσματα της διδακτικής μας παρέμβασης αποτελούν ένδειξη ότι η διδασκαλία των εκθετικών συναρτήσεων στη Β΄ λυκείου μπορεί να βελτιωθεί για όλους τους μαθητές. Η συνεργασία και η διαλεκτική επικοινωνία μεταξύ των μαθητών και με την καθηγήτρια, η μέθοδος της καθοδηγούμενης επαναανακάλυψης και η στοχευμένη χρήση της τεχνολογίας μπορούν να συνεισφέρουν προς αυτή την κατεύθυνση. Καθοριστικό σημασία έχει η κινητοποίηση του ενδιαφέροντος των μαθητών, η προηγούμενη γνώση των μαθητών και η καθοδήγηση της καθηγήτριας. Γενικά για τη διδακτική παρέμβαση και ιδιαίτερα για τους μαθητές μέτριων και χαμηλών επιδόσεων χρειάζεται περισσότερος χρόνος. Οι επιλογές για τη διδακτική και μαθησιακή διαδρομή, ιδιαίτερα με τη στοχευμένη χρήση της τεχνολογίας, προκαλούν κάθε γνώση του καθηγητή και αναδεικνύουν το ζήτημα της εκπαίδευσης και της επιμόρφωσης των καθηγητών και κυρίως την ανάγκη σύνδεσης έρευνας και πρακτικής.

Ελπίζουμε η μαρτυρία της πραγματικής τάξης που προσφέρει η διδακτική μας παρέμβαση να γίνει αφορμή για νέες παρεμβάσεις και να συνεισφέρει στον δημόσιο διάλογο για τη διαμόρφωση των σύγχρονων αντιλήψεων πάνω στη διδασκαλία και μάθηση των εκθετικών συναρτήσεων και γενικότερα της σχολικής άλγεβρας.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1.Σημείωση 1, Για περισσότερες πληροφορίες παρουσιάζεται η διδασκαλία εμπλουτισμένη στο δίκτυο των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής http://mathslife.eled.uowm.gr/

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Freire, P. (1985). *The politics of education: Culture, power, and liberation*. Hadley, MA: Bergin & Garvey.

Freire, P. (1994). *Pedagogy of hope: Reliving pedagogy of the oppressed* (R. B. Barr, Trans.). New York: Continuum.

Skovsmose, O. & Valero, P. (2002). Democratic access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International research in Mathematics Education:Directions for the 21st century* (pp. 383-407), Mahwah, NJ: Lawrence, Erlbaum.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics Education, China Lectures,* Dordrecht: Kluwer Academic.

Λεμονίδης, Χ. (2003). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου.* Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΙΑΣ ΠΟΛΥΑΙΣΘΗΤΗΡΙΑΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΝΝΟΙΩΝ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ, ΜΕ ΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ «ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ – ΕΙΚΟΝΙΚΟ – ΑΦΗΡΗΜΕΝΟ»

Ηλιάδου Θάλεια

Μεταπτυχιακή φοιτήτρια, εκπαιδευτικός ΠΕ70

thaliailiadou25@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Πρόκειται για μια διδακτική παρέμβαση η οποία πραγματοποιείται στα πλαίσια μεταπτυχιακού προγράμματος της Παιδαγωγικής Σχολής Φλώρινας, και αφορά τη διδασκαλία των κλασμάτων σε μαθητές της Στ' Δημοτικού με δυσκολίες στα μαθηματικά, με τη στρατηγική Πραγματικό – Εικονικό – Αφηρημένο (Concrete to Representational to Abstract). Για τη συλλογή των ερευνητικών δεδομένων θα χρησιμοποιηθούν μεταξύ άλλων: κριτήρια αξιολόγησης μαθηματικών ικανοτήτων (pro –test, post-test), δομημένες συνεντεύξεις με μαθητές και δασκάλους. Τα αποτελέσματα της έρευνας δεν έχουν αξιολογηθεί ακόμη καθώς η εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης δεν έχει ακόμη ξεκινήσει.

Πέρα από τους γενικούς στόχους μάθησης οι διδασκαλίες αυτές στοχεύουν

- στην κατανόηση και απόκτηση βασικών μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων που αφορούν τα κλάσματα,
- στην καλλιέργεια της μαθηματικής γλώσσας ως μέσο έκφρασης και επικοινωνίας.

Οι διδασκαλίες πρόκειται να πραγματοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς των σχολείων ύστερα από σχετική ενημέρωση από τον ερευνητή.

Ως μέσα διδασκαλίας θα χρησιμοποιηθούν απλά υλικά όπως κύπελλα, ξυλάκια, κλασματικές γραμμές, σχήματα μοτίβου (pattern blocks), κουκίδες αρίθμησης δυο διαφορετικών χρωμάτων και ο υπολογιστής τσέπης.

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ – ΕΙΚΟΝΙΚΟ – ΑΦΗΡΗΜΕΝΟ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η διδακτική μαθησιακή ακολουθία «**Πραγματικό – Εικονικό – Αφηρημένο**» ενσωματώνει στο αρχικό στάδιο τη χρήση αντικειμένων η οποία ακολουθείται από τη χρήση εικονικών αναπαραστάσεων για να φτάσουν στο τέλος οι μαθητές να διευκολύνονται με πιο αφηρημένους συλλογισμούς και αριθμητικά σύμβολα.

Η επιτυχία της συγκεκριμένης στρατηγικής έχει αποδειχθεί ευεργετική τόσο για μικρές ομάδες όσο και για ολόκληρη την τάξη για μαθητές με ή χωρίς δυσκολίες στα

μαθηματικά (Butler et.al. 2003;). Σύμφωνα με τους ερευνητές (Jordan et al. 1999; Butler et al., 2003; Witzel; Mercer & Miller 2003) οι μαθητές είναι πιο πιθανό να απομνημονεύουν, να κωδικοποιούν και να ανακαλούν πληροφορίες, όταν αυτές παρουσιάζονται σε μια πολυαισθητηριακή μορφή: οπτικά, ακουστικά, απτικά και κιναισθητικά. Συνδέοντας τα συγκεκριμένα υλικά με τις εικονικές αναπαραστάσεις αποκτούν ευκολότερη πρόσβαση σε δύσκολες αφηρημένες μαθηματικές έννοιες.

Αποτελέσματα ερευνών δείχνουν ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν χειραπτικά υλικά σημειώνουν σημαντικά καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές που διδάσκονται με τη χρήση μιας πιο συμβολικής προσέγγισης στα μαθηματικά (Butler et al. 2003; Cass et al. 2003).

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Σκοπός της παρέμβασης είναι η διόρθωση – αποκατάσταση των γνωστικών κενών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με δυσκολίες στα μαθηματικά σε έννοιες που αφορούν τα κλάσματα, στα πλαίσια της διερεύνησης των ευεργετικών αποτελεσμάτων που επιφέρει η μάθηση με Πραγματικό – Εικονικό – Αφηρημένο.
Η διδασκαλία των κλασμάτων προσεγγίζεται ολιστικά. Αρχικά γίνεται ανάλυση του κλάσματος με βάση τα μοναδιαία κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \times \frac{1}{\beta}$ με τη χρήση της κλασματικής γραμμής. Οι μαθητές κατασκευάζουν κλάσματα με τις κλασματικές μονάδες και χρησιμοποιούν διάφορα μοντέλα για να αναπαραστήσουν τα κλάσματα και τις υποδιαιρέσεις τους. Υπολογίζουν νοερά με την αίσθηση των αριθμών στα κλάσματα εύκολες προσθέσεις και αφαιρέσεις ετερωνύμων κλασμάτων. Για παράδειγμα, $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$, επειδή το $\frac{3}{4}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Εξασκούνται στην ισοδυναμία των κλασμάτων με τη βοήθεια των μοντέλων π.χ. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ ή $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ και συγκρίνουν δύο κλάσματα με ίδιο παρονομαστή ή ίδιο αριθμητή. Στη συνέχεια οι μαθητές επεκτείνουν τις γνώσεις τους στην ισοδυναμία των κλασμάτων και τη σύγκριση τους και εισάγονται στις πράξεις των κλασμάτων. Χρησιμοποιούν τα ισοδύναμα κλάσματα και τη σχέση $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\nu x \alpha}{\nu x \beta}$ για να δημιουργούν κοινούς παρανομαστές και να προσθέτουν, να αφαιρούν και να συγκρίνουν ετερώνυμα κλάσματα χρησιμοποιώντας οπτικά μοντέλα. Σε ποιο αφηρημένο στάδιο για την μετατροπή σε ομώνυμα, πολλαπλασιάζουν κάθε κλάσμα με τον παρονομαστή του άλλου ($\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} + \frac{\gamma\beta}{\delta\beta} = \frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta}$). Λύνουν προβλήματα που εμπεριέχουν προσθέσεις και αφαιρέσεις ετερωνύμων κλασμάτων και αναφέρονται σε ένα κοινό όλο. Χρησιμοποιούν οπτικά μοντέλα κλασμάτων για να αναπαραστήσουν το πρόβλημα. Στη συνέχεια επεκτείνουν τις γνώσεις τους στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασμάτων. Χειρίζονται το κλάσμα ως διαίρεση του αριθμητή από τον παρονομαστή ($\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta$). Για παράδειγμα, ερμηνεύουν το $\frac{2}{3}$ ως διαίρεση του 2 με το

3. Λύνουν λεκτικά προβλήματα που περιέχουν διαίρεση ακεραίων αριθμών και οδηγούν σε απαντήσεις με τη μορφή κλασμάτων ή μεικτών αριθμών. Ερμηνεύουν το γινόμενο ($\frac{\alpha}{\beta}$) x κ ως α μέρη μιας μοιρασιάς του κ σε β ίσα μέρη (α x $\frac{\kappa}{\beta}$). Λύνουν προβλήματα που εμπεριέχουν πολλαπλασιασμό κλασμάτων και μεικτούς αριθμούς. Πραγματοποιούν διαίρεση μοναδιαίου κλάσματος με ακέραιο αριθμό διάφορο του μηδενός (π.χ. $\frac{1}{4}$: 5) και διαίρεση ακέραιου αριθμού με μοναδιαίο κλάσμα (π.χ. 3: $\frac{1}{4}$) με τη βοήθεια πραγματικών καταστάσεων και οπτικών κλασματικών μοντέλων. Λύνουν προβλήματα που εμπεριέχουν διαίρεση μοναδιαίου κλάσματος με ακέραιο αριθμό διάφορο του μηδενός και διαίρεση ακέραιου αριθμού με μοναδιαίο κλάσμα.

Κάθε διδασκαλία ακολουθεί συγκεκριμένα στάδια παρέμβασης σύμφωνα με τους Butler et al., (2003) αλλά και τους Miller& Hudson (2006):

α. Προοργανωτής (Advance Organizer) Ο δάσκαλος κάνει τις κατάλληλες διασυνδέσεις μεταξύ αυτών που ήδη γνωρίζουν οι μαθητές, με αυτά που πρόκειται να διδάξει.

β. Διδακτική Επίδειξη (Model) Ο δάσκαλος υποδεικνύει τον τρόπο επίλυσης της άσκησης, ενώ ο μαθητής έχει το ρόλο του απλού παρατηρητή.

γ. Καθοδηγούμενη και Ανεξάρτητη Πρακτική Άσκηση (Guided and Independent Practice)

Κάθε μάθημα περιλαμβάνει ευκαιρίες για καθοδηγούμενη και ανεξάρτητη πρακτική άσκηση. Οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να ασκηθούν μέσα από καλά δομημένες και σχεδιασμένες ασκήσεις, που θα ανταποκρίνονται στους στόχους του μαθήματος. Στην καθοδηγούμενη άσκηση δάσκαλος και μαθητές εργάζονται μαζί, ενώ στην ανεξάρτητη άσκηση οι μαθητές ασκούνται στο να εκτελούν τις εργασίες που τους ανατίθενται αυτόνομα, χωρίς καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό.

δ. Ανατροφοδότηση (feedback)

Μετά την ολοκλήρωση κάθε ενότητας π.χ. ισοδύναμα κλάσματα, θα συμπληρώνεται από τους μαθητές ένα φύλλο αξιολόγησης. Σε περίπτωση που οι μαθητές συναντήσουν κάποιο εμπόδιο, ο δάσκαλος επεμβαίνει με διορθωτικές κινήσεις.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ - ΤΕΧΝΙΚΕΣ

Όσον αφορά την προσέγγιση διδασκαλίας – μάθησης εφαρμόζονται απλά ομαδοσυνεργατικά σχήματα και διάφορες εταιρικές τεχνικές αυτόνομης εργασία. Επίσης εφαρμόζεται η μέθοδος της λεκτικής καθοδήγησης και αυτοελέγχου. Η μέθοδος βασίζεται αρχικά στην ετεροκαθοδήγηση του μαθητή από τον εκπαιδευτικό. Στη συνέχεια αντικαθίσταται από την αυτοκαθοδήγηση του ίδιου του μαθητή, η οποία σταδιακά εσωτερικοποιείται (Ματσαγγούρας 2000).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Butler, F. M., Miller, S. P., Creham, K., Babbit, B., & Pierce, T. (2003). 'Fraction instruction for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences.' *Learning Disabilities Research & Practice* (18), pp. 99-111.

Cass, M. Cates, D., Smith M. & Jackson C., (2003). 'Effects of manipulative instruction on solving area and perimeter problems by students with learning disabilities', *Learning Disabilities Research & Practice*, 18 (2), pp.112-120.

Jordan, L., Miller, M. D., & Mercer, C. D. (1999). 'The effects of concrete to semi – concrete to abstract instruction in the acquisition and retention of fraction concepts and skills' *Learning Disabilities: A Multidisciplinary Journal*, 9 (3), pp. 115-122.

Ματσαγγούρα Η. (2000). *Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία και Μάθηση*. Αθήνα: εκδ. Γρηγόρη

Miller, S. P., Hudson. P. J. (2006). *Designing and implementing mathematics instruction for students with diverce learning needs*. Boston : Pearson Education

Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). 'Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model' *Learning Disabilities Research and Practice*, (18), pp. 121–131.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΣΕ ΒΛΕΠΟΝΤΕΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΙ ΤΥΦΛΟ ΜΑΘΗΤΗ Ε΄ ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Κόζα Μαρία

Υπ. Δρ. Παν/μίου Αιγαίου

koza@rhodes.aegean.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο σχολείο ένα παιδί χωρίς προβλήματα όρασης μπορεί να μην έχει άμεση ανάγκη υλικών και μέσων για την κατανόηση και κατάκτηση της γνώσης, ενώ ένα παιδί με προβλήματα όρασης έχει ανάγκη από διάφορα όργανα και μηχανήματα υποστήριξης. Οι μαθηματικές έννοιες κατακτιούνται και παγιώνονται από τους μαθητές με μειωμένη ή ολική απώλεια όρασης μέσα από την εδραίωση των εμπειριών που αποκτούνται από τη χρήση αντικειμένων (Cobb, 2009), καθώς και τη χρήση Νέων Τεχνολογιών, οι οποίες μπορούν να δώσουν ουσιαστικές λύσεις σε προβλήματα που αντιμετωπίζουν τα άτομα αυτά (Κουρουπέτρογλου, 2004). Επίσης, η διδασκαλία των μαθητών με προβλήματα όρασης σε ολιγάριθμα τμήματα, με ειδικά εκπαιδευτικά προγράμματα διδασκαλίας προσαρμοσμένα στις ανάγκες και ικανότητές τους και εφαρμοσμένα ατομικά ή σε μικροομάδα επιφέρει καλύτερα αποτελέσματα.

Παρακάτω παρουσιάζω μια πρόταση επίλυσης ενός προβλήματος για τη διδασκαλία του «μήκους του κύκλου» σε βλέποντες μαθητές Ε΄ τάξης Δημοτικού και ενός τυφλού μαθητή της ίδιας τάξης.

Η πρότασή μου αυτή στοχεύει στην παρουσία μιας σύγχρονης εναλλακτικής διδακτικής - διαδικαστικής προσέγγισης επίλυσης προβλήματος με τη βοήθεια υλικών και Νέων Τεχνολογιών, δίνοντας ιδιαίτερη βαρύτητα στα οφέλη που αποκτούν οι μαθητές και ξεφεύγοντας απ' τις παραδοσιακές δασκαλοκεντρικές διαδικασίες επίλυσης προβλήματος.

ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Τάξη/Αριθμός μαθητών/Ομάδες	:	Ε΄ / 16 μαθητές / 4 ομάδες των 4 ατόμων
Γνωστικό αντικείμενο	:	Γεωμετρία - Μήκος του κύκλου Μέτρηση Κύκλου. Εύρεση του αριθμού π.
Τεχνολογία που απαιτείται	:	The Geometer's Sketchpad, Hot Potatoes, Εκτυπωτής και οθόνη ανάγλυφης γραφής Braille, Αναγνώστες Οθόνης, Φωνητικά Προγράμματα Πλοήγησης.
Βοηθητικό Υλικό	:	Διαβήτης, σπάγκος, μεζούρα, πρόκα, σχοινί, τροχαλίες, κυκλικοί δίσκοι από λαμαρίνες, σιδερένιοι κρίκοι, στρογγυλά ρολόγια, δίσκοι

		μουσικής, στεφάνια ενόργανης γυμναστικής, μέτρο με ενδείξεις σε Braille ή που μιλάει, υπολογιστική μηχανή που μιλάει, σύρματα, οδοντογλυφίδες, καλαμάκια.

Διδακτικοί στόχοι:

✓ Να ανακαλύψουν οι μαθητές ότι τα ποσά διάμετρος κύκλου και μήκος κύκλου είναι ανάλογα, δηλαδή να κατανοήσουν ότι η σχέση του μήκους του κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου είναι σταθερή και ίση με 3,14.

✓ Από τη σχέση $Γ/δ≈3,14$ που θα προκύψει να καταλήξουν οι μαθητές στις ισοδύναμες σχέσεις: $Γ≈3,14·δ$ ή $Γ≈3,14·2·ρ$ ή $Γ≈6,28·ρ$, όπου Γ:μήκος κύκλου, δ:διάμετρος κύκλου και ρ:ακτίνα κύκλου.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ:

Δίνεται στα παιδιά η ακόλουθη δραστηριότητα:

«Η τομή ενός κυλινδρικού κορμού δέντρου είναι ένας κυκλικός δίσκος. Το μήκος του κύκλου του κυλινδρικού κορμού είναι 2,355μ. περίπου. Μπορούμε να βρούμε το μήκος της διαμέτρου του χωρίς να κόψουμε το δέντρο;

Υπόδειξη: Βρείτε, αν υπάρχει, σχέση μεταξύ μήκους κύκλου και μήκους διαμέτρου και ποια είναι αυτή».

Τα παιδιά χωρίζονται σε 4 ομάδες των 4 ατόμων. Το τυφλό παιδί εντάσσεται κανονικά στην ομάδα, μαζί με 3 βλέποντες συμμαθητές.

Επειδή οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι για πρώτη φορά με τέτοιου είδους πρόβλημα για την εύρεση κάποιας βοηθητικής σχέσης στρέφονται στην *υπόδειξη* του προβλήματος που θα τους βοηθήσει στην επισήμανση γενικότερων αρχών, συνδέσεων και σχέσεων. Οι βλέποντες μαθητές προβαίνουν σε οπτικοποίηση, δηλαδή χαράζουν έναν κυκλικό δίσκο ή χρησιμοποιούν και επεξεργάζονται μαζί με τον τυφλό μαθητή διάφορα κυκλικά αντικείμενα, όπως τροχαλίες, στεφάνια ενόργανης γυμναστικής, στρογγυλά ρολόγια και σύρματα στα οποία έχουμε δώσει κυκλικό σχήμα, με οδοντογλυφίδες και καλαμάκια (για τη μέτρηση της διαμέτρου) κτλ. και προσπαθούν να βρουν μια σχέση μεταξύ του μήκους κύκλου και του μήκους της διαμέτρου. Ο τυφλός μαθητής μετρά την περίμετρο των κυκλικών αντικειμένων και τη διάμετρο με σχοινί και στην πορεία μετρά το σχοινί με το μέτρο του (μέτρο με ενδείξεις γραμμένες σε Braille ή με μέτρο που μιλάει).

Ο δάσκαλος καθοδηγεί τους μαθητές προκειμένου να ανακαλύψουν κάποια σχέση μεταξύ περιμέτρου κύκλου και διαμέτρου του.

Μια καλή δραστηριότητα, η οποία μπορεί ν' αναπτυχθεί στο *προαύλιο του σχολείου* και η οποία κατευθύνει τη σκέψη των μαθητών παρουσιάζεται παρακάτω. Το ίδιο φυλλάδιο, αλλά γραμμένο σε Braille (το οποίο έχει εκτυπωθεί σε εκτυπωτή ανάγλυφης γραφής Braille) δίνεται στον τυφλό μαθητή.

Ο τυφλός μαθητής μετρά με το μέτρο του (ομιλών ή με ανάγλυφες ενδείξεις σε Braille) τα μήκη των κύκλων (σχοινιών) και της διαμέτρου των κύκλων και υπολογίζει τα πηλίκα με την ομιλούσα υπολογιστική του μηχανή. Ένας μαθητής από την ομάδα του σημειώνει τα αποτελέσματα στο φυλλάδιο εργασίας και διεξάγονται τα συμπεράσματα. Τα αποτελέσματα όλων των ομάδων ανακοινώνονται στην ολομέλεια και συζητιούνται.

I



Δραστηριότητα στο προαύλιο

Ημερομηνία: _____
Τάξη: Ε΄
Ομάδα: _____

Καρφώστε μια πρόκα στο προαύλιο του σχολείου και με ένα σχοινί που θα δέσετε στην πρόκα για ακτίνα, στην άλλη άκρη του οποίου θα έχετε δέσει μία κιμωλία, φτιάξτε 4 κύκλους με διαφορετική ακτίνα.
Α) Μετρήστε με σπάγκο το μήκος των κύκλων (τοποθετώντας σπάγκο γύρω γύρω) και το μήκος των διαμέτρων. Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το μήκος του κύκλου από τη διάμετρο στον κάθε κύκλο;

Τι παρατηρείτε;
_____
_____
_____
_____
_____

Β) Μετρήστε τώρα με μεζούρα το μήκος των κύκλων και των διαμέτρων τους. Καταγράψτε τα αποτελέσματα των μετρήσεων στον παρακάτω πίνακα και βρείτε το πηλίκο: $\frac{\text{μήκος κύκλου}}{\text{διάμετρο}}$.



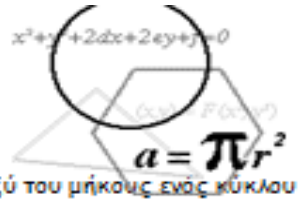
	Γ (μήκος κύκλου)	δ (διάμετρος)	Γ/δ ($\frac{\text{μήκος κύκλου}}{\text{διάμετρο}}$)
1ος κύκλος :			
2ος κύκλος :			
3ος κύκλος :			
4ος κύκλος :			

Τι παρατηρείτε;
_____
_____
_____
_____
_____

Μετά το πέρας των παραπάνω δραστηριοτήτων μπορούν να επέμβουν δραστικά και οι Νέες Τεχνολογίες, με το λογισμικό: 'The Geometer's Sketchpad', με οθόνη ανάγλυφης γραφής Braille, όπου το περιεχόμενο του περιβάλλοντος του 'The

Geometer's Sketchpad' θα αναγνωρίζεται και θα αναπαρίσταται σε γραφή Braille η οποία θα 'διαβάζεται' από τον τυφλό μαθητή με την αφή, με Αναγνώστη Οθόνης, όπου θα «διαβάζει» το οπτικό υλικό της οθόνης και θα το μεταφράζει σε φωνητικό και Φωνητικό Πρόγραμμα Πλοήγησης, όπου θα επιτρέπει στον τυφλό μαθητή την εκτέλεση εντολών και την εισαγωγή στοιχείων με απλή αναγνώριση της φωνής του και όχι με τη χρήση ποντικιού ή πληκτρολογίου.

Ο δάσκαλος δίνει την παρακάτω βοηθητική φωτοτυπία, η οποία είναι γραμμένη και σε Braille για τον τυφλό μαθητή.



Δραστηριότητες στο Sketchpad

Στόχος δραστηριότητας·

Στη δραστηριότητα αυτή θα ανακαλύψουμε τη σχέση μεταξύ του μήκους ενός κύκλου και της διαμέτρου (ραβδιού) του.

Βήματα·

1. Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα και ονομάστε τα άκρα του Α και Β αντίστοιχα, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα:

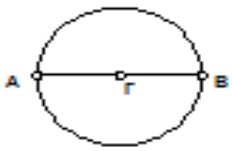


2. Κατασκευάστε το σημείο Γ, δηλαδή το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, όπως φαίνεται παρακάτω:



3. Κατασκευάστε κύκλο ακτίνας ΓΒ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα: (Βεβαιωθείτε ότι ο δείκτης βρίσκεται ακριβώς στο σημείο Β όταν αφήσετε ελεύθερο το πλήκτρο του ποντικιού.)





4. Μετρήστε την περιφέρεια του κύκλου, αφού επιλέξτε πρώτα τον κύκλο και κατόπιν την εντολή **Περιφέρεια** από το μενού **Μέτρηση**.

5. Μετρήστε το τμήμα ΑΒ (τη διάμετρο του κύκλου-ραβδιού), αφού επιλέξετε πρώτα το τμήμα ΑΒ και ύστερα **Μήκος** από το μενού **Μέτρηση**.

6. Μικρύνετε τον κύκλο.

7. Επιλέξτε, κατά σειρά, τη μέτρηση της περιφέρειας και τη μέτρηση του μήκους. Στη συνέχεια επιλέξτε την εντολή **Πινακοποίηση** από το μενού **Μέτρηση**, για να δημιουργήσετε έναν πίνακα για τη μέτρηση της περιφέρειας και τη μέτρηση του μήκους.

8. Μεγαλώστε λίγο τον κύκλο. Κατόπιν κάντε διπλό κλικ στο εσωτερικό του πίνακα για την προσθήκη της εγγραφής αυτής στον πίνακα.

9. Επαναλάβετε το βήμα 8 ωσότου ο πίνακας περιέχει τουλάχιστον τέσσερις με πέντε εγγραφές.

10. Με υπολογιστική μηχανή βρείτε το λόγο (πηλίκο) για καθένα απ' τα ζεύγη των μετρήσεων (περιφέρεια κύκλου – μήκος τμήματος ΑΒ) που έχουν καταγραφεί στον πίνακα.

Τι παρατηρείτε; Σημειώστε τις παρατηρήσεις σας.

11. Βρείτε ποιος είναι ο λόγος της *περιφέρειας του κύκλου* και του *μήκους ΑΒ*, δηλαδή της διαμέτρου αυτού του κύκλου, επιλέγοντας τον **Υπολογισμό** από το μενού **Μέτρηση**. Κατόπιν επιλέγετε την περιφέρεια του κύκλου, πατάτε το / (δια) στο παράθυρο **Υπολογιστής** και στη συνέχεια επιλέγετε το μήκος του ΑΒ. Τέλος πατάτε το ΟΚ στο παράθυρο **Υπολογιστής**.
Ποιο είναι το αποτέλεσμα που βγαίνει; Είναι το ίδιο με τα αποτελέσματα που βρήκατε παραπάνω; Σημειώστε τις παρατηρήσεις σας.



Αλλάξτε το μέγεθος του κύκλου. Μεγαλώστε τον και στη συνέχεια μικρύνετέ τον. Παρατηρήστε την τιμή του λόγου (πηλίκου). Αλλάζει αυτός ο λόγος όσο κι αν μεγαλώνουμε ή μικραίνουμε τον κύκλο;

12. Ο λόγος περιφέρειας προς διάμετρο αναπαρίσταται με το γράμμα π. Συμπληρώστε τις ακόλουθες εκφράσεις χρησιμοποιώντας τον αριθμό π, το γράμμα Γ για την περιφέρεια και το γράμμα δ για τη διάμετρο:

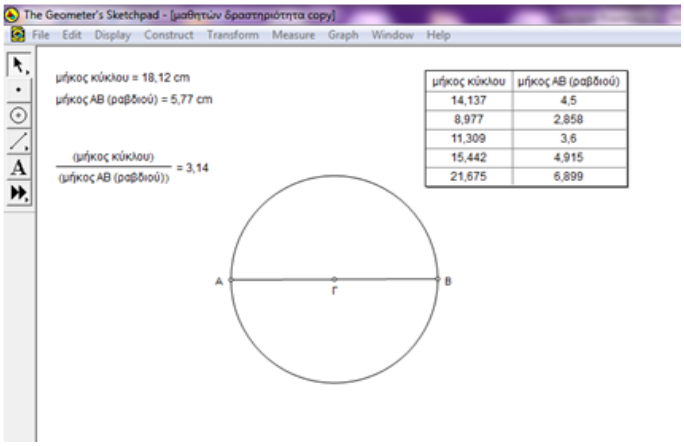
π =

Γ =

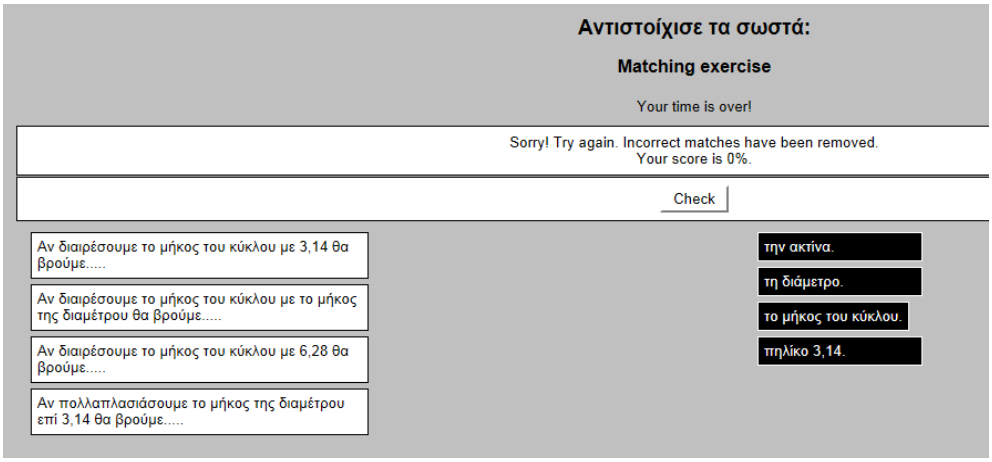
13. Προσπαθήστε να γράψετε μια σχέση για την περιφέρεια χρησιμοποιώντας τα Γ, π και ρ, όπου ρ ακτίνα του κύκλου.

Με τη βοήθεια της φωτοτυπίας οι μαθητές καθοδηγούνται και δημιουργούν κύκλο με τη διάμετρό του, πάνω στον οποίο μπορούν να πειραματιστούν, να τον μεγαλώσουν ή να τον μικρύνουν, να κάνουν μετρήσεις και να τις πινακοποιήσουν, και να παρατηρήσουν τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους, βγάζοντας έτσι κάποια συμπεράσματα για τη σχέση μεταξύ του μήκους του κύκλου και του μήκους της διαμέτρου του [εύρεση του πηλίκου (λόγου) περιφέρειας προς διάμετρο].

Στο τέλος οι μαθητές με τη βοήθεια της φωτοτυπίας που ορίζει ως **π** το λόγο (πηλίκο) της περιφέρειας προς τη διάμετρο, ως **Γ** την περιφέρεια, ως **δ** τη διάμετρο και ως **ρ** την ακτίνα κύκλου ανακαλύπτουν και γράφουν τις μεταξύ τους σχέσεις και δίνουν απάντηση στην ερώτηση του αρχικού τους προβλήματος.



Για Ανακεφαλαίωση, Εμπέδωση και Ανατροφοδότηση των όσων έχουν μάθει οι μαθητές, μπορούν να ασχοληθούν με παιγνιώδεις ασκήσεις αντιστοίχισης φτιαγμένες στο πρόγραμμα Hot Potatoes, οι οποίες θα έχουν περιθώριο χρόνου ενός λεπτού και παρουσίασης του ποσοστού επιτυχίας τους. Στο τυφλό παιδί, πέραν της υποστηρικτικής τεχνολογίας που ανέφερα και παραπάνω για την υποστήριξή του στο πρόγραμμα Hot Potatoes, μπορούν να παρουσιαστούν οι ασκήσεις και σε καρτέλες γραμμένες σε Braille κολλημένες με blue tack πάνω στον πίνακα τις οποίες θα πρέπει να αντιστοιχίσει (ταιριάξει) μεταξύ τους.



Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι τα τεχνολογικά μέσα και λογισμικά μπορούν να ενισχύσουν τη φυσική, γνωστική και υποστηρικτική πρόσβαση, ακόμα και των τυφλών παιδιών, στη μάθηση των μαθηματικών. Σημαντικός επίσης, είναι και ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη σχεδιασμένη ένταξη αυτών των υλικών και των μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση (Σκουμπουρδή, 2013).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

Cobb, R. (2009). Μαθησιακές δεξιότητες, στο: *Παιδιά και νέοι με προβλήματα όρασης: Η πρόσβαση στην εκπαίδευση*. Επιμέλεια έκδοσης: Mason, H. και McCall, St., Επιστημονική Επιμέλεια: Ζώνιου–Σιδέρη, Α. & Ντεροπούλου–Ντέρου Ε., Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα, σελ.: 293–305.

Κουρουπέτρογλου, Γ. (2004). *Ένα ολοκληρωμένο μοντέλο Ενσωμάτωσης Τυφλών Μαθητών στο Σχολείο μέσω Προηγμένων Συστημάτων Πληροφορικής*. (Ελεύθερη ανακοίνωση στο 10ο Πανελλήνιο Συνέδριο Φυσικής, Λουτράκι).

Σκουμπουρδή, Χ. (2013). *Σχεδιασμός ένταξης υλικών και μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών*. Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα.

http://e-bility.gr/eutexnos/assistant.asp?AssistantID=1&index=assistants&ID=-1

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟ ΤΗ ΖΩΗ ΓΙΑ ΤΗ ΖΩΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΕΙΦΟΡΙΑ-
ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΣΕΝΑΡΙΟ ΑΤΥΧΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Ξανθίδου Πηνελόπη & Νοΐτσης Ιωάννης

Σχολ. Σύμβουλος Π.Ε. Ανατ. Θεσ/νίκης, Εκπαιδευτικός Π.Ε.70 101ου Δ.Σ. Θεσ/νίκης

xanthipg@sch.gr, inoitsis@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα Στοχαστικά Μαθηματικά μπορούν να συμβάλλουν στην οικοδόμηση της μαθηματικής σκέψης και του μαθηματικού γραμματισμού. Η παρούσα εργασία επιχειρεί να παρουσιάσει μια διαθεματική διδακτική πρόταση που μπορεί να συμβάλλει στην ανάπτυξη της στατιστικής σκέψης και του στατιστικού γραμματισμού. Η συγκεκριμένη εκπαιδευτική παρέμβαση εφαρμόστηκε στην Στ' τάξη ενός Δημοτικού Σχολείου στο πλαίσιο της υλοποίησης του οράματος του Αειφόρου Σχολείου.

Λέξεις κλειδιά: *Στοχαστικά μαθηματικά, στατιστικός και μαθηματικός γραμματισμός, μέθοδος project, Αειφόρο Σχολείο, ατυχήματα στο σχολείο*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κεντρική επιδίωξη της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο είναι η ανάδειξη των βασικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης καθώς και η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Παράλληλα, η διδασκαλία επιδιώκει τη σύνδεση των παραπάνω με το κοινωνικό περιβάλλον, γεγονός που οδηγεί στην ανάπτυξη του μαθηματικού γραμματισμού. Στην ικανότητα δηλαδή του ατόμου να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον και στον κόσμο γύρω του, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα μαθηματικά καθώς και να αντιλαμβάνεται τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται αυτά για τη λήψη αποφάσεων (Τύπας, 2005:54; Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ.-Π.Ι., 2011:4).

Σημαντικό κομμάτι του μαθηματικού γραμματισμού αποτελεί η ανάπτυξη της στατιστικής σκέψης και του στατιστικού γραμματισμού, που αποτελεί και στόχο στα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών σε όλο τον κόσμο. Η Στατιστική διδάσκεται στα διάφορα επίπεδα εκπαίδευσης, λόγω της χρησιμότητάς της στην καθημερινή ζωή, την σημαντική συμβολή της σε άλλους επιστημονικούς κλάδους, καθώς και τη σημασία της στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης (Batanero, 2004).

Σε αυτήν την εργασία θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε μια εκπαιδευτική παρέμβαση, στην οποία μαθητές μιας Στ' τάξης εμπλέκονται στις διαδικασίες μιας συνθετικής εργασίας (μέθοδος project), στην οποία αξιοποιούνται τα Στοχαστικά Μαθηματικά με σκοπό τη διερεύνηση του ζητήματος των ατυχημάτων στο σχολείο.

Τα ατυχήματα στο σχολείο αποτελούν ένα πραγματικό πρόβλημα, που απασχολεί το σύνολο της σχολικής κοινότητας και η διαχείρισή του στη συγκεκριμένη σχολική μονάδα εντάσσεται λειτουργικά στο στρατηγικό σχέδιο για την υλοποίηση του οράματος του Αειφόρου Σχολείου. Η βασική ιδέα του Αειφόρου Σχολείου, είναι η ενσωμάτωση των αξιών της αειφορίας σε κάθε πλευρά της σχολικής ζωής επιδιώκοντας μεταξύ των άλλων να κινητοποιήσει τη σχολική κοινότητα, να διερευνήσει την πραγματικότητα που βιώνει και να αναλάβει δράσεις για να τη βελτιώσει. Οι παρεμβάσεις μπορεί να γίνουν σε παιδαγωγικό, κοινωνικό και περιβαλλοντικό επίπεδο (Huckle, 2009; Καλαϊτζίδης & Δηλάρη, 2011).

1. ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ: ΑΤΥΧΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

1.1. Στόχοι της εκπαιδευτικής παρέμβασης

Οι μαθητές να είναι σε θέση:

1. Να κατασκευάσουν ένα ερωτηματολόγιο για να διεξάγουν μια έρευνα στο σχολείο σε σχέση με ένα πραγματικό πρόβλημα από το σχολικό τους περιβάλλον.
2. Να συλλέξουν, να οργανώσουν, να αναπαραστήσουν και να παρουσιάσουν τα δεδομένα επιλέγοντας και δημιουργώντας τις κατάλληλες γραφικές παραστάσεις αξιοποιώντας τις ΤΠΕ.
3. Να αναλύσουν και να ερμηνεύσουν τα δεδομένα της έρευνάς τους, ώστε να μπορέσουν να πάρουν τις κατάλληλες αποφάσεις και να βελτιώσουν την καθημερινότητά τους.
4. Να μπορούν να παρουσιάσουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους στους συμμαθητές τους, δημιουργώντας τις κατάλληλες προϋποθέσεις για δημιουργική συζήτηση και αναστοχασμό.

1.2. Περιγραφή της εκπαιδευτικής παρέμβασης

Οι μαθητές με αφορμή τη Θεματική Ενότητα "Ατυχήματα", στο μάθημα της Γλώσσας (Γλώσσα Στ' Δημοτικού, τ.Β., σ. 61-82) και στο πλαίσιο της συμμετοχής τους στις δράσεις του Αειφόρου Σχολείου, αποφάσισαν από κοινού να διερευνήσουν το ζήτημα των ατυχημάτων στο χώρο του σχολείου τους. Κατά τη διαδικασία της ανταλλαγής απόψεων, οι μαθητές κατέληξαν στους στόχους της έρευνας, στη μέθοδο συλλογής των δεδομένων, σε ένα σχεδιάγραμμα προγραμματισμού των επιμέρους φάσεων και δραστηριοτήτων, στα χρονικά όρια και στους βασικούς κανόνες επικοινωνίας και συνεργασίας τους. Για την υλοποίηση των δραστηριοτήτων αξιοποιήθηκαν ΤΠΕ και συγκεκριμένα Λογισμικό Γενικής Χρήσης (MS-Word, Excel, PowerPoint). Οι δραστηριότητες πραγματοποιήθηκαν στην αίθουσα της Στ’1 τάξης με τη βοήθεια του διαδραστικού πίνακα και στο εργαστήριο ΤΠΕ του σχολείου. Έτσι οι μαθητές μπορούσαν να εκμεταλλευτούν και τις 2 ώρες της

Πληροφορικής, που είχαν στο ωρολόγιο πρόγραμμά τους. Η συνεργασία του εκπαιδευτικού της τάξης με τον εκπαιδευτικό της Πληροφορικής είχε την ιδιαίτερη σημασία του στο νέο εκπαιδευτικό περιβάλλον που διαμορφώθηκε στις σχολικές μονάδες, όπου εφαρμόστηκε το Ενιαίο Αναμορφωμένο Εκπαιδευτικό Πρόγραμμα.

Η πρώτη δραστηριότητα αποσκοπούσε στην κατασκευή του ερωτηματολογίου και πραγματοποιήθηκε σε δύο διδακτικές ώρες, μία στην ολομέλεια της τάξης και μία στο εργαστήριο. Οι μαθητές αρχικά κατέληξαν μέσα από τη διαδικασία του νοητικού καταιγισμού σε έξι βασικούς άξονες διερεύνησης του ζητήματος, που αποτυπώθηκαν αντίστοιχα στα έξι ερωτήματα του ερωτηματολογίου με τις πιθανές απαντήσεις τους. Οι μαθητές χωρίστηκαν τυχαία σε έξι ομάδες των τεσσάρων ατόμων και συνεργάστηκαν στο εργαστήριο της Πληροφορικής για να μορφοποιήσουν το ερωτηματολόγιο στον επεξεργαστή κειμένου (MS-Word).

Η δεύτερη δραστηριότητα προέβλεπε αρχικά την πιλοτική εφαρμογή του ερωτηματολογίου σε 24 συμμαθητές τους (4 από κάθε τάξη, 2 αγόρια και 2 κορίτσια) και αφού έγιναν οι αναγκαίες τροποποιήσεις με τη βοήθεια του διαδραστικού πίνακα στην ολομέλεια της τάξης, αποφασίστηκε να εφαρμοστεί σε όλες τις τάξεις του σχολείου. Στις τάξεις Α, Β οι μαθητές αποφάσισαν να γίνει υπό τη μορφή κλειστής συνέντευξης, με οδηγό το ερωτηματολόγιο ενώ στις υπόλοιπες τάξεις να διεξαχθεί κανονικά η έρευνα με τη χρήση του ερωτηματολογίου. Κάθε ομάδα επέλεξε τυχαία την τάξη στην οποία εφάρμοσε το ερωτηματολόγιο. Στο πρώτο διάλειμμα αναστοχασμού οι μαθητές αποφάσισαν και τη μέθοδο καταμέτρησης των απαντήσεων, που εφαρμόστηκε τελικά στην επόμενη δραστηριότητα.

Η τρίτη δραστηριότητα πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο σε δύο ώρες. Τα ερωτηματολόγια κόπηκαν σε έξι τμήματα, όσα και τα ερωτήματα και κάθε ομάδα ανέλαβε τυχαία την καταμέτρηση ενός από αυτά. Οι ομάδες με τη βοήθεια του Φύλλου Εργασίας 1, που περιείχε αναλυτικές οδηγίες για τον τρόπο που θα εργαστούν στο λογιστικό φύλλο του Excel, ταξινόμησαν τις απαντήσεις σε πίνακες συχνοτήτων ανά τάξη και φύλλο. Κάθε ομάδα ανέλαβε να επεξεργαστεί τα δεδομένα της ίδιας ερώτησης για κάθε τάξη ξεχωριστά και για το σύνολο του σχολείου. Με αυτήν την επιλογή εξασφαλίστηκε η ομοιομορφία στην επεξεργασία και αναπαράσταση των δεδομένων καθώς και η σύγκριση των αποτελεσμάτων μιας τάξης με το συνολικά αποτελέσματα του σχολείου. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων οι μαθητές ερμήνευσαν τα δεδομένα καταγράφοντας τις παρατηρήσεις τους και τις διαπιστώσεις τους στο Φύλλο Εργασίας 2. Στο δεύτερο διάλειμμα αναστοχασμού οι ομάδες αντάλλαξαν τις απόψεις τους για τον τρόπο που εργάστηκαν και υπήρχε η σχετική ανατροφοδότηση.

Η τέταρτη δραστηριότητα προέβλεπε κάθε ομάδα να δημιουργήσει μια παρουσίαση στο Powerpoint, η οποία με μια σειρά από διαφάνειες θα παρουσίαζε το ερώτημα, τους πίνακες συχνοτήτων, τις γραφικές τους παραστάσεις για την κάθε τάξη και για το σύνολο του σχολείου. Η τελευταία διαφάνεια περιείχε τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα για το συγκεκριμένο ερώτημα.

Στην τελική δραστηριότητα (αξιολόγησης) η κάθε ομάδα παρουσίασε τα αποτελέσματα της εργασίας της στην ολομέλεια της τάξης με τη βοήθεια του διαδραστικού πίνακα. Οι ομάδες είχαν την ευκαιρία να συζητήσουν τα ευρήματα της έρευνας, να αναστοχαστούν για τον τρόπο που εργάστηκαν και να επικυρώσουν ή να συμπληρώσουν τις διαπιστώσεις τους. Έτσι όλες οι ομάδες κατάφεραν να συνεισφέρουν στη σύνθεση του γενικότερου έργου και να αποκτήσουν μια ολοκληρωμένη εικόνα για το σύνολο των αποτελεσμάτων του ερωτηματολογίου. Η διάχυση των αποτελεσμάτων της έρευνας με στόχο την ευαισθητοποίηση της σχολικής κοινότητας αποφασίστηκε να γίνει σε κάθε τάξη ξεχωριστά από μεικτές ομάδες, που τα μέλη τους ανήκαν στις έξι αρχικές ομάδες.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη συγκεκριμένη εκπαιδευτική παρέμβαση δόθηκε η ευκαιρία στους μαθητές να διερευνήσουν οι ίδιοι τα ατυχήματα που συμβαίνουν στο σχολείο τους, να συνεργαστούν και να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους με σκοπό να αντλήσουν αυθεντικές πληροφορίες γύρω από ένα ζήτημα που τους αφορά άμεσα. Τα μαθηματικά τους βοήθησαν να επεξεργαστούν τις σχετικές πληροφορίες, να κατανοήσουν την υπάρχουσα κατάσταση στο σχολείο τους και να πάρουν σημαντικές αποφάσεις για το μέλλον.

Σε σχέση με το ζήτημα που ερεύνησαν οι μαθητές διαπίστωσαν τη συχνότητα και το είδος των ατυχημάτων που συμβαίνουν σε αυτούς και στους συμμαθητές τους, εντόπισαν τα επικίνδυνα σημεία του σχολείου τους, βρήκαν τα σημαντικότερα αίτια ατυχημάτων και διαπίστωσαν τη σχέση τους με το πρόβλημα της ενδοσχολικής βίας. Οι μαθητές με εργαλείο τα Στοχαστικά Μαθηματικά κατάφεραν να διερευνήσουν, να περιγράψουν και να ερμηνεύσουν το ζήτημα των ατυχημάτων στο σχολείο τους και να πάρουν σημαντικές αποφάσεις. Ειδικότερα αποφάσισαν να οργανώσουν συζητήσεις σε επίπεδο τμήματος ή τάξης με θέμα ορισμένες επικίνδυνες συμπεριφορές (στο διάλειμμα, στη γραμμή, στην αυλή, στη σκάλα κτλ.), οι οποίες μπορούν να προκαλέσουν κάποιο ατύχημα, με σκοπό την ευαισθητοποίηση και τη διαμόρφωση ενός Οδηγού Πρόληψης Ατυχημάτων. Εντόπισαν τα επικίνδυνα σημεία στην αυλή του σχολείου (πέτρες, λακκούβες, κλαδιά κ.τλ.) και ενημέρωσαν το Διευθυντή του σχολείου. Πρότειναν ακόμη να χωριστεί η εσωτερική σκάλα με κόκκινη γραμμή στη μέση και ειδικά σήματα, για αυτούς που ανεβαίνουν και κατεβαίνουν.

Τα προβλήματα που αναδείχθηκαν σε σχέση με τις δεξιότητες στα Μαθηματικά και τις ΤΠΕ αντιμετωπίστηκαν με παρεμβάσεις των εκπαιδευτικών στο πλαίσιο της διαμορφωτικής αξιολόγησης. Χαρακτηριστικά χρειάστηκε να συμβουλέψουν και να υποστηρίξουν τους μαθητές για να υπολογίσουν τις σχετικές συχνότητες ή τη μέση τιμή κατά περίπτωση, ώστε να μπορέσουν να συγκρίνουν τα αποτελέσματα μιας τάξης σε σχέση με το σύνολο του σχολείου ή σε σχέση με το φύλο. Αρκετά χρήσιμο αποδείχτηκε το Φύλλο Εργασίας 1, στο οποίο υπήρχαν αναλυτικές οδηγίες για τη

δημιουργία των σχετικών πινάκων συχνοτήτων, τον υπολογισμό της μέσης τιμής (όπου χρειαζόταν) και την κατασκευή των γραφικών παραστάσεων. Σε αυτές αρκετά χρήσιμη αποδείχτηκε η δυνατότητα υπολογισμού και απεικόνισης των σχετικών συχνοτήτων.

Τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν στη διαμόρφωση και τη λειτουργία των ομάδων ξεπεράστηκαν με τη διαμεσολάβηση των εκπαιδευτικών στα διαλείμματα αναστοχασμού. Οι εκπαιδευτικοί ενθάρρυναν όλους τους μαθητές να εμπλακούν ενεργά στις δραστηριότητες της ομάδας τους, αναλαμβάνοντας κυκλικά το ρόλο του συντονιστή, του χρήστη, του συμβούλου ή του παρουσιαστή. Ορισμένα προβλήματα προέκυψαν με τη διατάραξη του ημερήσιου προγραμματισμού των τάξεων που εμπλέκονταν στις διαδικασίες της έρευνας. Τα προβλήματα αυτά ξεπεράστηκαν με τη συνεργασία των υπεύθυνων εκπαιδευτικών των τάξεων και τον έγκαιρο προγραμματισμό των επισκέψεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Batanero, C. (2004). *Statistics Education as a Field for Research and Practice. Proceedings of ICME-10*. Regular Lecture. Copenhague: I.C.M.I..

Καλαϊτζίδης Δ. & Δηλάρη Β. (2010). Το βραβείο Αειφόρου Σχολείου. Εισήγηση στο 5ο Συνέδριο ΠΕΕΚΠΕ, Ιωάννινα: ΠΕΕΚΠΕ.

Τύπας, Γ. (2005). *Τα μαθηματικά του Δημοτικού μέσα από τα νέα διδακτικά εγχειρίδια. Επιμόρφωση Σχολικών Συμβούλων και εκπαιδευτικών ΠΕ στο ΔΕΠΠΣ και ΑΠΣ.* Αθήνα: Π.Ι./ΥΠΕΠΘ.

Υ.Π.Δ.Β.Μ.Θ.-Π.Ι. (2011). Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό). Οδηγός για τον εκπαιδευτικό "Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων". Αθήνα: Υ.Π.Ε.Π.Θ.-Π.Ι.

Huckle, J. (2009). Sustainable Schools, responding to new challenges and opportunities. *Geography,* Vol. 94(1):13-21.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΠΡΟΣΘΕΤΕΩΝ ΜΕ ΚΡΑΤΟΥΜΕΝΟ ΜΕΣΩ ΤΟΥ PROJECT ΤΗΣ ΚΙΝΗΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ

Σκανδαλάκη Εμμανουέλα

Υπ. Δρ. Πανεπιστημίου Αιγαίου

meskandal@yahoo.gr, skandalaki@aegean.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διδακτική πρόταση διερευνάται η δυνατότητα εμπλοκής ενός project της Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης σε μια μαθηματική δραστηριότητα. Αναδεικνύονται διαθεματικές τεχνικές, εργασία ανά ομάδες, και σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις των Μαθηματικών, όπως η διατύπωση προβλήματος (problem posing) και η χρήση αναπαραστάσεων. Η προτεινόμενη διδακτική πρακτική επιχείρησε να προσαρμόσει τις απαιτήσεις της διδασκαλίας στις διαφοροποιημένες ανάγκες και δυνατότητες του μαθητικού δυναμικού της τάξης.

Η δανειστική βιβλιοθήκη είναι ένα από τα διαθεματικά σχέδια εργασίας που προτείνει το Δ.Ε.Π.Π.Σ. των Μαθηματικών (2003:263) και έχει προεκτάσεις στη Γλώσσα, στη Μελέτη Περιβάλλοντος και στην Αισθητική Αγωγή. Η Γ΄ Δημοτικού ενός δημοτικού σχολείου μεσοαστικής περιοχής συμμετέχει στο πρόγραμμα καινοτόμου δράσης της Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης «Βιβλία σε ρόδες[1]» με θέμα «η θάλασσα». Οι μαθητές εντόπισαν τις ομοιότητες και τις διαφορές μεταξύ του τρόπου λειτουργίας μίας σταθερής δανειστικής βιβλιοθήκης και μιας κινητής. Στο πλαίσιο της δραστηριότητάς μας αξιοποιούμε τη δημιουργία μαθηματικού προβλήματος (problem posing) σε δομημένο περιβάλλον μάθησης (Stoyanova, 1998), καθώς οι μαθητές συμπληρώνουν τους αριθμούς στο πρόβλημα που τους δίνεται. Η διδακτική παρέμβαση που ακολουθήσαμε είχε χρονική διάρκεια μίας εβδομάδας και υπηρετούσε τους παρακάτω στόχους :

- ✓ Να καταμετρούν βιβλία και να αναπτύσσουν στρατηγικές μέτρησης.
- ✓ Να προσθέτουν διψήφιους αριθμούς μέχρι το 100 και να υπολογίζουν αθροίσματα.
- ✓ Να κατηγοριοποιούν τα είδη των βιβλίων και να σχεδιάζουν καταστάσεις προβληματισμού.

[1] Τα «Βιβλία σε ρόδες» είναι ένα πρωτοποριακό πρόγραμμα που φέρνει μικρές, κινητές, θεματικές βιβλιοθήκες μέσα στη σχολική τάξη.

- ✓ Να εκφράζουν τη μαθηματική τους σκέψη εικονιστικά αναπαριστώντας τη βιβλιοθήκη και απεικονίζοντας το μαθηματικό τους συλλογισμό στην αναπαράσταση.
- ✓ Να συνεργάζονται και να ανταλλάσουν ιδέες, σκέψεις και δεξιότητες.
- ✓ Οι θεμελιώδεις διαθεματικές έννοιες που επισημάνθηκαν αφορούν: στην Ποσότητα, στον Πολιτισμό, στη Μεταβολή και στον Χώρο.

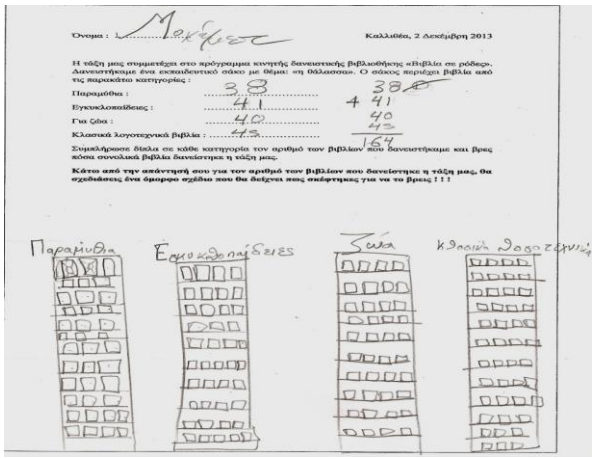
Κατά την επιστροφή των βιβλίων που δανείστηκαν οι μαθητές από τα «Βιβλία σε ρόδες» στη σχολική τάξη ζητάμε να τα τοποθετήσουν πάνω στα θρανία. Οι μαθητές χωρίζονται σε ανομοιογενείς τετράδες σε συνεργατικό πλαίσιο (Καφούση & Χαβιάρης, 2013) και παρουσιάζουν τα βιβλία που διάβασαν. Στη συνέχεια, οι ομάδες κατηγοριοποιούν, μετά από δική μας παρακίνηση, τα βιβλία σε τέσσερις κατηγορίες : παραμύθια, εγκυκλοπαίδειες, βιβλία για ζώα και παιδικά λογοτεχνικά βιβλία. Δίνουμε στους μαθητές μας το ακόλουθο πρόβλημα :
«Η τάξη μας συμμετέχει στο πρόγραμμα κινητής δανειστικής βιβλιοθήκης «Βιβλία σε ρόδες». Δανειστήκαμε ένα εκπαιδευτικό σάκο με θέμα: «η θάλασσα». Ο σάκος περιέχει βιβλία από τις παρακάτω κατηγορίες :
Παραμύθια : ……..
Εγκυκλοπαίδειες : ……..
Για ζώα : ……..
Κλασικά λογοτεχνικά βιβλία : ……..
Συμπλήρωσε δίπλα σε κάθε κατηγορία τον αριθμό των βιβλίων που δανειστήκαμε και βρες πόσα συνολικά βιβλία δανείστηκε η τάξη μας.
Κάτω από την απάντησή σου για τον αριθμό των βιβλίων που δανείστηκε η τάξη μας, θα σχεδιάσεις ένα όμορφο σχέδιο που θα δείχνει πως σκέφτηκες για να το βρεις ! ! !»

Δεν έλειψαν οι απορίες από τους μαθητές μας αν μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν αριθμούς υποθετικούς που να αντιπροσωπεύουν το πλήθος των βιβλίων.

Μαθητής: Δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε δικούς μας αριθμούς, κυρία;

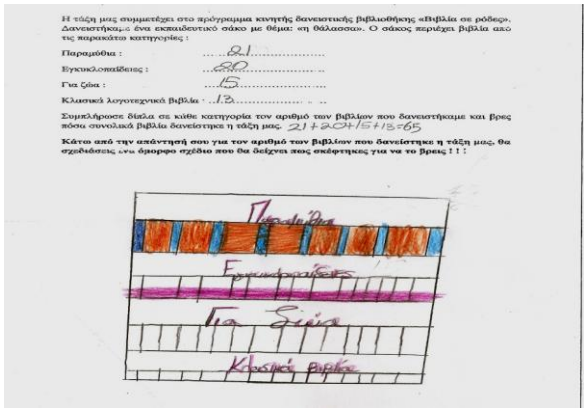
Εκπαιδευτικός: Βεβαίως ….. Ποιους αριθμούς θέλεις να βάλεις; Γιατί σε διευκολύνουν αυτοί ;

Στη συνέχεια παρατίθενται τρία ενδεικτικά παραδείγματα λύσεων της δοθείσας δραστηριότητας από διαφορετικής επίδοσης μαθητές στα Μαθηματικά σύμφωνα με το δάσκαλο.



Εικ. 1: «Η ζωγραφιά του Μοχάμεντ»

Ο Μοχάμεντ, μαθητής με υψηλές επιδόσεις έλυσε την πρόσθεση με κάθετο αλγόριθμο, ενώ στη ζωγραφιά του αναπαράστησε το πλήθος των βιβλίων της κάθε κατηγορίας σε τέσσερις διαφορετικές στήλες.



Εικ. 2: «Η ζωγραφιά της Μαριαλένας»

Η Μαριαλένα που είναι μαθήτρια μέτριας επίδοσης, έλυσε την πρόσθεση με κάθετο αλγόριθμο. Στην αναπαράσταση σε δύο άνισου μεγέθους στήλες παρουσίασε τα βιβλία των τεσσάρων κατηγοριών με τέσσερα διαφορετικά χρώματα. Στη συνέχεια, αρίθμησε τα κουτάκια προκειμένου να ελέγξει αν το πλήθος των ζωγραφισμένων βιβλίων αντιστοιχεί στο ίδιο άθροισμα με τον κάθετο αλγόριθμο.



Εικ. 3: «Η ζωγραφιά της Σέβης»

Η Σέβη είναι μαθήτρια χαμηλής επίδοσης στα Μαθηματικά. Επιχείρησε να λύσει την πρόσθεση οριζόντια και κατέληξε σε λάθος άθροισμα. Σημαντική είναι η επισήμανση πως ούτε η αναπαράσταση της μαθηματικής της σκέψης ήταν ακριβής και λειτουργική.

Τα ενδεικτικά παραδείγματα που παρουσιάσαμε αναδεικνύουν τις διαφορετικές προσεγγίσεις των μαθητών, που ίσως μπορούν να συσχετιστούν με το επίπεδό τους στα μαθηματικά. Έτσι παρατηρούμε ότι οι μαθητές με τη μέτρια και

την υψηλή μαθηματική επίδοση έλυσαν την πρόσθεση με κρατούμενο χρησιμοποιώντας κάθετο αλγόριθμο. Αντίθετα, η μαθήτρια με χαμηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά επιχείρησε την οριζόντια πρόσθεση διψήφιων, παρόλο που δεν υπήρχε κρατούμενο, κατέληξε σε λάθος άθροισμα.

Η αναπαράσταση του μαθητή με υψηλές μαθηματικές επιδόσεις (Εικ.1) διακρίνεται από δομή, καθώς οι στήλες απαρτίζονται από σειρές με ισάριθμες ομάδες και διευκολύνουν τη σκέψη. Αντίστοιχα, η μαθήτρια με μέτριες επιδόσεις (Εικ. 2) απαρίθμησε γραπτώς τις ποσότητες που επρόκειτο να προσθέσει, προκειμένου να καταλήξει στο σωστό άθροισμα. Ενώ, η μαθήτρια χαμηλών επιδόσεων (Εικ.3) παρουσίασε ασαφείς αναπαραστάσεις.

Η παραπάνω μαθηματική δραστηριότητα εντάσσεται σε ένα project Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης και αναδεικνύει τη δεξιότητα της εφαρμογής των μαθηματικών εννοιών στην καθημερινή ζωή (Καφούση & Σκουμπουρδή, 2008). Ωστόσο, με δεδομένο ότι οι αναπαραστάσεις αποτελούν ταυτόχρονα αντικείμενο μάθησης και μέσο διδασκαλίας (Σκουμπουρδή, 2012) δημιουργείται ένας γόνιμος προβληματισμός για την αξιοποίηση των αναπαραστάσεων των μαθητών στον εντοπισμό και αξιολόγηση των δυσκολιών τους στην πρόσθεση με κρατούμενο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Καφούση, Σ. & Σκουμπουρδή, Χ. (2008). *Τα μαθηματικά των παιδιών 4-6 ετών. Αριθμοί και χώρος.* Αθήνα : Πατάκης.

Καφούση, Σ. & Χαβιάρης, Π. (2013). *Σχολική τάξη, οικογένεια, κοινωνία και μαθηματική εκπαίδευση*. Αθήνα : Πατάκης.

Σκουμπουρδή, Χ. (2012). *Σχεδιασμός ένταξης υλικών και μέσων στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών*. Αθήνα : Πατάκης.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. – In: A. McIntosh & N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective*. Edith Cowan University: MASTEC, p. 164-185.

ΕΞΩΣΧΟΛΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ ΜΕ ΡΟΜΑ ΜΑΘΗΤΕΣ 1

Φανή Βαλαή, Ελένη Γκανά, Χαρούλα Σταθοπούλου, Χρήστος Γκόβαρης

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

fvalai@ece.uth.gr, hastath@uth.gr, egana@uth.gr, govaris@uth.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πρακτική που ακολουθεί σχεδιάστηκε στο πλαίσιο του Προγράμματος Εκπαίδευσης Παιδιών Ρομά (Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας) και υλοποιήθηκε στο 6ο Νηπιαγωγείο Τυρνάβου (Ν. Λαρίσης). Η ενίσχυση των νηπίων είχε τη μορφή της παράλληλης στήριξης, και ενίοτε, της ενισχυτικής διδασκαλίας. Η παρέμβαση υλοποιήθηκε σε τμήμα όπου φοιτούσαν 3 Ρομά μαθητές (από τους 20). Ακολουθεί τη λογική του νέου αναλυτικού προγράμματος και αποτελεί μία προσπάθεια οικοδόμησης σχολικής μαθηματικής γνώσης μέσα από την αξιοποίηση της άτυπης μαθηματικής γνώσης και των ενδιαφερόντων τους, γεγονός που θεωρούμε ότι την καθιστά ένα παράδειγμα «καλής πρακτικής».

Η σύνδεση των πολιτισμικών και κοινωνικών μαθηματικών εφαρμογών με τα σχολικά μαθηματικά αποτελεί ένα κρίσιμο ζήτημα στην εκπαίδευση των μαθηματικών (Wager, 2012), καθώς πολλοί μαθητές δε διακρίνουν τη σύνδεση ανάμεσα στα μαθηματικά εντός και εκτός σχολείου (Masingila, 2002). Επιπλέον, η αποτυχία του σχολείου να αναγνωρίσει τις μαθηματικές δεξιότητες που μπορούν οι μαθητές να φέρουν στην τάξη μεγαλώνει το χάσμα ανάμεσα στη σχολική και την εξωσχολική εμπειρία (Wager, 2012). Η έρευνα έχει αναδείξει τη σημασία της αξιοποίησης άτυπης γνώσης για μια διδασκαλία με στόχο αφενός την κατανόηση (Gutierrez, 2009) και αφετέρου τη δημιουργία ίσων ευκαιριών πρόσβασης και συμμετοχής.

Μια τέτοια διδασκαλία ανταποκρίνεται, επιπλέον, και στις αρχές της πολιτισμικά σχετικής παιδαγωγικής**,** όπως ορίζεται από την Geneva Gay (2002), δηλαδή ως "*η χρήση πολιτισμικών χαρακτηριστικών, εμπειριών και προοπτικών των μαθητών όλων των πολιτισμικών ομάδων ώστε να γίνει πιο αποτελεσματική η διδασκαλία*" (σ. 106). Με τον όρο πολιτισμικά χαρακτηριστικά αναφέρεται σε έννοιες και αξίες, παραδόσεις και γλωσσικές κατασκευές, δομές επικοινωνίας, στο μαθησιακό προφίλ και τις μορφές κοινωνικών σχέσεων που συγκροτεί η εξωσχολική εμπειρία των μαθητών (Gay, 2002). Τα χαρακτηριστικά αυτά πρέπει να υπαγορεύουν αντίστοιχες διδακτικές πρακτικές σε ένα πλαίσιο διαπολιτισμικής παιδαγωγικής.

[1] Η εργασία στηρίζεται σε δεδομένα του έργου «Εκπαίδευση των παιδιών Ρομά στις περιφέρειες Ηπείρου, Ιονίων Νήσων, Θεσσαλίας και Δυτικής Ελλάδας», 2010-2013 (Κ.Π. 304263).

1. Η ΤΡΑΠΟΥΛΑ: ΜΙΑ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΚΟΙΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΡΟΜΑ

Στο πλαίσιο της δημιουργικής παρατήρησης, συσχέτισης, και αναστοχασμού που υπαγόρευσε η κοινότητα πρακτικής που είχαμε δημιουργήσει, σχεδιάσαμε και υλοποιήσαμε δραστηριότητες που συνδέονται με το πολιτισμικό περιβάλλον των μαθητών και με τις συνακόλουθες άτυπες γνώσεις που αποκτούν μέσα σ' αυτό. Με επιτόπια έρευνα στον οικισμό και την ανάπτυξη σχέσεων εμπιστοσύνης με τις οικογένειες των μαθητών, συλλέξαμε πληροφορίες για την καθημερινότητα των παιδιών, καθώς και τα ενδιαφέροντά τους. Το παιχνίδι με την τράπουλα αποτελεί μια ενασχόληση με την οποία ήταν εξοικειωμένοι όλοι οι μαθητές του νηπιαγωγείου, καθώς πρόκειται για μια αγαπημένη συνήθεια σχεδόν όλων των οικογενειών του οικισμού των Ρομά στην οποία συμμετέχουν και τα ίδια. Έτσι η τράπουλα θεωρήθηκε ως διαμεσολαβητικό εργαλείο το οποίο θα διευκόλυνε την ανάπτυξη μαθηματικής γνώσης, καθώς ήταν οικείο και παρείχε νόημα για τα παιδιά, συνδεδεμένο με την καθημερινότητα και την εμπειρία τους.

2. ΣΤΟΧΟΙ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Οι στόχοι διαμορφώθηκαν σύμφωνα με το Νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα και αντιστοιχούν στον άξονα: «αριθμοί και πράξεις»: Να απαγγέλουν, να γράφουν και να διαβάζουν αριθμούς μέχρι το 10, να αναγνωρίζουν αριθμητικές ποσότητες χρησιμοποιώντας στρατηγικές άμεσης αναγνώρισης, να καταμετρούν αντικείμενα –πραγματικά ή σε εικόνες— μέχρι το 10, να βρίσκουν τον προηγούμενο και τον επόμενο ενός αριθμού σε αριθμούς μέχρι το 10, να συγκρίνουν ποσότητες και αριθμούς, να προσεγγίσουν την πράξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

3. ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Χωριστήκαμε σε δύο ομάδες των 4 ατόμων με Ρομά και μη Ρομά μαθητές. Η τράπουλα μοιράστηκε στις ομάδες και:

Α. Οι Ρομά μαθητές αριθμούσαν μέχρι το 10 και με τη βοήθεια των συμπαικτών τους, τις περισσότερες φορές αναγνώριζαν σωστά τη συμβολική απεικόνιση του αριθμού.

Εκπαιδευτικός: *Ποιος αριθμός είναι αυτός;*

Θωμαή*: Σταρ..*

Εκπαιδευτικός: *Ναι, το 4 (επικύρωση της μητρικής γλώσσας). Ποιος αριθμός είναι μετά;*

Θωμαή: *2;*

Εκπαιδευτικός: *Για μέτρα..1,2,.....*

Θωμαή: *ένα, δύο, τριν, σταρ* (4)... *πέντε, πάντς* (5) (χρήση διπλών κωδίκων: Ρομανί, Ελληνικά)!

Η επιφυλακτικότητα που επέδειξαν αρχικά οι Ρομά μαθήτριες στο να συμμετάσχουν στη δραστηριότητα οφείλεται προφανώς στην επίγνωσή τους για το «έλλειμμα» του γλωσσικού κώδικα που έπρεπε να χρησιμοποιήσουν, δηλαδή τα ελληνικά. Όταν η εκπαιδευτικός νομιμοποιεί τη χρήση της ρομανί και αποδέχεται την εναλλαγή των δύο γλωσσικών κωδίκων ως μέσο επικοινωνίας, οι μικρές μαθήτριες υλοποιούν την καταμέτρηση και με επιτονισμό ενθουσιασμού δηλώνουν το θετικό αίσθημα της αυτοεπικύρωσης στα δρώμενα της διδασκαλίας. Στη συνέχεια της δραστηριότητας η συμμετοχή τους είναι σαφώς πιο ενεργητική, ψιθυρίζουν αριθμολέξεις που ακούν από τους συμμαθητές τους στα ελληνικά συσχετίζοντας τις δύο εναλλακτικές γλωσσικές εκφράσεις και τέλος αποτολμούν την πλήρη καταμέτρηση στη γλώσσα του σχολείου.



Β. Στη δεύτερη φάση της δραστηριότητας, οι δύο ομάδες ‘ρίχνουν’ ένα χαρτί η καθεμία και καλούνται να τα συγκρίνουν. Μια στρατηγική που χρησιμοποίησαν τα παιδιά για τη διάταξη αριθμών ήταν η απαρίθμηση των συμβόλων που υπήρχαν στο φύλλο της τράπουλας.

Εκπαιδευτικός: *Ποιο είναι μεγαλύτερο; Το 2 ή το 8;*

Δημήτρης: *Αυτό* (δείχνει το 8).

Εκπαιδευτικός: *Δηλαδή το 8* (δείχνοντας παράλληλα τον αριθμό); *Γιατί;*

Δημήτρης: *Είναι πιο πολλά!* (δείχνοντας τα σύμβολα στο χαρτί, ένα προς ένα και καταμετρώντας τα νοερά).

Στη συνέχεια χρησιμοποιήσαμε τουβλάκια από το υλικό των μαθηματικών δημιουργώντας μικρά σύνολα για να πραγματοποιήσουμε πράξεις.

Εκπαιδευτικός: *Ποιο είναι μεγαλύτερο; Το 5 ή το 7*;

Δημήτρης: Το 7. ‘*Λειπίζουνε*’ 2.

Εκπαιδευτικός: *Ναι, λείπουν 2* (επικύρωση αναπτυσσόμενης διαγλώσσας).

Γ. Στη συνέχεια, ταξινομήσαμε τα χαρτιά της τράπουλας: α) ως προς το χρώμα και β) ως προς το σχήμα της φιγούρας. Οι μαθητές κατανόησαν τις προφορικές οδηγίες και η ταξινόμηση ήταν σχετικά εύκολη για όλους, καθώς ήταν εξοικειωμένοι με τη χρήση της τράπουλας.

Εκπαιδευτικός: *εδώ ποια χαρτιά θα βάλεις;*

Παρασκευούλα: *λολό*

Εκπαιδευτικός: *ναι, το κόκκινο* (επικύρωση μητρικής γλώσσας*), και εδώ;*

Παρασκευούλα: *μαύρο*

Οι μη Ρομά μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι με την τράπουλα και έτσι μέσα από την αλληλεπίδραση ήταν αυτοί που 'έμαθαν' από τους Ρομά. Αυτή η διαδικασία συνέβαλε στην ανάπτυξη της αυτοπεποίθησης των Ρομά, καθώς αξιολογήθηκε ως σημαντική η γνώση που ήρθε από την κοινότητά τους.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι Ρομά μαθητές συμμετείχαν ενεργά σε όλη τη δραστηριότητα με έντονο ενδιαφέρον αλληλεπιδρώντας με τους συμμαθητές τους. Έδειχναν ιδιαίτερα ικανοποιημένοι γιατί θεώρησαν πως έγινε αποδεκτό στην τάξη κάτι 'δικό τους' βελτιώνοντας έτσι την αυτοεικόνα τους. Κατέκτησαν την ικανότητα να απαριθμούν μέχρι το 10 εκφέροντας τις αντίστοιχες αριθμολέξεις στα ελληνικά με μεγαλύτερη ευκολία και στη συνέχεια ανταποκρίθηκαν σε προσθέσεις και αφαιρέσεις με μικρούς αριθμούς, ενώ όλοι ήταν αποτελεσματικοί στις ταξινομήσεις. Φάνηκε πως η σύνδεση των δραστηριοτήτων με τις εξωσχολικές μαθηματικές πρακτικές των μαθητών σε συνδυασμό με τη χρήση στρατηγικών υποστήριξης στην ανάπτυξη της δεύτερης γλώσσας (μείξη γλωσσών, επικύρωση μητρικής και διαγλώσσας) αποτέλεσαν βασικές συνιστώσες για τη συμμετοχή των Ρομά μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία. Η αποτελεσματικότητα της συγκεκριμένης δραστηριότητας και της συνολικής πρακτικής επέδρασε στην ανάπτυξη ισότιμης συμμετοχής των Ρομά μαθητών στη μικτή τάξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Gay, G. (2002). Preparing for culturally responsive teaching. *Journal of Teacher Education*, 53 (2): 106-116

Gutierrez, R. (2009). Embracing the inherent tensions in teaching mathematics from an equity stance. *Democracy and Education*, 18(3), 9–16.

Masingila, J. O. (2002). Examining students' perceptions of their everyday mathematics practice. In M. E. Brenner & J. N. Moschkovich (Eds.), Journal for research in mathematics education: Everyday and academic mathematics in the classroom (pp. 30–39). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Wager, A. A. (2012). Incorporating out-of-school mathematics: from cultural context to embedded practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(1), 9-23.

ΕΚ, ΝΤΟΥΙ, ΤΡΙΝ: ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΡΟΜΑ[1]

Χρυσούλα Κολίτσα, Χαρούλα Σταθοπούλου, Ελένη Γκανά, Χρήστος Γκόβαρης

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

hrikolit@uth.gr, hastath@uth.gr, egana@uth.gr, govaris@uth.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα εισήγηση παρουσιάζονται μαθηματικές δραστηριότητες, μέρος διδακτικών παρεμβάσεων, οι οποίες υλοποιήθηκαν στο πλαίσιο του προγράμματος «Εκπαίδευση των Παιδιών Ρομά» του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και σχεδιάστηκαν στη λογική του Νέου Αναλυτικού Προγράμματος για το νηπιαγωγείο (ΑΠΣ, 2011), αξιοποιώντας τις βιωματικές εμπειρίες των παιδιών και ενθαρρύνοντας την εμπλοκή τους σε αυθεντικές περιστάσεις επικοινωνίας. Πιο συγκεκριμένα, κατά τα σχολικά έτη 2011-2012 και 2012-2013 υποστηρίχτηκαν, μεταξύ άλλων, μαθητές Ρομά του 16ου Νηπιαγωγείου Βόλου και του 8ου Νηπιαγωγείου Αλιβερίου. Με δεδομένη τη σπουδαιότητα της προσχολικής εκπαίδευσης για την ολόπλευρη ανάπτυξη των παιδιών και τη μετέπειτα στάση τους προς τη μάθηση, η παρέμβαση εστίασε στη μαθησιακή στήριξη των νηπίων Ρομά και την προετοιμασία τους για τη φοίτηση στο δημοτικό σχολείο.

Για την αποτελεσματικότερη υποστήριξη των νηπίων, δημιουργήθηκε μία κοινότητα πρακτικής (Holmes, J., & Meyerhoff, M. (1999) αποτελούμενη από εκπαιδευτικούς και τις υπεύθυνες καθηγήτριες στη γλώσσα και τα μαθηματικά, με βασικό στόχο την ανάπτυξη μαθηματικού και γλωσσικού γραμματισμού. Η κοινότητα πρακτικής πραγματοποίησε έρευνα δράσης, διερευνώντας τις μαθησιακές ανάγκες των Ρομά νηπίων, οι οποίες αποτελούσαν την αφετηρία διαλόγου και λειτουργούσαν ως οδηγός για το σχεδιασμό των κατάλληλων εκπαιδευτικών πρακτικών. Με την εφαρμογή των σχεδίων εργασίας και των θεματικών προσεγγίσεων στη σχολική τάξη, η υλοποίηση των οποίων καταγραφόταν με τη μορφή ημερολογίου και οπτικοακουστικών δεδομένων, η ομάδα εμπλεκόταν σε μια αναστοχαστική διαδικασία, που καθοδηγούσε τα επόμενα βήματα. Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων στηρίχτηκε στη χρήση αυθεντικών περιστάσεων γλωσσικής και μαθηματικής επικοινωνίας στη διδασκαλία και αποτυπώθηκε στη διαθεματικότητα του περιεχομένου των δραστηριοτήτων.

1. ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Το στάδιο του σχεδιασμού περιλάμβανε επιτόπια παρατήρηση για τον προσδιορισμό του μαθησιακού προφίλ των Ρομά νηπίων, με εστίαση στην

[1] Η εργασία στηρίζεται σε δεδομένα του έργου «Εκπαίδευση των παιδιών Ρομά στις περιφέρειες Ηπείρου, Ιονίων Νήσων, Θεσσαλίας και Δυτικής Ελλάδας», 2010-2013 (Κ.Π. 304263).

κατανόηση και τη χρήση των μαθηματικών εννοιών σε σχέση με τις προσληπτικές και παραγωγικές δεξιότητες. Το γλωσσικό προφίλ των μαθητών χαρακτηριζόταν από απουσία ολοκληρωμένων προτασιακών δομών, καθώς τα νήπια βρίσκονταν σε πρώιμη φάση στη μάθηση/χρήση της ελληνικής. Η παραγωγή προφορικού λόγου ορισμένων μαθητών περιοριζόταν στη χρήση μεμονωμένων λέξεων στα ελληνικά, αρκετοί επικοινωνούσαν με εναλλαγή ανάμεσα στους δύο γλωσσικούς κώδικες, δηλαδή της ελληνικής και της ρομανί (code-switching) (Setati, M., & Adler, J. (2001) και η παράλληλη χρήση της μη γλωσσικής σήμανσης (π.χ. κίνηση, χειρονομία κτλ) ήταν αναγκαία για την επίτευξη της επικοινωνίας.

Το χαμηλό επίπεδο ελληνομάθειας δημιουργούσε εμπόδια στην κατανόηση και χρήση μαθηματικών εννοιών. Υπήρχε δυσκολία στην αναπαραγωγή των αριθμολέξεων με τη σωστή σειρά και στην απόδοση απλών χωροχρονικών εννοιών στην ελληνική γλώσσα. Η χρήση της ρομανί, ενθαρρυνόταν σε κάθε μαθησιακό περιστατικό —στρατηγική επιλογή της διδασκαλίας— ώστε να διαπιστωθεί αν η «αδυναμία» οφειλόταν στην απουσία γλωσσικής επάρκειας στα ελληνικά ή στην απουσία γνώσης και κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Οι μαθηματικές δραστηριότητες που παρουσιάζονται παρακάτω υλοποιήθηκαν στο πλαίσιο δύο θεματικών προσεγγίσεων και εφαρμόστηκαν στις αρχές του σχολικού έτους 2012-2013.

1.1. Πρώτη δραστηριότητα: «Θεματική: Παπούτσια»

Αφορμή για την επιλογή της θεματικής «Παπούτσια» στάθηκαν περιστατικά της καθημερινότητας των παιδιών, καθώς είχαν εμπειρίες τόσο από αγορές που τα ίδια πραγματοποιούν όσο και από την εμπλοκή τους σε πώληση παπουτσιών σε λαϊκές αγορές. Έτσι θα μπορούσαν οι μαθητές να αφηγηθούν σχετικές προσωπικές ιστορίες. Επιπλέον ήταν πρόσφορη θεματική για την ανάπτυξη μαθηματικής γνώσης.

Οι μαθηματικοί στόχοι που τέθηκαν ήταν να απαγγείλουν, να διαβάσουν και να γράψουν αριθμούς μέχρι το 10, να καταμετρήσουν πραγματικά αντικείμενα, να πραγματοποιήσουν συγκρίσεις, να κάνουν απλές εκτιμήσεις και συγκρίσεις, να πραγματοποιήσουν επικαλύψεις μηκών με αυθαίρετες μονάδες μέτρησης, να κατασκευάσουν και να διαβάσουν διαγράμματα με χρήση υλικών, να διερευνήσουν καταστάσεις του τύπου: «βάζω μαζί», «παίρνω ακόμη» και να προσεγγίσουν τις πράξεις «πρόσθεση», «αφαίρεση». Αρχικά, έγινε προσπάθεια εισαγωγής της έννοιας περισσότερα/λιγότερα. Με την παρότρυνση ερωτήσεων (πόσα παιδιά φοράνε μαύρα και πόσα καφέ παπούτσια), τα παιδιά κλήθηκαν να αποτυπώσουν τις απαντήσεις τους σε διαγράμματα, αντιστοιχώντας το πλήθος των παπουτσιών με το αντίστοιχο πλήθος υλικών. Στη συνέχεια, κλήθηκαν να διαβάσουν τις πληροφορίες των διαγραμμάτων. Τέθηκαν ξανά οι ερωτήσεις και οι πρώτες απαντήσεις των παιδιών ήταν μονολεκτικές. Ουσιαστικά, καταμέτρησαν και δήλωσαν το πλήθος (1, 2, 3, 4). Έπειτα, ζητήθηκε να συγκρίνουν τα δύο διαγράμματα με αφορμή προβληματισμούς, όπως αν αυτοί που φορούν μαύρα παπούτσια είναι πιο πολλοί από αυτούς που φορούν καφέ, δείχνοντας να κατανοούν τη σχέση του μεγέθους των ράβδων του

διαγράμματος με το μεγαλύτερο/μικρότερο αριθμό παιδιών. Ακολούθησε η συζήτηση των εννοιών περισσότερα/λιγότερα και επιδιώχθηκε να διατυπωθούν προτάσεις του τύπου: «τα περισσότερα παιδιά φορούν μαύρα παπούτσια, τα λιγότερα παιδιά φορούν καφέ».

Σε επόμενη ενότητα της θεματικής, διατυπώθηκε ο προβληματισμός «ποιος από τους μαθητές φοράει το μεγαλύτερο παπούτσι και ποιος το μικρότερο;». Οι απαντήσεις των παιδιών στηρίχτηκαν αρχικά σε άμεσες συγκρίσεις, οι οποίες όμως κρίθηκαν αναποτελεσματικές, αφού δεν υπήρχε ομοφωνία στις απαντήσεις. Παροτρύνθηκαν επομένως να αναζητήσουν νέους τρόπους επίλυσης του προβλήματος και τους προτάθηκε η αποτύπωση των περιγραμμάτων των παπουτσιών τους σε χαρτί του μέτρου, ενώ χορηγήθηκαν διαφορετικές αυθαίρετες μονάδες για τη μέτρηση τους (σπάγκος, συνδετήρες, κυβάκια). Η χρήση των αυθαίρετων μονάδων κρίθηκε επαρκής από τα παιδιά, θεωρώντας ότι ο μαθητής που έδινε το μεγαλύτερο αποτέλεσμα μέτρησης είχε και το μεγαλύτερο μήκος. Παροτρύνθηκαν λοιπόν να διατάξουν τα μήκη των μετρήσεων του (αρχικά «λανθασμένα», έπειτα διόρθωσαν το «λάθος» τους) και η οριζόντια διάταξη αποκάλυψε τη λάθος εκτίμηση τους. Η αδυναμία όμως να δοθεί απάντηση στο πόσο μεγαλύτερο/μικρότερο είναι το ένα παπούτσι από το άλλο οδήγησε στην επιλογή μιας κοινής μονάδας, που έδωσε την ευκαιρία για σωστή μέτρηση και διαπίστωση ισοτήτων και ανισοτήτων που προέκυψαν από τη μέτρηση.

Στο επόμενο στάδιο, η χρήση διαφημιστικών φυλλαδίων για παπούτσια έδωσε την ευκαιρία ενίσχυσης του αναγνωριστικού γραμματισμού, με τον εντοπισμό και την αναγνώριση των αριθμητικών συμβόλων που περιείχαν τα φυλλάδια και την κατανόηση της λειτουργίας που επιτελούσε η εκάστοτε αναπαράστασή τους. Με στοχοθετημένη δηλαδή και σταδιακά εξελισσόμενη καθοδήγηση τα νήπια Ρομά διέκριναν τους αριθμούς από τις υπόλοιπες συμβολικές μορφές του φυλλαδίου, όπως είναι οι γραφικές παραστάσεις (γράμματα) και οι ποικίλοι εικονικοί συμβολισμοί. Παράλληλα αναγνώριζαν το σκοπό για τον οποίο οι αριθμοί είχαν χρησιμοποιηθεί, δηλαδή τη δήλωση της τιμής του αντικειμένου (παπουτσιού), του τηλεφώνου ή του πλήθους των αντικειμένων που αναπαρίστανται. Για την υλοποίηση των στόχων τα νήπια Ρομά υποστηρίχτηκαν με πρόσθετα «βοηθητικά» εργαλεία, όπως είναι οι πίνακες αναφοράς και οι τράπουλες, δηλαδή με διαμεσολαβητικά εργαλεία ως προς τα οποία ήταν ιδιαίτερα εξοικειωμένα στην καθημερινή τους πρακτική. Τέλος, αξιοποιήθηκε η τεχνική της δραματοποίησης για την αναπαράσταση περιστατικών αγοραπωλησίας σε κατάστημα αθλητικών ειδών. Τα παιδιά όρισαν την αξία των προϊόντων, «κατασκεύασαν» τα ταμπελάκια με τις τιμές και στη συνέχεια με κέρματα του μισού, του ενός και των δύο ευρώ, δημιουργήθηκαν οι προϋποθέσεις για μικρές προσθέσεις και αφαιρέσεις μέσα από την πραγματοποίηση συναλλαγών. Η «αυθεντικότητα» την οποία επικαλούνταν οι προαναφερόμενες περιστάσεις επικοινωνίας λειτούργησαν θετικά στην εμπλοκή των παιδιών, προσφέροντας ευκαιρίες συνεργατικής μάθησης

1.2. Δεύτερη δραστηριότητα: «Θεματική: Κυκλοφοριακή αγωγή»

Η επιλογή του θέματος «Κυκλοφοριακή Αγωγή» στηρίχτηκε στις καθημερινές παραστάσεις των παιδιών, καθώς η θέση του σχολείου και του οικισμού των Ρομά κοντά στις σιδηροδρομικές γραμμές, ευνοούσε την έντονη σήμανση στην περιοχή και συνεπώς την εξοικείωση των νηπίων με τις πινακίδες γύρω από το σχολείο. Παράλληλα, τα παιδιά λόγω του επαγγέλματος των γονιών τους και των συχνών οδικών μετακινήσεων είχαν πολλά εναύσματα μέσα από τη συγκεκριμένη θεματική για αφήγηση προσωπικών ιστοριών. Δινόταν, επίσης η ευκαιρία να συζητηθούν θέματα οδικής ασφαλείας. Οι μαθηματικοί στόχοι που τέθηκαν ήταν να αναγνωρίσουν και να ταξινομήσουν τα βασικά επίπεδα σχήματα σε ποικιλία θέσεων, να κατασκευάσουν επίπεδα σχήματα με διάφορα μέσα, να αναγνωρίσουν, περιγράψουν και συμπληρώσουν κανονικότητες με χειραπτικό υλικό.

Έγινε εστίαση στο σχήμα των πινακίδων, το οποίο συνδέθηκε με συμβολισμούς από την καθημερινότητα των παιδιών (τυρόπιτα για το τρίγωνο, μπουσκέτα για τον κύκλο). Αρχικά, ζητήθηκε μία πρώτη ταξινόμηση με βάση το χρώμα και έπειτα το σχήμα, μια δραστηριότητα στην οποία ανταποκρίθηκαν με ευκολία. Έπειτα προβληματίστηκαν με ερωτήσεις «γιατί όλα τα τρίγωνα μαζί;», «μπορώ να βάλω έναν κύκλο σε αυτή την ομάδα;» με σκοπό να παρατηρήσουν τα χαρακτηριστικά των σχημάτων και να εντοπίσουν τις διαφορές τους. Παρατήρησαν επίσης πίνακες ζωγραφικής για να εντοπίσουν τις διαφορετικές θέσεις των σχημάτων, αλλά και την ποικιλία των τριγώνων (ισόπλευρο, σκαληνό). Χρησιμοποιώντας γεωπίνακες τα παιδιά κλήθηκαν να κατασκευάσουν και να συνθέσουν τα σχήματα, σε διαφορετικές θέσεις και μεγέθη, δημιουργώντας, επίσης, σχηματισμούς (σπίτια, αστέρια, κτλ).

Σε επόμενη δραστηριότητα, τα σχήματα αποτέλεσαν αφορμή για διδασκαλία των μοτίβων. Τα παιδιά παρατήρησαν φωτογραφίες και βίντεο με γεωμετρικά μοτίβα για να αντιληφθούν την έννοια της επανάληψης. Έπειτα, παρουσιάστηκαν απλά, και στη συνέχεια πιο σύνθετα μοτίβα, φτιαγμένα με τις πινακίδες και τα παιδιά παροτρύνθηκαν να τα αναγνωρίσουν και να τα συνεχίσουν. Στο τέλος, δόθηκε η δυνατότητα να δημιουργήσουν τα δικά τους μοτίβα με διαφορετικούς τρόπους, όπως με τη χρήση υλικών (χαρτόνι, αντικείμενα της τάξης), με τη χρήση του λογισμικού kidispration ή μέσω της ιστοσελίδας http://nlvm.usu.edu/.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η κοινότητα πρακτικής λειτούργησε ως ένα πλαίσιο που οργάνωσε και ανατροφοδότησε τις διδακτικές πρακτικές, συμβάλλοντας στη διαρκή ετοιμότητα των εκπαιδευτικών για αναπλαισίωση, βελτίωση και προσαρμογή, υπηρετώντας τη φιλοσοφία του νέου αναλυτικού προγράμματος. Η αξιοποίηση βιωματικών προσεγγίσεων και η συνακόλουθη πολυτροπικότητα των μέσων αποτέλεσαν τα εργαλεία για την ανάπτυξη μαθηματικού και γλωσσικού γραμματισμού, αξιοποιώντας τον αναδυόμενο γραμματισμό των νηπίων Ρομά. Η

αποτελεσματικότητα των παρεμβάσεων αποτυπώθηκε στον τρόπο με τον οποίο οι Ρομά μαθητές ανέπτυξαν ισότιμη συμμετοχή στην τάξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Holmes, J., & Meyerhoff, M. (1999), The Community of Practice: Theories and methodologies in language and gender research. *Language in Society*, 28, 173-183.

Setati, M., & Adler, J. (2001). Between languages and discourses: Language practices in primary multilingual mathematics classrooms in South Africa. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 243-269.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ(ΧΩΡΟΧΡΟΝΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ, ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΕΙΣ, ΜΟΤΙΒΑ, ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ-ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ, ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ, ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ) ΣΕ ΠΡΟΝΗΠΙΑ, ΜΕ ΜΕΣΟ, ΤΗΝ ΑΦΗΓΗΣΗ ΜΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ

Χριστίνα Βουραζάνη

Παιδικοί και βρεφονηπιακοί σταθμοί του Δήμου Παύλου Μελά, Θεσσαλονίκη, παιδικός σταθμός ¨ΡΟΔΙ¨, Νικόπολη.

Ch.vourazani@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι διδασκαλίες αφορούν μία σειρά μαθηματικών εννοιών (χωροχρονικές σχέσεις, ομαδοποιήσεις, μοτίβα, συγκρίσεις-εκτιμήσεις, γεωμετρικά σχήματα, γεωμετρικά στερεά), οι οποίες έλαβαν χώρα στον παιδικό σταθμό ¨ΡΟΔΙ¨ Νικόπολης. Οι διδασκαλίες των παραπάνω εννοιών έγιναν με μέσο την αφήγηση μίας ιστορίας, η οποία εξελίχθηκε σε διάστημα 12 ημερών και αφορούσε 2 παιδάκια, τα οποία βρέθηκαν στην Αίγυπτο, και με την βοήθεια ενός ακόμη φίλου τους, μπλέχθηκαν σε δοκιμασίες προκειμένου να γυρίσουν πίσω στην Ελλάδα, την χώρα τους, αλλά και να σώσουν τους φίλους τους και όλη την Αίγυπτο από την κακιά σφίγγα που θα έφερνε την καταστροφή. Η τάξη των προνηπίων έγινε αρωγός στην προσπάθειά τους, μιας, και εφόσον οι ήρωες μαρμάρωναν στην κάθε δοκιμασία, τίποτε δεν μπορούσε να επιτελεστεί αν τα ίδια τα προνήπια της τάξης δεν τις έφερναν εις πέρας. Ενδεικτικά θα αναφέρω κάποιες από αυτές τις διδασκαλίες που έγιναν προκειμένου να αναλύσω καλύτερα τις δραστηριότητες, και να γίνει κατανοητή η συσχέτιση των στόχων με αυτές, αλλά και με το σενάριο της ιστορίας.

Τρίτη μέρα της ιστορίας: Χωροχρονική έννοια μέσα-έξω από

Στόχος: τα νήπια υποβοηθούνται με τη συμβολή και της γλώσσας να προσεγγίζουν τη βασική χωροχρονική έννοια μέσα-έξω από..

Τα 3 παιδιά της ιστορίας έχουν ξεκινήσει για το σχολείο του Άναμπ, και έχουν βρεθεί σε μία όαση. Μέσα στη λίμνη της όασης θέλουν να κάνουν ένα μπάνιο. Μαρμαρώνουν, και τα παιδιά της τάξης αναλαμβάνουν να κάνουν τις δραστηριότητες.

Α) **άμεση βίωση της έννοιας:** τοποθετώ ένα μπλε σκοινί στο πάτωμα σε κυκλικό σχήμα που αναπαριστά τη λίμνη. Τους λέω ότι είναι η λίμνη της όασης. Δίνω σαφείς οδηγίες να περπατούν έξω από αυτήν όση ώρα χτυπώ το ταμπουρίνο και με το σταμάτημα του ταμπουρίνου να μπαίνουν μέσα στη λίμνη. ¨που μπήκατε;¨ ¨μέσα στη λίμνη¨. Ξαναχτυπώ το ταμπουρίνο. ¨που περπατάτε;¨ ¨έξω από τη λίμνη¨. Το σταματώ. ¨που μπήκατε;¨ ¨μέσα στη λίμνη¨. Συνεχίζω έως ότου όλα τα παιδιά να αντιληφθούν βιωματικά τη χωρική έννοια μέσα- έξω από.

Β) **προσδιορισμός της θέσης των αντικειμένων στο χώρο σε μακέτα-έμμεση βίωση της έννοιας:** τοποθετώ μία μακέτα στο πάτωμα, που αναπαριστά μία όαση και στη μέση υπάρχει μία λίμνη. Έχω τους τρεις ήρωες μας και την καμήλα σε playmobil. Δίνω στα παιδιά της τάξης εντολές,(σηκώνεται ένα-ένα) να τοποθετούν τα playmobil σε διάφορες θέσεις μέσα ή έξω από τη λίμνη. ¨Βάλε τη Μαρία μέσα στη λίμνη να κάνει ένα μπάνιο¨. ¨Σάββα, βάλε και τον Ανάμπ μέσα στη λίμνη¨. ¨Χριστίνα, τοποθέτησε την Μαρία τώρα έξω από τη λίμνη, γιατί κρύωσε¨ κτλ.



Γ) **μεταφορά της έννοιας σε γραφικό επίπεδο:** Τα παιδιά κάθονται στα τραπεζάκια τους και τους δίνω μία άσπρη κόλλα χαρτί. Τους λέω να ζωγραφίσουν όποιον ήρωα της ιστορίας θέλουν μέσα ή έξω από τη λίμνη.

Τέταρτη μέρα της ιστορίας: ομαδοποιήσεις, ταξινομήσεις πραγμάτων

Στόχος: να μεταβούν βαθμιαία από το στάδιο των αυθαίρετων και υποκειμενικών συναθροίσεων πραγμάτων στο στάδιο συστηματικότερων ομαδοποιήσεων, ταξινομήσεων με βάση ένα ή περισσότερα κριτήρια.

Οι ήρωές μας περικυκλώνονται από στρατιώτες και μαρμαρώνουν. Τα προνήπια πρέπει να ομαδοποιήσουν τα φρούτα της όασης. Κατά ένα μαγικό τρόπο τα φρούτα (αχλάδια, μήλα, πορτοκάλια) βρίσκονται στον χώρο της τάξης..

Α) **άμεση βίωση της έννοιας:** ρίχνω στην μοκέτα 3 ειδών φρούτα (μήλα, αχλάδια, πορτοκάλια). Τοποθετώ 3 καλάθια, και λέω στα παιδιά να ομαδοποιήσουν τα φρούτα: ¨Σε αυτό το καλάθι θα βάλετε τα μήλα, σε αυτό τα αχλάδια, σε αυτό το πορτοκάλια¨.







Β) **μεταφορά της έννοιας σε γραφικό επίπεδο:** Δίνω φύλλο εργασίας που απεικονίζει 2 τσουβαλάκια. Λέω στα προνήπια να ομαδοποιήσουν τα φύλλα των δέντρων της όασης, τα οποία είναι μικρά και μεγάλα, στα 2 τσουβαλάκια. ¨Κολλήστε τα μεγάλα φύλλα στο πάνω τσουβαλάκι και τα μικρά, στο κάτω τσουβαλάκι¨.

Πέμπτη μέρα της ιστορίας: μοτίβα

Στόχος: - να αναγνωρίζουν, να περιγράφουν και να συμπληρώνουν μοτίβα και άλλες κανονικότητες με χειραπτικό υλικό που προτείνεται από το περιβάλλον ή κατασκευάζεται.

- να εντοπίζουν στοιχεία που λείπουν και στοιχεία που είναι λάθος
- να περιγράφουν με λόγια το σχέδιο με το οποίο είναι κατασκευασμένη μία κανονικότητα και να τη συζητούν στην τάξη

Τα παιδιά βρίσκονται στη μέση της όασης, και αφού οι Αιγύπτιοι στρατιώτες τα έχουν αφήσει ελεύθερα, μιας και έφεραν εις πέρας τη δοκιμασία, θα πάνε να επισκεφτούν τον ναό του θεού Άμμωνα, ενός θεού των Αρχαίων Αιγυπτίων, και θα του προσφέρουν εδέσματα, όπως ο λαός των Αρχαίων Αιγυπτίων, με έναν συγκεκριμένο όμως τρόπο. Τα 3 παιδιά μαρμαρώνουν και αναλαμβάνει η τάξη.

Α) **δημιουργία μοτίβου με χειραπτικό υλικό:** ¨παιδιά, αυτά είναι τα πράγματα που θα προσφέρουν οι 3 φίλοι μας (δείχνω κουλουράκια, μήλα, πιπεριές, και λεβάντες). Πρέπει να τα τοποθετήσουν όμως με συγκεκριμένη σειρά, με το ίδιο μοτίβο, δηλ. πρώτα την πιπεριά, το μήλο, το κουλουράκι τη λεβάντα και πάλι το ίδιο. Θα τους βοηθήσουμε;¨ Τοποθετώ την πιπεριά, το μήλο, το κουλουράκι, την λεβάντα (πρώτο μοτίβο) και πάλι την πιπεριά, το μήλο και ένα- ένα παιδί σηκώνεται και συνεχίζει το μοτίβο. Έπειτα περιγράφει με λόγια την κανονικότητα.





Β) **συμπλήρωση μοτίβου σε φύλλο εργασίας:** ¨τώρα παιδιά, ας δημιουργήσουμε και τα σημαιάκια που θα στείλουμε στους φίλους μας για να στολίσουν τον ναό. Κι αυτά θα τα βάψουμε με συγκεκριμένη σειρά κόκκινο, πράσινο, κίτρινο, και πάλι το ίδιο. Είστε έτοιμοι; ¨Δίνω το φύλλο εργασίας με το αρχικό μοτίβο χρωματισμένο και συνεχίζουν την κανονικότητα.

Ενδέκατη και δωδέκατη μέρα: γεωμετρικά στερεά

Στόχος: να αναγνωρίζουν και να ταξινομούν τα βασικά στερεά σχήματα με βάση τα γενικά χαρακτηριστικά τους και σε ποικιλία θέσεων, μεγεθών και προσανατολισμών
- να περιγράφουν στερεά γεωμετρικά σχήματα χρησιμοποιώντας στοιχεία και ιδιότητες
- να κατασκευάζουν γεωμετρικά στερεά με διάφορα μέσα.

Τα 3 παιδιά βρίσκονται πλέον στο σχολείο του Άναμπ, και διαπιστώνουν ότι το πλήρωμα του χρόνου έχει φτάσει, μιας και στις προηγούμενες δοκιμασίες μαρμάρωναν όχι μόνο αυτοί, αλλά και όλη η τάξη καθώς και η δασκάλα, η κ. Λυδία. Τώρα πρέπει να μάθουν τα γεωμετρικά στερεά, και να πάνε να απαντήσουν στα αινίγματα της σφίγγας που αφορούν τα γεωμετρικά στερεά, προκειμένου να σωθεί η Αίγυπτος, και τα ίδια να γυρίσουν στην πατρίδα τους την Ελλάδα. Η τάξη των προνηπίων είναι έτοιμη να βοηθήσει μαθαίνοντας τα και διοχετεύοντας τις γνώσεις τους με παλαμάκια στους τρεις φίλους μας. Για να δούμε τι θα γίνει;

Α) **Γνωριμία με τα γεωμετρικά στερεά-γενικά χαρακτηριστικά τους:** Δείχνω στα παιδιά τα γεωμετρικά στερεά κύβο, κύλινδρο, πυραμίδα, κώνο, σφαίρα, στερεό ορθογώνιο. Είναι σε αφρώδες υλικό. Συζητούμε για το καθένα ξεχωριστά, επεξεργάζονται το καθένα από αυτά, μιλούμε για τα χαρακτηριστικά τους, από ποια γεωμετρικά σχήματα αποτελείται το καθένα, τις ακμές, τις κορυφές τους. Βρίσκουν αντιστοιχίες αυτών, με πράγματα που υπάρχουν στο περιβάλλον τους.

Β) **περαιτέρω εμπέδωση γεωμετρικών στερεών:** βλέπουμε βιντεάκια με τραγούδια από το youtube με τα αντίστοιχα γεωμετρικά στερεά, που δείχνουν τα γεωμετρικά στερεά, και παράλληλα πράγματα από το περιβάλλον με το ίδιο σχήμα. Έτσι δημιουργείται αντιστοιχία μεταξύ γεωμετρικών στερεών-πραγμάτων που βοηθά στην περαιτέρω εμπέδωσή τους. Παράλληλα γίνεται συζήτηση.

Γ) **αντιστοιχία πραγμάτων-γεωμετρικών στερεών:** έχω φέρει σωρό αντικείμενα (σάλτσες, γάλατα σε συσκευασίες, κουτιά, μπάλες, καπελάκια, πυραμίδες, αναψυκτικά, βαζάκια, υδρόγειο σφαίρα κτλ), τα οποία έχω ρίξει στη μοκέτα. Ένα-ένα τα παιδιά έρχονται, παίρνουν ένα αντικείμενο και λένε με ποιο γεωμετρικό στερεό μοιάζει.







Δ) **κατασκευή γεωμετρικών στερεών με πλαστελίνη:** Δίνω στα παιδιά πλαστελίνες και κατασκευάζουν όποιο γεωμετρικό στερεό τους έκανε εντύπωση. Έπειτα το ονοματίζουν.

Ε) **εμπέδωση γεωμετρικών στερεών-γλωσσικό παιχνίδι με αινίγματα:** Λέω στα παιδιά αινίγματα που αφορούν τα γεωμετρικά στερεά, όπως: ¨είναι σαν την μπάλα, την πιάνω, την κυλάω, τρέχω και την κυνηγάω¨. Τι είναι; Και ¨είναι το χωνάκι παγωτό, και το καπέλο της μάγισσας κλο-κλο, το σχήμα αυτό¨. Τι είναι;. Τα παιδιά απαντούν στα αινίγματα.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Burns, M. Sheffield, S.(2004). *Math and Literature*, Math Solutions Publications

Burns, M. (2007). *About teaching mathematics, A K-8 resourse*, Math Solutions Publications

Jennifer, M. Bay-Williams Sherri L. Martinie.(2009). *Math and Non fiction, grades 6-8.* Math Solutions Publications

Πρόγραμμα σπουδών του νηπιαγωγείου. (2011). Νέο σχολείο (σχολείο 21ου αι.). Νέο πρόγραμμα σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Schirro, Michael Stephen (2004). *Oral storytelling and teaching mathematics, Pedagogical and Multicultural perspectives*, SAGE Publications, Ins

Τζεκάκη, Μ. (1996). *Μαθηματικές δραστηριότητες για την προσχολική ηλικία*, εκδόσεις Gutemberg.

Τζεκάκη, Μ.(2007). *Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα*, εκδόσεις Gutemberg.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΗ ΑΓΩΓΗ: ΜΙΑ ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗ Β΄ ΤΑΞΗ

Εμμανουηλίδου Κυριακή, Ευαγγέλου Ευθυμία, Παπαδημητρίου Παναγιώτα, Ταξίδης Χρήστος

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η Εκπαιδευτική Πρακτική *«Μαθηματικοί σε… καλή φυσική κατάσταση!» που εφαρμόζουμε, στηρίζεται στην ιδέα της σύνδεσης της διδασκαλίας των μαθηματικών με το παραδοσιακά αγαπημένο μάθημα των παιδιών, αυτό της Φυσικής Αγωγής. Επιλέχθηκαν τα κεφάλαια του σχολικού εγχειριδίου της Β΄ τάξης «Μετρώ με εκατοστόμετρα» (κεφ. 4) και «Γνωρίζω το μέτρο» (κεφ.42) που είχαν ως θέμα τη χρήση του μέτρου και τις μετρήσεις με μέτρα και εκατοστόμετρα.*

Η ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ

Οι στάσεις και τα συναισθήματα που διαμορφώνουν οι μαθητές για τα μαθηματικά επηρεάζουν καθοριστικά την όλη διαδικασία διδασκαλίας-μάθησης (Zaslavsky, 1994). Ένα από τα πιο συνηθισμένα συναισθήματα των μαθητών, το οποίο επιδρά αρνητικά στις επιδόσεις τους, είναι η μαθηματικοφοβία, δηλαδή η δυσφορία, η ένταση, η ανησυχία, το άγχος και τελικά ο φόβος που νιώθουν τα παιδιά όταν ασχολούνται με το μαθηματικό αντικείμενο (Richardson & Suinn 1972; Tobias 1993). Όπως προκύπτει από σχετικές έρευνες (Greenwood 1984; Jackson & Leffingwell, 1999; McLeod, 1992) στη διδακτική των μαθηματικών, ο παράγοντας που βαρύνει περισσότερο στη δημιουργία ή την αποτροπή του φαινομένου αυτού, είναι η διδακτική προσέγγιση που ακολουθεί ο δάσκαλος μέσα στην τάξη.

Θέλοντας να οικοδομήσουμε ένα υποστηρικτικό περιβάλλον μάθησης στην εκπαιδευτική διαδικασία, επιδιώξαμε την αλλαγή, την πολυμορφία, τη δημιουργικότητα και την καινοτομία στον τρόπο με τον οποίο θα διδάξουμε τα μαθηματικά. Επιθυμία και στόχος μας ήταν να καταστήσουμε τη διδασκαλία μαθητοκεντρική, ενεργητική, βιωματική, αυθεντική, συνεργατική και προκλητική, στοιχεία που καθιστούν μια διδασκαλία καλή πρακτική (Zemelman, Daniels, & Hyde, 2005). Παρακάτω παρατίθεται η παρουσίαση ενός τμήματος της πρακτικής, διάρκειας δύο διδακτικών ωρών, που εφαρμόζεται στη Β΄ τάξη στο πλαίσιο της διαθεματικής προσέγγισης ποικίλων ενοτήτων των Μαθηματικών και της Φυσικής Αγωγής (ΦΑ).

Στο μάθημα συμμετείχαν οι 23 μαθητές του 1ου τμήματος της Β΄ τάξης, 11 αγόρια και 12 κορίτσια. Ως διδακτική προσέγγιση χρησιμοποιήθηκε το συνεργατικό μοντέλο διαθεματικής διδασκαλίας, όπου οι εκπαιδευτικοί (τάξης και ΦΑ) δίδασκαν μαζί στην ίδια τάξη, την ίδια ώρα. Η πρακτική στηρίχτηκε σε ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες και βιωματική μάθηση. Από την ύλη των Μαθηματικών, διατηρήθηκαν οι στόχοι του Αναλυτικού Προγράμματος και συγκεκριμένα:

Μετρώ με εκατοστόμετρα (κεφ. 4): Οι μαθητές μετά το πέρας της διδασκαλίας να είναι ικανοί να: α) μετρούν μήκη και να συγκρίνουν τις μετρήσεις τους σε εκατοστόμετρα β) αντιλαμβάνονται την έννοια της πιο μακρινής απόστασης με άτυπες και τυπικές μονάδες μέτρησης γ) εξοικειωθούν με τη χρήση του χάρακα και της μεζούρας καθώς και με την έννοια του εκατοστόμετρου δ) χαράζουν ευθύγραμμα τμήματα με προϋποθέσεις ε) συνεργάζονται σε ομάδες των δύο για την επίτευξη μιας δραστηριότητας.

Γνωρίζω το μέτρο (κεφ. 42): Οι μαθητές μετά το πέρας της διδασκαλίας να: α) έχουν εξοικειωθεί με την έννοια του μέτρου ως μονάδα μέτρησης μήκους και να μετρούν με μέτρα και εκατοστά, β) έχουν εξοικειωθεί με το μήκος που αντιστοιχεί στο 1 μέτρο και στο μισό μέτρο γ) μετατρέπουν τα 100 εκατοστόμετρα σε 1 μέτρο και αντίστροφα, δ) συγκρίνουν αποτελέσματα μετρήσεων μήκους, ε) μετρούν μήκη χρησιμοποιώντας την εκτίμηση, στ) συνεργάζονται σε ομάδες των δύο για την επίτευξη μιας δραστηριότητας

Από την ύλη της ΦΑ καλλιεργήθηκαν οι στόχοι: α) βελτίωση βασικών δεξιοτήτων μετακίνησης, β) γνώση των μερών του σκελετού και περιγραφή του μεγέθους και του σχήματός των βασικών μακριών οστών του σώματος και γ) συνεργασία σε ομάδες για την επίτευξη μιας δραστηριότητας.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Α) Πρώτη Διδακτική Ενότητα (Διάρκεια: 1 διδακτική ώρα)

Οι μαθητές εργάζονται χωρισμένοι σε ζεύγη. Δίνονται οδηγίες από τις εκπαιδευτικούς. Κάθε ζευγάρι έχει στη διάθεσή του ένα σπαστό μέτρο ή μεζούρα, ένα φύλλο καταγραφής, ένα μολύβι και μία κιμωλία. Το ένα μέλος της ομάδας εκτελεί οριζόντιο άλμα (3 προσπάθειες) ενώ το άλλο διορθώνει την ποιότητα της κίνησης σύμφωνα με σημεία κλειδιά που υπάρχουν στο φύλλο ελέγχου και με την κιμωλία σημειώνει το σημείο προσγείωσης. Κατόπιν γίνεται αλλαγή ρόλων.

Με το πέρας της δραστηριότητας ακολουθεί συζήτηση στην ολομέλεια για τη δυνατότητα μέτρησης της επίδοσης χωρίς εργαλεία και όργανα, γίνονται προτάσεις και αποφασίζεται από τους μαθητές η χρήση άτυπων μονάδων (σπιθαμές, παλάμες, πατούσες, βήματα). Ακολουθεί εφαρμογή της μέτρησης και καταγραφή των αποτελεσμάτων. Γίνεται σύγκρισή τους ανάμεσα στις ομάδες και η ολομέλεια καταθέτει τον προβληματισμό της για την ασάφεια και τη υποκειμενικότητα των αποτελεσμάτων. Με αναστοχαστική συζήτηση και καταιγισμό ιδεών η ολομέλεια καταλήγει στην παραδοχή της ανάγκης χρήσης τυπικής μονάδας μέτρησης. Ακολουθεί η πρώτη επαφή των παιδιών με το μέτρο/μεζούρα.

Έχοντας στα χέρια τους ο καθένας ένα ξύλινο μέτρο ή μεζούρα χωρισμένοι σε ομάδες των τεσσάρων και αξιοποιώντας τις πρότερες γνώσεις τους, παρατηρούν, δοκιμάζουν, προβληματίζονται και καταλήγουν σε συμπεράσματα και παρατηρήσεις πάνω στη σωστή χρήση του μέτρου τα οποία κάθε ομάδα ανακοινώνει στην

ολομέλεια. Αφού καταλήξουν και συμφωνήσουν στο σωστό τρόπο χρήσης του μέτρου, επανέρχονται σε ζεύγη και χρησιμοποιώντας το μέτρο, μετρούν το μήκος της σπιθαμής, της παλάμης, της πατούσας, του βήματός τους. Ακολουθεί μέτρηση των αλμάτων με τη χρήση μέτρου/μεζούρας και καταγραφή της επίδοσης στο φύλλο ελέγχου.

Β) Δεύτερη Διδακτική Ενότητα (Διάρκεια: 1 διδακτική ώρα)

Για την εξάσκηση της χρήσης του μέτρου και της μέτρησης σε εκατοστά τα παιδιά χρησιμοποιούν τα περιγράμματα του σώματός τους που δημιούργησαν δουλεύοντας εταιρικά πάνω σε χαρτί του μέτρου στο πλαίσιο project της Ευέλικτης Ζώνης. Πάνω σε αυτά είχαν τοποθετήσει κόκκινες κουκίδες που αντιστοιχούσαν στις βασικές αρθρώσεις του σώματος που διδάχθηκαν στο μάθημα της ΦΑ.

Οι εκπαιδευτικοί ζητούν από τα ζευγάρια να ενώσουν χρησιμοποιώντας το μέτρο α) τον ώμο με τον αγκώνα β) τον αγκώνα με τον καρπό γ) το ισχίο με το γόνατο δ) το γόνατο με την ποδοκνημική ε) τους δύο ώμους. Έπειτα από τις εκπαιδευτικούς εισάγεται ο όρος «ευθύγραμμο τμήμα» σε αντιστοιχία με τις ευθείες γραμμές με αρχή και τέλος που τα παιδιά είχαν ήδη χαράξει. Κατόπιν καλούνται να ονομάσουν τα οστά αυτά. Τα ζευγάρια αφού εκτιμήσουν και καταγράψουν σε φύλλο καταγραφής το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων, τα μετρούν και καταγράφουν τα αποτελέσματα. Συγκρίνουν τα μήκη και εκφράζουν συγκρίσεις όπως «ο μηρός είναι μακρύτερος από τον βραχίονα», «η κνήμη είναι κοντύτερη από το μηρό» κλπ.

Αξιολόγηση: Αρχικά με τους προβληματισμούς που προκύπτουν στη διαδικασία των μετρήσεων. Κατά τη διάρκεια των μαθημάτων μέσω παρατήρησης των ομάδων, με ερωταποκρίσεις σχετικές με το περιεχόμενο της διδασκαλίας, και ετεροαξιολόγηση των μαθητών. Με την ολοκλήρωση κάθε διδακτικής ώρας, γίνονται συνεντεύξεις μαθητών σχετικά με το τι έμαθαν, αν τους άρεσε το μάθημα και γιατί, πώς συνεργάστηκαν και αν θα επέλεγαν ξανά αυτόν τον τρόπο εργασίας. Τέλος, οι μαθητές συμπληρώνουν γραπτό φύλλο αξιολόγησης στο κεφάλαιο που διδάχθηκαν.

Η πρακτική που εφαρμόστηκε:

- Εισάγει μια καινοτόμα προσέγγιση στη διδασκαλία των Μαθηματικών ξεφεύγοντας από το χώρο, το χρόνο και τη συμβατικότητα ενός παραδοσιακού μαθήματος. Οι θεωρίες και οι πρακτικές των δύο γνωστικών αντικειμένων συνδυάζονται και αλληλοσυμπληρώνονται σύμφωνα με τον τρόπο οργάνωσης των νέων ΑΠΣ.
- Είναι σύμφωνη με τις σύγχρονες παιδαγωγικές θεωρίες καθώς προωθεί την κοινωνική αλληλεπίδραση, τη συνεργατικότητα και την αυτενέργεια, καλλιεργεί μεταγνωστικές δεξιότητες και δημιουργεί κίνητρα για υψηλότερες προσδοκίες.
- Η μάθηση γίνεται βιωματική (learning by doing). Σύμφωνα με τους ερευνητές οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα όταν συμμετέχουν σε δραστηριότητες που θεωρούν χρήσιμες για τη πραγματική ζωή (Βοσνιάδου, 2001; Hart & Walker, 1993).
- Η νέα γνώση κατακτιέται μέσα από ομαδοσυνεργατικές διαδικασίες δίνοντας την ευκαιρία επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών, ανάπτυξης της συνεργασίας, ανάληψης

πρωτοβουλιών και καλλιέργειας της κριτικής σκέψης. Επίσης σύμφωνα με τους Thompson και Thompson (1989) τέτοιες διαδικασίες βοηθούν τους πιο αδύνατους να συμμετέχουν, να νιώσουν αισθήματα ικανοποίησης και να αποκτήσουν θετικότερη εικόνα για τον εαυτό τους.

- Βελτιώνει τη διδακτική πράξη γεγονός που γίνεται αντιληπτό από τον ενθουσιασμό με τον οποίο τα παιδιά συμμετέχουν στο μάθημα αλλά και από τις μαρτυρίες τους, πως τα μαθηματικά είναι σαν παιχνίδι που παράλληλα τους παρέχει εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινότητάς τους.
- Εντάχθηκε, στο πλαίσιο της διαθεματικότητας, σε project που υλοποιούν οι μαθητές στην Ευέλικτη Ζώνη με τίτλο « Γνωρίζω το σώμα μου».
- Συμβάλλει στην καλύτερη λειτουργία της σχολικής μονάδας μέσω του συνεργατικού μοντέλου διαθεματικής διδασκαλίας, ευνοώντας την αλληλεπίδραση μεταξύ των εκπαιδευτικών και των διδακτικών πράξεών τους.
- Είναι μια πρακτική που μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε σχολείο και σε κάθε τάξη, στις περισσότερες ενότητες των μαθηματικών, ως ολοκληρωμένο σενάριο ή σε διάφορα στάδια της διδακτικής διαδικασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Greenwood, J. (1984). My anxiety about math anxiety. *Mathematics Teacher*, *77*, 662-663.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp.575-596). New York: MacMillan.

Hart, L. E. & Walker, J. (1993). The role of affect in teaching and learning mathematics. In D. Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics* (pp. 22-38). New York: Macmillan-NCTM.

Jackson, C. D. & Leffinguell, R. J. (1999). The role of instructors in creating math anxiety in students from kindergarten through college. *Mathematics Teacher*, *92*, 583-586.

Richardson, F.C. & Suinn, R.M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counceling Psychology*, *19*, 551-554.

Thompson, A.G. & Thompson, P.W. (1989). Affect and problem solving in an elementary school mathematics classroom. In D.B. McLeod & V.M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 162-176). New York: Springer-Verlag

Tobias, S. (2001). *Overcoming Math Anxiety*. New York: W.W. Norton & CO.

Zaslavsky, C. (1994). *Fear of Math: How to Get Over it and Get on with Your Life.* New Brunswick, N.J.: Rutgers University Press.

Zemelman, S., Daniels, H., & Hyde, A. (2005). The Seven Structures of Best Practice Teaching. In S. Zemelman, H. Daniels, & A. Hyde (Eds.), *Best Practice: Today's Standards for Teaching and Learning in America's Schools* (pp. 227-266). Heinemann, Portsmouth, New Hampshire

Βοσνιάδου, Σ. (2001). *Εισαγωγή στην Ψυχολογία*. Αθήνα: Gutenberg - Γιώργος & Κώστας Δαρδανός.

Η ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΕΠΙΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

[1]Θεοδώρου Αθανάσιος, [2] Γρηγοριάδου Παρασκευή

[1]Δημοτικό Σχολείο Άρνισσας – Πέλλας, [2]1ο Δημοτικό Σχολείο Πτολεμαΐδας

[1]theodorouathan@gmail.com, [2]grigoriadoupara@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο πλαίσιο της υλοποίησης ενός διαθεματικού προγράμματος με τίτλο «Η επιθετικότητα στο σχολείο» μαθητές/ριες της Στ΄ τάξης σχεδίασαν και διεξήγαγαν έρευνα στο σχολείο τους. Συνέλεξαν και επεξεργάστηκαν δεδομένα, κατασκεύασαν γραφήματα και παρουσίασαν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους στη σχολική κοινότητα. Στη διερεύνηση του προβλήματος αξιοποίησαν μαθηματικές γνώσεις που εντάσσονται στη θεματική ενότητα του αναλυτικού προγράμματος σπουδών των Μαθηματικών Στ΄ τάξης «Συλλογή και Επεξεργασία δεδομένων - Στατιστική».

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2012-2013 και στο πλαίσιο της ευέλικτης ζώνης σχεδιάσαμε και υλοποιήσαμε ένα διαθεματικό πρόγραμμα με θέμα την επιθετικότητα στο σχολείο. Το ενδιαφέρον για το θέμα αυτό προέκυψε ύστερα από σχετικά περιστατικά και συζήτηση στην τάξη. Στο πρόγραμμα συνδέθηκαν διαθεματικά τα γνωστικά αντικείμενα: Γλώσσα, Εικαστικά, Μαθηματικά και Τεχνολογίες Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ). Διδακτικά η παρέμβαση στηρίχθηκε στις αρχές της ανακαλυπτικής-διερευνητικής μάθησης (Bruner), της συνεργατικής μάθησης (Vygotsky – κοινωνικοπολιτισμική θεωρία μάθησης) και στην αξιοποίηση της εκπαιδευτικής τεχνολογίας. Έμφαση δόθηκε στη δημιουργική και βιωματική μαθησιακή διαδικασία.

ΣΤΟΧΟΙ

Ένας από τους κύριους στόχους του προγράμματος ήταν η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών/ριών να σχεδιάζουν και να πραγματοποιούν μια έρευνα και να εξάγουν συμπεράσματα. Αναλυτικότερα οι μαθητές/-τριες θα έπρεπε να αναπτύξουν τις παρακάτω ερευνητικές δεξιότητες:

- Να συλλέγουν, να καταγράφουν και να ταξινομούν δεδομένα.
- Να κατασκευάζουν γραφήματα: ραβδόγραμμα και κυκλικό διάγραμμα.
- Να αντλούν πληροφορίες από ένα γράφημα.
- Να αναγνωρίζουν και να ερμηνεύουν την επιθετική συμπεριφορά.

- Να χρησιμοποιούν τις ΤΠΕ στη διαθεματική προσέγγιση και διερεύνηση ενός προβλήματος της σχολικής καθημερινότητάς τους.

Το μαθηματικό περιεχόμενο του προγράμματος εντάσσεται στη θεματική ενότητα του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών Στ΄ τάξης «Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων - Στατιστική». Ως προς το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) το πρόγραμμα προωθεί θεμελιώδεις έννοιες της διαθεματικής προσέγγισης όπως: *ομοιότητα-διαφορά* (π.χ. διαφορετικοί τρόποι παρουσίασης αποτελεσμάτων), *μεταβολή* (π.χ. τροποποίηση των αντιλήψεων των μαθητών/ριών πριν και μετά την ενασχόληση με την επιθετικότητα στο σχολείο), *αλληλεπίδραση* (π.χ. μέσω της κατανόησης της σχέσης της επιθετικότητας με την πρόκληση ατυχημάτων στο σχολικό χώρο), *επικοινωνία* (π.χ. μέσω της ομαδικής εργασίας των μαθητών/ριών και της εμπλοκής τους στην έρευνα) (βλ. ΔΕΠΠΣ και ΑΠΣ, σελ. 252 και 274).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Το πρόγραμμα διήρκεσε συνολικά οκτώ διδακτικές ώρες και υλοποιήθηκε σε δύο φάσεις, διάρκειας τεσσάρων ωρών. Στόχος των δραστηριοτήτων της πρώτης φάσης ήταν η ευαισθητοποίηση των παιδιών στο θέμα της σχολικής βίας και η κατασκευή του ερωτηματολογίου της έρευνας. Κύριος στόχος της δεύτερης φάσης ήταν η ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών να εργάζονται στο περιβάλλον των υπολογιστικών φύλλων (excel), για να καταχωρούν και να επεξεργάζονται δεδομένα καθώς και να κατασκευάζουν γραφήματα.

Στην πρώτη φάση πραγματοποιήθηκαν οι παρακάτω δραστηριότητες θεωρητικής προσέγγισης του φαινομένου της επιθετικότητας και της ευαισθητοποίησης των μαθητών/ριών: καταιγισμός ιδεών, κατάθεση και συζήτηση σχετικών προσωπικών εμπειριών, συμπλήρωση αραχνογράμματος για την έννοια της επιθετικότητας, συμπλήρωση εννοιολογικού χάρτη, παρακολούθηση σχετικού βίντεο και παρουσίαση-συζήτηση διαφανειών σε power point. Στη συνέχεια σχεδιάστηκε ο τρόπος διερεύνησης της επιθετικής συμπεριφοράς στο σχολείο μας, επιλέχθηκε το δείγμα της έρευνας, έγινε ο χωρισμός των μαθητών σε ομάδες, ο καταμερισμός των εργασιών και διαμορφώθηκε το χρονοδιάγραμμα των ενεργειών. Οι μαθητές/ριες συμπλήρωσαν στον υπολογιστή τους ένα φύλλο εργασίας και, συνεργαζόμενοι σε ομάδες, με τη βοήθεια οδηγιών που περιείχε το φύλλο, προχώρησαν στη σύνταξη ερωτηματολογίων. Το τελικό ερωτηματολόγιο διαμορφώθηκε ύστερα από συζήτηση των ερωτηματολογίων των ομάδων σε ολομέλεια.

Στη δεύτερη φάση του προγράμματος οι μαθητές μοίρασαν τα ερωτηματολόγια και αφού τα συγκέντρωσαν, προχώρησαν στην καταγραφή, επεξεργασία και ανάλυση των δεδομένων. Συνολικά συμπληρώθηκαν 148 ερωτηματολόγια. Η επεξεργασία των δεδομένων έγινε με τη βοήθεια υπολογιστικών φύλλων (Excel). Οι μαθητές καταμέτρησαν τις απαντήσεις και καταχώρησαν τη συχνότητα σε φύλλο εργασίας το

οποίο δόθηκε σε έντυπη μορφή και στη συνέχεια κλήθηκαν να καταχωρήσουν τα αποτελέσματα της ομάδας τους στον υπολογιστή. Αφού συγκεντρώθηκαν και καταχωρήθηκαν τα συνολικά αποτελέσματα (από όλες τις ομάδες) προχώρησαν στον υπολογισμό του ποσοστού, με την απλή μέθοδο των τριών, το οποίο και καταχωρούσαν στα αντίστοιχα κελιά ενός φύλλου εργασίας Excel. Τέλος αποτύπωσαν τα αποτελέσματα της έρευνας κατασκευάζοντας γραφήματα (ραβδογράμματα και κυκλικά διαγράμματα, (βλ. παράρτημα).

Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάστηκαν με power point στους/στις μαθητές/ριες των τάξεων που πήραν μέρος στην έρευνα, με σκοπό να εμπλακεί η ευρύτερη σχολική κοινότητα σε ένα θέμα που τους αφορά και τους απασχολεί. Ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό των μαθητών (70%) δήλωσε ότι έχει δεχθεί κάποια μορφή βίας από τους συμμαθητές του (βρισιές ή χτυπήματα), ενώ το ίδιο ποσοστό αναφέρει ότι δεν κάνει χρήση βίας. Μεγάλο επίσης ποσοστό μαθητών (60%) δηλώνει ότι νοιώθουν καθημερινά άσχημα - πληγωμένα εξαιτίας συμπεριφοράς άλλων παιδιών. Πολλοί μαθητές (37%) δήλωσαν ότι αδιαφορούν, όταν βλέπουν κάποιους μαθητές να μαλώνουν ή να χτυπιούνται. Οι περισσότεροι ανέφεραν ότι υπάρχουν οι «μάγκες» και οι «νταήδες» στο σχολείο. Ως συχνότερος τρόπος αντιμετώπισης των προβλημάτων αναφέρθηκε η συζήτηση με το δάσκαλο ή τους μαθητές. Πάνω από τα μισά παιδιά δήλωσαν ότι λύνουν τις διαφορές τους με συζήτηση. Ενδιαφέρον ήταν και ο σχολιασμός των μαθητών που διεξήγαγαν την έρευνα ως προς το θέμα της ειλικρίνειας των απαντήσεων που έδωσαν οι ερωτώμενοι.

Για την αξιολόγηση του προγράμματος χρησιμοποιήθηκε, μεταξύ άλλων, ένα «φύλλο αυτοαξιολόγησης». Σύμφωνα με τις δηλώσεις των μαθητών/ριών οι δραστηριότητες που αφορούσαν την έρευνα στο σχολείο προκάλεσαν το ενδιαφέρον τους και τις θεώρησαν ως ένα «παιχνίδι» που τους βοήθησε να κατανοήσουν το πρόβλημα της βίαιης συμπεριφοράς στο σχολείο τους. Επίσης, αντιλήφθηκαν ότι οι γνώσεις στατιστικής μπορούν να τους βοηθήσουν στη διερεύνηση και άλλων προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Οι μαθητές δήλωσαν ότι χάρηκαν, γιατί τα μαθηματικά τους έγιναν πιο ζωντανά, κατάλαβαν καλύτερα την έννοια του ποσοστού και τα γραφήματα. Πιστεύουμε ότι μέσα από την εμπλοκή τους στην ερευνητική εργασία προωθήθηκε η συνεργατική μάθηση και η αλλαγή στάσης στη διαχείριση μαθηματικών προβλημάτων. Οι μαθητές ζήτησαν να επαναλάβουν την έρευνα και με άλλα θέματα της καθημερινής τους ζωής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) Μαθηματικών Στ΄ τάξης, ΦΕΚ 303Β και 304Β, 13-3-2003.

Κασιώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2011). *Μαθηματικά Στ΄, Βιβλίο δασκάλου*. ΥΠΕΠΘ, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (έκδοση στ΄), ΟΕΔΒ.

Ματσαγγούρας, Η. (2002). *Η διαθεματικότητα στη σχολική γνώση.* Αθήνα: Γρηγόρης.

Χηνάς, Π., & Χρυσαφίδης, Κ. (2000). *Η επιθετικότητα στο σχολείο. Προτάσεις για πρόληψη και αντιμετώπιση*. ΥΠΕΠΘ. Διαθέσιμο στο διαδικτυακό τόπο: http://www.pi-schools.gr/download/lessons/social/entypa/epithet1.pdf

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ:

Φύλλο εργασίας(1)

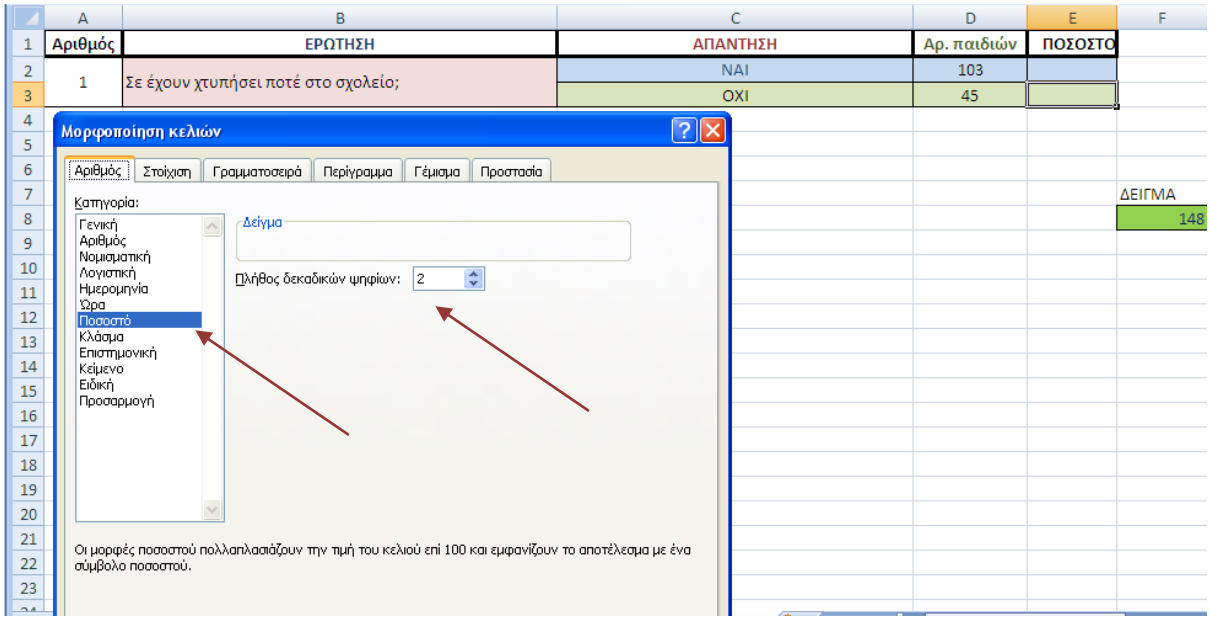
Αριθμός	ΕΡΩΤΗΣΗ	*ΑΠΑΝΤΗΣΗ*	Καταμέτρηση I	Συχνότητα
1	Σε έχουν χτυπήσει ποτέ στο σχολείο;	ΝΑΙ	IIII	4
		ΟΧΙ	IIII	4
2	Σε έχουν βρίσει;	ΝΑΙ	IIIII	5
		ΟΧΙ	III	3
3	Έχεις χτυπήσει εσύ ή έχεις βρίσει κάποιο παιδί;	ΝΑΙ	IIII	4
		ΟΧΙ	IIII	4
4	Σε έχουν κάνει να νιώσεις άσχημα μερικές φορές για τον εαυτό σου;	ΜΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ	II	2
		ΠΟΛΥ ΣΥΧΝΑ	IIII	4
		ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΘΕ ΜΕΡΑ	II	2
		ΠΟΤΕ		
5	Έχεις νιώσει απομονωμένος/-η στο σχολείο;	ΜΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ	IIII	4
		ΣΥΧΝΑ	III	3
		ΠΟΤΕ	I	1
6	Ποιος νομίζεις ότι είναι ο καλύτερος τρόπος για να σταματήσει ένας καβγάς;	ΜΕ ΒΡΙΣΙΕΣ	IIII	4
		ΜΕ ΚΛΟΤΣΙΕΣ-ΞΥΛΟ	III	3
		ΜΕ ΣΥΖΗΤΗΣΗ	I	1
7	Αν βλέπεις κάποιους να μαλώνουν και να χτυπιούνται, τι κάνεις;	ΑΔΙΑΦΟΡΩ	III	3
		ΠΑΙΡΝΩ ΤΟ ΜΕΡΟΣ ΚΑΠΟΙΟΥ	IIII	4
		ΤΟΥΣ ΠΡΟΤΡΕΠΩ ΝΑ ΣΥΝΕΧΙΣΟΥΝ		
		ΠΡΟΣΠΑΘΩ ΝΑ ΤΟΥΣ ΣΥΜΦΙΛΙΩΣΩ	I	1
8	Φοβάσαι κάποιο ή κάποια παιδιά στο σχολείο;	ΝΑΙ	IIII	4
		ΟΧΙ	IIII	4
9	Υπάρχουν "νταήδες" ή " μάγκες" στο σχολείο;	ΝΑΙ	IIIII	6
		ΟΧΙ	II	2
10	Πώς αντιδράς όταν κάποιος σε βρίσει ή σε προσβάλλει;	ΔΕ ΛΕΩ ΤΙΠΟΤΑ ΣΕ ΚΑΝΕΝΑΝ	III	3
		ΤΟ ΛΕΩ ΣΤΟΝ ΔΑΣΚΑΛΟ/ΣΤΗΝ ΔΑΣΚΑΛΑ ΜΟΥ	II	2
		ΤΟ ΛΕΩ ΣΤΟΝ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗ		
		ΤΟ ΣΥΖΗΤΩ ΜΕ ΤΟΥΣ ΓΟΝΕΙΣ ΜΟΥ		
		ΔΕ ΔΙΝΩ ΣΗΜΑΣΙΑ	II	2
		ΤΟΝ ΒΡΙΖΩ	I	1
		ΤΟΝ ΔΕΡΝΩ		
		ΒΑΖΩ ΚΑΠΟΙΟΝ		

		ΦΙΛΟ ΜΟΥ ΝΑ ΤΟΝ ΑΠΕΙΛΗΣΕΙ		

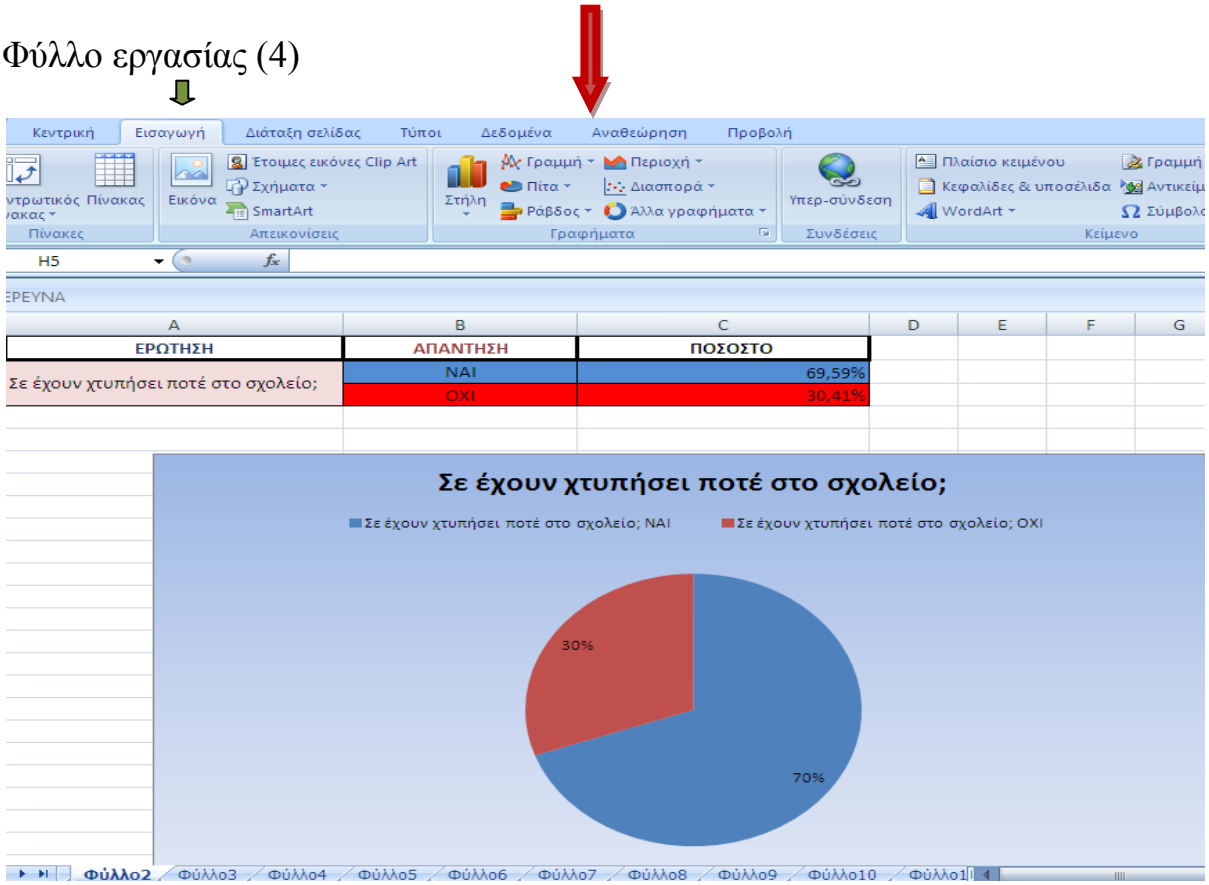
Φύλλο εργασίας 2

Αριθμός	ΕΡΩΤΗΣΗ	ΑΠΑΝΤΗΣΗ	Αρ. παιδιών
1	Σε έχουν χτυπήσει ποτέ στο σχολείο;	ΝΑΙ	
		ΟΧΙ	
2	Σε έχουν βρίσει;	ΝΑΙ	
		ΟΧΙ	
3	Έχεις χτυπήσει εσύ ή έχεις βρίσει κάποιο παιδί;	ΝΑΙ	
		ΟΧΙ	
4	Σε έχουν κάνει να νιώσεις άσχημα μερικές φορές για τον εαυτό σου;	ΜΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ	
		ΠΟΛΥ ΣΥΧΝΑ	
		ΣΧΕΔΟΝ ΚΑΘΕ ΜΕΡΑ	
		ΠΟΤΕ	
5	Έχεις νιώσει απομονωμένος/-η στο σχολείο;	ΜΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ	
		ΣΥΧΝΑ	
		ΠΟΤΕ	
6	Ποιος νομίζεις ότι είναι ο καλύτερος τρόπος για να σταματήσει ένας καβγάς;	ΜΕ ΒΡΙΣΙΕΣ	
		ΜΕ ΚΛΟΤΣΙΕΣ-ΞΥΛΟ	
		ΜΕ ΣΥΖΗΤΗΣΗ	
7	Αν βλέπεις κάποιους να μαλώνουν και να χτυπιούνται, τι κάνεις;	ΑΔΙΑΦΟΡΩ	
		ΠΑΙΡΝΩ ΤΟ ΜΕΡΟΣ ΚΑΠΟΙΟΥ	
		ΤΟΥΣ ΠΡΟΤΡΕΠΩ ΝΑ ΣΥΝΕΧΙΣΟΥΝ	
		ΠΡΟΣΠΑΘΩ ΝΑ ΤΟΥΣ ΣΥΜΦΙΛΙΩΣΩ	
8	Φοβάσαι κάποιο ή κάποια παιδιά στο σχολείο;	ΝΑΙ	
		ΟΧΙ	
9	Υπάρχουν "νταήδες" ή " μάγκες" στο σχολείο;	ΝΑΙ	
		ΟΧΙ	
10	Πώς αντιδράς όταν κάποιος σε βρίσει ή σε προσβάλλει;	ΔΕ ΛΕΩ ΤΙΠΟΤΑ ΣΕ ΚΑΝΕΝΑΝ	
		ΤΟ ΛΕΩ ΣΤΟΝ ΔΑΣΚΑΛΟ/ΣΤΗΝ ΔΑΣΚΑΛΑ ΜΟΥ	
		ΤΟ ΛΕΩ ΣΤΟΝ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗ	
		ΤΟ ΣΥΖΗΤΩ ΜΕ ΤΟΥΣ ΓΟΝΕΙΣ ΜΟΥ	
		ΔΕ ΔΙΝΩ ΣΗΜΑΣΙΑ	
		ΤΟΝ ΒΡΙΖΩ	
		ΤΟΝ ΔΕΡΝΩ	
		ΒΑΖΩ ΚΑΠΟΙΟΝ ΦΙΛΟ ΜΟΥ ΝΑ ΤΟΝ ΑΠΕΙΛΗΣΕΙ	

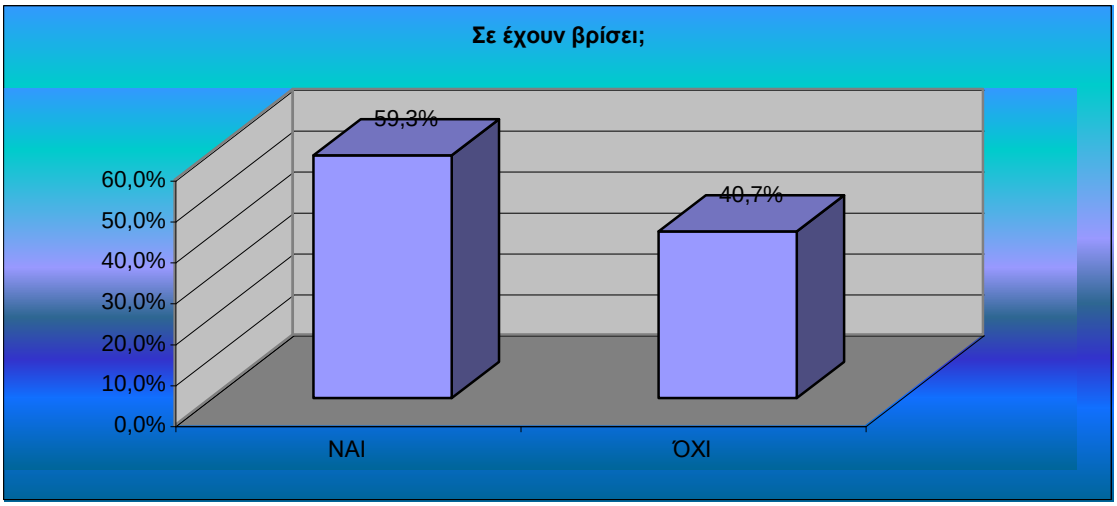
Φύλλο εργασίας 3

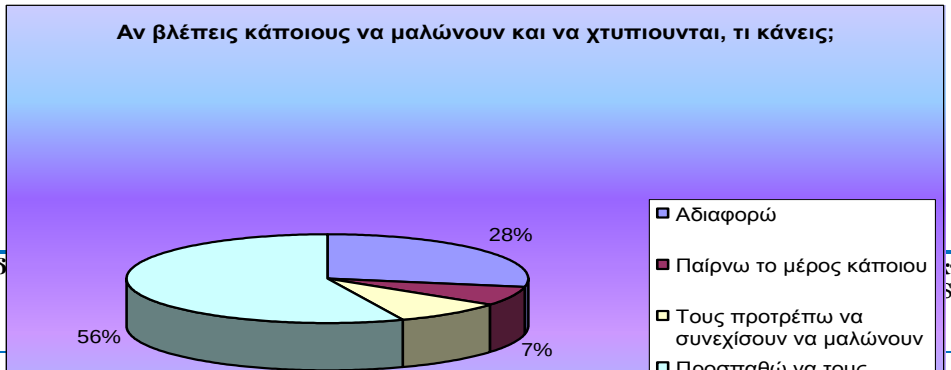


Φύλλο εργασίας (4)



Ενδεικτικά γραφήματα των μαθητών/ριών





ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ-ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ (Ε΄ΤΑΞΗ)

Καππάτου Αναστασία, Πετρούλα Παπαθανασίου

Πρότυπο Πειραματικό Δημοτικό Σχολείο Φλώρινας

NatassaKF@hotmail.com, pepipap67@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διδακτική πρακτική βασίζεται στην αρχή της διαθεματικότητας, εφόσον διανθίζει στη διδασκαλία της περιμέτρου στοιχεία από τη Γεωγραφία, τη Θεατρική Αγωγή και τα Εικαστικά. Επίσης, αξιοποιεί τα βιώματα και τις εμπειρίες των μαθητών (εφόσον αναφέρεται σε μια εκπαιδευτική επίσκεψη που είχαν πραγματοποιήσει τα παιδιά), συνδέοντας με τον τρόπο αυτό τα Μαθηματικά με τη ζωή, αξιοποιεί διδακτικά τη χρήση των νέων τεχνολογιών (με τη χρήση του προγράμματος PowerPoint) και τέλος ενισχύει την ομαδική μορφή εργασίας.

Α. ΣΤΟΧΟΙ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Κύριος διδακτικός στόχος

Να είναι σε θέση οι μαθητές να υπολογίζουν την περίμετρο κανονικών και μη κανονικών πολυγώνων.

Επιμέρους διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές να είναι ικανοί:

1. να αναγνωρίζουν τα τρίγωνα, τετράγωνα, πλάγια και ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τραπέζια και τα μη κανονικά τετράπλευρα, πεντάγωνα.
2. να εντοπίζουν τις πλευρές, κορυφές και γωνίες ως επιμέρους στοιχεία των σχημάτων.
3. να κατανοήσουν την έννοια των ισοπεριμετρικών σχημάτων.
4. να συνεργάζονται σε ομάδες για την επίτευξη μιας δραστηριότητας.
5. να προβληματιστούν ως προς τη σύνδεση των μαθηματικών με θεατρικό δρώμενο (διαθεματικότητα με Θεατρική Αγωγή).
6. να ασκήσουν τις κατασκευαστικές τους δεξιότητες συνδυαστικά με τη μαθηματική σκέψη (διαθεματικότητα με Εικαστικά).
7. να ασκηθούν στο σχεδιασμό σε τετραγωνισμένο χαρτί και στο χειρισμό γεωμετρικών οργάνων, όπως χάρακα και διαβήτη.

Β. ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Οι μαθητές έρχονται από τις μικρές τάξεις του δημοτικού σε επαφή με την έννοια της περιμέτρου. Συγκεκριμένα, από τη Β΄ Δημοτικού (ενότητα 15 «Μετρώ Ευθύγραμμα τμήματα») οι μαθητές διαισθητικά έρχονται σε μια πρώτη επαφή με την έννοια της περιμέτρου μέσω της άσκησής τους στη βιωματική μέτρηση ευθύγραμμων τμημάτων. Στη συνέχεια στην Γ΄ τάξη οι μαθητές ασκούνται στην μέτρηση της επιφάνειας με αυθαίρετες μονάδες χωρίς ωστόσο να γίνεται λόγος για την έννοια της περιμέτρου (ενότητα 50 «Μέτρηση της επιφάνειας»). Στην Δ΄ Δημοτικού, εντούτοις οι μαθητές ασχολούνται ενδελεχώς με την έννοια της περιμέτρου, διακρίνοντάς την μάλιστα από εκείνη του εμβαδού στις ενότητες 30 «Διακρίνω το περίγραμμα από την επιφάνεια» και 31 «Υπολογίζω περιμέτρους και εμβαδά» κανονικών τετράπλευρων (τετράγωνο, τρίγωνο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμα, πλάγιο παραλληλόγραμμο, τραπέζιο).

Γ. ΠΟΡΕΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Φάση 1η. Έλεγχος προαπαιτούμενων και προϋπαρχουσών γνώσεων

Θα λάβει χώρα ο έλεγχος των προαπαιτούμενων γνώσεων των μαθητών μέσω της διεξαγωγής ενός σύντομου δρώμενου προκειμένου να ενεργοποιηθούν τα κίνητρα για μάθηση των παιδιών. Συγκεκριμένα θα ανακοινωθεί στους μαθητές ότι θα γίνει ένα θεατρικό με τίτλο: «Τα γεωμετρικά σχήματα εν μέσω οικονομικής κρίσης». Οι πρωταγωνιστές θα είναι τρεις μαθητές οι οποίοι θα αναπαριστούν ένα γκρινιάρικο τρίγωνο, ένα στενοχωρημένο τετράγωνο και ένα αισιόδοξο εξάγωνο (θα υπάρχουν φόδρες στα ανάλογα σχήματα που θα τις φορούν τρεις μαθητές). Όλα τα σχήματα έχουν πρόβλημα με τα χρήματα που θα πρέπει να δαπανήσουν για να ράψουν το πρωτοχρονιάτικο κοστούμι τους για το ρεβεγιόν. Το γκρινιάρικο τρίγωνο παραπονιέται ότι δεν έχει τα απαιτούμενα χρήματα και αναρωτιέται πόσο θα του κοστίσει. Το στενοχωρημένο τετράγωνο κλαίει γιατί δεν μπορεί να ανταπεξέλθει και αυτό στα έξοδα ενώ το αισιόδοξο εξάγωνο τα παρηγορεί λέγοντάς τους ότι μπορούν να κάνουν μια συναυλία και να κερδίσουν τα χρήματα που χρειάζονται, φτάνει πρώτα από όλα να μετρήσουν τις διαστάσεις τους (περίμετρος) και να δουν το ύψος του ποσού που απαιτείται να συγκεντρώσουν. Ζητείται από τους μαθητές ο τρόπος επίλυσης του προβλήματος (υπολογισμός περιμέτρου). Δίνεται η πλευρά του τριγώνου: 10 εκ, του τετραγώνου: 10 εκ και του εξαγώνου: 10 εκ. Οι μαθητές ανά ομάδα εργασίας συσκέφτονται και ανευρίσκουν τρόπους υπολογισμού των διαστάσεων του κουστουμιού του κάθε σχήματος κάνοντας ταυτόχρονα αναδρομή στις προϋπάρχουσες γνώσεις τους για την έννοια και τον υπολογισμό της περιμέτρου. Στη συνέχεια ανακοινώνουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους. Αναμένεται ότι οι μαθητές θα είναι σε θέση να ανταπεξέλθουν θετικά στην άσκηση που τους δόθηκε.

Φάση 2η. Εισαγωγική δραστηριότητα

Στα πλαίσια της φάσης αυτής θα γίνει προβολή της παρουσίασης που έχει σχεδιαστεί στο πρόγραμμα Powerpoint και η οποία εισάγει τους μαθητές στην έννοια της περιμέτρου μέσω μιας δραστηριότητας διαθεματικής με τη Γεωγραφία. Συγκεκριμένα, θα γίνει υπενθύμιση στους μαθητές της συγκεκριμένης τάξης της περιβαλλοντικής εκδρομής που είχαν πραγματοποιήσει πέρυσι στο Νυμφαίο και στο Κέντρο Προστασίας των Αρκούδων «Ο Αρκτούρος» που είχαν την ευκαιρία να επισκεφθούν. Παράλληλα θα διανεμηθούν στις 4 ομάδες εργασίας των μαθητών κομμάτια φενιζόλ και καλαμάκια και θα τους ζητηθεί να κατασκευάσουν μια φωλιά για την οικογένεια των αρκούδων που υπάρχει στην παρουσίαση. Αναμένεται ότι οι μαθητές βλέποντας και την παρουσίαση θα κατασκευάσουν με ευκολία τη ζητούμενη φωλιά για τις αρκούδες. Στη συνέχεια θα τους ζητηθεί να κατασκευάσουν μια τριγωνική, μια τετράγωνη και μια εξαγωνική φωλιά που να έχουν όλες περίμετρο 24 εκ. Οι μαθητές θα χρειαστεί πρώτα μέσω της περιμέτρου να υπολογίσουν το μήκος της κάθε πλευράς των σχημάτων και στη συνέχεια να κατασκευάσουν τη φωλιά, ενώ έπειτα από το πέρας της δραστηριότητας αυτής θα γίνει λόγος για τα ισοπεριμετρικά σχήματα.

Φάση 3η. Επισημοποίηση νέας γνώσης

Στο σημείο αυτό θα συζητηθεί με τους μαθητές ο τρόπος σκέψης που ακολούθησαν και θα τους ζητηθεί να περιγράψουν την έννοια της περιμέτρου. Επίσης, θα γίνει λόγος για την έννοια των ισοπεριμετρικών σχημάτων. Στο σημείο αυτό θα συνεχίσει η προβολή της παρουσίασης στο Powerpoint που κάνει λόγο για την έννοια της περιμέτρου.

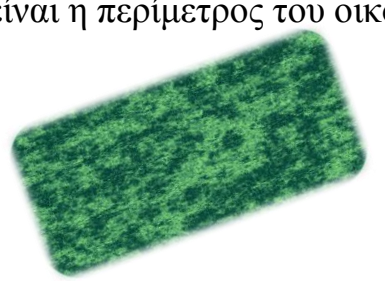
Φάση 4η. Ασκήσεις εφαρμογής-εμπέδωσης

Θα πραγματοποιηθούν οι εργασίες 1 και 2 από το Βιβλίο του μαθητή (σελ. 66 και 67). Οι εργασίες αυτές, οι οποίες καλούν τους μαθητές σε πρώτη φάση να σχεδιάσουν σε μιλιμετρέ χαρτί διάφορα γεωμετρικά σχήματα και στη συνέχεια μετρώντας τις πλευρές τους να βρουν την περίμετρό τους (εργασία 1) και κατόπιν να κινηθούν αντίστροφα και να κατασκευάσουν τα σχήματα γνωρίζοντας την περίμετρό τους (εργασία 2), προτείνεται να πραγματοποιηθούν από τους μαθητές στο πλαίσιο εξάσκησης των σχεδιαστικών τους δεξιοτήτων και στο χειρισμό των γεωμετρικών οργάνων.

Φάση 5η. Αξιολόγηση

Να λύσετε στις ομάδες εργασίας τα παρακάτω προβλήματα:

1. Η βάση ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου είναι 42 μέτρα και το ύψος του είναι τα 2/3 της βάσης του. Ποια είναι η περίμετρος του οικοπέδου;



2. Η μητέρα της Βενετίας έχει ένα τραπεζομάντιλο σε τετράγωνο σχήμα με πλευρά 140 εκ. Θέλει να βάλει γύρω του δαντέλα που κοστίζει 5 ευρώ το μέτρο. Πόσα ευρώ θα της κοστίσει η δαντέλα;



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γεωμετρικά σχήματα – Περίμετρος, ενότητα 24, σελ. 66-67

(ψηφιακό σχολείο, βιβλίο μαθητή) http://ebooks.edu.gr/courses/DSDIM-E102/document/4bd818d324i1/4bd81917isfe/4bd819175slo.pdf

Γεωμετρικά σχήματα – Περίμετρος, τετράδιο εργασιών, σελ. 28-29 (ψηφιακό σχολείο, τετράδιο εργασιών) http://ebooks.edu.gr/courses/DSDIM-E102/document/4bd818d324i1/4bd81926d3h3/4dd635c8z36o/4dd635c8gbf5.pdf

Γεωμετρικά σχήματα- Περίμετρος, βιβλίο δασκάλου, σελ. 114-116 (ψηφιακό σχολείο, βιβλίο δασκάλου) http://ebooks.edu.gr/courses/DSDIM-E102/document/4bd818d324i1/4bd81909ket9/4bd81909laj1.pdf

Δ.Ε.Π.Σ. Μαθηματικών (ψηφιακό σχολείο) http://ebooks.edu.gr/info/newps/Μαθηματικά/Μαθηματικά%20

Lemonidis C. (1997). A few remarks regarding the teaching of geometry, through a theoretical analysis of the geometrical figure. In the Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts 96, Florida Tech, Applied Mathematics Program, Florida, USA, pp. 2087-2095. Κάποιες παρατηρήσεις για τη διδασκαλία της γεωμετρίας διαμέσου μιας θεωρητικής ανάλυσης του γεωμετρικού σχήματος.

Λεμονίδης, Χ (1993). Επίδραση των τυπικών αναπαραστάσεων στη συμπεριφορά του μαθητή. Παραδείγματα από τη Γεωμετρία. Εισήγηση στο 4ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ψυχολογικής Έρευνας. ΕΛΨΕ Θεσ/νίκη, 27-30 Μαΐου 1993. Περίληψη στα πρακτικά σελ. 198.

Van Hiele, P. M. (1984). Summary of Pierre van Hiele's dissertation entitled: The Problem of Insight in Connection with School Children's Insight into the Subject-Matter of Geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), English Translation of Selected Writing of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele (pp. 242-246). Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education. (Original work published 1957).

Van Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play. *Teaching Children Mathematics* 6, 310-16. Retrieved Sep. 8, 2008, from http://schools.nyc.gov/NR/rdonlyres/0EFD73D4-340A42E28EB4-3BC2A6B05603/38319/30vanHielePlay.pdf

Van de Walle, John A. (2007). *Γεωμετρική Σκέψη και Γεωμετρικές Έννοιες. Στο Διδάσκοντας Μαθηματικά Για Δημοτικό και Γυμνάσιο: Μια Αναπτυξιακή Διαδικασία* (6η έκδοση). (μετ. Σ. Σταφυλλίδου). (σελ. 515-567). Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Χρονάκη, Α. (2006). Η πρό(σ)κληση της γεωμετρίας και της τεχνολογίας στις μικρές ηλικίες: Το 'μέσο' και το 'μήνυμα' του συστήματος άτομα-τεχνολογία δραστηριότητα. *Θέματα στην Εκπαίδευση*, 7(1), 23-51.

Η ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΥΠΟΒΟΗΘΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Κοτσανά Βασιλική
Δημοτικό Σχολείο Αγίου Βασιλείου
bkotsana@sch.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία αφορά την παρουσίαση μιας διδακτικής παρέμβασης που υλοποιήθηκε στο πλαίσιο της συμμετοχής μου στην κοινότητα πρακτικής Ο.Μ.Α.Δ.Α (Ομάδα Μαθηματικών Αναζητήσεων και Διδακτικών Ανταλλαγών). Η ΟΜΑΔΑ συγκροτήθηκε το 2009 με πρωτοβουλία της καθηγήτριας του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Πατρών κ. Κολέζα και τη συμμετοχή μιας ερευνήτριας και έξι εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης του Ν. Αχαΐας, κατά τα έτη 2012-2014 με σκοπό την ανάπτυξη της διδασκαλίας των μαθηματικών και γενικότερα την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών Α/θμιας εκπαίδευσης στα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, ένας από τους κύριους στόχους στους οποίους επικεντρωθήκαμε ήταν η διερεύνηση των μαθητών κατά τη διερεύνηση μιας μαθηματικής έννοιας, η οποία προϋποθέτει την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας από μέρους των μαθητών.

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

Ειδικότερα, η παρούσα διδακτική παρέμβαση αφορά την ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών της τρίτης τάξης σε ότι αφορά τις σχέσεις μεταβλητών σε αριθμητικά προβλήματα μέσω μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης: του Μοντέλου του Ορθογωνίου. Το μοντέλο αυτό, χρησιμοποιείται ήδη από τη δεκαετία του 1980 από τους μαθητές των σχολείων της Σιγκαπούρης ως τρόπος αναπαράστασης των μαθηματικών σχέσεων σε προβλήματα, με αξιόλογα αποτελέσματα (Kaur & Yeap, 2009). Θεωρείται ως η «εικονική έκφραση του αλγεβρικού τρόπου σκέψης» (Englard, 2010) και η «σκαλωσιά που βοηθάει τη μετάβαση στην Άλγεβρα» (:Scaffolding the Way to Algebra)(Hoven and Garelick, 2007).

Στη διδακτική μας παρέμβαση, το μοντέλο χρησιμοποιήθηκε α) για την επίλυση απλών προβλημάτων πρόσθεσης και των δύο αντίστροφων προβλημάτων (αφαίρεσης) που προκύπτουν από αυτό β) για την επίλυση απλών προβλημάτων πολλαπλασιασμού καθώς και των δύο αντίστροφων προβλημάτων (διαίρεσης) που προκύπτουν από αυτό και γ) για προβλήματα σύγκρισης.

Στόχος μας ήταν να διαπιστώσουμε: α) αν η χρήση του Μοντέλου του Ορθογωνίου βοηθάει τους μαθητές να σκέφτονται λογικά όταν λύνουν αριθμητικά προβλήματα και αν διευκολύνει την κατανόησή τους και την ικανότητά τους να λύσουν

προβλήματα, β) αν η χρήση του Μοντέλου του Ορθογωνίου διευκολύνει στη δημιουργία και επίλυση αντίστροφων προβλημάτων των δύο προαναφερόμενων κατηγοριών προβλημάτων από τους μαθητές και γ) αν κατά τη διαδικασία διερεύνησης ενισχύεται η συμμετοχικότητα των μαθητών και η ανάπτυξη σωστής επιχειρηματολογίας

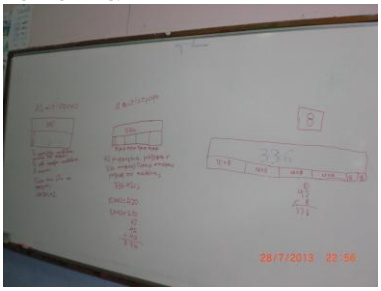
Κατά τη διδασκαλία ακολουθήθηκαν τα παρακάτω βήματα και για τις τρεις κατηγορίες προβλημάτων:

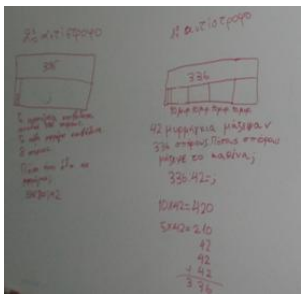
Α΄ ΦΑΣΗ

Επίλυση αρχικού προβλήματος με τη χρήση του μοντέλου του Ορθογωνίου. (Δημιουργία του Ορθογωνίου και τοποθέτηση των δεδομένων του προβλήματος σε αυτό)

Επίλυση παρόμοιων προβλημάτων για εξάσκηση.

Επίλυση των δύο αντίστροφων του αρχικού τύπων προβλημάτων με τη χρήση του Ορθογωνίου. (Δημιουργία του Ορθογωνίου και τοποθέτηση των δεδομένων των προβλημάτων σε αυτό)





Β΄ ΦΑΣΗ

Δίνεται το ορθογώνιο με τα δεδομένα ενός προβλήματος πρόσθεσης ή πολλαπλασιασμού. Ζητείται από τους μαθητές να συνθέσουν τα λόγια του προβλήματος. Οι μαθητές λύνουν το πρόβλημα

Δίνεται το ορθογώνιο με τα δεδομένα καθενός των δύο, αντίστροφων των αρχικών, τύπων προβλημάτων. Ζητείται από τους μαθητές να συνθέσουν τα λόγια των προβλημάτων. Οι μαθητές λύνουν τα προβλήματα

Γ΄ ΦΑΣΗ

Δίνεται η «ιστορία» με όλα τα δεδομένα μιας κατάστασης (προσθετικού ή πολλαπλασιαστικού τύπου). Τοποθετούμε όλα τα δεδομένα σε ένα αρχικό ορθογώνιο.

Ζητείται από τους μαθητές με βάση το αρχικό ορθογώνιο να συνθέσουν λεκτικά τον πρώτο τύπο προβλήματος. Οι μαθητές σχεδιάζουν το ορθογώνιο του προβλήματος. Λύνουν το πρόβλημα.

Ζητείται από τους μαθητές με βάση το αρχικό ορθογώνιο να συνθέσουν λεκτικά τον δεύτερο τύπο προβλήματος ($1^{ο}$ αντίστροφο του προηγούμενου). Οι μαθητές σχεδιάζουν το ορθογώνιο του προβλήματος. Λύνουν το πρόβλημα.

Ζητείται από τους μαθητές με βάση το αρχικό ορθογώνιο να συνθέσουν λεκτικά τον τρίτο τύπο προβλήματος ($2^{ο}$ αντίστροφο). Οι μαθητές σχεδιάζουν το ορθογώνιο του προβλήματος. Λύνουν το πρόβλημα.

Κατά τη φάση αυτή δεν απαιτούμε από τους μαθητές να ακολουθήσουν τη σειρά λεκτική σύνθεση- ορθογώνιο. Θεωρείται αποδεκτό κάποιος μαθητής να ακολουθήσει τη σειρά ορθογώνιο-λεκτική σύνθεση.

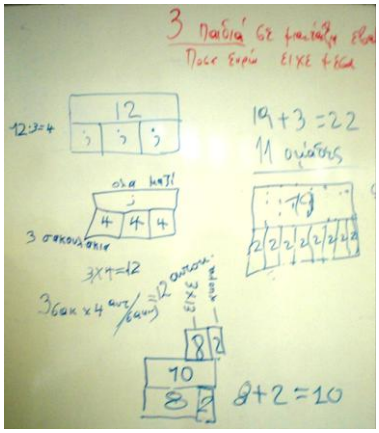
Από τις παρατηρήσεις μας προέκυψε ότι η χρήση του Ορθογωνίου στην επίλυση προβλημάτων βοηθά τους μαθητές και κυρίως τους πιο αδύναμους όχι μόνο να κατανοήσουν προβλήματα πρόσθεσης και απλά προβλήματα πολλαπλασιασμού και άρα να μπορούν με ευκολία να αντιλαμβάνονται τη μαθηματική πράξη που λύνει το πρόβλημα, αλλά και να αναπτύξουν με μεγαλύτερη ευκολία την επιχειρηματολογία κατά τη διαδικασία διαπραγμάτευσης της επίλυσης του προβλήματος καθώς η απεικόνιση των δεδομένων στο ορθογώνιο επιτρέπει και στους πιο αδύναμους μαθητές να συμμετέχουν. Ενισχύθηκε δηλαδή και η συμμετοχικότητα στην τάξη και η αλληλεπίδραση των μαθητών.

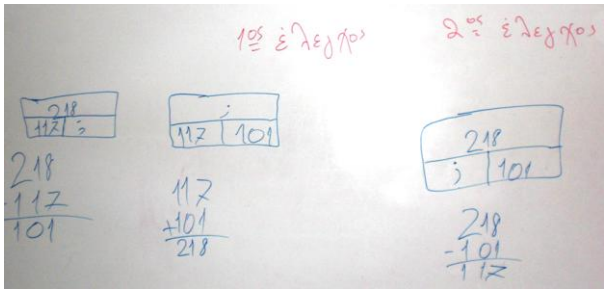
Επιπρόσθετα από τις παρατηρήσεις μας προέκυψε ότι η χρήση του Ορθογωνίου καθιστά τους μαθητές ικανούς να κατασκευάζουν και να επιλύουν επιτυχώς και τα αντίστροφα προβλήματα αυτών-δεξιότητα που, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, θεωρείται αρκετά δύσκολη να κατακτηθεί.

Όταν κλήθηκαν από τον δάσκαλο να σκεφτούν εναλλακτικά προβλήματα που προκύπτουν με βάση τα ίδια δεδομένα διαπραγματεύτηκαν το ζήτημα χωρίς την επέμβαση του εκπαιδευτικού, επιχειρηματολόγησαν προτείνοντας πιθανές λύσεις και αντικρούοντας άλλες και μπόρεσαν με μεγάλη ευκολία να εντοπίσουν τα δύο αντίστροφα προβλήματα, να τοποθετήσουν τα δεδομένα στα κατάλληλα κουτάκια και να προτείνουν τη λύση που αντιστοιχεί. Η συνεισφορά της χρήσης του Ορθογωνίου στην κατανόηση και επίλυση προβλημάτων των ως άνω κατηγοριών γίνεται ιδιαίτερα φανερή στη περίπτωση δημιουργίας προβλημάτων μέτρησης κατά την Γ΄ φάση της Β κατηγορίας προβλημάτων όπου ενώ οι μαθητές δυσκολεύτηκαν κατά τη λεκτική σύνθεση του προβλήματος –πρόβλημα που συνήθως συναντάμε κατά την διδασκαλία αντίστροφων προβλημάτων- δεν αντιμετώπισαν κανένα πρόβλημα να εντοπίσουν την μαθηματική πράξη για την επίλυσή τους με βάση το συμπληρωμένο Ορθογώνιο –πράγμα που επίσης θεωρείται δύσκολο να κατανοηθεί κατά την επίσημη βιβλιογραφία.

Συμπερασματικά θα λέγαμε ότι κατά τη χρήση του συγκεκριμένου μοντέλου απεικονιστικής αναπαράστασης οι μαθητές μπόρεσαν με μεγαλύτερη ευκολία να κατανοήσουν τα προβλήματα, ενισχύθηκε η συμμετοχή όλων των μαθητών και συμμετείχαν στη διερεύνηση του θέματος με μεγαλύτερη ευκολία αναπτύσσοντας πιο δομημένη αιτιολόγηση και επιχειρηματολογία υποστήριξης ή μη μίας πρότασης.

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια ενδεικτικά παραδείγματα που αποτυπώνουν τον τρόπο χρήσης του Μοντέλου του ορθογωνίου από τους μαθητές:





ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Englard, L. (2010). Raising the Bar on Problem Solving. *Teaching Children Mathematics*, 17 (3), 156-163.

Hoven, J. $ Garelick, B. (2007). Singapore Math: Simple or Complex? *Educational Leadership* 65, 3

Kaur, B., & Yeap, B. H. (2009). Mathematical problem solving in Singapore schools. In B. Kaur, B. H. Yeap, & M. Kapur (Eds.), *Mathematical problem solving:* Yearbook 2009. Singapore: Association of Mathematics Education and World Scientific.

Συμπληρωματικά:

Πόταρη, Δ., Αθανασιάδης, Η., Βρυώνης, Κ., Βερύκιος, Π., Γλένης, Σ., Ζαχαριάδης, Θ. κ.α. (2011), Πρόγραμμα Σπουδών, Μαθηματικά στην υποχρεωτική εκπαίδευση. Ανάρτηση από http://www.mathlab.upatras.gr/wp-content/uploads/2013/10

Mahoney, K. (2012). Effects of singapore's model method on elementary student problem-solving performance: single case research"(Education Doctoral Theses. Paper 70). Retrieved from http://hdl.handle.net/2047/d20002962,

English, L. D. (2006). Mathematical modelling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 303-323

Ministry of education of Singapore. (2009). The Singapore model Method for learning mathematics. Panpac Education Private.

Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: An exploratory study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(5), 719-737.

Chong, T. H., Khoo, P. S., Foong, P. Y., Kaur, B., & Lim-Teo, S. K. (1991). A state-of the-art review of mathematics education in Singapore. Singapore: Institute of Education.

Forsten, Char. (2010) *Step-by-Step Model Drawing.* Peterborough, NH: Crystal Springs Books.

Kaur, B. & Dindyal, J. (Eds.) (2010). *Mathematical Applications and Modelling*. Singapore: World Scientific.

Η ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ

Κοτσανά Βασιλική, Πανούτσος Χρήστος
Δημοτικό Σχολείο Αγίου Βασιλείου
bkotsana@sch.gr, cspanoutsos@yahoo.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία αποτελεί παρουσίαση μέρος μιας ευρύτερης μελέτης που πραγματοποιείται από την κοινότητα πρακτικής Ο.Μ.Α.Δ.Α (Ομάδα Μαθηματικών Αναζητήσεων και Διδακτικών Ανταλλαγών) του Εργαστηρίου Διδακτικής των Μαθηματικών του ΠΤΔΕ Πάτρας, με σκοπό την ανάπτυξη της διδασκαλίας των μαθηματικών και γενικότερα την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών Α/θμιας εκπαίδευσης στα μαθηματικά. Η ΟΜΑΔΑ συγκροτήθηκε το 2009 με πρωτοβουλία της καθηγήτριας κ. Κολέζα και τη συμμετοχή μιας ερευνήτριας και έξι εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης του Ν. Αχαΐας. Κατά το έτος 2012-2013 επικεντρώθηκε στη μελέτη της συμβολής της ανάπτυξης επιχειρηματολογίας από τους μαθητές κατά τα διερεύνηση μαθηματικών εννοιών. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην ενίσχυση της ικανότητας διερεύνησης των μαθητών κατά τη διαπραγμάτευση μιας μαθηματικής έννοιας, ικανότητα η οποία προϋποθέτει την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας από μέρους των μαθητών καθώς και στην ανάπτυξη της ικανότητας των εκπαιδευτικών να διαχειρίζονται το επικοινωνιακό περιβάλλον της τάξης.

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑΣ

Το θέμα που διαπραγματευόμαστε σε αυτό το κείμενο, αφορά την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας των μαθητών σε ότι αφορά τη «λογική» του τύπου του εμβαδού: «*Πως είναι δυνατόν μέσα απο τον πολλαπλασιασμό δυο μηκών (μονοδιάστατα μεγέθη), να προκύπτει ένα δι-διάστατο μέγεθος (εμβαδόν)*».

Είναι σύνηθες το φαινόμενο, πολλοί μαθητές-παρά το ότι έχουν το γνωστικό υπόβαθρο-, επιλέγουν να μένουν στο παρασκήνιο της τάξης είτε γιατί φοβούνται το «λάθος», είτε γιατί δεν έχουν εμπιστοσύνη στον εαυτό τους, είτε γιατί χρειάζονται περισσότερο χρόνο, σε σχέση με άλλους, να σκεφθούν. Έχοντας κάνει αυτές τις επισημάνσεις, τα μέλη της ΟΜΑΔΑς έφεραν στην κοινότητα για διαβούλευση το ζήτημα, επιζητώντας τρόπους αντιμετώπισής του. Στο πλαίσιο των αναζητήσεων «καλών πρακτικών» στην ΟΜΑΔΑ, εφαρμόσαμε εξειδικευμένες πρακτικές (πχ Hands off) για την αντιμετώπιση τέτοιου είδους φαινομένων, και την ενίσχυση της επικοινωνιακής ικανότητας όλων των μαθητών. Μια μορφή ενίσχυσης που προτάθηκε, αφορούσε την παρακίνηση των μαθητών στην διατύπωση επιχειρημάτων για τη στήριξη της άποψής τους. Απο τα μέλη της ομάδας διατυπώθηκαν έντονες ενστάσεις για το κατά πόσο μαθητές αυτής της ηλικίας «είναι δυνατόν να διατυπώσουν ολοκληρωμένα επιχειρήματα» και για τον αν τέτοιου είδους

διαδικασίες μπορούν να περιληφθούν στα στενά χρονικά περιθώρια μιας διδακτικής ώρας.

Αποφασίσαμε να διερευνήσουμε αυτά τα ερωτήματα με αφορμή μια (τυπική) άσκηση αναζήτησης του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου (10Χ5), στρέφοντας την προσοχή των μαθητών στις μονάδες που συνοδεύουν τα αριθμητικά δεδομένα. Πώς είναι δυνατόν από τον πολλαπλασιασμό δυο μηκών (σε εκατοστά) να προκύπτει δι-διάστατο μέγεθος (τετρ. εκατοστά). Αφιερώσαμε το πρώτο μέρος μιας διδακτικής ώρας για την υπόδειξη της μεθόδου επιχειρηματολογίας στους μαθητές και στην εξοικείωσή τους με τους κανόνες και τον νέο τρόπο λειτουργίας της τάξης.

Η επιχειρηματολογία κωδικοποιήθηκε σε τέσσερις κατηγορίες: Ερωτήσεις Διευκρίνησης, Ερωτήσεις Μεθόδου, Ερωτήσεις Συλλογισμού και Ερωτήσεις Εφαρμογής.

Δόθηκαν στους μαθητές ενδεικτικές ερωτήσεις που μπορούν να θέσουν κατά τη διαπραγμάτευση ενός θέματος ανάλογα με το είδος της παρέμβασης που θέλουν να κάνουν. Έτσι εάν δεν καταλαβαίνουν κάτι μπορούν να ζητήσουν διευκρινήσεις: Τι εννοείς; Μπορείς να δώσεις ένα παράδειγμα κλπ. Εάν θέλουν περισσότερες πληροφορίες για τη μέθοδο επίλυσης που χρησιμοποίησε ο συμμαθητής τους μπορούν να ρωτήσουν: Εγώ το έλυσα … Σε τι διαφέρει ο τρόπος σου από τον δικό μου που έκανα… Τι θα κάνεις μετά… κλπ Εάν θέλουν να καταλάβουν πώς σκέφτηκε ο συμμαθητής τους μπορούν να ρωτήσουν: Γιατί το έκανες έτσι; Πώς σκέφτηκες για να βρεις τη λύση; κλπ. Εάν δεν καταλαβαίνουν σε τι χρησιμεύει αυτό που μαθαίνουν μπορούν να ρωτήσουν: Πού θα το χρησιμοποιήσουμε; Πού μας χρησιμεύει; κλπ.

Προς μεγάλη μας έκπληξη η υιοθέτηση της νέας πρακτικής από τους μαθητές ήταν άμεση και καθ’ όλα αποτελεσματική. Οι μαθητές δέχτηκαν με ενθουσιασμό το νέο τους ρόλο και έμαθαν να χειρίζονται τις ερωτήσεις με ευχέρεια πέραν των όποιων προσδοκιών μας.

Κατά τη διαπραγμάτευση προέκυψε διαφωνία των μαθητών που αφορούσε τη μονάδα μέτρησης του εμβαδού. Η διαφωνία οδήγησε στη διατύπωση επιχειρημάτων (στο παρακάτω απόσπασμα υπογραμμίζονται οι πιο σημαντικές στιγμές) και σε γόνιμο διάλογο, όπως αυτός παρουσιάζεται στη συνέχεια.

1η ΦΑΣΗ ΣΥΝΟΜΙΛΙΑΣ

Μαθητής: Δεν θα μπορούσαμε να το βρούμε διαφορετικά, κύριε;

Εκπαιδευτικός: Βεβαίως … Ποιος θα μου πει έναν άλλο τρόπο; Για σκεφτείτε, πώς εργαστήκαμε, όταν θέλαμε να βρούμε το εμβαδόν του τριγώνου;

……..

Δ: Βασίλη, μας το διαβάζεις δυνατά;

Βασίλης: 10 εκατοστά επί 5 εκατοστά ίσον 50 εκατοστά.

Δ: Συμφωνείτε όλοι;

Γιώργος1: 10 εκατοστά επί 5 εκατοστά ίσον 50 τ. εκ.

……..

Μυρένια: Οι πράξεις πρέπει να γίνονται όλες με την ίδια μονάδα μέτρησης όπως θα μας βγει και το αποτέλεσμα. Τώρα αφού πολλαπλασιάζουμε εκατοστά επί εκατοστά δεν μπορεί το αποτέλεσμα να είναι μετά τετραγωνικά εκατοστά.

Μαθητές: ....

Δ: Η γνώμη σας;

Νίκος: Εκατοστά.

Δ: Η Μυρένια είπε την άποψή της. Εσύ λες εκατοστά. Γιατί;

Νίκος: Άμα κάνουμε 10 εκατοστά επί 5 εκατοστά,... δεν γίνεται να πολλαπλασιάσουμε πατάτες με πατάτες και να βρούμε πορτοκάλια.

Όλγα: Συμφωνώ με τη Μυρένια γιατί δεν γίνεται να πολλαπλασιάσουμε εκατοστά επί εκατοστά και να βγει τ. εκ.

Στον παραπάνω διάλογο αναδύεται η γνωσιακή σύγκρουση «το γινόμενο δύο αριθμών έχει την ίδια μονάδα με τους παράγοντες του γινόμενου». Οι μαθητές που κυριαρχούν στην τάξη συνήθως, παίρνουν και εδώ πρωταγωνιστικό ρόλο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η μέτρηση των πλευρών σε εκατοστά και το ότι και οι τρεις αριθμοί πρέπει να έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης, **ΠΑΡΑΣΥΡΕΙ το εμβαδόν.**

2η ΦΑΣΗ ΣΥΝΟΜΙΛΙΑΣ

Ιωάννα: Νομίζω είναι 50 τ. εκ. γιατί όταν ψάχνουμε το εμβαδόν, δεν θα πούμε εκατοστά, θα πούμε τετραγωνικά εκατοστά.

Όλγα:(Αλλάζει Γνώμη) Αφού μετράμε το εμβαδόν με τετραγωνάκια που είναι τ.εκ., πρέπει να γράψουμε τ.εκ γιατί αν πάρω εγώ ένα χάρακα, θα βρω το ίδιο, αλλά δεν θα βρω το αποτέλεσμα με τ.εκ. θα βρω σε εκ. Δηλαδή αυτό το μετρήσαμε με τ.εκ.

Μυρένια: Εγώ συμφωνώ με την Όλγα γιατί το τ.εκ είναι ένα τετραγωνάκι που η κάθε του πλευρά είναι από ένα εκατοστό. Ενώ το ένα εκατοστό μπορούμε να τραβήξουμε μια γραμμή με το χάρακα και να δούμε ότι αυτό είναι πάλι ένα εκατοστό μόνο. Άρα ένα τ.εκ. διαφέρει γιατί είναι ένα τετράγωνο.

Δ: Δηλαδή το 10 τι θα είναι; εκατοστό ή τ. εκ.;

Μυρένια: Ή όλα τ.εκ. ή όλα εκατοστά. Το σωστό για μένα είναι τ.εκ.

Δ: Εσύ Νίκο;

Νίκος: Είχε 10 εδώ πέρα και 5 η κάθε σειρά. Ε, 10 και το πολλαπλασιάζουμε 10 επί 5 μας κάνει 50 και αυτό δεν χρειάζεται εκατοστά, είναι τα κουτάκια. Δηλαδή 10 κουτάκια επί 5 κουτάκια ίσον 50 κουτάκια.

Η Όλγα ξεκινά τη σκέψη της με αφετηρία τα δεδομένα της Ιωάννας: «Αφού...» Για να στηρίξει το επιχείρημά της διαχωρίζει τα μήκη, σε «απλά» (που μετράμε σε

εκατοστά) από τα μήκη που είναι «πλευρές τετραγώνων» (άρα μετρώνται σε τ. εκ.)! Η Μυρένια υποστηρίζει το επιχείρημα της Όλγας και το επεκτείνει. Ο Νίκος προσπαθεί να επιλύσει τη σύγκρουση: «δεν χρειάζονται εκατοστά...». Τροποποιημένο συμπέρασμα: Και οι τρεις αριθμοί πρέπει να έχουν την ίδια μονάδα. Αφού το γινόμενο είναι τ.εκ. και οι άλλοι δυο αριθμοί θα είναι τ.εκ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το ότι το εμβαδόν πρέπει να είναι σε τ.εκ. ΠΑΡΑΣΥΡΕΙ ΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ

3η ΦΑΣΗ ΣΥΝΟΜΙΛΙΑΣ

Ιωάννα: Στο ορθογώνιο, πάντα δεν το λέγαμε τ. εκ. γιατί πάντα το μήκος και το πλάτος είναι σε εκατοστά άρα δεν θα πούμε τ. εκ θα πούμε εκατοστά σκέτο. Το μήκος και το πλάτος δεν θα το πούμε τ. εκ , θα το πούμε εκατοστά σκέτο.

Μυρένια: Μπορούμε όμως… εκατοστά λέγεται και άμα πάρουμε το χάρακα στο τετράδιό μας και μετρήσουμε και κάνουμε ένα εκατοστό, μια γραμμή. Και αυτό λέγεται εκατοστό. Αν το πολλαπλασιάσουμε όμως 5 επί 10 πάλι θα μας βγει 50 αλλά εκατοστά, όχι τ. εκ. Το τ. εκ. αντιστοιχεί σε ένα τετραγωνάκι που η κάθε του πλευρά είναι από ένα εκατοστό για αυτό λέγεται τ.εκ.

Ιωάννα: Ναι αλλά όταν ψάχνουμε το εμβαδόν, δεν βάζουμε εκατοστά, βάζουμε τ.εκ.

Μυρένια: Και τότε γιατί το πολλαπλασιάζεις με εκατοστά;

Ιωάννα: Γιατί το μήκος με το πλάτος δεν θα το πούμε τ.εκ θα το πούμε σκέτο εκατοστά.

Μυρένια: Γιατί; Δεν έχουμε μόνο γραμμές με εκατοστά. Τώρα έχουμε κουτάκια.

Ιωάννα: Τα κουτάκια δεν μπορείς να τα πολλαπλασιάσεις.

Μυρένια: Εννοώ τη γραμμή γύρω γύρω.

Το επιχείρημα της Ιωάννας είναι ότι «αυτό κάναμε πάντα», ενώ οι άλλοι μαθητές αναζητούν λογικά επιχειρήματα υπέρ της μιας ή της άλλης πρότασης. Οι μαθητές έχουν παρακάμψει το δάσκαλο και συζητούν μόνοι τους. Επιχειρηματολογούν και αιτιολογούν. Η λεκτική αλληλεπίδραση που αναπτύσσεται στο κοινωνικό πλαίσιο της τάξης των μαθηματικών επηρεάζει όχι μόνο τις γνωστικές κατασκευές των μαθητών στα Μαθηματικά, αλλά και την αυτοαντίληψή τους.

Στους παραπάνω διαλόγους διαφαίνονται με μια πρώτη ανάγνωση η απομάκρυνση του εκπαιδευτικού από το κέντρο της μαθησιακής διαδικασίας και η ενεργοποίηση των περισσότερων μαθητών, οι οποίοι κλήθηκαν να πάρουν μέρος συμφωνώντας ή διαφωνώντας με τις απόψεις που διατυπώθηκαν. Οι μαθητές προχώρησαν σε διατύπωση επιχειρημάτων και διαπραγματεύτηκαν την έννοια με τρόπο που ανέδειξε τις γνωσιακές συγκρούσεις. Οι ενεργοποίησή τους έφερε στην επιφάνεια παρανοήσεις που υπήρχαν για ένα θέμα διδαγμένο και γνωστό από προηγούμενες τάξεις. Συζήτησαν όλες τις απόψεις, διαπραγματεύτηκαν τις παρανοήσεις ανταλλάσσοντας επιχειρήματα, ανακαλώντας προηγούμενες γνώσεις και προσπαθώντας να καταλήξουν σε ένα αποτέλεσμα χωρίς αναφορά στην αυθεντία του

δασκάλου, η παρουσία του οποίου υπήρξε υποστηρικτική και είχε σκοπό μόνο να δώσει ώθηση στη συζήτηση όποτε αυτό χρειαζόταν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23–40.

Hunter, R. (2007). Can you convince me: Learning to use mathematical argumentation. In J. Woo, H. Lew, K. Park, D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st annual conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 3, pp. 381-389). South Korea, The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Maher, C. A., Powell, A. B., Weber, K., & Lee, H. S. (2006). Tracing middle-school students' arguments. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 403-410). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(1), 5–29.

Stylianides AJ & Stylianides GJ (2007a). Learning mathematics with understanding: A critical consideration of the learning principle in the principles and standards for schools mathematics. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 4:103-114.

Stylianides, A. J. (2007b). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1–20.

ΕΚΘΕΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Κούκιου Αλεξάνδρα
1ο Γυμνάσιο Νέας Ιωνίας Αττικής
kalex@math.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι μαθητές γυμνασίου, κατά την διάρκεια της χρονιάς, δουλεύουν σε ομαδικές εργασίες ή σε ατομικές κατασκευές. Οι κατασκευές είναι αναπαραστάσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου. Οι ομαδικές εργασίες είναι στατιστικές έρευνες (πχ ποιο είναι το αγαπημένο σου μάθημα, πόσες ώρες είσαι στο facebook κα) ή ιστορικά αφιερώματα πάνω σε θέματα μαθηματικών. Στο τέλος της χρονιάς παρουσιάζεται μια έκθεση μαθηματικών στο χώρο του σχολείου η οποία περιλαμβάνει όλα τα έργα των μαθητών. Η έκθεση έγινε τα προηγούμενα χρόνια στο 15ο γυμνάσιο Κυψέλης, στο 1ο γυμνάσιο Φιλαδέλφειας, στο 2ο γυμνάσιο Γαλατσίου, στο 5ο γυμνάσιο Νέας Ιωνίας και στο 3ο γυμνάσιο Νέας Ιωνίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αφορμή για την ιδέα αυτή έδωσαν οι ίδιοι οι μαθητές: είχαν δημιουργήσει υπέροχες εργασίες μετά από μια στατιστική έρευνα που είχαν κάνει μέσα στο σχολείο στα πλαίσια του μαθήματος των ποσοστών. Τα θέματα ήταν διαλεγμένα από τους ίδιους τους μαθητές (ποια είναι η αγαπημένη σου ποδοσφαιρική ομάδα, ποιος είναι ο αγαπημένος σου τραγουδιστής, πόσες ώρες είσαι στο facebook κα) και αντανακλούσε τα ενδιαφέροντά τους. Σκέφτηκα λοιπόν ότι θα ήταν κρίμα να μην δουν και άλλοι τις εργασίες αυτές. Έτσι ξεκίνησε η ιδέα μιας έκθεσης. Επηρεασμένη από τη άποψη ότι η διαδικασία της μάθησης είναι μια κατασκευαστική διαδικασία, δηλαδή κατασκευάζεται από τον ίδιο τον γνώστη και δεν μεταφέρεται (Piaget, 1967, Papert, 1980), η έκθεση θα ήταν αφορμή για να εμπλουτίσω τις μαθηματικές έννοιες με παραστάσεις και παραδείγματα από την καθημερινή πραγματικότητα. Επιπλέον, η οπτικοποίηση των ασκήσεων θα έπαιζε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και κατανόησης (Arcavi 2003, Bishop 1989) και οι μαθητές θα είχαν την ευκαιρία να αυτενεργήσουν, να συνεργαστούν, να αναζητήσουν πληροφορίες και τελικά (ίσως;) να αγαπήσουν τα μαθηματικά.

Η ΕΚΘΕΣΗ

Κατά την διάρκεια της σχολικής χρονιάς οι μαθητές αναλαμβάνουν διάφορες εργασίες. Χωρίζονται σε ομάδες οι οποίες ασχολούνται με συγκεκριμένα θέματα:

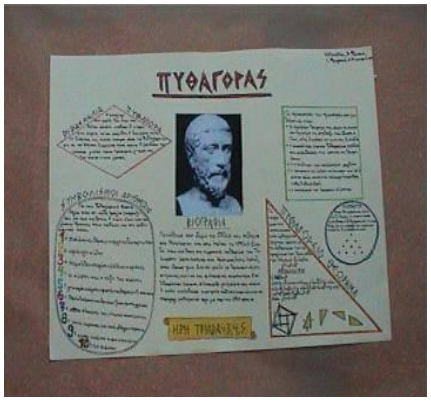
- Αναζήτηση στο διαδίκτυο και παρουσίαση ενός θέματος από την ιστορία των μαθηματικών.
- Στατιστική έρευνα

- Κατασκευές
- Καλλιτεχνικές δημιουργίες

Ο καθηγητής χωρίζει τους μαθητές σε ομάδες σεβόμενος τις γνώμες και επιθυμίες των μαθητών του, για τις συμπάθειες που έχουν μεταξύ τους, φιλίες κλπ. Οι ομάδες θα πρέπει να είναι ισότιμες μεταξύ τους και να βρίσκονται σε συχνή επαφή με τον καθηγητή. Όλες οι εργασίες παρουσιάζονται μέσα στην τάξη και στην συνέχεια αποτελούν υλικό που θα παρουσιαστεί στο τέλος της χρονιάς σε μια έκθεση που θα γίνει στον χώρο του σχολείου. Η έκθεση περιλαμβάνει 4 ενότητες:

Ενότητα 1 - Ιστορία

Για να γνωρίσουν τους μεγάλους μαθηματικούς της αρχαιότητας (Ευκλείδης, Πυθαγόρας, Θαλής) αλλά και για να γίνει ένα ευχάριστο διάλειμμα από το μάθημα, ομάδες μαθητών αναλαμβάνουν ν'αναζητήσουν πληροφορίες και να τις παρουσιάσουν στην τάξη. Η αναζήτηση γίνεται α) σε εγκυκλοπαίδεια β) σε τοπικές βιβλιοθήκες γ) σε internet. Οι μαθητές επεξεργάζονται τις πληροφορίες που συλλέγονται, και τις παρουσιάζουν στην τάξη, είτε με διαφάνειες, είτε με powerpoint. Τέλος, επιλέγονται κομμάτια τα οποία θα συνθέσουν ένα μεγάλο χαρτόνι που θα παρουσιαστεί στην έκθεση.



Ενότητα 2 - Στατιστικές έρευνες

Οι μαθητές ενός τμήματος χωρίζονται σε δύο ή τρεις μεγάλες ομάδες και αποφασίζουν το θέμα της έρευνας. Τα θέματα (ποιο είναι το αγαπημένο σου μάθημα, ποιο είναι το αγαπημένο σου σπορ, τι ομάδα είσαι, τι μουσική ακούς, πόσες ώρες είσαι στο facebook;) προτείνονται από τους ίδιους τους μαθητές, ανάλογα με τα ενδιαφέροντά τους, και φυσικά έχουν την αποδοχή του καθηγητή. Στη συνέχεια η ομάδα επιλέγει αρχηγό ο οποίος έχει σκοπό, με δημοκρατικές πάντα διαδικασίες, να συντονίζει τα μέλη. Οι εργασίες που μοιράζονται είναι: Γκάλοπ (κυρίως σε μαθητές όλης της τάξης) - επεξεργασία των αποτελεσμάτων - εξαγωγή ποσοστών - πίνακας αποτελεσμάτων - ραβδόγραμμα - κυκλικό διάγραμμα - ορθογώνιο διάγραμμα. Τέλος κάποιος αναλαμβάνει να παρουσιάσει όλα τα παραπάνω σ' ένα μεγάλο χαρτόνι του οποίου θα έχει την καλλιτεχνική επιμέλεια. Η ομάδα παρουσιάζει την εργασία στην τάξη, βγαίνουν συμπεράσματα, γίνονται ερωτήσεις. Η τελική εργασία θα παρουσιαστεί στην έκθεση.

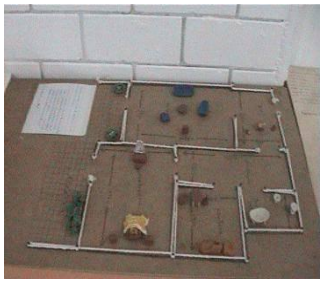


Ενότητα 3-Αναπαράσταση ασκήσεων του σχολικού Βιβλίου

Κάποιοι μαθητές προτιμούν κιναισθητικές, οπτικές, απτικές, ακουστικές δραστηριότητες ή και συνδυασμούς αυτών στη διδακτική προσέγγιση, ώστε να επιτευχθεί η συμμετοχή τους στη μάθηση. Ο Greeno (1993) προτείνει να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στις πειραματικές δραστηριότητες των μαθητών. Οι δραστηριότητες πρέπει να συσχετίζουν τις μαθηματικές έννοιες με τις εφαρμογές τους στην καθημερινή ζωή, έτσι ώστε να γίνει η σύνδεση του συγκεκριμένου με το αφηρημένο στάδιο σκέψης. Ορισμένες ασκήσεις του βιβλίου αναφέρονται σε τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Ζητείται λοιπόν από τους μαθητές να τις ζωντανέψουν να τις οπτικοποιήσουν και να τις παρουσιάσουν στην έκθεση. Οι εργασίες μπορεί να είναι ατομικές ή ομαδικές. Κάποιες γίνονται στην διάρκεια του μαθήματος κάποιες άλλες στο σπίτι. Τα παραδείγματα που ακολουθούν είναι ενδεικτικά

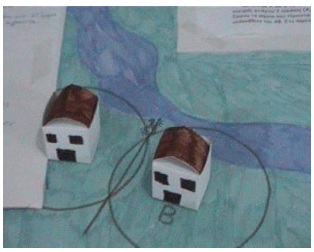


Άσκηση: *Να υπολογιστούν οι όγκοι των στερεών με μονάδα όγκου τον κύβο κ* Οι μαθητές φτιάχνουν όμοια κυβάκια από χαρτόνι και τα τοποθετούν έτσι ώστε να προκύψει το επιθυμητό σχήμα. Η κατασκευή αυτή βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την έννοια του χώρου



Άσκηση: *Να βρεθεί το εμβαδόν της οικίας*. Οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν ένα οποιοδήποτε σπίτι, ακόμη και το δικό τους, να φτιάξουν κάτοψη και να υπολογίσουν το εμβαδόν. Εδώ οι μαθητές για να ολοκληρώσουν την κατασκευή πρέπει να λύσουν και το πρόβλημα της κλίμακας.

Άσκηση: *Ένα ποτιστικό κανάλι περνάει κοντά από δυο αγροτόσπιτα Α και Β. Οι ιδιοκτήτες των σπιτιών θέλουν να εγκαταστήσουν μια βάνα σε κάποιο σημείο της όχθης του καναλιού για να ποτίζουν τα χωράφια τους. Να υποδείξετε το κατάλληλο σημείο στην όχθη που να ισαπέχει από τα δυο σπίτια.*







Άσκηση: *Να βρεθεί η περιοχή μέσα στην οποία κινείται ο σκύλος* Εδώ οι μαθητές ξεκαθαρίζουν την έννοια του κύκλου και του κυκλικού δίσκου. Αναπαριστούν δύο διαφορετικά προβλήματα του σχολικού βιβλίου, ένα όταν ο σκύλος είναι στη γωνία του σπιτιού και ένα όταν βρίσκεται σε κάποιο σημείο της πλευράς.

Άσκηση: *Μια επιχείρηση αποφάσισε να κατασκευάσει ένα εργοστάσιο σε μια αγροτική περιοχή. Το εργοστάσιο πρέπει να βρίσκεται μακριά από τα σπίτια και σε ακτίνα 600μ τουλάχιστον απ' αυτά. Επίσης πρέπει ν' απέχει το λιγότερο 250μ από την άκρη του δρόμου. Να βρείτε σε ποιες περιοχές μπορεί να χτιστεί το εργοστάσιο.*

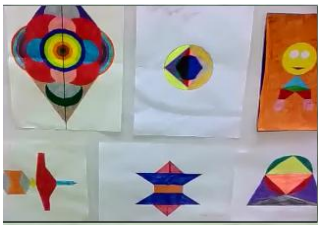


Ενότητα 4 - Καλλιτεχνικές δημιουργίες

Όταν τελειώνουν το μάθημα της συμμετρίας οι μαθητές της Α γυμνασίου δημιουργούν μικρά έργα τέχνης. Αφιερώνεται μια διδακτική ώρα κατά την οποία οι μαθητές, έχοντας φέρει όλα τα απαιτούμενα υλικά (μπογιές, ακουαρέλες, χάρακες), ζωγραφίζουν με οδηγό την αξονική ή την κεντρική συμμετρία. Όλα τα έργα θα







αναρτηθούν στην έκθεση.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Το όφελος ήταν μεγάλο. Το μάθημα έγινε πιο ζωντανό, οι μαθητές έδειχναν πιο μεγάλο ενδιαφέρον. Υπήρχε έντονος συναγωνισμός για το ποιος θα κάνει την καλύτερη εργασία και αυτό είχε ως αποτέλεσμα να γίνονται πιο σωστά και ακριβή σχήματα. Μέσα από αυτή τη διαδικασία αναδείχτηκαν και οι δυσκολίες των μαθητών στη χρήση γεωμετρικών οργάνων. Οι μαθητές κατανόησαν καλύτερα έννοιες όπως κύκλος, μεσοκάθετος, εμβαδόν κ.α., αλλά και διαχώρισαν άλλες, όπως κύκλος-κυκλικός τομέας. Η γνωριμία με τους μαθηματικούς της αρχαιότητας κινητοποίησε το ενδιαφέρον τους και ενίσχυσε την εκτίμηση τους για τα μαθηματικά (Tzanakis, Arcavi, 2000) Για πρώτη φορά αντιμετώπισαν τα μαθηματικά ως τέχνη ως ιστορία ως γενικότερα ένα πολιτισμικό αγαθό. Επιπλέον δουλεύοντας ομαδικά, γνώρισαν καλύτερα τις δυνατότητες τους. Έμαθαν να συνεργάζονται, να αξιολογούν πληροφορίες, να προετοιμάζουν παρουσιάσεις, να διορθώνουν, και γενικότερα να αναλαμβάνουν πρωτοβουλίες, αναδεικνύοντας τα κοινωνικά χαρακτηριστικά της συνεργατικής μάθησης. Η συγκεκριμένη διαδικασία κατάφερε «να φέρει όλη την τάξη μαζί» (Κυνηγός κ.α 2010) αφού πρόσφερε πλούσιες σε μαθηματικά νοήματα συζητήσεις, δημιούργησε συνθήκες για κατάλληλα δομημένη αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών αλλά και μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού.

Μέσα από αυτή την εμπειρία διαπίστωσα ότι οι μαθητές, με την ενεργή συμμετοχή οικοδομούν καλύτερα τη νέα γνώση. Ο ενθουσιασμός τους για κάθε τι νέο, κάθε τι που ξεφεύγει από το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας, είναι μεταδοτικός και συμβάλλει στην ενεργοποίηση τόσο τη δική τους όσο και του καθηγητή .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arcavi, A.,(2003).The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics, *Educational studies in Mathematics* 52,215-241

Bishop,A (1989) Review of research in visualization in mathematics education Focus on learning, *Problems in Mathematics*,11(1),7-16.

Greeno, J (1993). Transfer of Situated Learning, In D. Detterman & R. Sternberg (Eds.). *Transfer on Trial*. Norwood, New Jersey: Ablex Publishing Corporation. Pp. 99–167.

Κυνηγός Χ., Ψυχάρης Γ., Γαβρίλης Κ. & Κεΐσογλου Στ. (2010). ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ & Η αξιοποίησή τους στη διδασκαλία των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Papert S., (1980). *Νοητικές Θύελλες Παιδιά, Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές και Δυναμικές Ιδέες*. Εκδόσεις Οδυσσέας

Piaget, J. (1967). *La psychologie de l'intelligence*, Paris, Arman Colin

Tzanakis C., Arcavi A., 2000, 'Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey', in J. Fauvel and J. van Maanen (eds), *History in Mathematics Education*. The ICMI Study, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 201 – 240.

.

Ο ΟΜΙΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΠΕΔΙΟ ΑΝΑΠΛΑΙΣΙΩΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ

Πετρίδου Αντωνία
1ο Πρότυπο Πειραματικό Δημοτικό Σχολείο Αλεξανδρούπολης
pantonia65@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο Όμιλος μαθηματικών έγινε με σκοπό να κάνει ορατά στους μαθητές τα μαθηματικά, στον ανθρώπινο πολιτισμό και να τους προσφέρει ευκαιρίες να αναπτύξουν γνώσεις, ικανότητες και δεξιότητες που θα τους βοηθήσουν να σκέφτονται και να δρουν ως μαθηματικά εγγράμματα μέλη της κοινωνίας στην οποία ανήκουν. Στον όμιλο συμμετείχαν μαθητές της Ε΄ και της Στ΄ τάξης, όχι μόνο του 1ου πρότυπου Δ.Σ. Αλεξανδρούπολης, αλλά και άλλων σχολείων της πόλης.

Ι. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Τα μαθηματικά γεννήθηκαν μέσα από την ανάγκη του ανθρώπου να επιλύσει απλά καθημερινά προβλήματα και να εξηγήσει φαινόμενα που παρατηρούσε στη φύση. Η διδασκαλία τους όμως στο σχολείο στοχεύει κυρίως στη διαμόρφωση γενικευμένων γνώσεων και εστιάζει στο τελικό προϊόν παρά στη διαδικασία για τη δημιουργία της μαθηματικής γνώσης. Οι μαθηματικές γνώσεις συνδέονται ελάχιστα με τις προσωπικές εμπειρίες του μαθητή και τα πλαίσια μέσα στα οποία αναδείχθηκαν. Μια τέτοια διδακτική πρακτική αφενός αγνοεί τον κοινωνικό-πολιτισμικό χαρακτήρα της διαδικασίας συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης και αφετέρου υποβαθμίζει τη σημασία των ποικίλων μαθηματικών εμπειριών των μαθητών εκτός της τάξης, δηλαδή, την άτυπη μαθηματική γνώση (Σακονίδης & Δεσλή, 2007). Με τον όρο άτυπα μαθηματικά εννοούμε όχι μόνο τις γνώσεις και τις ικανότητες / δεξιότητες που αποκτά το παιδί έξω από το σχολείο, αλλά γενικότερα τη δράση του στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων, καθώς αυτή πλαισιώνεται από κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες (Λεμονίδης, 2001). Ο Όμιλος μαθηματικών που περιγράφεται σε αυτήν την εργασία αποτελεί μια προσπάθεια διδακτικής παρέμβασης που επιδιώκει την πλαισίωση της σχολικής μαθηματικής γνώσης με τρόπους που, ξεπερνώντας τους περιορισμούς του αναλυτικού προγράμματος, ενθαρρύνουν το μαθητή να την κατανοήσει ως κοινωνική και πολιτισμική δραστηριότητα του ανθρώπου.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ο όμιλος αφορούσε στο σχεδιασμό και στην υλοποίηση δραστηριοτήτων που αξιοποιούσαν γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών πέρα από το σχολείο. Οι δραστηριότητες που επιλέχτηκαν αφορούσαν αντιπροσωπευτικούς κλάδους των μαθηματικών (αριθμοί/άλγεβρα, στατιστική/ πιθανότητες και γεωμετρία) και χαρακτηρίζονταν από την ενεργή εμπλοκή των μαθητών σε μια σειρά από 'μαθηματικές' δράσεις, όπως η μοντελοποίηση μιας πραγματικής κατάστασης, η διερεύνηση με τη χρήση εργαλείων και πηγών, η ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος, η ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού, κ.ά. (Τζεκάκη, 2011). Για την επίτευξη των στόχων των δραστηριοτήτων αξιοποιήθηκαν μια ποικιλία από πόρους, όπως λογοτεχνικά κείμενα, ψηφιακά υλικά, ταινίες και λογισμικά.

Οργάνωση: Αρχικά ζητήθηκε από τους μαθητές των δύο τελευταίων τάξεων, όχι μόνο του σχολείου, αλλά και των υπόλοιπων σχολειών της πόλης, να εκδηλώσουν ενδιαφέρον. Στη συνέχεια, διερευνήθηκαν οι πεποιθήσεις των μαθητών που εκδήλωσαν ενδιαφέρον να συμμετέχουν στον όμιλο (αρχικά εγγραφήκαν 12 μαθητές, αλλά παρακολούθησαν ανελλιπώς τον όμιλο οι 9) αναφορικά με τη φύση, τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η επεξεργασία των απαντήσεων στις ερωτήσεις ερωτηματολογίου, που κατασκευάστηκε για αυτό το σκοπό, έδειξε ότι οι περισσότεροι (6 στους 10) πίστευαν πως τα μαθηματικά είναι εύκολο και σημαντικό μάθημα, όλο προκλήσεις που εξάπτουν τη φαντασία. Ακόμη, η πλειοψηφία (8 στους 10 μαθητές) συντάσσονταν με την άποψη ότι όλοι μπορούν να τα καταφέρουν στα μαθηματικά, αρκεί να το θελήσουν και να κοπιάσουν. Το ίδιο ερωτηματολόγιο δόθηκε και στο τέλος της χρονιάς, όπου 8 στους 8 μαθητές έδωσαν θετική απάντηση και στα δύο ερωτήματα.

Οι συναντήσεις του Ομίλου πραγματοποιούνταν μία φορά την εβδομάδα, κάθε Τρίτη, από τις 2.30 έως 4.00, και περιλάμβαναν, κυρίως, την παρουσίαση και την επεξεργασία ιδεών και πηγών, το σχεδιασμό στρατηγικών διερεύνησης και τη διατύπωση μελλοντικών σχεδίων εργασίας. Για το σύνολο της δραστηριοποίησης του Ομίλου υπήρξε συνεργασία της υπεύθυνης εκπαιδευτικού με τον ερευνητή της Διδακτικής των Μαθηματικών, τον κ. Σακονίδη Χαράλαμπο, από το ΠΤΔΕ του ΔΠΘ.

Για τους σκοπούς του Ομίλου κατασκευάστηκε ιστολόγιο (http://peirmathsgroup.blogspot.gr/), όπου αποτυπωνόταν λεπτομερώς η εβδομαδιαία δράση του.

Κεντρικές δραστηριότητες: (α) Γνωριμία με τους αριθμούς: Μελέτη της ιστορίας των αριθμών μέσα από κείμενα, όπως αυτό των Φρεντς και Κόλινς (2002) «Από το μηδέν στο Δέκα- η ιστορία των αριθμών». Ενασχόληση με δραστηριότητες που αφορούσαν τα αριθμητικά συστήματα από το εκπαιδευτικό υλικό «Μαθηματικά σε

περιβάλλον διαμορφωμένο για αυτόνομη μάθηση»[1]. Μελέτη των «πολύ μεγάλων αριθμών» με αναφορά στους πλανήτες (συνεργασία με το Σύλλογο Ερασιτεχνικής Αστρονομίας Θράκης) και των «πολύ μικρών αριθμών» με αναφορά στο κύτταρο (συνεργασία με το ΕΚΦΕ Αλεξανδρούπολης),

(β) Στοχαστικός λογισμός και καθημερινή ζωή: Διερεύνηση ιστοριών με «στοιχήματα», του «πώς μπορείς να πεις ψέματα με την στατιστική» και ζητημάτων κοινωνικής στατιστικής.

(γ) Γεωμετρικές αφηγήσεις: Παρακολούθηση και μελέτη κειμένων και ταινιών σχετικών με την Επιπεδοχώρα (Flatland). Ενασχόληση με δραστηριότητες γεωμετρικών κατασκευών στο περιβάλλον Sketchpad, οι οποίες συνδέονταν με «πρωταγωνιστές –σχήματα» της Επιπεδοχώρας. Δραματοποίηση αποσπασμάτων από την Επιπεδοχώρα, με την τεχνική του Θεάτρου Σκιών και του Μαύρου Θεάτρου.

3. ΜΙΑ ΠΡΩΤΗ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΔΡΑΣΗΣ ΤΟΥ ΟΜΙΛΟΥ

Από τη συμμετοχή των μαθητών στις συναντήσεις, από τον τρόπο που δρούσαν στο πεδίο, αλλά και από τις συνεντεύξεις τους στο τέλος της χρονιάς φάνηκε ότι ο Όμιλος κατάφερε να σπάσει το στερεότυπο ότι η μαθηματική γνώση είναι αποκλειστικά διαδικαστική, αφορά κατεξοχήν σε «πράξεις» και ότι το σχολικό εγχειρίδιο είναι απαραίτητο για να μάθεις μαθηματικά. Οι μαθητές εμπλούτισαν τις γνώσεις τους μαθαίνοντας την ιστορία των αριθμών και κατανόησαν την αξία των θεσιακών συστημάτων αρίθμησης. Η χρήση χειραπτικών υλικών τους ενθουσίασε και βοήθησε να βιώσουν την ανάγκη του ανθρώπου να επιλύσει απλά καθημερινά προβλήματα (π.χ. πινακίδες από πηλό), τον γεννήτορα της μαθηματικής επιστήμης. Η ρεαλιστική θέαση των μαθηματικών και οι προσομοιώσεις εξέπληξαν ευχάριστα και προβλημάτισαν αυτούς που θεωρούσαν ότι τα μαθηματικά είναι δύσκολα και για «λίγους». Η αφήγηση της καθημερινής ζωής με ιστορίες, όπως αυτή του «πώς μπορούμε να πούμε ψέματα με τη στατιστική», καθώς και η αξιοποίηση των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών εκτός της τάξης έδωσε νόημα σε όσα μαθαίνουν στο σχολείο. Η χρήση των ΤΠΕ και του θεάτρου βοήθησε στην κατανόηση των διαστάσεων και των ιδιοτήτων των σχημάτων, καθώς και σε μια πρώτη / διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου. Στον Όμιλο «διασκέδασαν» και «πέρασαν καλά» παίζοντας μαθηματικά παιχνίδια, και συμφώνησαν με την άποψη ότι «Όλοι μπορούν να ανακαλύψουν πράγματα στα μαθηματικά αρκεί να προσπαθήσουν». Τέλος, κατά ομολογία της υπεύθυνης εκπαιδευτικού, η εμπειρία του Ομίλου τροφοδότησε τους προβληματισμούς της σχετικά με τον προσανατολισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης, αλλά και τις διδακτικές πρακτικές της με καινούριες ιδέες, ενώ ενίσχυσε την αυτονομία της στο σχεδιασμό των διδακτικών της παρεμβάσεων.

[1] Πρόκειται για τράπεζα υλικού με ανοιχτού χαρακτήρα δραστηριότητες που ενθαρρύνουν την αυτονομία του μαθητή, ευνοούν την αξιοποίηση ενός πλήθους δεδομένων του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο ζει και παρέχουν ουσιαστικές ευκαιρίες μύησης στη μαθηματική γνώση και σκέψη, ως προϊόντων της ανθρώπινης δράσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abbott, E. (1999). *Flatland: η Επιπεδοχώρα.* Αθήνα: Αιώρα.

Φρεντς, Β. & Κόλινς, Ρ. (2002). *Από το μηδέν στο Δέκα- Η ιστορία των αριθμών*. Αθήνα: Καστανιώτη.

Λεμονίδης, Χ. (2001). Οι αρχικές αριθμητικές ικανότητες των παιδιών όταν έρχονται στο Δημοτικό Σχολείο. *Ευκλείδης Γ*, τεύχος 55, 5-21.

Σακονίδης, Χ. & Δεσλή, Δ. (2007). Προλεγόμενα. Στο Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή (Επ.), *Πρακτικά 2ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών* (σελ. 11-17). Αλεξανδρούπολη: Τυπωθήτω.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg.

Van de Walle, J. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Αναπτυξιακή Διαδικασία*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Πηγές από το διαδίκτυο

Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην υποχρεωτική εκπαίδευση (2011): http://ebooks.edu.gr/2013/newps.php (ανακτήθηκε 27/12/2013)

Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση, Οδηγός για τον εκπαιδευτικό, Εργαλεία διδακτικών προσεγγίσεων, ΑΘΗΝΑ (2011): http://ebooks.edu.gr/2013/newps.php (ανακτήθηκε 27/12/2013)

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική δραστηριότητα και μαθηματικά έργα: http://utopia.duth.gr/~xsakonid/index_htm_files/%CE%9C%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE_%CE%94%CF%81%CE%B1%CF%83%CF%84%CE%B7%CF%81%CE%B9%CF%8C%CF%84%CE%B7%CF%84%CE%B1.pdf (ανακτήθηκε στις 24/ 12/13).

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΗ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΤΗΝ Ε΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Ζιώγα Χρυσούλα, Κυριατζάκου Κωνσταντία, Νεοφώτιστος Βασίλειος
3ο Πρότυπο Πειραματικό Δημοτικό Σχολείο Ευόσμου Θεσσαλονίκης
zchrysoula@hotmail.com, ntinakir73@gmail.com, neobas@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εισήγηση περιλαμβάνει την παρουσίαση ενός τρίμηνου προγράμματος διδακτικών παρεμβάσεων στην Ε τάξη του 3ου ΠΠΣ Ευόσμου Θεσσαλονίκης με κύριο αντικείμενο την ανάπτυξη δεξιοτήτων, από μέρους των μαθητών, επίλυσης προβλημάτων σχετικών με την καθημερινή ζωή. Παράλληλα, παρουσιάζεται και σχετική έρευνα δράσης που αποσκοπούσε στην διερεύνηση των πιθανών αλλαγών που σημειώθηκαν κατά και μετά το τέλος των διδακτικών παρεμβάσεων στην ικανότητα επίλυσης των εν λόγω προβλημάτων.

ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η «Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση» (Realistic Mathematics Education ή RME) η οποία αναπτύχθηκε στην Ολλανδία υποστηρίζει την άποψη ότι τα ίδια τα φαινόμενα μέσω των οποίων αποκτούν περιεχόμενο οι μαθηματικές έννοιες πρέπει να αποτελέσουν τη βάση στήριξης μιας διδακτικής διαδικασίας που θα στοχεύει στην κατάκτηση αυτών των εννοιών (Freudenthal, 1983).

Η κεντρική ιδέα της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης είναι «γνωρίζω μαθηματικά» σημαίνει ότι «ξέρω να κάνω μαθηματικά» (Streefland, 2000). Ουσιαστικά ο μαθητής καθίσταται ικανός να χειρίζεται με άνεση τη μαθηματική γλώσσα, να λύνει και να κατασκευάζει προβλήματα, αλλά κυρίως να αναγνωρίζει μαθηματικές έννοιες μέσα σε συγκεκριμένες καταστάσεις. Ο όρος «Ρεαλιστικά Μαθηματικά» παραπέμπει, σε Μαθηματικά τα οποία αναφέρονται σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου καθώς και σε φαινόμενα που εμφανίζονται στην καθημερινή μας ζωή (De Lange, 1996). Ο λόγος, όμως, για τον οποίο η συγκεκριμένη μορφή της μαθηματικής εκπαίδευσης χαρακτηρίζεται ως «ρεαλιστική» δεν είναι ακριβώς επειδή σχετίζονται με τον πραγματικό κόσμο, αλλά διότι δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε καταστάσεις τις οποίες οι μαθητές μπορούν να φανταστούν.

Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, όσον αφορά τη διαδικασία μάθησης, βασίζεται σε τρεις διδακτικές αρχές: α) μαθαίνω μαθηματικά σημαίνει κάνω μαθηματικά, β) τρόπος μάθησης είναι προσωπικός, γ) η μάθηση γίνεται με συγκεκριμένη σειρά) και σε πέντε μαθηματικές αρχές που αναφέρονται: α) στη δόμηση του περιεχομένου των μαθηματικών, β) τη μαθηματική γλώσσα, γ) τη χρησιμότητα, δ) τη δύναμή τους και ε) την προσέγγισή τους.

Το πλαίσιο μέσα στο οποίο υπάρχουν εν δυνάμει μαθηματικές έννοιες έχει ανυπολόγιστη αξία στη ρεαλιστική εκπαίδευση, αφού αποτελεί αιτία δημιουργίας μαθηματικών προβλημάτων. Το βασικότερο κριτήριο για την επιλογή πλαισίου είναι οι μαθηματικές ιδιότητες που περικλείει καθώς και οι δυνατότητες ανάλυσης και επεξεργασίας που μας παρέχει.

ΣΚΟΠΟΣ

Σκοπός της διδακτικής προσέγγισης ήταν να διαπιστωθεί αν μαθητές ηλικίας 11 ετών που φοιτούν στην Ε' τάξη Δημοτικού είναι ικανοί να αποκτήσουν δεξιότητες επίλυσης ρεαλιστικών προβλημάτων στο πλαίσιο υλοποίησης τρίμηνου προγράμματος στα ρεαλιστικά μαθηματικά.

ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΣΤΟΧΟΙ

α) Μπορούν οι μαθητές να «εισχωρούν» στο νόημα του προβλήματος με όρους πραγματικής ζωής ή αντιμετωπίζουν αυστηρά «μαθηματικά» τα ρεαλιστικά προβλήματα;
β) Υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στα δύο φύλα ως προς την ικανότητα κατανόησης και επίλυσης ρεαλιστικών προβλημάτων;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Συμμετέχοντες

Στην μαθησιακή διαδικασία συμμετέχουν μαθητές δύο τμημάτων της Ε΄ τάξης του 3ου Πρότυπου Πειραματικού Δημοτικού Σχολείου Ευόσμου Θεσσαλονίκης (N=38, αγόρια=23, κορίτσια=15).

Μαθησιακή Διαδικασία

Πριν την έναρξη των διδακτικών παρεμβάσεων δόθηκε στους μαθητές και των δύο τμημάτων τεστ που περιελάμβανε ρεαλιστικά και «συμβατικά» προβλήματα. Πρόκειται για προβλήματα που βασίζονται στην πραγματικότητα των παιδιών ενώ οι λύσεις που απαιτούνται δεν λύνονται μόνο με μαθηματικές πράξεις αλλά πρέπει να δοθούν ρεαλιστικές απαντήσεις βασισμένες στη λογική[1]. Το ίδιο τεστ δόθηκε στους μαθητές και με τη λήξη των διδακτικών παρεμβάσεων.
Μετά το πρώτο τεστ ακολούθησαν διδακτικές παρεμβάσεις τρίμηνης διάρκειας σε εβδομαδιαία βάση (μία διδακτική ώρα) και στα δύο τμήματα. Οι εμπλεκόμενες

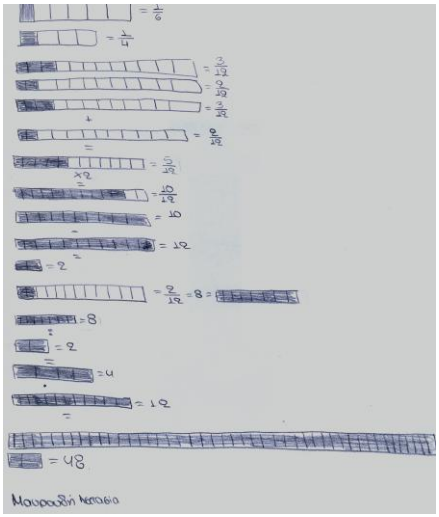
[1] Π.χ. *Ποια θα είναι η θερμοκρασία του νερού αν σε ένα δοχείο χύσουμε 1 λίτρο νερού με θερμοκρασία 80 ° C και 1 λίτρο νερού με θερμοκρασία 40° C;*
ή *Ο παππούς του Νίκου έδωσε στα 4 εγγονάκια του ένα κουτί με 18 μπαλόνια για να τα μοιραστούν στα ίσα. Πόσα μπαλόνια θα πάρει το κάθε παιδί;*

εκπαιδευτικοί παρέστησαν και οι δύο στις διδακτικές παρεμβάσεις του κάθε τμήματος όπου η μία είχε το ρόλο της δασκάλας και η δεύτερη το ρόλο της παρατηρήτριας. Στη φάση αυτή χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της παρατήρησης που έλεγχε τον τρόπο σκέψης των μαθητών στην επίλυση των προβλημάτων και την εξέλιξή του κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων. Επίσης, σε συγκεκριμένες διδακτικές παρεμβάσεις (ρεαλιστικά προβλήματα) χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της συνέντευξης για την πιο σωστή αποτύπωση του τρόπου σκέψης των μαθητών στην επίλυση των προβλημάτων.
Τμήμα των διδακτικών παρεμβάσεων πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών. Έγινε χρήση της γλώσσας Logo στην οποία προσαρμόζονται ασκήσεις οι οποίες απαιτούν από τα παιδιά κυρίως κριτική και υπολογιστική σκέψη. Επίσης, χρησιμοποιείται το πρόγραμμα Kbruch που δημιουργεί μαθηματικά προβλήματα με κλάσματα. Τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών για τα Μαθηματικά κάνουν λόγο για την χρήση της τεχνολογίας κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Οι αρχές πάνω στις οποίες στηρίζεται η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση συνιστούν ένα πλαίσιο στο οποίο η τεχνολογία θα μπορούσε να προσφέρει σημαντική βοήθεια στη διδασκαλία των μαθηματικών και την αφομοίωση τους από τους μικρούς μαθητές (Clements, 2000).
Στο τέλος των διδακτικών παρεμβάσεων, δόθηκε το ίδιο τεστ που είχε δοθεί και στην αρχή του προγράμματος.

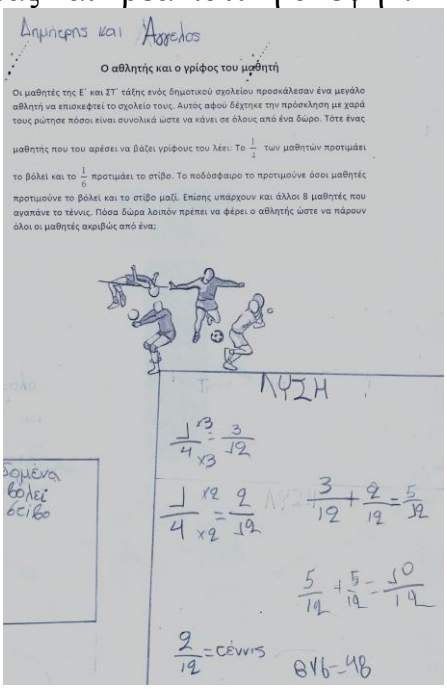
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Στην πρώτη διδακτική παρέμβαση χρησιμοποιήθηκε ένα πρόβλημα κλασμάτων από την ιστοσελίδα «Τα μαθηματικά της φύσης και της ζωής».
Το πρόβλημα ήταν το παρακάτω:
«*Οι μαθητές της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου προσκάλεσαν ένα μεγάλο αθλητή να επισκεφτεί το σχολείο τους. Αυτός αφού δέχτηκε την πρόσκληση με χαρά τους ρώτησε πόσοι είναι συνολικά ώστε να κάνει σε όλους από ένα δώρο. Τότε ένας μαθητής που του αρέσει να βάζει γρίφους του λέει: Το 1/4 των μαθητών προτιμάει το βόλεϊ και το 1/6 προτιμάει το στίβο. Το ποδόσφαιρο το προτιμούνε όσοι μαθητές προτιμούνε το βόλεϊ και το στίβο μαζί. Επίσης υπάρχουν και άλλοι 8 μαθητές που αγαπάνε το τέννις. Πόσα δώρα λοιπόν πρέπει να φέρει ο αθλητής ώστε να πάρουν όλοι οι μαθητές ακριβώς από ένα;*»
Στόχος της παρέμβασης ήταν να εισάγει τους μαθητές στην μετατροπή κλασμάτων σε ομώνυμα ισοδύναμά τους προκειμένου να κατανοήσουν τον αλγόριθμο της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων.
Προϋπάρχουσες γνώσεις: Η παρέμβαση στηρίχθηκε στις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών (έννοια κλάσματος, εύρεση ισοδύναμων κλασμάτων) και προσπαθούσε να καταγράψει τον τρόπο σκέψης τους σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα που αφορούσε τα κλάσματα.
Μεθοδολογία: Οι μαθητές χωρίστηκαν σε δυάδες και τους δόθηκε το πρόβλημα. Καλέστηκαν να το λύσουν με οποιοδήποτε τρόπο τους ήταν εύκολος. Για την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος από κάποιες ομάδες επιχειρήθηκε και η δραματοποίηση.

Σχεδόν το σύνολο των μαθητών προσπάθησαν να το λύσουν κάνοντας χρήση αλγορίθμων και απλών μαθηματικών πράξεων (πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων προσθέτοντας και αφαιρώντας αριθμητές και παρανομαστές). Μόνο 4 από τους 38 προσπάθησαν να το λύσουν με απεικονίσεις που όμως οδηγήθηκαν σε λάθος αποτελέσματα εκτός από μια περίπτωση. Παρακάτω έχουμε την απεικόνιση μιας μαθήτριας που οδηγήθηκε στη λύση του προβλήματος.



Η μαθήτρια μετέτρεψε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με παρανομαστή το 12 και μετά προχώρησε με το ίδιο τρόπο στη λύση του προβλήματος.
Επίσης, ένας μαθητής το έλυσε μετατρέποντας τα κλάσματα σε ομώνυμα (είχε διδαχτεί τον τρόπο μετατροπής ετερώνυμων σε ομώνυμα την προηγούμενη σχολική χρονιά) ενώ μια δυάδα μαθητών τα μετέτρεψε σε ισοδύναμα και μετά προχώρησε στη λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας και «ρεαλιστική σκέψη».



Στις μετέπειτα διδακτικές παρεμβάσεις χρησιμοποιήθηκαν σκηνές από την σχολική ζωή, όπως ασκήσεις από το ποσοστό (σε αναλογία κλάσματος) της συμμετοχής των τμημάτων των τάξεων στο σύνολο των τμημάτων του σχολείου ή η διαφοροποίηση του φύλου στον πληθυσμό των δύο τμημάτων που παίρνουν μέρος στην έρευνα, ακόμη και σε αντιδιαστολή με το τρίτο τμήμα. Εμβόλιμα χρησιμοποιήθηκαν ασκήσεις σε συσχετισμό με την καθημερινότητα, όπως αγορές πραγμάτων βάση εκπτωτικών ευκαιριών, αντικείμενα με τα οποία τα παιδιά παίζουν καθώς και συμμετοχή πρώτων υλών όπως π.χ. του νερού και του αλευριού για την παρασκευή αγαπημένων εδεσμάτων κουλουράκια. Το τελευταίο μήνα εκπονήθηκε μία μικρή έρευνα από τους μαθητές με μέθοδο project όπου καταγράφεται σε μορφή ποσοστού και κλάσματος η αναλογία σε σχέση με το σύνολο, των θερμαντικών πηγών που χρησιμοποιούνται για τη θέρμανση των οικογενειών των μαθητών που μετέχουν στο πρόγραμμα. Κύριος στόχος ήταν ο μαθητής να ξεφύγει από τα στενά όρια της συμβατικής διδασκαλίας, να έρθει σε επαφή και να χειριστεί κατάλληλες καταστάσεις οι οποίες θα του δώσουν την ευκαιρία να χρησιμοποιήσει την προϋπάρχουσα γνώση και εμπειρία και να ανακαλύψει μόνος του τη γνώση μέσα από το φυσικό του περιβάλλον.

ΠΡΩΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα πρώτα συμπεράσματα επιδεικνύουν ότι όταν ένας μαθητής έρχεται σε τριβή με ένα καθημερινό πρόβλημα σκέπτεται και ανακαλύπτει μόνος του τις μαθηματικές έννοιες, καταλαβαίνει καλύτερα το λόγο για τον οποίο ασχολείται με τα μαθηματικά και τις καταστάσεις που αυτά βρίσκουν εφαρμογή. Με αυτόν τον τρόπο τα μαθηματικά γίνονται πιο λειτουργικά, πιο δυναμικά και έχουν νόημα για τον μαθητή. Επίσης, εμφανίζονται θετικές επιπτώσεις στους μαθητές τόσο στο γνωστικό τομέα, όσο στο συναισθηματικό (αυτοεκτίμηση, αυτοπεποίθηση) και στο κοινωνικό (κοινωνικοποίηση, απομυθοποίηση).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D. (2000). From exercises and tasks to problems and projects. Unique contributions of computers to innovative mathematics education. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 19(1), 9-47.

Lange, J. de (1996). Using and Applying Mathematics in Education. in: A.J. Bishop, et al. (eds). 1996. *International handbook of mathematics education*, Part one. 49-97. Kluwer academic publisher.

Freudenthal H (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (1991). *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση* (Εισ. – επιμ. Κολέζα Ε.). Αθήνα: Leader Books.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ: Ο ΤΣΑΡΛΙ ΚΑΙ ΤΟ ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ ΣΟΚΟΛΑΤΑΣ

Μύρια Α. Κωνσταντινίδου
Υποψ. Διδακ.Παν. Δ. Μακεδονίας ΤΔΕ
myriamcyprus@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διδακτική πρακτική που θα περιγραφεί αναφέρεται στη διαθεματική προσέγγιση του λογοτεχνικού βιβλίου του Ρόαλντ Νταλ «Ο Τσάρλυ και το εργοστάσιο σοκολάτας», έργο το οποίο χρησιμοποιήθηκε ώστε να προσεγγίσουν οι μαθητές τετάρτης τάξης του κυπριακού εκπαιδευτικού συστήματος την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων, μέσα από δραστηριότητες που οργανώθηκαν στηριζόμενες στο περιεχόμενο του προαναφερόμενου λογοτεχνικού έργου, χρησιμοποιώντας εναλλακτικές μορφές διδασκαλίας και νέες τεχνολογίες.

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι σύγχρονες εξελίξεις στην παιδαγωγική επιστήμη έχουν τονίσει την ανάγκη ανάπτυξης αναλυτικών προγραμμάτων όπου η πρόσβαση στη γνώση και στη μάθηση πραγματώνεται με μεθόδους που προάγουν την πλαισιωμένη και ολιστική προσέγγιση των επί μέρους, κατακερματισμένων, μέχρι σήμερα, γνωστικών αντικειμένων (Αλαχιώτης 2002, Ματσαγγούρας 2002).

Οι προσπάθειες για εισαγωγή και ενσωμάτωση σύγχρονων διεπιστημονικών και διαθεματικών προσεγγίσεων αποτελούν πρόσκληση (Καρατάσου & Παναούρα 2009), η οποία γίνεται εντονότερη όσο αφορά στην εμπλοκή των παραδοσιακών, θετικών γνωστικών αντικειμένων.

Στη διεθνή βιβλιογραφία (Schiro 1997, Whitin & Whitin 2004, Shatzer 2008 κ.α.), επισημαίνονται συχνά αναφορές στη δυνατότητα διασύνδεσης των θετικών γνωστικών αντικειμένων γενικά και των μαθηματικών ειδικά, και της διδακτικής τους, με την παιδική λογοτεχνία, ώστε να δομηθεί η εισαγωγή διεπιστημονικών, διδακτικών δράσεων, διαμέσου πρώτιστα της δημιουργίας ενός πλαισίου προβληματισμού (Αποστολίδου 2004), που θα ενστερνίζεται εναλλακτικές μεθόδους διδασκαλίας και θα δομεί μαθηματικό λογισμό και μαθηματική, κριτική σκέψη.

2.ΥΠΟΘΕΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

Αφετηρία της παρούσας πρακτικής αποτέλεσε η αντίληψη ότι τα λογοτεχνικά κείμενα, είτε στην ολότητά τους είτε ως προσεκτικά επιλεγμένα αποσπάσματα, πληρώντας συγκεκριμένες συνιστώσες καταλληλότητας (Καρατάσου & Παναούρα

2009), είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και πρακτικών,μέσα από τη δόμηση και την ενσωμάτωση αφηγηματικών μηχανισμών.

3.ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ:

Ισοδύναμα κλάσματα: Ο Τσάρλι και το εργοστάσιο σοκολάτας

Η διδακτική πρόταση που ακολουθεί σχεδιαστηκε και πραγματοποιήθηκε κατά την τρέχουσα σχολική χρονιά σε Τετάρτη τάξη Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Κύπρο. Τα σχέδια μαθήματος που αφορούσαν ποικίλα γνωστικά αντικείμενα, ανάμεσά τους και τα μαθηματικά[i], οργανώθηκαν με πυρήνα το λογοτεχνικό έργο του Ρόαλντ Νταλ «Ο Τσάρλυ και το εργοστάσιο σοκολάτας»

Το σχολικό τμήμα στο οποίο και απευθύνθηκε η διδακτική πρόταση αφορά τμήμα μεικτής ικανότητας[ii], με συνολικά 22 μαθητές και μαθήτριες. Οι μαθητές στη διάρκειά της διδακτικής διαδικασίας εργάστηκαν είτε ατομικά είτε συνεργατικά, ανάλογα με τις απαιτήσεις των δραστηριοτήτων αλλά και τη διαβάθμιση και εξατομίκευση των εργασιών που πραγματοποιήθηκαν. Η αξιολόγηση υπήρξε συνεχής και συντρέχουσα.

3.1.Γνωστικό αντικείμενο

Το γνωστικό αντικείμενο το οποίο και επιλέχθηκε να διδαχθεί είναι τα ισοδύναμα κλάσματα.Η προσέγγιση επιτυγχάνεται μέσα από δραστηριότητες που αναφέρονται σε ολόκληρα, μισά, τρίτα, τέταρτα, έκτα και όγδοα και τα ισοδύναμα σε αυτά γλυκά στα οποία και πραγματοποιούνται συχνές αναφορές στο προαναφερόμενο βιβλίο. Χρησιμοποιούνται διδακτικές καταστάσεις σε συνθήκες προβληματισμού που αναφέρονται σε καθημερινές καταστάσεις και τα παιδιά χρησιμοποιούν εποπτικό υλικό, με το οποίο είναι εξοικειωμένα.

Βασικό δείκτη επιτυχίας στην Τετάρτη τάξη, με βάση το δεδομένο σήμερα κυπριακό, αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών, αποτελεί η σύνδεση της ποσότητας της κλασματικής μονάδας με την ονομασία και τη συμβολική γραφή του ίδιου του κλάσματος, αλλά και ισοδύναμών του. Σκοποί της συγκεκριμένης διδακτικής πρότασης είναι να καταστούν οι μαθητές ικανοί:

- Να αναγνωρίζουν και να γράφουν ισοδύναμα κλάσματα,
- Να βρίσκουν ισοδύναμα κλάσματα, πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας τους όρους του κλάσματος με τον ίδιο αριθμό,
- Και να συνδέσουν το παιδικό, λογοτεχνικό έργο «Ο Τσάρλι και το εργοστάσιο σοκολάτας», με καθημερινές μαθηματικές καταστάσεις και προβλήματα, που οι ίδιοι έρχονται αντιμέτωποι.

3.2. Υλικά και εποπτικά μέσα διδασκαλίας

Τα υλικά και τα μέσα που χρησιμοποιήθηκαν είναι: Ηλεκτρονικός υπολογιστής, Παιδικό βιβλίο «Ο Τσάρλυ και το εργοστάσιο σοκολάτας», Παρουσίαση power point, Πλαστικοποιημένα χαρτόνια[iii] και χρωματιστοί μαρκαδόροι, κάρτες με κλασματικούς αριθμούς, κάρτες με κλάσματα σοκολάτων, φύλλα εργασίας, σχολικό βιβλίο και τετράδιο.

3.3.Πορεία διδασκαλίας - δραστηριότητες

3.3.1.Στοχοθεσία/ Αφόρμηση**:** Αρχικά αναγράφεται ο γενικός στόχος του μαθήματος, που αφορά στη γνωριμία με τα ισοδύναμα κλάσματα μέσα από τα προβλήματα που οι κεντρικοί ήρωες της ιστορίας «Ο Τσάρλι και το εργοστάσιο σοκολάτας» είχαν να αντιμετωπίσουν. Μεταφερόμαστε στο απόσπασμα του βιβλίου όπου ο Τσάρλυ μοιράζεται με τα υπόλοιπα μέρη της οικογένειάς του τη μοναδική σοκολάτα που έχουν[iv] και οι μαθητές προβληματίζονται σχετικά με το πώς μπορούν να μοιράσουν στα ίσα μια σοκολάτα. Τους δίνονται τα πλαστικοποιημένα χαρτόνια, στα οποία τους ζητείται να ζωγραφίσουν τη μια σοκολάτα του Τσάρλυ, και στη συνέχεια να δοκιμάσουν να μοιράσουν τη μία σοκολάτα στα συνολικά επτά άτομα της οικογένειας.

Οι μαθητές με ευκολία ανέφεραν πώς μόνο τεμαχίζοντας το γλυκό μπορούν να πάρουν όλοι από ένα κομμάτι, σε συνεργασία με το διπλανό τους ζωγράφισαν με τους μαρκαδόρους στο πλαστικοποιημένο χαρτόνι που τους δόθηκε τη σοκολάτα , την οποία και μοίρασαν στα 7 άτομα. Οι μαθητές δοκίμασαν αναπαραστήσουν τη σοκολάτα που κόπηκε σε 7 ίσα τμήματα (κάποιοι χρησιμοποίησαν ρίγα ώστε να υπολογίσουν το ίσο μήκος των κομματιών της ενώ άλλοι μαθητές έφτιαξαν το ένα κομμάτι της σοκολάτας σε χαρτί και το επανέλαβαν, χρησιμοποιώντας το ως πρότυπο 7 συνεχόμενες φορές στο πλαστικοποιημένο χαρτόνι τους).

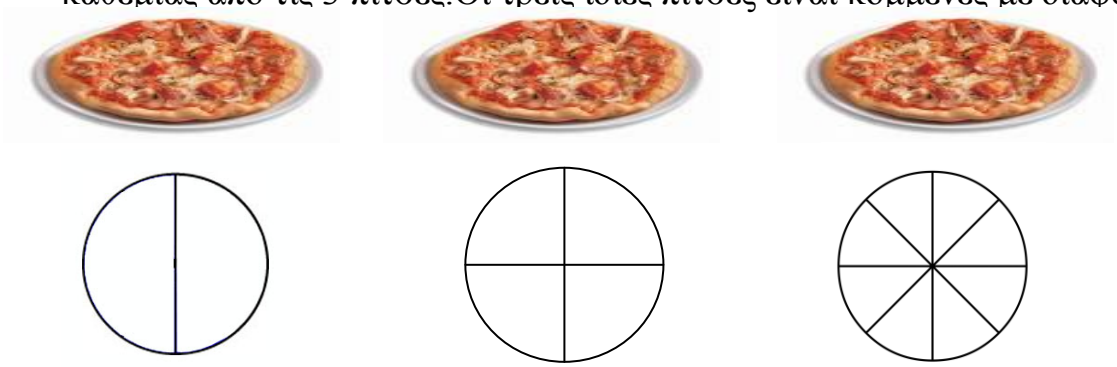
Αναφέρεται πώς η ίση ποσότητα την οποία πήρε το κάθε μέλος της οικογένειας αποτελεί ένα κλάσμα, ένα κομμάτι της σοκολάτας, ενώ στον βιντεοπροβολέα της τάξης παρουσιάζεται και υπενθυμίζεται η γραφή του κλάσματος $(1/7)$[v].

3.3.2.Διερεύνηση :Τα παιδιά διερευνούν με ποιο τρόπο μπορούν να αναγνωρίσουν και να γράψουν ισοδύναμα κλάσματα, ως αποστολή που τους αναθέτουν οι ήρωες της ιστορίας. Διαβάζεται το απόσπασμα από το παιδικό βιβλίο που αναφέρεται στις νόστιμες τούρτες του σοκολατοποιού Γουίλι Γουάνκα και δίνονται στους μαθητές κάρτες με σχήματα με τις μαγικές τούρτες.Τα παιδιά καλούνται να αναγνωρίσουν το μέρος της τούρτας που τους παρουσιάζεται και να γράψουν τον κλασματικό αριθμό. Κάθε ζευγάρι παιδιών χρησιμοποιεί 3 κάρτες, με διαβαθμισμένη δυσκολία.

Οι μαθητές στη συνέχεια χρησιμοποιούν και πάλι τα πλαστικοποιημένα χαρτόνια και τους μαρκαδόρους και εργάζονται με το διπλανό τους. Δίνονται κομμάτια από σοκολάτες, με συνολικό εμβαδόν 12 cm^2. Στην πρώτη σοκολάτα ζητείται από τα παιδιά να ζωγραφίσουν το $\frac{1}{2}$ για τον Τσάρλυ, στη δεύτερη σοκολάτα τα $\frac{2}{4}$ για τη

Βερούκα και στην τρίτη σοκολάτα τα $\frac{3}{6}$ για τον Αύγουστο. Στη συνέχεια τα παιδιά ρωτούνται τι έχουν παρατηρήσει, ώστε να εντοπίσουν ότι παρόλο που ζωγραφίστηκε διαφορετικό κλάσμα, ο συνολικός αριθμός της σοκολάτας που καλύφθηκε είναι ο ίδιος. Αναφέρεται ότι τα συγκεκριμένα κλάσματα είναι ισοδύναμα, μια και στην πραγματικότητα μας παρουσιάζουν το ίδιο κομμάτι σοκολάτας και σημειώνεται η ισότητα $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$.

3.3.3.Επεξεργασία / ανάλυση: Αναφέρεται στα παιδιά ότι το ταξίδι στο εργοστάσιο του Γουίλι Γουάνκα έχει δημιουργήσει στους μικρούς πρωταγωνιστές το αίσθημα της πείνας, επομένως πρόκειται να παραγγείλουν 3 φανταστικές, ίδιες πίτσες. Στο κάθε θρανίο δίνεται φυλλάδιο στο οποίο θα πρέπει να χρωματιστεί το μισό καθεμιάς από τις 3 πίτσες.Οι τρεις ίδιες πίτσες είναι κομμένες με διαφορετικό τρόπο:



Οι μαθητές χρωματίζουν τις μισές πίτσες κάθε φορά, γράφουν τα κλάσματα που αντιστοιχούν σε κάθε περίπτωση, τα οποία υπενθυμίζεται ότι είναι ισοδύναμα, δείχνουν το ίδιο μέρος αλλά με διαφορετικό τρόπο.

Εντοπίζεται ότι στην ισοδυναμία $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ υπάρχει η ίδια σχέση/μοτίβο σχέση ανάμεσα στους αριθμούς των αριθμητών και των παρονομαστών: Οι μαθητές προβληματίζονται εάν αυτό είναι τυχαίο ή μη και ζωγραφίζουν το ένα τρίτο και τα 2 έκτα των κομματιών σε σοκολάτα που τους δίνεται σε φύλλο εργασίας, ώστε να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι εάν πολλαπλασιαστούν οι αριθμητές και οι παρονομαστές με τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα. Ταυτόχρονα με τις δραστηριότητες των μαθητών προβάλλεται και το αντίστοιχο power point.

3.3.4.Επέκταση/ Δραστηριότητες εμπέδωσης της καινούριας γνώσης

Στη συνέχεια γίνονται παιχνίδια στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, (http://www.sheppardsoftware.com/mathgames/fractions/memory_equivalent1.htm και http://www.freewebs.com/weddell/equivalent.swf) που σκοπό έχουν να βοηθήσουν τους μαθητές να εμπεδώσουν μέσα από άσκηση τα ισοδύναμα κλάσματα.

3.3.5.Αξιολόγηση:

Η αξιολόγηση είναι συνεχής και συντρέχουσα. Παρόλα αυτά, οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν με ταχύτητα, σημειώνοντας στο πλαστικοποιημένο χαρτόνι τους τις

απαντήσεις σε μικρές δοκιμασίες σχετικά με τα κομμάτια της σοκολάτας που καταναλώνουν οι πρωταγωνιστές[vi] της ιστορίας και να λύσουν τις εργασίες που αφορούν τα ισοδύναμα κλάσματα στο σχολικό τους εγχειρίδιο.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

i Διαφάνεια 2 από αντίστοιχο power point
ii Διαφάνεια 3 από αντίστοιχο power point
iii Τα πλαστικοποιημένα χαρτόνια χρησιμοποιούνται συχνά στην τάξη ώστε οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να απαντούν με ταχύτητα γραπτά σε μαθηματικές ερωτήσεις που τους δίνονται, και τα οποία εύκολα καθαρίζονται με υγρομάντηλα ώστε να απαντήσουν σε επόμενη ερώτηση προβληματισμό, αποφεύγοντας έτσι τη σπατάλη χαρτιού
iv Διαφάνεια 5
v Διαφάνεια 6
vi Διαφάνειες 14-27power point

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αλαχιώτης, Σ.Ν. (2002). Για ένα σύγχρονο εκπαιδευτικό σύστημα, *Επιθεώρηση εκπαιδευτικών θεμάτων*,τ.7, 7-18

Αποστολίδου, Β. (1997). *Κριτήρια επιλογής λογοτεχνικών βιβλίων για σχολική χρήση*, Εθνικό Κέντρο Βιβλίου, Ο.Ε.Δ.Β.

Καρατάσου, Κ. & Παναούρα, Α. (2009), Λογοτεχνική Εκπαίδευση, Μαθηματική Παιδεία και Διαθεματικότητα στη Δημοτική Εκπαίδευση, Πανελλήνιο Συνέδριο: Η Διδασκαλία της Ελληνικής Γλώσσας (ως πρώτης/μητρικής, δεύτερης/ξένης), Νυμφαίο:2009

Ματσαγγούρας, Η. (2002). Διεπιστημονικότητα, Διαθεματικότητα και ενιαινοποίηση στα νέα Προγράμματα Σπουδών: Τρόποι οργάνωσης της νέας σχολικής γνώσης, *Επιθεώρηση εκπαιδευτικών θεμάτων,* τ.7, 19-36

Shiro, M. (1997) . *Integrating Children's Literature and Mathematics in the Classroom: Children as Meaning Makers, Problem Solvers, and Literary Critics*, Teachers College Press, Columbia University, Teachers College, 1234 Amsterdam Avenue, New York, NY 10027

Whitin, P. and Whitin, D. (2004). New Visions for Linking Literature and Mathematics, National Council of Teachers of English, Champaign, IL.; *National Council of Teachers of Mathematics*, Inc., Reston, VA.

Shatzer, J. (2008). Picture Book Power: Connecting Children's Literature and Mathematics, *The Reading Teacher*, V.61, (No 8), 649–653

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΘΕΣΗΣ ΣΕ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΕΝΟ ΧΑΡΤΙ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΠΕΡΙΠΑΤΗΤΩΝ ΕΔΑΦΟΥΣ (BEE-BOT ΚΑΙ PRO-BOT) ΣΤΗ Β΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Μπλούχου Στεφανία

Δασκάλα Πρότυπου Δημοτικού Σχολείου Φλώρινας

stefblouchou@gmail.com

1. Η ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Η εκπαιδευτική ρομποτική είναι ένα καινοτόμο διδακτικό εργαλείο που στοχεύει στην ενίσχυση και την ανάπτυξη υψηλότερων νοητικών δεξιοτήτων και ικανοτήτων επίλυσης προβλήματος (Blanchard et al., 2010). Αρκετές έρευνες αναφέρουν ότι οι δραστηριότητες εκπαιδευτικής ρομποτικής έχουν θετικά αποτελέσματα στο επίπεδο της συνεργασίας μεταξύ των μαθητών, της ανάπτυξη δεξιοτήτων κριτικής σκέψης, της ανάπτυξης δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος (Petre & Price, 2004), της δυνατότητας αξιοποίησης της έρευνας στην τάξη (Williams et al., 2007) και της εκμάθησης μιας γλώσσας προγραμματισμού (Nourbakhsh et al., 2005).

Μέσα στα πλαίσια ενός κονστρουκτιβιστικού περιβάλλοντος οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να διαχειριστούν τη μάθηση τους, όπου είναι ελεύθεροι να ανακαλύψουν, να αποφασίσουν, κάνοντας διάφορες επιλογές για το πώς θα προχωρήσουν. Επίσης, δίνεται στους μαθητές η ευκαιρία να μάθουν την πολύπλευρη εικόνα της επίλυσης προβλημάτων και την ίδια στιγμή να καλλιεργήσουν μαθηματικές και επιστημονικές δεξιότητες (Chambers & Carbonaro, 2003).

Η αυθόρμητη εμπλοκή των παιδιών με τους περιπατητές μπορεί να αξιοποιηθεί από τον εκπαιδευτικό και να διαμορφωθεί μέσα από κατάλληλες μαθησιακές δραστηριότητες σε πλούσια μαθησιακή εμπειρία. Συγκεκριμένα, τα παιδιά με τον παιγνιώδη τρόπο της χρήσης του περιπατητή μπορούν να αποκτήσουν εμπειρίες για αφηρημένες έννοιες όπως: *μέτρηση, σύγκριση, μήκος, αριθμός, σχήμα, διαδρομή, κατεύθυνση*. Τα ρομπότ έχουν τη δυνατότητα να ενισχύουν την ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών, ιδιαίτερα του μετασχηματισμού, της λειτουργίας αλλαγής της θέσης, της κατεύθυνσης και της μέτρησης, έννοιες που φαίνεται να αναπτύσσονται νωρίτερα και γρηγορότερα σε σχέση με τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας.

2. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΘΕΣΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΟΥ ΜΕ ΤΟΥΣ ΠΕΡΙΠΑΤΗΤΕΣ ΕΔΑΦΟΥΣ (FLOOR ROAMERS- BEE-BOT, PRO-BOT).

2.1. Στόχοι της διδακτικής παρέμβασης

Κύριος στόχος της διδακτικής παρέμβασης είναι να μάθουν οι μαθητές της Β΄ τάξης να προσανατολίζονται και να κινούνται σε τετραγωνισμένο χαρτί, δηλαδή να εντοπίζουν τις θέσεις των τετραγώνων και να προσδιορίζουν τις θέσεις των κόμβων του τετραγωνισμένου χαρτιού χρησιμοποιώντας τις δύο συντεταγμένες.

Επιμέρους διδακτικοί στόχοι:

Οι μαθητές να εξελίξουν την έννοια της διαδρομής ως κίνηση ενός αντικειμένου σε μια ακολουθία σημείων.

Να χρησιμοποιήσουν τις τυπικές ονομασίες για τον προσανατολισμό (δεξιά, αριστερά, εμπρός, πίσω) για να εξυπηρετήσουν την ανάγκη της επικοινωνίας για την από κοινού κατάστρωση και εκτέλεση του σχεδίου επίλυσης.

Να αναπτύξουν ικανότητες επίλυσης προβλημάτων επειδή αναγκάζονται να καταστρώσουν ένα σχέδιο επίλυσης με την μορφή ακολουθίας βασικών κινήσεων του περιπατητή, να το εφαρμόσουν και να το αναθεωρήσουν.

Επεκτάσεις των δραστηριοτήτων όπως η ιχνογράφηση των διαδρομών του περιπατητή πάνω σε χαρτί με σημεία αναφοράς από τα παιδιά μπορεί να τα βοηθήσει να κατανοήσουν χωρικές αναπαραστάσεις.

Επιπλέον τα παιδιά που ομαδικά συμμετέχουν στις δραστηριότητες έχουν πιθανότητες να βελτιώσουν τις κοινωνικές τους δεξιότητες.

2.2. Προαπαιτούμενες γνώσεις

Οι μαθητές θα πρέπει να διαθέτουν τις παρακάτω προαπαιτούμενες γνώσεις:

Να γνωρίζουν να κινούνται σε τετραγωνισμένο χαρτί και να αναπαραγάγουν γεωμετρικά σχήματα και εικόνες επάνω σε αυτό.

Να είναι ικανοί να εντοπίζουν τις θέσεις των τετραγώνων στο τετραγωνισμένο χαρτί έχοντας τις συντεταγμένες μόνο από την πλευρά των γραμμών και μετρούν μόνοι τους τη θέση στις στήλες.

Να μπορούν να προγραμματίζουν τις βασικές εντολές των περιπατητών εδάφους.

2.3. Πορεία διδασκαλίας

Α΄ φάση – Προσδιορισμός θέσης τετραγώνου με δύο συντεταγμένες

Υλικοτεχνική υποδομή:

Πλαίσιο δραστηριοτήτων: το πλαίσιο δραστηριοτήτων κατασκευάζεται πολύ απλά από ένα κομμάτι χαρτί ή χαρτόνι που ο εκπαιδευτικός το χωρίζει σε τετράγωνα κελιά επιφάνειας 15x15εκ. Οι μαθητές ζωγραφίζουν μαζί με τον εκπαιδευτικό την επιφάνεια ανάλογα με την δραστηριότητα. Αφού το πλαίσιο δραστηριοτήτων

ετοιμαστεί, οι μαθητές προγραμματίζουν το ρομπότ σύμφωνα με τις προκλήσεις που τους θέτει ο εκπαιδευτικός.

Περιπατητές εδάφους Bee-Bot.

Οργάνωση μαθητών: Οι μαθητές είναι χωρισμένοι σε τέσσερις ομάδες των έξι ατόμων. Ανά δύο ομάδες έχουν στη διάθεσή τους έναν καμβά (πλαίσιο δραστηριοτήτων) και τις οδηγίες για τον Θησαυρό των πειρατών (εισαγωγική δραστηριότητα σχολικού βιβλίου Β΄ Δημοτικού, Τα μαθηματικά της φύσης και της ζωής, σελ. 49).

1^{ο} στάδιο: Ανακοίνωση στόχων και διερευνητική αξιολόγηση των γνώσεων των μαθητών.

Γίνεται έλεγχος της προϋπάρχουσας γνώσης των μαθητών για τον προσδιορισμό θέσης με τη χρήση μιας συντεταγμένης (εκτέλεση προφορικών εντολών του εκπαιδευτικού για την εύρεση συγκεκριμένων τετραγώνων πάνω στον καμβά).

Διδακτικές μέθοδοι: Ερωταποκρίσεις, βιωματική. Χρονική διάρκεια: 5 λεπτά

2^{ο} στάδιο: Εισαγωγική δραστηριότητα - Κίνηση με οδηγίες μιας συντεταγμένης

Η μία ομάδα αποφασίζει σε ποιο σημείο είναι κρυμμένος ο θησαυρός και η δεύτερη προγραμματίζει τον περιπατητή εδάφους Bee-bot να ακολουθεί τις οδηγίες της πρώτης ομάδας ξεκινώντας από την αφετηρία. Οι οδηγίες αναφέρονται σε κινήσεις μιας συντεταγμένης(π.χ. δύο βήματα μπροστά, τρία αριστερά…). Στη συνέχεια οι ομάδες αλλάζουν ρόλους.

Διδακτικές μέθοδοι: Καθοδήγηση, βιωματική. Χρονική διάρκεια: 15 λεπτά

3^{ο} στάδιο: Επισημοποίηση

Στο σημείο αυτό γίνεται η επισημοποίηση της νέας γνώσης δηλαδή η κίνηση σε δύο συντεταγμένες. Με την παρέμβαση του εκπαιδευτικού ορίζεται το τετράγωνο του θησαυρού και εξηγείται η οριοθέτηση του τετραγώνου επάνω στον καμβά με δύο συντεταγμένες. Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται τα τετράγωνα του χάρτη και του κλειδιού.

Διδακτικές μέθοδοι: Επεξηγηματική. Χρονική διάρκεια: 10 λεπτά

4^{ο} στάδιο: Εφαρμογή νέας γνώσης

Οι μαθητές πρέπει να προσεγγίσουν διαδοχικά τα τρία τετράγωνα. Κάθε ομάδα κινείται σε μια σειρά ή μια στήλη. Ζητείται από την κάθε ομάδα να προγραμματίσει τον περιπατητή ώστε να φτάσει στο επιθυμητό τετράγωνο, κινούμενος κατά μήκος του οριζόντιου ή κάθετου άξονα του καμβά. Αν συναντηθούν οι περιπατητές ο στόχος έχει επιτευχθεί.

Διδακτικές μέθοδοι: Βιωματική. Χρονική διάρκεια: 20 λεπτά

5^{ο} στάδιο: Εξάσκηση-Αξιολόγηση

Οι μαθητές καλούνται να βρουν το θησαυρό σε ορισμένο χρονικό διάστημα ακολουθώντας την πιο σύντομη διαδρομή. Οι μαθητές επαναπροσδιορίζουν τις κινήσεις του περιπατητή, δοκιμάζουν με το σώμα τους τις προς εκτέλεση εντολές, προγραμματίζουν και εκτελούν τις εντολές. Με αυτό τον τρόπο κατανοούν τη μοναδικότητα θέσης στο επίπεδο και ότι αυτή ορίζεται από δύο συντεταγμένες.

Διδακτικές μέθοδοι: Ερωταποκρίσεις, βιωματική. Χρονική διάρκεια: 10 λεπτά

Β΄ φάση – Προσδιορισμός θέσης ενός σημείου (κόμβου) πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί

Στόχος: Με αφορμή την $4^{η}$ δραστηριότητα του σχολικού βιβλίου (σελ. 50) οι μαθητές πρέπει να εντοπίσουν σημεία συγκεκριμένων συντεταγμένων πάνω σε τετραγωνισμένο καμβά.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: οι μαθητές γνωρίζουν να εντοπίζουν τις γραμμές και τις στήλες σε τετραγωνισμένο καμβά.

Υλικοτεχνική υποδομή: Καμβάς 5Χ5 τετραγώνων σε χαρτί του μέτρου (πλευρά τετραγώνου 25 εκ.). 8 Pro-bot , γραπτές οδηγίες.

Οργάνωση μαθητών: Οι μαθητές είναι χωρισμένοι σε 4 ομάδες των 6 ατόμων. Κάθε ομάδα έχει στη διάθεσή της 2 Pro-bot και τους αντίστοιχους χρωμάτων μαρκαδόρους (κόκκινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο).

$1^{ο}$ στάδιο: Ανακοίνωση στόχων και διερευνητική αξιολόγηση των γνώσεων των μαθητών.

Στην προηγούμενη φάση οι μαθητές εξασκήθηκαν στον προσδιορισμό της θέσης ενός τετραγώνου, εντοπίζοντας το τετράγωνο όπου συναντιούνται η γραμμή και η στήλη που δείχνουν οι κωδικοί.

Διδακτικές μέθοδοι: Ερωταποκρίσεις, βιωματική. Χρονική διάρκεια: 5 λεπτά

$2^{ο}$ στάδιο: Εισαγωγή του προβλήματος που θέτει η δραστηριότητα

Οι μαθητές συζητούν για τις συντεταγμένες των σημείων (κόκκινο (2,Β), πράσινο (3,Α), μπλε (4,Β), κίτρινο (3,Γ)

Διδακτικές μέθοδοι: ομαδοσυνεργατική, βιωματική. Χρονική διάρκεια: 5 λεπτά

$3^{ο}$ στάδιο: Επισημοποίηση της νέας γνώσης - Από κοινού κατάστρωση κι εκτέλεση του σχεδίου επίλυσης.

Οι μαθητές γνωρίζοντας τις συντεταγμένες κάθε σημείου, προγραμματίζουν τα Pro-bot με το ίδιο χρώμα μαρκαδόρου να ακολουθήσουν τη συγκεκριμένη διαδρομή με αφετηρία τον αντίστοιχο άξονα. Δηλαδή το ένα Pro-bot ξεκινάει από τη γραμμή του σημείου και το άλλο από τη στήλη. Στο σημείο που θα τελειώσουν τη διαδρομή τους θα είναι και το ζητούμενο σημείο (κόκκινο, πράσινο, μπλε, κίτρινο).Με την παρέμβαση του εκπαιδευτικού επισημαίνεται ότι για τον προσδιορισμό της θέσης των σημείων παίρνουμε τις γραμμές που δείχνουν οι κωδικοί.

Διδακτικές μέθοδοι: ομαδοσυνεργατική, βιωματική, επεξηγηματική. Χρονική διάρκεια: 15 λεπτά

4^{ο} στάδιο: Εφαρμογή-Αξιολόγηση

Κάθε ομάδα παρουσιάζει τη διαδρομή που έκανε για τον σχεδιασμό των τεσσάρων χρωματιστών σημείων συγκεκριμένων συντεταγμένων και καταλήγουν στο συμπέρασμα πως ανεξάρτητα από τη διαδρομή που έχει ακολουθήσει, οι περιπατητές εδάφους ιχνογραφούν τα ζητούμενα σημεία συγκεκριμένων συντεταγμένων στο επίπεδο που είναι μοναδικά.

Διδακτικές μέθοδοι: ομαδοσυνεργατική, βιωματική, επεξηγηματική. Χρονική διάρκεια: 5 λεπτά.

2.4. Αξιολόγηση της διδακτικής πρακτικής

Η αξιολόγηση της παρούσας διδακτικής πρακτικής στις επιμέρους φάσεις γίνεται με τα αντίστοιχα φύλλα εργασίας που δίνονται στους μαθητές. Παράλληλα, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διαχείριση του λάθους στο περιβάλλον του περιπατητή.

Επίσης, η φύση του περιπατητή διευκολύνει την υλοποίηση ομαδοσυνεργατικών δραστηριοτήτων στις οποίες οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να προοδεύσουν τόσο στο γνωστικό επίπεδο όσο και στο ευρύτερο πεδίο των κοινωνικών δεξιοτήτων, ενώ το γεγονός ότι τα παιδιά διαχειρίζονται το ρομπότ με τα χέρια τους, αποτελεί ισχυρό κίνητρο μάθησης που ενεργοποιεί μια ποικιλία εναλλακτικών στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων και προάγει την αφηρημένη σκέψη.

Από τα παραπάνω τεκμηριώνεται ότι η εμπλοκή των παιδιών σε μαθησιακές δραστηριότητες με τους περιπατητές εδάφους παρουσιάζει μεγάλο εκπαιδευτικό ενδιαφέρον, επειδή έχει την μορφή παιχνιδιού που είναι «σοβαρή» υπόθεση για τα παιδιά και συνάδει με σύγχρονες θεωρήσεις μάθησης όπως ο κοινωνικός εποικοδομητισμός (Βοσνιάδου, 2006).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βοσνιάδου, Σ. (2006). *Σχεδιάζοντας Περιβάλλοντα Μάθησης Υποστηριζόμενα από τις Σύγχρονες Τεχνολογίες*, Εκδόσεις Γ. Δαρδανός -Κ. Δαρδανός. Gutenberg.

Λεμονίδης, Χ. (2007). *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Βιβλίο μαθητή- τετράδιο εργασιών*, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα. Αθήνα

Λεμονίδης, Χ. (2007). *Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Βιβλίο δασκάλου*, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα. Αθήνα

Blanchard, S., Freiman, V., & Lirrete-Pitre, N. (2010). Strategies used by elementary schoolchildren solving robotics-based complex tasks: innovative potential of technology. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 2851-2857.

Chambers, J.M. & Carbonaro, M. (2003). Designing, Developing, and Implementing a Course on LEGO Robotics for Technology Teacher Education. *Journal of Technology and Teacher Education*, 11(2), 209-241. Norfolk, VA: AACE.

Nourbakhsh, I. R., Crowley, K., Bhave, A., Hsium, T., Hammer, E., & Perez-Bergquist, A. (2005). The robotic autonomy mobile robotics course: Robot design, curriculum design and educational assesment. *Autonomous Robots*, 18(1), 103-127.

Petre, M., & Price, B. (2004). Using robotics to motivate "back door" learning. *Education and Information Technologies*, 9(2), 147-158.

Williams, D. C., Ma, Y., Prejean, L., & Ford, M. J. (2007). Acquisition of physics content knowledge and scientific inquiry skills in a robotics summer camp. *Journal of Research on Technology in Education*, 40(2), 201-216.

ΦΙΛΑΝΑΓΝΩΣΤΙΚΗ ΔΡΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ Α΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΨΑΡΟΥΛΗ

Παπαδήμου Παναγιώτα

Εκπαιδευτικός, 4ο Δ.Σ. Αλεξάνδρειας

pattypapadimou@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία εξετάζει τη μαθηματική προσέγγιση ενός λογοτεχνικού βιβλίου προσφέροντας τη δυνατότητα στους μαθητές να εκφραστούν και να επικοινωνήσουν με διαφορετικούς κώδικες. Η σύμβαση αυτή (η συμφωνία δηλαδή, μεταξύ λογοτεχνίας και μαθηματικών που θα τους βοηθήσει να υιοθετήσουν ορισμένες συνήθειες ή πρακτικές) συντελεί να αναπτύξουν τη μαθηματική τους γλώσσα σε συνδυασμό με οπτικές εικόνες και φυσικές αναπαραστάσεις. Παρουσιάζεται μια ποικιλότροπη επαφή με το βιβλίο ώστε οι μαθητές να συνδέουν τους αριθμούς με την πραγματικότητα, να τους αναγάγουν σε προσωπικό βίωμα, να νιώσουν ότι οι αριθμητικές πράξεις μπορούν να αποκτήσουν νόημα και να μάθουν επιλύοντας προβλήματα. Ο συνδυασμός λογοτεχνίας και μαθηματικών οδηγεί στη μαθηματική κατανόηση η οποία αποτελεί σπουδαίο θεμέλιο προόδου.

1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ

Στη συγκεκριμένη πρακτική αναδεικνύεται η δυνατότητα της παιδικής λογοτεχνίας στην εκπαιδευτική διαδικασία των μαθηματικών. Τα μαθηματικά και η λογοτεχνία σε μια διαφοροποιημένη διδασκαλία στις απαιτήσεις μια πολυπολιτισμικής τάξης βοηθούν τους μαθητές να ξεκλειδώσουν τα συναισθήματά τους, να εκφραστούν, να δημιουργήσουν και να επικοινωνήσουν στη γλώσσα των μαθηματικών. Υπάρχει συμβατότητα με τις αρχές και τους στόχους των νέων προγραμμάτων σπουδών του Νέου Σχολείου. Αξιοποιείται η αρχή της εποικοδομιστικής θεώρησης της μάθησης και η ομάδα ως κορμός, για την επίτευξη των διαπολιτισμικών στόχων. Υποστηρίζεται η διαφοροποιημένη μάθηση καθώς υπάρχει ευελιξία στις απαντήσεις. Καλλιεργείται η ολιστική προσέγγιση της γνώσης.

2. Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

2.1. Εκπαιδευτικό υλικό

«Τα γενέθλια του Τριγωνοψαρούλη ή πώς η αγάπη νίκησε τον πόλεμο» του Βαγγέλη Ηλιόπουλου

2.2. Σχολική βαθμίδα

Α΄ Δημοτικού

2.3. Στόχοι

- Να προσδώσουν οι μαθητές νόημα στην απαρίθμηση
- Να συνδέσουν τους αριθμούς με ιδέες του πραγματικού κόσμου
- Να κάνουν τις πρώτες τους «επεκτάσεις» στα νοερά μαθηματικά.
- Να ευαισθητοποιηθούν σε θέματα πολυπολιτισμικότητας
- Να βελτιώσουν τις δεξιότητες τους στην επίλυση προβλημάτων
- Να καλλιεργήσουν τη φιλαναγνωσία

2.4. Επιμέρους Στόχοι ως προς το γνωστικό αντικείμενο και ως προς τη μαθησιακή διαδικασία. Ικανότητες που επιδιώκεται να αναπτυχθούν: (Σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ.)

- Να συσχετίζουν αφηγηματικά κείμενα με τη δική τους ζωή και τα μαθηματικά
- Να βελτιώνουν και εμπλουτίζουν τον προφορικό τους λόγο, να διατυπώνουν τις ιδέες τους ώστε να συμμετέχουν ενεργά στην δημιουργία δικών τους μαθηματικών προτάσεων
- Να ενθαρρύνονται να γράφουν μαθηματικά διατυπώνοντας μαθηματικές σχέσεις.
- Να αποκτήσουν θετικές στάσεις και συμπεριφορές. (Ανθρωπογενές περιβάλλον και αλληλεπίδραση).
- Να αναπτύσσουν το λεξιλόγιό τους στη γλώσσα των μαθηματικών
- Να ακούν και να ανταποκρίνονται στους κανόνες παιχνιδιού (*Φ. Α.)*

3. ΜΕΘΟΔΟΣ

- Βιωματική διαδικασία ευαισθητοποίησης σε σχέση με τη σημασία και τους τρόπους προσέγγισης των μαθηματικών και λογοτεχνίας
- Ομαδοσυνεργατική με στόχο να διαμορφώσουν ιδιαίτερα επιθυμητές, ευέλικτες, διαισθητικές ιδέες σχετικά με τους αριθμούς
- Ενεργητική διαλεκτική διαδικασία, (συζήτηση, καταιγισμός ιδεών) για την ανάπτυξη υποστηρικτικού κλίματος και ενεργητικής συμμετοχής των μαθητών σε συλλογικές δραστηριότητες
- Εικαστική μαθηματική δραστηριότητα ευαισθητοποίησης για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών.
- Παιχνίδια λόγου και κίνησης

Εμπλεκόμενα αντικείμενα: Μαθηματικά, Γλώσσα, Εικαστικά, Ζωγραφική, Λογοτεχνία, Θεατρική Αγωγή, Φυσική Αγωγή.

Εκτιμώμενη διάρκεια: 2 μήνες

Συνθήκη: Μια μεγάλη πρόσκληση γενεθλίων πεσμένη στο πάτωμα, στην οποία αναγράφεται το όνομα του σχολείου και της συγκεκριμένης τάξης. **Δραστηριότητες:**

1. Δραστηριότητα: Πριν και μετά

Ο εκπαιδευτικός γράφει στον πίνακα: «Ο Τριγωνοψαρούλης γιορτάζει τα γενέθλιά του και γίνεται 10 χρόνων». Ο επόμενος παίκτης επαναλαμβάνει τα λόγια και προσθέτει «Πριν ένα χρόνο ο Τριγωνοψαρούλης ήταν 9 χρόνων» Ο κάθε επόμενος παίκτης επαναλαμβάνει τα λόγια των προηγούμενων αφαιρώντας κάθε φορά και ένα χρόνο. Φτάνοντας στο μηδέν οι μαθητές αρχίζουν να μετρούν αντίστροφα ξεκινώντας με τη φράση: «Μετά από ένα χρόνο ο Τριγωνοψαρούλης θα είναι…». Στη συνέχεια σχεδιάζουν την αριθμογραμμή του Τριγωνοψαρούλη, χωρισμένοι σε ομάδες.

Τεχνική: Παιχνίδι
Στόχοι:
✓ Να ακούν με προσοχή μια αφήγηση και να συσχετίζουν τους αριθμούς με μονάδες μέτρησης του χρόνου

✓ Να καλλιεργηθεί η δυνατότητα των μαθητών να χρησιμοποιούν αλληλοσυμπληρωματικά και δημιουργικά τη **διαφορετικότητα.**

2. Δραστηριότητα: Σχήματα και ονόματα:

Μετά την αφήγηση της ιστορίας οι μαθητές ζωγραφίσουν τον Τριγωνοψαρούλη και την Αγριόσαλπα προσφυγοπούλα με τη βεντάλια της. Οι μαθητές παρατηρούν και περιγράφουν τα σχήματα, δημιουργούν τους δικούς τους ήρωες δίνοντας τους ανάλογα ονόματα π,χ. Τετραγωνοσκαθαρούλης κ.τ.λ.

Τεχνικές: Δημιουργική σύγκριση μέσω του μοντέλου παρατήρησης Artful Thinking (AT) και τις βασικές ρουτίνες στοχαστικού διαλόγου με αφορμή την εικονογράφηση του βιβλίου, η παραγωγή έργου με αξιοποίηση της μικρής ομάδας.

Στόχοι: Να ανακαλύπτουν τα γεωμετρικά σχήματα στην καθημερινότητά τους, να παρατηρούν τα χαρακτηριστικά και τη μορφή τους και να τα ονομάζουν

3. Δραστηριότητα: Ανεβαίνω – Κατεβαίνω στο θαλάσσιο χρονοτούνελ

Οι μαθητές παρατηρούν το κοχύλι με τις μαγικές ιδιότητες που έχει μοιράσει ο/η εκπαιδευτικός στις ομάδες και ζητάει από αυτά να γράψουν από τη μια πλευρά αριθμούς, ανεβαίνοντας 2-2 και από την άλλη πλευρά κατεβαίνοντας 2-2.

Τεχνική: Παιχνίδι

Στόχος: Να εξασκηθούν στην αριθμογραμμή και την αρίθμηση 2-2.

4. Δραστηριότητα: Βρες το ταίρι σου

Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να σηκωθούν από τις θέσεις του και καρφιτσώνει στην πλάτη των μισών μαθητών ζευγαράκια του 10 και στους υπόλοιπους τους αριθμούς από 1-10. Οι μαθητές καλούνται να βρουν το ζευγαράκι τους χωρίς οι ίδιοι να γνωρίζουν τι έχουν στην πλάτη τους. Η βοήθεια των συμμαθητών είναι πολύτιμη για το σωστό αποτέλεσμα της αριθμητικής πράξης.

Τεχνική: Παιχνίδι

Στόχοι:

✓ Να ασκηθούν στα συμπληρώματα του 10 που είναι πολύ σημαντικά και χρησιμοποιούνται ως σημεία αναφοράς στους υπολογισμούς.

✓ Να κατανοήσουν την αξία της συνεργασίας και της αλληλοβοήθειας, να επικοινωνήσουν και να γίνουν αποδεκτοί σε επίπεδο ολομέλειας

5. Δραστηριότητα: Πόλεμος και ειρήνη

Ακολουθεί η συνέχεια της ιστορίας και η αρχή του πολέμου. Οι ομάδες ετοιμάζουν το δικό τους σχέδιο δράσης τοποθετώντας τους δέκα πολεμιστές του βυθού με διαφορετική παράταξη στο πεδίο μάχης. Π.χ.

o	oo	ooo	oooo
ooooooooo	oooooooo	ooooooo	oooooo

Τεχνική: Χωρικές σχέσεις, παιχνίδι

Σύμφωνα με το μοντέλο αλληλοεπικαλυπτόμενων κυμάτων (Overlapping Wave Model) τα παιδιά χρησιμοποιούν πολλαπλές στρατηγικές σε μια δεδομένη ηλικία, ενώ υπάρχει μεταβλητότητα σε κάθε παιδί, καθώς και μεταξύ των παιδιών (Λεμονίδης,2012:63). Με την παραπάνω άσκηση δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να προβληματιστούν μέσω παιχνιδιού και να έρθουν σε επαφή με διαφορετικές στρατηγικές υπολογισμού λόγω της ομάδας.

Στόχοι:

✓ Να μάθουν τα συμπληρώματα του 10

✓ Να δομήσουν την ιδιότητα της σειράς και την ιδιότητα του μηδέν (μεταθετική ιδιότητα) Πολλά παιδιά ενώ δυσκολεύονται ελάχιστα με την ιδέα της μεταθετικής ιδιότητας, δεν κατανοούν εύκολα το μηδέν ως αριθμό όσο τους άλλους αριθμούς. Διαισθητικά έχουν την ιδέα ότι η πρόσθεση κάνει τους αριθμούς μεγαλύτερους ενώ η αφαίρεση μικρότερους. Αντλώντας ο εκπαιδευτικός προβλήματα πλοκής μέσα από το λογοτεχνικό κείμενο βρίσκει αφορμές για συζήτηση ώστε να γίνουν αυτές οι πράξεις κατανοητές. Θα ήταν ευκολότερο να γίνει η άσκηση αυτή σε διαδραστικό πίνακα. Προβάλουμε σε καρτέλα το 8+4 και στη συνέχεια την αντιστρέφουμε. Ρωτάμε τα παιδιά αν ισχύει το ίδιο για μεγαλύτερους

αριθμούς 428+384; Το πρόβλημα με τους πολεμιστές μπορεί να δώσει αφορμή ώστε ο κανόνας να μην είναι αυθαίρετος. (Van de Walle, 2005:160)

4. Δραστηριότητα: Μιλάμε μαθηματικά

Ο/η εκπαιδευτικός γράφει στον πίνακα τα λόγια του Τριγωνοψαρούλη: «*Πώς θα πάρεις την αγάπη του άλλου, αν δεν δώσεις τη δική σου;*» Οι ομάδες καλούνται να ερευνήσουν και να διατυπώσουν ανάλογες μαθηματικές φράσεις, με στόχο το 10. «Πώς θα πάρεις το 2 από το 10 αν δεν του δώσεις 8;» «Πώς θα πάρεις το 3 από το 10 αν δε δώσεις 7;» κ.τ.λ.

Τεχνική: Δημιουργική έκφραση, ιδεοθύελλα, καταγραφή ιδεών, γνωσιακή αναδόμηση, (αναστοχασμός)

✓ **Στόχος:** Να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά αποκτούν νόημα και συνδέονται άρρηκτα με την καθημερινότητά μας όταν μάθουμε να τα διαβάζουμε. (Μια μαθηματική σχέση μπορεί να γίνει η βάση μιας ιδέας, Ψάχνοντας στο λογοτεχνικό κείμενο φράσεις με μαθηματικές σχέσεις βοηθούμε τα παιδιά να ξεφύγουν από στερεότυπες φράσεις (π.χ. πόσες φορές χωράει το 6 στο 24) και να χρησιμοποιούν τα σύμβολα και τη γλώσσα κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι μαθηματικές σχέσεις να αποκτήσουν νόημα στη ζωή τους. Van de Walle, 2005:165) Οι λέξεις που χρησιμοποιούμε σφραγίζουν τον τρόπο σκέψης. Γλώσσα και σκέψη είναι συνυφασμένα. Η γλώσσα μας όμως εκτός από τις λέξεις περιλαμβάνει και προτάσεις που η εννοιολογική, η λογική και η γραμματική τους δομή τους επιτρέπει να λειτουργούν ως βασικός μηχανισμός της κρίσης. Αναπτύσσεται έτσι ένα συλλογισμός και μια διαδικασία με την οποία ο νους καταστρώνει ένα επιχείρημα, μια απόδειξη. Αυτή είναι μια από τις αντικειμενικές τεχνικές που δημιουργείται κατά την πορεία της ανάπτυξης της γνωστικής δραστηριότητας και που συντελείται ταυτόχρονα με την ανάπτυξη της γλωσσικής διαδικασίας και βέβαια βελτιώνεται με την ανάπτυξη της μαθηματικής παιδείας. Όπως χαρακτηριστικά υποστηρίζει ο Vigotsky η γλώσσα είναι το αποφασιστικό στοιχείο στη συστηματοποίηση της αντίληψης (Vigotsky, 1997)

5. Δραστηριότητα: Πού είναι το άλλο μισό;

Ο/η εκπαιδευτικός γράφει στον πίνακα τα λόγια του Τριγωνοψαρούλη «*Πολεμάτε άδικα. Δεν έχετε τίποτα να χωρίσετε. Εμείς είμαστε αγαπημένοι, κι ας είμαστε από διαφορετικές θάλασσες*» Ο/η εκπαιδευτικός μοιράζει σε κάθε ομάδα από 10 ξυλάκια-ψαράκια και ζητά από τα παιδιά να γράψουν στα τετράδιά τους «αγαπημένους» αριθμούς ανακαλώντας στη μνήμη τους το διπλάσιο.

Τεχνική: Γνωσιακή αναδόμηση. Στόχος αυτής της τεχνικής είναι η αλλαγή των διαστρεβλωμένων γνωστικών σχημάτων. Ο μαθητής μαθαίνει μέσω της φαντασίας και της ενεργού συμμετοχής του εκπαιδευτικού πώς να αντικαθιστά λανθασμένες ιδέες και σκέψεις με ορθές εκτιμήσεις.

Σύμφωνα με τους Melntosh &Dole οι μαθητές λόγω εξάσκησης χρησιμοποιούν μηχανικά μια στρατηγική υπολογισμού με σωστό τρόπο που όμως δε συνοδεύεται πάντα από την αίσθηση του αριθμού (Λεμονίδης, 2013:37). Ως εκ τούτου, μπορεί πολλοί μαθητές να υπολογίζουν μηχανικά το μισό και το διπλάσιο αλλά δεν ξέρουμε πόσοι από αυτούς το κατανοούν.

Στόχος: Να αντιληφθούν τη σχέση μισό και διπλάσιο

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Λεμονίδης, Χ.,(2013), *Νοεροί υπολογισμοί Μαθηματικά της φύσης και της ζωής*, Θεσσαλονίκη: Ζυγός

Van de Walle, A. J., (2005), *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διαδικασία,* Αθήνα: Τυποθήτω-Γιώργος Δάρδανος

Vigotsky.L.S.(1997) *Νους στην κοινωνία, Η ανάπτυξη των ανώτερων ψυχολογικών διεργασιών*, (επμ.Μπίμπου Α., Βοσνιάδου Σ.) Αθήνα: Gutenberg

ΔΡΑΣΕΙΣ ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ: ΤΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΩΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΕΝΙΣΧΥΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Καλλιόπη Σιώπη & Αλεξάνδρα Πετεινάρα

Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης &

8ο Γενικό Λύκειο Αθηνών

kalsiopi@gmail.com alexpet@ath.forthnet.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία επικεντρώνεται στην καινοτομία της δράσης του αναστοχασμού και της αξιολόγησης διδακτικών πρακτικών των μελών μιας ομάδας εκπαιδευτικών των μαθηματικών από τους ίδιους μέσω παρατήρησης ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της διδασκαλίας τους. Επιχειρείται η εστίαση στη μάθηση που αναπτύχθηκε εντός της κοινότητας μέσω του αναστοχασμού που τροφοδότησε το εγχείρημα της χρήσης και αξιοποίησης παραδειγμάτων στην περίπτωση δυο διδακτικών παρεμβάσεων αντίστοιχων μελών της ομάδας στο πλαίσιο της άλγεβρας της πρώτης τάξης του λυκείου.

1. ΚΟΙΝΟΤΗΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ

Στη διεθνή βιβλιογραφία καταγράφεται η θετική συμβολή στη μάθηση των εκπαιδευτικών, αναφορικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών, η συμμετοχή τους σε μια εποικοδομητική ατμόσφαιρα συνεργασίας σε κοινότητες με στοχευμένο περιεχόμενο (Wenger, 1998; Oliveira & Hannula, 2008). Στο πλαίσιο μιας τέτοιας κοινότητας με πρακτική τη διδασκαλία είκοσι έξι (26) ενεργοί εκπαιδευτικοί των μαθηματικών (25 μόνιμοι και ένας αναπληρωτής), από διαφορετικά σχολεία των τριών τύπων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, συμμετείχαν εθελοντικά σε μια ομάδα μελέτης της διδασκαλίας της άλγεβρας της πρώτης τάξης του λυκείου με την εποπτεία ενός σχολικού συμβούλου των μαθηματικών και την επιστημονική καθοδήγηση τριών ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών από την Ανώτατη Εκπαίδευση [1]. Στη πλειοψηφία τους τα μέλη της ομάδας δεν γνωρίζονταν μεταξύ τους και δεν είχαν αναπτύξει καμιά προηγούμενη συνεργασία.

Σκοπός της δράσης ήταν η ατομική εξέλιξη των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών όσον αφορά τις γνώσεις, τις πεποιθήσεις και τη βελτίωση των διδακτικών τους πρακτικών μέσω της παρατήρησης και κατανόησης φαινομένων της διδασκαλίας. Οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί, άλλοτε *ως διδάσκοντες* και άλλοτε *ως παρατηρητές*, κλήθηκαν να αξιολογήσουν τις διδακτικές τους πρακτικές σε πραγματική σχολική

τάξη, να τις τροποποιήσουν ή ακόμα και να επινοήσουν νέες και να μοιραστούν τις ιδέες τους για εναλλακτικούς τρόπους υποστήριξης της μάθησης.

Η παρούσα εργασία εστιάζει στη φάση του αναστοχασμού διδακτικής παρέμβασης, που μαζί με το σχεδιασμό και την υλοποίηση αποτελούν συνιστώσες της. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται οι οπτικές που αναπτύχθηκαν από τους συμμετέχοντες στην ομάδα εκπαιδευτικούς αναφορικά με την πρακτική της χρήσης και της αξιοποίησης των παραδειγμάτων στην περίπτωση δυο διδακτικών παρεμβάσεων αντίστοιχων μελών της. Δεδομένα της εργασίας αποτέλεσαν τα απομαγνητοφωνημένα κείμενα δυο διδασκαλιών διάρκειας 2 διδακτικών ωρών η κάθε μια, από τις δεκατρείς (13) που πραγματοποιήθηκαν σε τμήματα 25-30 μαθητών ποικίλης δυναμικής και ενδιαφέροντος στο διδακτικό αντικείμενο της άλγεβρας διαφορετικών σχολείων, καθώς και οι προσωπικές σημειώσεις των δύο παρατηρητών -συγγραφέων.

2. ΤΟ ΕΓΧΕΙΡΗΜΑ

2.1. Φάση υλοποίησης διδακτικών παρεμβάσεων

Οι προγραμματισμένες διδακτικές παρεμβάσεις των δυο μελών (Α και Β) είχαν διαφορετικά χαρακτηριστικά ως προς: *το μαθηματικό περιεχόμενο* (έννοια και ιδιότητες απόλυτης τιμής/έννοια και ιδιότητες ν-οστής ρίζα), *το τμήμα παρέμβασης* (άλλου εκπαιδευτικού/του ιδίου εκπαιδευτικού), *το διδακτικό πλαίσιο* (αλγεβρικό/γεωμετρικό) και *τη μορφή εργασίας των μαθητών* (ζεύγη μαθητών/μονάδες μαθητών). Διαφοροποίηση παρατηρήθηκε ως προς τα *διδακτικά εργαλεία* (ερωταποκρίσεις/φύλλο εργασίας) και τη *διδακτική τους διαχείριση*. Όπως, καταγραφή όλων των απαντήσεων των μαθητών στον πίνακα για κάθε ερώτηση και έλεγχος της ορθότητά τους από τους ίδιους τους μαθητές με προτροπή του διδάσκοντα, παροχή χρόνου για επεξεργασία και απάντηση της ερώτησης (εκπ Α) / διατύπωση διευκρινιστικών ή συμπληρωματικών ερωτήσεων παράλληλα με αυτών του φύλλου εργασίας, σφικτή καθοδήγηση μέσω ερωτήσεων για άμεση απάντηση (εκπ Β).

Οι διδάσκοντες κατεύθυναν τη διδακτική πορεία μέσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων που αφορούσαν απλές περιπτώσεις ως κίνητρο για την έναρξη του υπό εξέταση θέματος (*εκκίνησης*), παραδείγματα που έδιναν την ευκαιρία στους μαθητές να αναπτύξουν την διαίσθηση, να εικάσουν κάποια σχέση, να εξάγουν τα πρώτα συμπεράσματα (*αναφοράς)* και άλλα που σκόπευαν να αποτελέσουν τον πυρήνα μιας απόδειξης (*γενικά*) ή οδηγούσαν στην απόρριψη ενός ισχυρισμού (*αντιπαραδείγματα*) (Rissland, 1991).

Διδάσκων Α:Σας δίνουμε τους αριθμούς |x+y| και |x|+|y|. Είναι ίσοι; Ο ένας μεγαλύτερος του άλλου; Και αν ναι, ποιος; (*αναφοράς*)

Διδάσκων Β: Το εμβαδόν του χωραφιού ήταν ρίζα 5, ποια θα είναι η πλευρά του τετραγώνου που ζητάμε; (*εκκίνησης*)

2.2. Φάση αναστοχασμού των διδακτικών παρεμβάσεων

Ο διδάσκων Α αναφορικά με τους στόχους της ακολουθούμενης από τον ίδιο πρακτικής των παραδειγμάτων επεσήμανε ότι αυτό που έκανε ήταν να ζητά από τους μαθητές να πειραματίζονται με αριθμούς για να αποκτήσουν μια διαίσθηση. Αναστοχαζόμενος την αποτελεσματικότητα των παραδειγμάτων στη μάθηση επισήμανε ότι με ένα απλό, προσεγμένο και σαφώς διατυπωμένο παράδειγμα μπορεί ο μαθητής να δώσει εύστοχες απαντήσεις και να οδηγηθεί στη γενίκευση μιας ιδιότητας πιο εύκολα. Σχολιάζοντας τις δυνατότητες και τους περιορισμούς της προσέγγισής του με βάση τις εμπειρίες του, τόνισε τη συμβολή των παραδειγμάτων στην ενεργοποίηση των μαθητών να θέτουν και οι ίδιοι ερωτήσεις με αποτέλεσμα να μην οδηγούνται να 'μαθαίνουν απέξω με κουτάκια και διάφορους μνημονικούς κανόνες'.

Ο διδάσκων Β εστίασε στο συναισθηματικό όφελος των μαθητών ως προς τις συνθήκες διαπραγμάτευσης μαζί τους της εισαγωγής των εννοιών μέσω παραδειγμάτων ώστε, να μη νοιώθει ο μαθητής ότι ξαφνικά μπαίνουν κάποιες έννοιες 'ουρανοκατέβατες', επισήμανε το ρόλο των παραδειγμάτων στην αποσαφήνιση της μαθηματικής ιδέας και αναφέρθηκε στις προσδοκίες του για τη χρήση παραδειγμάτων από τους ίδιους τους μαθητές του.

Οι παρατηρητές εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν τη θετική συμβολή της χρήσης των παραδειγμάτων στην κινητοποίηση του ενδιαφέροντος των μαθητών με αποτέλεσμα την ενεργή συμμετοχή της πλειονότητάς τους στη μαθησιακή διαδικασία.

Εκπαιδευτικός 1:.Η συμπεριφορά τους με εξέπληξε θετικά.

Εκπαιδευτικός 2: Προς το τέλος που τους τέθηκε η ιδιότητα του αθροίσματος δε συζητάγανε μόνο μεταξύ τους, δυο –δυο γύριζαν να συζητήσουν και με τους πίσω.

Στο σχολιασμό τους για τον τρόπο που οι δυο εκπαιδευτικοί διαχειρίστηκαν τα παραδείγματα οι παρατηρητές εκπαιδευτικοί επισήμαναν την συνεισφορά του καλά σχεδιασμένου μαθήματος στη μαθησιακή διαδικασία, παράλληλα με την επιδεξιότητα του διδάσκοντα να καθοδηγεί και να διαχειρίζεται τη διδακτική κατάσταση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι αναγνώσεις των διδασκαλιών που πραγματοποιήθηκαν αναδεικνύουν τα διαφορετικά επίπεδα προσέγγισης του διδακτικού φαινομένου στο πλαίσιο της ομάδας. Η ενεργοποίηση των διαφορετικών οπτικών στην ανάγνωση των δρώμενων στην τάξη σχετικά με την πρακτική της χρήσης και αξιοποίησης των παραδειγμάτων διαμόρφωσε ένα γόνιμο πλαίσιο αναστοχασμού και ανάλυσης των διδακτικών

ενεργειών μεταξύ των μελών της ομάδας. Οι συμμετέχοντες εμφανίζεται να αναλύουν το διδακτικό φαινόμενο με βάση τις εμπειρίες τους, τις προσδοκίες τους και τη διαχείριση της διδακτικής κατάστασης.

Η συνεργασία μεταξύ των εκπαιδευτικών και η συμμετοχή τους σε διαδικασίες σχετικές με την ακολουθούμενη από τους ιδίους διδακτική πρακτική κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε πραγματική σχολική τάξη εμφανίζεται να συμβάλει στην κατανόηση φαινομένων της διδασκαλίας, και κατ' επέκταση στην προσωπική μάθηση αναφορικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η ανταλλαγή εμπειριών μεταξύ των εκπαιδευτικών, με στόχους τη συνδιαμόρφωση και εφαρμογή πρακτικών προς αυτήν την κατεύθυνση, καθίσταται αναγκαία για την ουσιαστική αλληλεπίδραση της διδασκαλίας των μαθηματικών με τη σχολική πραγματικότητα.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Εργαστήριο Άλγεβρας, επικεντρωμένο στην Άλγεβρα της Α' Λυκείου, λειτούργησε κατά το σχολικό έτος 2012-2013 στο Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο της Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης και συνεχίζει τη λειτουργία του κατά το τρέχον σχολικό έτος 2013-2014 στο οποίο συμμετέχουν σε μεγάλο ποσοστό οι εκπαιδευτικοί της προηγούμενης φάσης (όλοι μόνιμοι από την ιδιωτική ή τη δημόσια εκπαίδευση http://algebrateacherlab.blogspot.gr/

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Oliveira, H., & Hannula, M. S.(2008). Individual Prospective Mathematics Teachers: Studies on Their Professional Growth. In K. Krainer and T.Wood (Eds.) *Participants in mathematics teacher education* (pp. 13–34). Rotterdam: Sense Publishers.

Rissland, E. L. (1991). Example-based reasoning. In J. F. Voss, D. N. Parkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning in education* (pp. 187-208). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice*. Cambridge U.P.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Κυράννα Κιουλάφα

Μεταπτυχιακή φοιτήτρια των θεωρητικών μαθηματικών και της διδακτικής και μεθοδολογίας του ΕΚΠΑ

keiranna@math.uoa.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια του ορίου είναι θεμελιώδης για τα μαθηματικά. Πάνω στην έννοια αυτή στηρίζεται η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης, η έννοια της παραγώγου, ο ακριβής ορισμός του ολοκληρώματος. Οπότε οποιαδήποτε παρανόηση αυτής της έννοιας θα συνοδεύει και τις προαναφερόμενες περιοχές της Ανάλυσης που στηρίζονται πάνω στην έννοια του Ορίου. Επειδή η έννοια του ορίου στα μαθηματικά δεν συμπίπτει με την έννοια που την χρησιμοποιούν οι άνθρωποι στην καθημερινότητα δημιουργούνται στους μαθητές παρανοήσεις. Η διδακτική παρέμβαση στοχεύει να άρει τις παρανοήσεις αυτές με διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου. Για να συνδέσουμε την εμπειρία με την μαθηματική γνώση θα χρησιμοποιήσουμε το πρόγραμμα The Geometer Skecthpad.

ΣΤΟΧΟΙ ΤΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Οι στόχοι των δραστηριοτήτων της διδακτικής παρέμβασης είναι οι εξής:

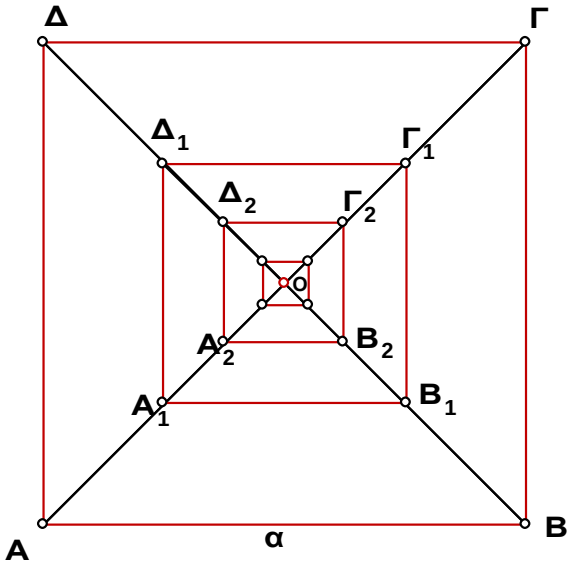
1) η διαισθητική ανάπτυξη της έννοιας και η διέγερση του ενδιαφέροντος των μαθητών μέσω της σύγχρονης τεχνολογίας, 2) να είναι σε θέση οι μαθητές να αναδιατυπώνουν με διαφορετικό τρόπο την έννοια του ορίου και να περιγράφουν με λόγια τον φορμαλιστικό ορισμό της, 3) να εφαρμόζει τη γνώση που απέκτησε σε νέες καταστάσεις και σε προβλήματα της καθημερινής ζωής, και 4) να είναι σε θέσει να χρησιμοποιήσει τη έννοια του ορίου για διερεύνηση άλλων μαθηματικών εννοιών (συνέχεια, παράγωγος)

<u>Δραστηριότητα 1</u> (Διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου μέσω γεωμετρίας)

Έστω ΑΒΓΔ τετράγωνο πλευράς α, και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Έστω $A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1$ τα μέσα των πλευρών ΟΑ, ΟΒ , ΟΓ, ΟΔ αντίστοιχα, σχηματίζω το τετράγωνο $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$. Έστω επίσης $A_2, B_2, \Gamma_2, \Delta_2$ τα μέσα των πλευρών $OA_1, OB_1, O\Gamma_1, O\Delta_1$ αντίστοιχα, σχηματίζω το τετράγωνο $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, δηλαδή τα μέσα των διαγωνίων του τετραγώνου που σχηματίστηκε αποτελούν κορυφές του τετραγώνου που θα σχηματισθεί, σχηματίζουμε το $A_\nu B_\nu \Gamma_\nu \Delta_\nu$ για ν = 1,2,3,4,…

Θα χρησιμοποιήσουμε το λογισμικό SketchPad για να αντιληφθούν οι μαθητές δια μέσου της κίνησης την πορεία που θα περιγράψουμε στη συνέχεια με αλγεβρικό τρόπο. Δηλαδή καθώς υποδιπλασιάζεται συνεχώς η πλευρά του αρχικού τετραγώνου, τα εμβαδά των τετραγώνων που σχηματίζονται είναι όλο και μικρότερα και δημιουργείται η αίσθηση ότι από κάποιο βήμα και μετά το εμβαδόν τους τείνει στο μηδέν.



Σχήμα 1

Ας υπολογίσουμε τα εμβαδά των τετραγώνων που σχηματίζονται. Συμβολίζουμε με α_0 , E_0 την πλευρά και το εμβαδόν αντίστοιχα του τετραγώνου ΑΒΓΔ με α_1 , E_1 την πλευρά και το εμβαδόν αντίστοιχα του τετραγώνου $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ κ.τ.λ. με α_ν , E_ν την πλευρά και το εμβαδόν αντίστοιχα του τετραγώνου $A_\nu B_\nu \Gamma_\nu \Delta_\nu$. Οπότε:

$$\alpha_0 = \alpha \Leftrightarrow E_0 = \alpha^2$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow E_1 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{2^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2^2} \Leftrightarrow \mathrm{E}_2 = \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{16} = \frac{\alpha^2}{2^4}$$

$$\alpha_3 = \frac{\alpha}{8} = \frac{\alpha}{2^3} \Leftrightarrow \mathrm{E}_3 = \left(\frac{\alpha}{8}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{64} = \frac{\alpha^2}{2^6}$$

$$\alpha_4 = \frac{\alpha}{16} = \frac{\alpha}{2^4} \Leftrightarrow \mathrm{E}_4 = \left(\frac{\alpha}{16}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\left(2^4\right)^2} = \frac{\alpha^2}{2^8}$$

Επειδή σε κάθε βήμα υποδιπλασιάζω την πλευρά μετά από ν βήματα υποδιπλασιασμούς) θα έχω ότι:

$$\alpha_\nu = \frac{\alpha}{2^\nu} \Leftrightarrow \mathrm{E}_\nu = \left(\frac{\alpha}{2^\nu}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{2^{2\cdot\nu}} \quad (1)$$

Ας γράψουμε τα εμβαδά των τετραγώνων, υποθέτοντας ότι η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι 1km.

$1km^2, \frac{1}{2^2}km^2, \frac{1}{2^4}km^2, \frac{1}{2^6}km^2, \cdots, \frac{1}{2^{2\cdot\nu}}km^2, \cdots$ και ας προσπαθήσουμε να δούμε αν υπάρχει τετράγωνο που έχει εμβαδόν μικρότερο από $1mm^2$. Θα πρέπει δηλαδή $10^{12}\cdot\frac{1}{2^{2\cdot\nu}} < 1$ μετατρέψαμε τα τετραγωνικά χιλιόμετρα σε τετραγωνικά χιλιοστά. Οπότε για να υπάρχει τετράγωνο με εμβαδόν μικρότερο από $1\mathrm{mm}^2$ πρέπει να ισχύει:

$$10^{12}\cdot\frac{1}{2^{2\cdot\nu}} < 1 \Leftrightarrow 10^{12} < 2^{2\cdot\nu} \Leftrightarrow 2^{2\cdot\nu} > 10^{12} \Leftrightarrow \log_{10} 2^{2\cdot\nu} > \log_{10} 10^{12} \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\nu\log_{10} 2 > 12 \Leftrightarrow \nu > \frac{12}{2\cdot\log_{10} 2} \Leftrightarrow \nu > \frac{6}{\log_{10} 2}$$

δηλαδή $\nu > 19.93156857$ και επειδή ο ν είναι φυσικός αριθμός αυτό συμβαίνει για κάθε $\nu \geq 20$.

Γεγονός που σημαίνει ότι μετά από είκοσι (20) σχεδιαστικά βήματα θα προκύψει ένα τετράγωνο, το εμβαδόν του οποίου, και οποιουδήποτε από κει και μετά, θα είναι μικρότερο του 1 mm^2 όταν το αρχικό είχε εμβαδόν 1 km^2.

Τέτοια όμως τετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε σαφώς περισσότερα από είκοσι.

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε τετράγωνο που το εμβαδόν του να είναι μικρότερο από $\frac{1}{10000} mm^2$ όταν το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου είναι $1\, km^2$;

Με βάση λοιπόν τον τύπο (1) ισχύει :

$$10^{12} \cdot \frac{1}{2^{2\cdot\nu}} < \frac{1}{10000} \Leftrightarrow 10^{16} < 2^{2\cdot\nu} \Leftrightarrow 2^{2\cdot\nu} > 10^{16} \Leftrightarrow \log_{10} 2^{2\cdot\nu} > \log_{10} 10^{16} \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \nu \log_{10} 2 > 16 \Leftrightarrow \nu > \frac{16}{2 \cdot \log_{10} 2} \Leftrightarrow \nu > \frac{8}{\log_{10} 2}$$

Άρα ν > 26.575 οπότε από το σχεδιαστικό βήμα 27 και μετά τα εμβαδά των τετραγώνων που θα προκύπτουν, θα είναι μικρότερα από $\frac{1}{10000} mm^2$.

Ας παρακολουθήσουμε την πορεία των εμβαδών των τετραγώνων σε σχέση με τη αύξηση των σχεδιαστικών βημάτων σ' ένα πίνακα , όταν το αρχικό τετράγωνο έχει εμβαδόν $1\, km^2$

Σχεδιαστικά βήματα	**Εμβαδόν τετραγώνου σε τετραγωνικά χιλιοστά**
1	250.000.000.000
2	62.500.000.000
5	976.562.500
10	953.674
19	3,638
20	0,9094947
25	0,0008882
30	0,0000009
40	0,000000000001

Πίνακας 1

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι από το τεσσαρακοστό σχεδιαστικό βήμα και μετά το εμβαδόν των σχηματιζόμενων τετραγώνων είναι μικρότερο από το ένα τρισεκατομμυριοστό του τετραγωνικού χιλιοστού.

Μήπως όμως ***υπάρχει τετράγωνο με μηδενικό εμβαδόν***; Ισχύει δηλαδή η σχέση $10^{12} \cdot \frac{1}{2^{2\cdot v}} mm^2 = 0mm^2$; Τότε $10^{12} = 0 \cdot 2^{2\cdot v} \Leftrightarrow 10^{12} = 0!!$ που είναι άτοπο. Συνεπώς για οποιοδήποτε σχεδιαστικό βήμα το εμβαδόν παραμένει διάφορο του μηδενός.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι, ***πόσο κοντά στο μηδέν*** μπορούμε να πλησιάσουμε; Μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα σχεδιαστικό βήμα τέτοιο ώστε τα τετράγωνα που θα προκύψουν από εκεί και μετά να έχουν εμβαδόν μικρότερο από $10^{-1000} mm^2$; Θα ισχύει

$$10^{12} \cdot \frac{1}{2^{2\cdot v}} < \frac{1}{10^{1000}} \Leftrightarrow 10^{12} \cdot 10^{1000} < 2^{2\cdot v} \Leftrightarrow$$

$$2^{2\cdot v} > 10^{1012} \Leftrightarrow 2 \cdot v \cdot \log_{10} 2 > 1012 \cdot \log_{10} 10 \Leftrightarrow$$

$$v > \frac{1012}{2 \cdot \log_{10} 2} \Leftrightarrow v > \frac{506}{\log_{10} 2} \Leftrightarrow v > 1680,8956$$

Οπότε μετά από 1681 σχεδιαστικά βήματα κάθε τετράγωνο που θα κατασκευάζεται θα έχει εμβαδόν μικρότερο από 10^{-1000} mm^2.

Διαπιστώσαμε ότι υπάρχουν τετράγωνα με εμβαδόν μικρότερο από $10^{-1000} mm^2$. Ο αριθμός αυτός είναι ένας αριθμός κοντά στο μηδέν. ***Πόσο όμως κοντά στο μηδέν μπορούμε να πλησιάσουμε;***

Υπάρχει τετράγωνο που αυτό και τα επόμενά του να έχουν εμβαδόν μικρότερο από $\frac{1}{10^{1000000}} mm^2$; Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει:

$$10^{12} \cdot \frac{1}{2^{2\cdot v}} < \frac{1}{10^{1000000}} \Leftrightarrow 10^{12} \cdot 10^{1000000} < 2^{2\cdot v} \Leftrightarrow$$

$$2^{2\cdot v} > 10^{1000012} \Leftrightarrow 2 \cdot v \cdot \log_{10} 2 > 1000012 \cdot \log_{10} 10 \Leftrightarrow$$

$$v > \frac{1000012}{2 \cdot \log_{10} 2} \Leftrightarrow v > \frac{500006}{\log_{10} 2} \Leftrightarrow v > 1660983,979$$

Όλα λοιπόν τα τετράγωνα που κατασκευάζονται μετά από 1660984 σχεδιαστικά βήματα έχουν εμβαδόν μικρότερο από $\frac{1}{10^{1000000}}mm^2$.

Αν σκεφτούμε ότι $\frac{1}{10^2}mm^2$ είναι πολύ μικρότερο από μια τελεία (.) και ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι φραγμένο αντιλαμβανόμαστε ότι ***πλησιάζουμε τόσο κοντά στο μηδέν, όσο θέλουμε***, διότι υπάρχουν άπειρα τετράγωνα τα οποία το εμβαδόν τους είναι μικρότερο από $10^{-1000000}$, και άπειρα σχεδιαστικά βήματα μετά από το 1660984 σχεδιαστικό βήμα, επειδή το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι φραγμένο, τα οποία έχουν εμβαδόν ακόμη μικρότερο του $10^{-1000000}$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω λέμε ότι για οποιονδήποτε μικρό θετικό αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n_0 ώστε για κάθε αριθμό n μεγαλύτερο του n_0 το εμβαδόν $E_n < \varepsilon$ ή ισοδύναμα $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$.

<u>Δραστηριότητα 2</u> (Εφαρμογή της έννοιας του ορίου)

Ένας νέος μετά από ένα καρδιακό επεισόδιο είναι υποχρεωμένος να παίρνει μια φαρμακευτική ουσία για το υπόλοιπο της ζωής του. Αν η ημερήσια δόση της ουσίας είναι δ και το ποσοστό της εικοσιτετράωρης αποβολής της από τον οργανισμό είναι α%, ποια θα είναι η μεγαλύτερη ποσότητα της φαρμακευτικής ουσίας που θα υπάρχει στον οργανισμό του ασθενούς, στο τέλος της ζωής του;

Την πρώτη μέρα η ποσότητα είναι: δ

Την δεύτερη μέρα η ποσότητα είναι: $\delta - \delta\alpha + \delta = \delta(1-\alpha) + \delta$

Την τρίτη μέρα η ποσότητα είναι : $\delta(1-\alpha) + \delta - \left(\delta(1-\alpha) + \delta\right)\cdot\alpha + \delta =$

$$\delta(1-\alpha) + \delta - \delta(1-\alpha)\cdot\alpha - \delta\cdot\alpha + \delta = \delta(1-\alpha)(1-\alpha) + \delta(1-\alpha) + \delta =$$
$$\delta(1-\alpha)^2 + \delta(1-\alpha) + \delta$$

Οπότε την ν-οστή ημέρα η ποσότητα θα είναι:

$$\delta(1-\alpha)^{\nu-1} + \delta(1-\alpha)^{\nu-2} + \cdots + \delta(1-\alpha) + \delta =$$

$$\delta\left((1-\alpha)^{\nu-1} + (1-\alpha)^{\nu-2} + \cdots + (1-\alpha) + 1\right) = \delta\cdot\frac{(1-\alpha)^{\nu} - 1}{(1-\alpha) - 1}$$

Τελικά την ν-οστή ημέρα θα υπάρχει στον οργανισμό του ποσότητα ουσίας ίση με

$$\Pi_\nu = \delta \cdot \frac{1-(1-\alpha)^\nu}{\alpha}$$

Επειδή όμως το α είναι ποσοστό, το 1-α θα είναι: $0<1-\alpha<1$ οπότε

$$\lim_{\nu\to\infty} \Pi_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \delta \cdot \frac{1-(1-\alpha)^\nu}{a} = \delta \cdot \lim_{\nu\to\infty} \frac{1-(1-\alpha)^\nu}{a} = \frac{\delta}{\alpha}$$

διότι $\lim_{\nu\to\infty}(1-a)^\nu = 0$

Άρα η μεγαλύτερη ποσότητα που θα υπάρχει στον οργανισμό του θα είναι το ποσόν της ημερήσιας δόσης προς το ποσοστό της αποβαλλόμενης ουσίας δηλαδή $\frac{\delta}{\alpha}$.

Υποθέσαμε ότι το πλήθος των ημερών που θα λαμβάνει το φάρμακο είναι μια μεταβλητή ν, $\nu\to\infty$. Η υπόθεσή μας δεν απέχει από την πραγματικότητα, διότι αν το έμφραγμα συνέβη στο 45ο έτος της ηλικίας του και έζησε μέχρι το 48ο έτος, τότε το πλήθος των ημερών είναι (48-45)*365=1095.

Και αν υποθέσουμε ότι αποβάλλεται το 10% από τον οργανισμό, α=0,1 τότε ο τύπος $\Pi_\nu = \delta \cdot \frac{1-(1-\alpha)^\nu}{\alpha}$ γράφεται $\Pi_{1095} = \delta \cdot \frac{1-(1-\alpha)^{1095}}{\alpha}$. Επειδή το 0<(1-α)<1 έπεται ότι το $(1-\alpha)^{1095} = 0.9^{1095} = 0.\underbrace{000\cdots\cdots0}_{50_\mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\kappa\alpha}786$ είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός κοντά στο μηδέν και συνεπώς πρακτικά αμελητέος, δηλαδή

$$\Pi_{1095} = \delta \cdot \frac{1-\varepsilon}{\alpha} \to \frac{\delta}{\alpha}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αραχωβίτης Ι. « Απλές εφαρμογές των μαθηματικών στις επιστήμες της ζωής και της υγείας» Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 1998

Bloch Isabelle & Chedamsi Irene “The Teaching of Calculus at the Transition Between Upper Secondary School and University: Factors of Rupture. A study concerning the notion of limit.” Calculus International Congress of Mathematics Education, Copenhagen, Danmark, July 2004

Cornu Bernard “Limits” 10o chapter In D. Tall “Advanced Mathematical Thinking”, Ed. Kluwer Academic Publishers 1991 (pp 153-166)

Monaghan Jon , Sun Shyashiow, Tall David "Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System" Proceedings PME,1994

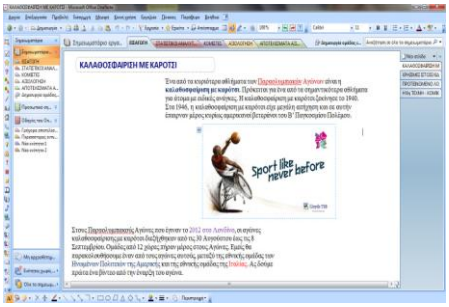
Tall David & R.I.E. Schwarzenberger "Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits" Mathematics Teaching 82, 44-49, 1978

ΑΞΙΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΟΜΙΚΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΑΓΩΝΑ ΚΑΛΑΘΟΣΦΑΙΡΙΣΗΣ ΜΕ ΚΑΡΟΤΣΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΟΣΟΣΤΑ – ΈΝΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΣΕΝΑΡΙΟ

Μαρία Πριοβόλου Μαθηματικός – Ms Διδακτική των Μαθηματικών

mpriovolou@yahoo.gr

Η ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ



Το παρόν ηλεκτρονικό διδακτικό σενάριο προσεγγίζει τα Μαθηματικά από μια σκοπιά όπου μπορούν όλοι οι μαθητές να ασχοληθούν με δραστηριότητες οι οποίες δεν θυμίζουν την αυστηρή φορμαλιστική προσέγγιση της επιστήμης. Τα ερωτήματα που τίθενται στους μαθητές είναι δομημένα κατά τέτοιο τρόπο ώστε να τους προκαλούν το ενδιαφέρον μέσα από θέματα που σχετίζονται με τις ενασχολήσεις τους. Πρόκειται για έναν ανασχεδιασμό της διδακτικής προσέγγισης του Κεφαλαίου των Ποσοστών, όπου οι μαθηματικές δραστηριότητες σχετίζονται με κοινωνικά και δημιουργικά θέματα.

Ο γενικός σκοπός του διδακτικού σεναρίου είναι οι μαθητές να προσεγγίσουν με ελκυστικό τρόπο, μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες ηλεκτρονικές δραστηριότητες, τις μαθηματικές έννοιες του Ποσοστού, της Μείωσης – Έκπτωσης και της Αύξησης του και να επιλύσουν πραγματικά μαθηματικά προβλήματα που μπορεί να συναντήσουν στον αθλητισμό και στην καθημερινή ζωή γενικά. Οι επιμέρους στόχοι αφορούν την γνωστική ανάπτυξη των μαθηματικών θεμάτων που προαναφέρθηκαν, την χρήση νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση, την προώθηση της συνεργασίας και την κοινωνική ανάπτυξη.

Η πλειοψηφία των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου, αγαπούν τον αθλητισμό, παίζουν κάποιο ομαδικό άθλημα ή το παρακολουθούν στην τηλεόραση κατά την διάρκεια του ελεύθερου χρόνου τους. Περά από αυτό, αρκετοί μαθητές επιλέγουν την ανάγνωση κόμικς και οι πιο ταλαντούχοι σχεδιάζουν κάποια. Η χρήση κόμικς στην διδασκαλία μπορεί να αναπτύξει ευκαιρίες για καλλιέργεια δεξιοτήτων και δημιουργικότητας. Δραστηριοποιώντας τους μαθητές να δημιουργήσουν ένα κόμικς κατά την διδασκαλία της Άλγεβρας, ακόμη και οι μαθητές με χαμηλή ακαδημαϊκή επίδοση προδιατίθενται θετικά να λάβουν μέρος στην μαθησιακή διαδικασία δημιουργώντας τα δικά τους κόμικς και χρησιμοποιώντας την αλγεβρική γλώσσα (Tin Lam Toh). Η

σύνδεση των Μαθηματικών του σχολείου με ρόλους, όπως του αθλητικού αναλυτή και του κομίστα, οι οποίοι είναι κοντά στα ενδιαφέροντα των μαθητών προσδίδει νόημα σε όλα όσα διδάσκονται, καθώς τα κάνει εφαρμόσιμα σε εξωσχολικές δραστηριότητες.

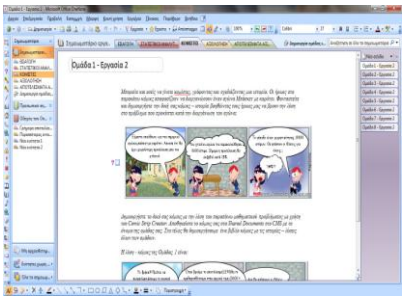
Σε αυτό το ηλεκτρονικό διδακτικό σενάριο κυρίαρχο ρόλο έχει η χρήση των νέων τεχνολογιών από τους μαθητές. Όλες οι δραστηριότητες είναι ηλεκτρονικές, με μικρή χρήση χαρτιού – μολυβιού. Το σενάριο πραγματοποιήθηκε σε εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών. Οι μαθητές χρησιμοποιούν προγράμματα του Microsoft Office (Microsoft Excel, OneNote, Interactive Classroom) και το πρόγραμμα σχεδίασης κόμικς Comic Strip Creator. Επίσης, οι μαθητές παρακολουθούν βίντεο και κάνουν χρήση σελίδων του διαδικτύου.

Το παρόν ηλεκτρονικό διδακτικό σενάριο χρησιμοποιεί ομαδοκεντρική διδασκαλία. Οι μαθητές έχουν χωριστεί σε ομάδες των τριών μαθητών. Ο κινητήριος άξονας της διδασκαλίας είναι οι ομάδες των μαθητών. Ο εκπαιδευτικός έχει σχεδιάσει από πριν τα μαθηματικά θέματα και τις δραστηριότητες και απλά παρευρίσκεται στο εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών με ρόλο συμβουλευτικό.

Η διδακτική πράξη που περιγράφεται έχει σαν βασικό της στόχο την δημιουργία μιας σχολικής κουλτούρας με αποδοχή στην διαφορετικότητα και την κατανόηση κοινωνικών θεμάτων. Η επιλογή και προβολή ενός αγώνα Καλαθοσφαίρισης με Καρότσι από τους Παραολυμπιακούς Αγώνες δημιουργεί πολλαπλούς προβληματισμούς στους μαθητές. Από την μια τους δίνει το μήνυμα της ενότητας μεταξύ των παικτών μιας ομάδας με κοινό σκοπό. Από την άλλη πλευρά τονίζει ότι όλοι έχουμε πολλές ικανότητες που μπορούν να καλλιεργηθούν για την επίτευξη των στόχων μας.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ.

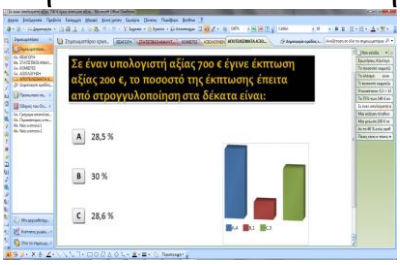
Η διδακτική πρακτική αναπτύσσεται σε 4 διδακτικές πράξεις. Αρχικά οι μαθητές έχουν τον ρόλο του στατιστικού αναλυτή αθλητικού αγώνα, παρακολουθούν ενεργητικά ένα βίντεο αγώνα Καλαθοσφαίρισης με Καρότσι, που έλαβε χώρα στους Παραολυμπιακούς Αγώνες του Λονδίνου το 2012, αναλύουν στατιστικά τον αγώνα, καταγράφουν και υπολογίζουν τα ποσοστά ευστοχίας του αγώνα σε λογιστικό φύλλο. Πέρα από αυτό, προτείνεται στους μαθητές το λογοτεχνικό βιβλίο «*Δυο παπούτσια με*



καρότσι» του Νίκου Ανδρικόπουλου, για ανάγνωση και προβληματισμό στον ελεύθερο τους χρόνο.

Στην συνέχεια, ο ρόλος των μαθητικών ομάδων μεταλλάσσεται σε κομιστές. Η δραστηριότητα αυτή περιλαμβάνει την επίλυση Προβλημάτων Ποσοστών εκφρασμένη υπό την μορφή κόμικς και κατασκευασμένη με το πρόγραμμα Comic Strip Creator. Οι μαθητές προσπαθούν να επιλύσουν ομαδικά τα μαθηματικά προβλήματα και έπειτα σχεδιάζουν ηλεκτρονικά κόμικς για να παρουσιάσουν τις λύσεις τους. Μέσα από τις δραστηριότητες κατασκευής κόμικς που περιέχουν την λύση ενός μαθηματικού προβλήματος, οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν λεκτικά διάφορες μαθηματικές έννοιες. Η μορφή αυτή της γραπτής εργασίας έχει ως σκοπό να αυξήσει την παρατηρητικότητα, την ακρίβεια έκφρασης των μαθητών και να συμβάλει στην εξοικείωση τους με τη μαθηματική ορολογία και το μαθηματικό συμβολισμό. Ενώ γράφουν έναν ορισμό ή περιγράφουν μια έννοια, οι μαθητές συνειδητοποιούν καταστάσεις και πλευρές τις οποίες δεν έχουν παρατηρήσει κατά την οπτική επαφή τους με την έννοια αυτή. Σκοπός είναι να φτάσουν στην ουσιαστική κατανόηση των προβλημάτων Ποσοστών.

Στην τελευταία διδακτική πράξη οι ομάδες των μαθητών παίρνουν μέρος σε μια ηλεκτρονική διαδικασία αξιολόγησης στο εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών. Οι τριμελείς ομάδες καλούνται να απαντήσουν σε δέκα ερωτήσεις αξιολόγησης στο Κεφάλαιο των Ποσοστών με χρήση του προγράμματος Interactive Classroom της Microsoft. Πρόκειται για ερωτήσεις καθορισμένης απάντησης. Ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να έχει μια καθαρή εικόνα του τι έχει διδαχθεί και τι έχει αφομοιωθεί και η αξιολόγηση πρέπει να ευθυγραμμιστεί με τους διδακτικούς σκοπούς. Το πρόγραμμα Interactive Classroom υπολογίζει το ποσοστό επιλογής της κάθε απάντησης από τις ομάδες των μαθητών. Μετά το τέλος της διαδικασίας αξιολόγησης ακολουθεί σχολιασμός των απαντήσεων από τους μαθητές και τον εκπαιδευτικό.



ΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΞΗΧΘΗΣΑΝ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ.

Μετά την ολοκλήρωση του ηλεκτρονικού διδακτικού σεναρίου, εξακριβώθηκε ότι μέσα από τις δραστηριότητες οι μαθητές είχαν την δυνατότητα, συνεργαζόμενοι μεταξύ τους και χρησιμοποιώντας τον υπολογιστή ως εργαλείο, να δομούν την

γνώση μέσα από την κοινωνική αλληλεπίδραση. Ο εκπαιδευτικός εκμεταλλεύτηκε την ανατροφοδότηση που έπαιρναν οι μαθητές από την αλληλεπίδραση τους από τον υπολογιστή και προσάρμοσε ανάλογα την παρέμβαση του η οποία γινόταν περισσότερο συμβουλευτική όσο πλησίαζε το τέλος της όλης δραστηριότητας.

Ο υπολογιστής στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι το μέσον με το οποίο οι μαθητές καλούνται να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα τα οποία έχουν τεθεί. Οι δραστηριότητες του σεναρίου έδωσαν στους μαθητές την δυνατότητα να εκφραστούν και να δημιουργήσουν μέσω του υπολογιστή, αλλά και να εμπλουτίσουν τις υπάρχουσες γνώσεις τους, ώστε να μετατραπούν σε γνωστικές δομές.

Μέσα από αυτήν την εργαστηριακή προσέγγιση της έννοιας του Ποσοστού, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να πειραματιστούν, να αυτενεργήσουν και να δημιουργήσουν. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού, μέσα στο εργαστήριο, από διανεμητή της γνώσης μετατράπηκε σε διευκολυντή της γνώσης. Οι μαθητές ήξεραν τι πρέπει να κάνουν κάθε φορά, καθώς τα καθήκοντα και οι υπευθυνότητες είχαν κατανεμηθεί εξ αρχής και γνώριζαν πώς να καταπιαστούν με την λύση κάθε δραστηριότητας.

Η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων θεωρείται μια από τις πιο σπουδαίες πλευρές των Μαθηματικών. Διαπιστώθηκε ότι η οικειότητα των μαθητών με το περιεχόμενο των προβληματικών καταστάσεων που τους τέθηκαν στο διδακτικό σενάριο βελτίωσε την επιτυχία ακόμη και εκείνων με μικρότερες ικανότητες. Ο υπολογισμός των ποσοστών ευστοχίας μιας ομάδας Καλαθοσφαιρισης με Καρότσι αποτελεί ένα πραγματικό πρόβλημα για τους μαθητές που αγαπούν τον αθλητισμό. Η παρουσίαση της λύσης ενός μαθηματικού προβλήματος μέσω της κατασκευής ενός κόμικς αποτελεί ένα αφηγηματικό πρόβλημα, το οποίο αναφέρεται σε καταστάσεις που ήταν οικείες στους μαθητές. Πολλά από τα κόμικς που κατασκεύασαν οι μαθητές είναι τόσο ενδιαφέροντα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν την επόμενη σχολική χρονιά στην διδασκαλία των Ποσοστών από τους διδάσκοντες της Α΄ Γυμνασίου.

Οι μαθητές παρατήρησαν μετά το τέλος της αξιολόγησης ότι υπήρχε σαφήνεια και ακρίβεια στα ζητούμενα, τα όποια δεν τους προκαλούσαν σύγχυση. Πέρα από αυτό, οι ερωτήσεις καθορισμένης απάντησης ελαχιστοποίησαν το σφάλμα υποκειμενικότητας στην αξιολόγηση των συγκεκριμένων απαντήσεων, οι οποίες περιόριζαν την έλλειψη ασάφειας με τη δυνατότητα θέσπισης κοινών κριτηρίων αξιολόγησης.

Μετά το πέρας του διδακτικού σεναρίου, οι μαθητές παρατήρησαν ότι η επαφή τους με ένα Παραολυμπιακό Άθλημα τους βοήθησε να κατανοήσουν τις ικανότητες ατόμων με κινητικές δυσκολίες. Στις συζητήσεις που ακολούθησαν ήταν έκδηλη η ευαισθητοποίηση τους πάνω σε αυτό το θέμα και η αποδοχή της διαφορετικότητας

αυτών των ατόμων. Κάποιοι μαθητές εξέφρασαν το ενδιαφέρον τους να προτείνουν την διοργάνωση ενός αγώνα Καλαθοσφαίρισης με Καρότσι για φιλανθρωπικό σκοπό.

Η έννοια και η χρήση των Ποσοστών συνδέθηκε με την πραγματική ζωή για τους μαθητές που πήραν μέρος σε αυτό το ηλεκτρονικό διδακτικό σενάριο. Κάθε ένας τους αισθάνθηκε ότι τα Ποσοστά δεν βρίσκονται μόνο στις γραμμές μαθητικών τετραδίων αλλά στην καθημερινότητα και στην κοινωνία ως μαθηματικό εργαλείο για την επίλυση κάθε λογής προβλημάτων μέχρι και αθλητικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Bruner J. (1987) Making Sense, Methuem
1. Εφηβεία: Ένα μεταβατικό στάδιο σ’ ένα μεταβαλλόμενο κόσμο, Επιμέλεια: Τσιάντης Ι. κ.α., Εκδόσεις Καστανιώτη, Αθήνα, 1994
2. Freudenthal H. (1980): Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematics Education, (Dordrecht, The Netherlands, Boston, USA), D. Reidel Publishing Company
3. Owston R.D. (1997): ‘The world wide web: A technology to enhance teaching and learning’, Educational Researcher, 24(3)
4. Papert S. (1993): The children’s machine. Rethinking school in the age of computer, Harvester
5. Ράπτης Α. (2005): «Η αλληλεπιδραστική σχέση του αφηρημένου με το συγκεκριμένο στη μαθηματική σκέψη και η συμβολή των νέων τεχνολογιών.», Ηώς, Τόμος 1, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα
6. Tin Lam Toh: Use of Cartoons and Comics to Teach Algebra in mathematics Classroom, National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore
7. Τουμάσης Μπ.(2000): Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών, Αθήνα: Gutenberg
8. Van Hiele P. (2011) Δομή και Διορατικότητα, Μια θεωρία για την Μαθηματική Εκπαίδευση, Αθήνα: Liberal Books

ΔΙΑΛΟΓΟΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Συμεωνίδης Νικόλαος
2ο 12/θ Δημοτικό σχολείο Ψαχνών Εύβοιας
nsimeonidis@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Καθώς η διδακτική διαδικασία των νοερών υπολογισμών εκκινείται και υποστηρίζεται με το διάλογο (Λεμονίδης, 2013), η ανάπτυξη επικοινωνιακών τακτικών (μαθηματικές γενικεύσεις, κριτική γλωσσική επίγνωση, ανάλυση λαθών για εντοπισμό της προέλευσης θεμελιωδών μαθηματικών παρανοήσεων, υποστήριξη ομαδικής εργασίας για συλλογική μάθηση και καθολική συμμετοχή) και γλωσσικών εργαλείων (χρήση αντωνυμιών, μονογλωσσικά και ετερογλωσσικά εργαλεία, χρονικά επιρρήματα, άρθρα, ρήματα, και χρόνους) αναμένεται να επιδρούν το ίδιο θετικά σε αυτή τη διαδικασία. Αυτή η υπόθεση ελέγχθηκε σε έρευνα με μαθητές της Δ΄ Δημοτικού και επιλέγοντας αρχικά ως επικοινωνιακή τακτική τις μαθηματικές γενικεύσεις και ως γλωσσικό εργαλείο τη χρήση των αντωνυμιών (Rowland, 1999).

1. ΕΠΙΛΟΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Αξιοποιήθηκε η διδακτική ενότητα που αντιστοιχούσε στον ημερολογιακό προγραμματισμό με τίτλο: "Επιλύω προβλήματα" της Δ' τάξης δημοτικού. Στη διδακτική παρέμβαση που ακολουθεί αναζητήθηκε ο βαθμός επίτευξης των διδακτικών στόχων της αναγνώρισης προβληματικών καταστάσεων για τη χρήση του πολλαπλασιασμού και του υπολογισμού γινομένων φυσικών αριθμών με διάφορες στρατηγικές με τη βοήθεια των επικοινωνιακών τακτικών και των γλωσσικών εργαλείων.

2. ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ

Οι μαθητές έχουν γνωρίσει από τις μικρότερες τάξεις σχετικά με τον πολλαπλασιασμό, τα προβλήματα και τον υπολογισμό του με διάφορους τρόπους τα εξής:

- ✓ στην Α' τάξη, την εξάσκηση σε εμπειρικές καταστάσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης,
- ✓ στην Β' τάξη την προπαίδεια των αριθμών 2-4, 8, 7, 3-6, 9-11, σύνθετα προβλήματα όπου χρησιμοποίησαν στρατηγικές νοερών υπολογισμών και υπολόγισαν με εκτίμηση,
- ✓ στην Γ' τάξη, τον πολλαπλασιασμό διψήφιου με μονοψήφιο όπου εφάρμοσαν πολλαπλούς τρόπους προσέγγισης του υπολογισμού όπως την επιμεριστική ιδιότητα, τον ελληνικό πολλαπλασιασμό, καθώς και τον κάθετο αλγόριθμο,

- ✓ στην Δ' Τάξη, μέχρι αυτό το χρονικό σημείο, τον πολλαπλασιασμό με διάφορους τρόπους, τα πολλαπλάσια, τις ιδιότητες του αλλά και τον υπολογισμό με πίνακα διπλής εισόδου.

3. ΠΟΡΕΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

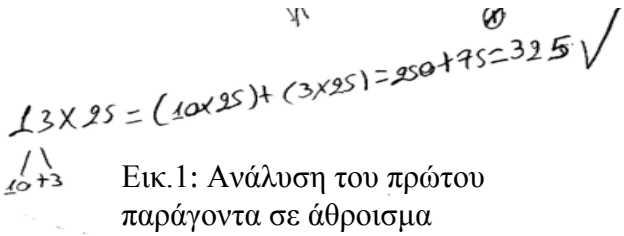
1η Φάση: Ανακοίνωση στόχων και διερευνητική αξιολόγηση των γνώσεων των μαθητών

Διεξάγεται σύντομος διάλογος με τους μαθητές προκειμένου να γίνει έλεγχος των προαπαιτούμενων γνώσεων. Στο σημείο αυτό ζητείται να καταθέσουν τις βιωματικές τους εμπειρίες για τη χρήση του υπολογισμού του πολλαπλασιασμού από την καθημερινή τους ζωή. Για παράδειγμα στην παρούσα διδακτική προσέγγιση, οι μαθητές αναφέρθηκαν στην αναζήτηση του συνολικού κόστους για την αγορά 100 δέντρων μινιατούρων αξίας 2 ευρώ το καθένα για την κατασκευή της μακέτας τους στην ευέλικτη ζώνη με θεματολογία το δάσος, στην εύρεση των συνολικών επιβατών των 5 αστικών λεωφορείων που μεταβαίνουν καθημερινά από τα γύρω χωριά στο σχολείο όταν η πληρότητα κάθε λεωφορείου είναι 110 επιβάτες, στα έσοδα από μια συναυλία με 20000 θεατές αγαπημένου συγκροτήματός τους όταν το εισιτήριο κοστίζει 12 ευρώ, στα έσοδα ενός ελαιοπαραγωγού (μιας και αποτελεί βασική ασχολία των κατοίκων) όταν πούλησε 700 κιλά λάδι με τιμή 4 ευρώ το κιλό. Τέλος, στη φάση αυτή ανακοινώνεται στους μαθητές πως στο συγκεκριμένο μάθημα θα ασχοληθούν επισταμένα με προβλήματα πολλαπλασιασμού και με την αναζήτηση και εφαρμογή σχετικών στρατηγικών υπολογισμού.

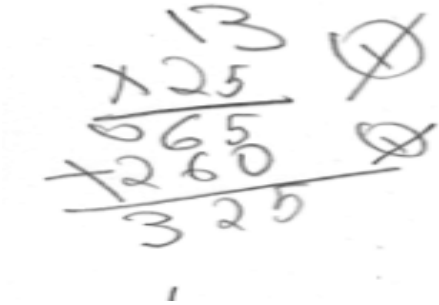
2η Φάση: Εισαγωγή στη νέα έννοια και πραγματοποίηση εισαγωγικής δραστηριότητας

Η διδακτική παρέμβαση υλοποιήθηκε εστιάζοντας κυρίως σε αυτή τη φάση της διδασκαλίας. Αναλυτικά, δόθηκε στις ομάδες των μαθητών, από ένα φύλλο εργασίας με το εξής μαθηματικό πρόβλημα πολλαπλασιασμού: *να υπολογίσετε το συνολικό αριθμό των μαθητών ενός δημοτικού σχολείου αν γνωρίζετε ότι λειτουργούν 13 τμήματα των 25 μαθητών*. Στον διάλογο που ανέπτυξε κατά την επεξήγηση του προβλήματος ο δάσκαλος, προσπάθησε να ενεργοποιήσει τη διαδικασία του υπολογισμού με νοερές στρατηγικές χρησιμοποιώντας εκφράσεις με αντωνυμίες που αντιστοιχούν σε αυτές. Ενδεικτικό απόσπασμα: «όσοι θέλετε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε *μερικούς* από *εκείνους* τους *δικούς σας* τρόπους, που νομίζετε ότι θα σας διευκολύνουν περισσότερο, μάλιστα στο τέλος μπορείτε να *τους* παρουσιάσετε και να *τους* αναδείξετε». Οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά. Στο τέλος ανακοίνωσαν τους τρόπους προσέγγισης του προβλήματος, τις στρατηγικές υπολογισμού και επίλυσης, καθώς και επιχειρηματολόγησαν για την επιλογή τους.

Τα πρώτα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι περισσότεροι μαθητές (70%) οδηγήθηκαν στην εκτέλεση της κοινής για όλους πράξης πολλαπλασιασμού με στρατηγικές νοερών υπολογισμών, με επικρατέστερη την παρακάτω: 13x25=(10+3)x25=10x25+3x25=250+75 =325 (εικόνα 1). Ανέλυσαν δηλαδή τον πρώτο παράγοντα σε ένα άθροισμα που να περιέχει το 10, και στη συνέχεια εκτέλεσαν τους νέους πολλαπλασιασμούς και την τελική πρόσθεση πιο εύκολα. Έτσι έλυσαν το πρόβλημα ορθά και σε λιγότερο κατά μέσο όρο χρόνο (3 λεπτά) από εκείνους που χρησιμοποίησαν τον κάθετο αλγόριθμο (4-5 λεπτά), συμπεραίνοντας και ανακοινώνοντας συνάμα ότι αποτέλεσε μία πιο εύκολη, λειτουργική και γρήγορη μέθοδο υπολογισμού σε σχέση με την παραδοσιακή (εικόνα 2).

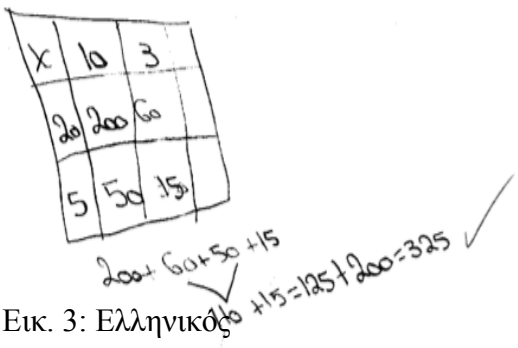


Εικ.1: Ανάλυση του πρώτου παράγοντα σε άθροισμα



Εικ. 2: Κάθετος Αλγόριθμος

Τέλος, αναφορά θα πρέπει να γίνει και σε δύο μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν την εναλλακτική προσέγγιση του «ελληνικού πολλαπλασιασμού» για την επίλυση του προβλήματος (εικόνα 3).



Εικ. 3: Ελληνικός

Με αυτή τη διδακτική παρέμβαση, διαφαίνεται πως η χρήση του γλωσσικού εργαλείου των αντωνυμιών οδήγησε τους μαθητές πιο κοντά στους νοερούς υπολογισμούς, οι οποίοι με την επικοινωνιακή τακτική της γενίκευσης αναδείχτηκαν ως η επικρατέστερη μορφή υπολογισμού.

3η Φάση: Επισημοποίηση- Ανακοίνωση της νέας γνώσης

Στο σημείο αυτό αναπτύσσεται διάλογος με τους μαθητές ώστε να εξηγήσουν τον τρόπο επιλογής και να περιγράψουν τον τρόπο σκέψης του υπολογισμού τους. Έπειτα επισημαίνεται το ειδικό βάρος του συμπεράσματός τους με σκοπό να φωτιστεί η σημασία του εναλλακτικού τρόπου προσέγγισης του πολλαπλασιασμού με στρατηγική νοερού υπολογισμού σε σχέση με τον παραδοσιακό. Το συμπέρασμα αυτό γενικεύτηκε και τους έδωσε μια ώθηση να προσεγγίσουν με τον ίδιο τρόπο παρόμοιες ασκήσεις και προβλήματα στις φάσεις της *εφαρμογής και εμπέδωσης* και *αξιολόγησης*.

4η Φάση: Ασκήσεις εφαρμογής Εμπέδωσης

Θα πραγματοποιηθούν οι εργασίες 1 και 2 του σχολικού βιβλίου (σελ. 29). Οι μαθητές καλούνται στο πρώτο πρόβλημα να εκτιμήσουν τον συνολικό αριθμό των αυγών αν γνωρίζουν πόσα υπάρχουν σε μια καρτέλα και έπειτα να προχωρήσουν στον ακριβή υπολογισμό τους με όποια μέθοδο επιθυμούν. Στο δεύτερο πρόβλημα θα πρέπει να κινηθούν αντίστροφα όπου πρέπει να συνθέσουν την εκφώνηση του προβλήματος και στη συνέχεια να προχωρήσουν στην επίλυση του. Να υπολογίσουν πρώτα με εκτίμηση πόσους επιβάτες μεταφέρουν 16 λεωφορεία αν το καθένα χωράει 83 επιβάτες και έπειτα να υπολογίσουν με ακρίβεια. Στο δεύτερο σκέλος, αφήνουμε τους μαθητές να εργαστούν με όποια μέθοδο υπολογισμού επιθυμούν. Επίσης μπορούν να συνεργαστούν εταιρικά αλλά και ομαδικά.

5η Φάση: Αξιολόγηση

Μοιράζεται στους μαθητές φύλλο αξιολόγησης όπου θα πρέπει να λύσουν τα παρακάτω προβλήματα: α) Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού με τις «τάπες», νικητής είναι αυτός που κερδίζει 12. Μπορείτε να εκτιμήσετε και έπειτα να υπολογίσετε ακριβώς πόσες τάπες θα έχει κερδίσει ο νικητής μετά από 15 γύρους; Θα καταφέρει άραγε στο τέλος να ξεπεράσει τις 200 για να πάρει άλλες 10 δώρο; β) Ένας γεωπόνος θέλει να φυτέψει ελαιόδεντρα σε 22 χωράφια. Αν γνωρίζετε ότι το καθένα μπορεί να φιλοξενήσει 65 τέτοια δέντρα, μπορείτε να εκτιμήσετε και να υπολογίσετε ακριβώς πόσα θα χρειαστούν;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής. Νοεροί υπολογισμοί.* Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Rowland, T. (1999). Pronouns in mathematical talk: Power, vagueness, and generalisation. *For the Learning of Mathematics, 19*(2), 19–26.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ

Τσιτσιρίγκα Ιωάννα

Εκπαιδευτικός Π.Ε., M.ed.

itsitsiriga@gmail.com

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η απόδειξη είναι η βάση της μαθηματικής κατανόησης κι έχει ουσιαστικό ρόλο στην ανάπτυξη, κατάρτιση και επικοινωνία με μαθηματική γλώσσα (Kitcher,1984;Polya,1981 στο Stylianides 2007) Η εικασία και η διερεύνηση προϋπάρχει της απόδειξης (Lakatos,1976), αλλά οι συνέπειες από την άποψη του Duval, για το δομικό κενό μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης, υποστηρίζουν την εξειδικευμένη διδασκαλία κανόνων και την παρουσίαση μιας τυποποιημένης απόδειξης. Όμως η μέθοδος αυτή φαίνεται ανεπιτυχής, καθώς οι μαθητές έχουν δυσκολία στην απόδειξη κι αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στην απότομη εισαγωγή της έννοιας (Balacheff,1991). Ανασταλτικό επίσης είναι το γεγονός ότι το σχολείο εστιάζει πολλές φορές στη μορφή της απόδειξης παρά στη σκέψη. Αντιθέτως ανοιχτά προβλήματα τα οποία απαιτούν μια εικασία φαίνεται να είναι πολύ αποτελεσματικά για την εισαγωγή στη μάθηση της απόδειξης, επειδή οι εικασίες ελκύουν το ενδιαφέρον των μαθητών και η δραστηριότητα της επιχειρηματολογίας συνηγορεί υπέρ της κατασκευής απόδειξης (Pedemonte, 2008). Ακόμη, η διαμόρφωση της έννοιας της απόδειξης από τις μικρές βαθμίδες ίσως αποτελέσει γερό θεμέλιο για συνεκτικότητα. Την ίδια γνώμη φέρει και το NCTM (2000, στο Knuth, 2002), το οποίο προτείνει πως τα διδακτικά προγράμματα οφείλουν να στοχεύουν από τη νηπιακή ακόμα ηλικία στην ανάπτυξη της ικανότητας των παιδιών να διαμορφώνουν και να ερευνούν μαθηματικές εικασίες, αλλά και να αναπτύσσουν και να αξιολογούν μαθηματικά επιχειρήματα και αποδείξεις, χρησιμοποιώντας ποικίλα είδη αιτιολόγησης και μεθόδους απόδειξης.

ΣΤΟΧΟΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

- Να ελέγξουμε αλλά και να αναπτύξουμε την ικανότητα των μαθητών μας να χρησιμοποιούν τους ορισμούς από γνωστές έννοιες με σκοπό τη βαθύτερη κατανόηση του γνωστικού αντικειμένου.
- Να προβληματίσουμε τους μαθητές σχετικά με τον τρόπο εξακρίβωσης μιας εικασίας. Να διαχωρίσουν τις περιπτώσεις όπου εμπειρικές δοκιμές αποδεικνύουν ή όχι μια πρόταση και να αντιληφθούν πότε υπάρχει ανάγκη για παραγωγική απόδειξη.
- Να εισαγάγουμε τους μαθητές μέσω των παραδειγμάτων στην κατανόηση ενός συμβολικού χειρισμού για απόδειξη της πρότασης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

Για την επίτευξη των παραπάνω στόχων σχεδιάστηκαν ανοιχτά ερωτήματα, που αφορούν ιδιότητες, σχέσεις αριθμών και πράξεις μεταξύ τους και τα οποία θα προκαλούσαν την ελεύθερη διαμόρφωση εικασιών από μεριά των μαθητών και το έναυσμα για επιχειρηματολογία, διερεύνηση κι απόδειξη. Έτσι, οι μαθητές θα προτρέπονταν να κατασκευάσουν οι ίδιοι (ατομικά ή ομαδικά) τη γνώση ή έστω με λίγη βοήθεια (scaffolding). Επίσης, με τη διαμόρφωση των εικασιών, λαμβάνουμε υπόψη τη πιθανότητα να κάνουν συγκεκριμένο λάθος κι έπειτα να ξεκινήσουν από αυτό την έρευνά τους. Τέτοιες δραστηριότητες ονομάζονται δραστηριότητες με βάση το λάθος κατά την Borasi (1996).

Αρχικά διατυπωνόταν το ερώτημα, ο κάθε μαθητής ή μαθήτρια έκανε μία εικασία κι έπειτα καλούνταν να εξηγήσουν την άποψή τους με βάση τις γνώσεις που είχαν. Επειδή συνήθως οι εξηγήσεις που έδιναν δεν επαρκούσαν ή η εικασία τους ήταν εντελώς αυθόρμητη, ενδεχομένως και αυθαίρετη κάποιες φορές, οι μαθητές αισθάνονταν από μόνοι τους την ανάγκη να διερευνήσουν για να μάθουν την αλήθεια. Μετά την ατομική διερεύνηση του καθενός, ακολουθούσε παρουσίαση των αποτελεσμάτων, τεκμηρίωση της άποψής τους, η οποία θα μπορούσε να ήταν διαφορετική από την αρχική και συζήτηση για την αποδοχή ή όχι της άποψης και των επιχειρημάτων.

Οι διδακτικές παρεμβάσεις ολοκληρώθηκαν σε 12 συνεδρίες με τους μαθητές, οι οποίες γίνονταν 2 φορές την εβδομάδα, κατά τις απογευματινές ώρες. Τα αποτελέσματα από την υλοποίηση ενός αρχικού σχεδιασμού χρησιμοποιούνταν για το σχεδιασμό της επόμενης διδασκαλίας. Ορισμένες φορές οι ίδιοι οι μαθητές έθεταν ερωτήματα. Έννοιες που ασχοληθήκαμε ήταν οι πρώτοι & σύνθετοι αριθμοί, άρτιοι & περιττοί, πολλαπλάσια & διαιρέτες. Ορισμένα από τα ερωτήματα ήταν για παράδειγμα: «Το γινόμενο πρώτων είναι πρώτος αριθμός; Τι ισχύει με το γινόμενο σύνθετων και τι με το γινόμενο πρώτου με σύνθετο;» ή «Υπάρχουν 4 περιττοί που αν τους προσθέσουμε δίνουν περιττό;» ή «Το άθροισμα από 5 οποιουσδήποτε διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς διαιρείται με το 5;».

ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ

Οι παρεμβάσεις αυτές εφαρμόστηκαν στα πλαίσια ευρύτερης έρευνας (βλ. Τσιτσιρίγκα 2012) σε 3 παιδιά Ε' και Στ' Δημοτικού ενός ολιγοθέσιου Δημοτικού σχολείου, του νομού Βοιωτίας. Για λόγους δεοντολογίας χρησιμοποιούνται ψευδώνυμα: Σοφία, Ελπίδα, Μιχάλης.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΙΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Σε προηγούμενη συνεδρία, αποδείχτηκε σωστή η εικασία ότι το άθροισμα 5 διαδοχικών διαιρείται με το 5. Έτσι, έπειτα αποφάσισα να τους δώσω το εξής φύλλο εργασίας:

Σε προηγούμενη άσκηση διαπιστώσαμε ότι το άθροισμα από 5 οποιουσδήποτε διαδοχικούς αριθμούς διαιρείται με το 5. Ένα παιδί λοιπόν, ο Κώστας σκέφτηκε ότι ισχύει αυτός ο κανόνας και για άλλους αριθμούς.



Άρα το άθροισμα τεσσάρων οποιωνδήποτε διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 4.

Και το άθροισμα έξι οποιωνδήποτε διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 6

Τι έχεις να πεις στον Κώστα; Είναι σωστή η άποψή του; Αν όχι βοήθησέ τον να καταλάβει

Οι μαθητές βρήκαν αμέσως αντιπαραδείγματα για την πρώτη εικασία, να διαιρείται δηλαδή το άθροισμα τεσσάρων οποιωνδήποτε διαδοχικών αριθμών με το 4. Χαρακτηριστικό είναι ότι με την πρώτη δοκιμή, αποφάνθηκαν ότι το άθροισμα δε διαιρείται, αλλά ωστόσο συνέχισαν τις δοκιμές. Για την απάντηση του δεύτερου ερωτήματος, αυτή τη φορά οι μαθητές αρκέστηκαν σε ένα μόνο αντιπαράδειγμα για την απόρριψη της πρότασης.

Έπειτα, τέθηκε το ερώτημα αν υπάρχει έστω και μία περίπτωση που να ισχύουν οι εικασίες του Κώστα. Με άλλα λόγια μετέτρεψα τις εικασίες του Κώστα από καθολικές σε υπαρκτικές. Οι μαθητές τότε δοκίμασαν ξανά άλλους διαδοχικούς για να επανεξετάσουν μήπως ισχύει η πρόταση για κάποιες περιπτώσεις. Κάποια στιγμή η Ελπίδα αντέδρασε λέγοντας: «Ε: τώρα εγώ πρέπει να τα πάρω όλα 1,2,3,4 5,6,7,8 μέχρι το 100 μέχρι να βρω αν υπάρχει;». Της είπα ότι θα έπρεπε έτσι να κάνει, εκτός κι αν έβρισκε άλλο τρόπο να αιτιολογήσει. Τότε οι μαθητές κατάλαβαν πως με τα σύμβολα θα έβρισκαν την απάντηση, όπως έκαναν και σε προηγούμενη συνεδρία.

Οι δύο μαθητές δυσκολεύτηκαν να θυμηθούν τον τρόπο συμβολισμού στην αρχή. Η μία μαθήτρια όμως (Σοφία) συμβόλισε σωστά το άθροισμα. Όλοι τους τότε κατέληξαν στην πιο απλή μορφή του αθροίσματος «4ν+6». Έπειτα, ακολούθησε διάλογος κι εξηγήσαμε ότι το άθροισμα τεσσάρων διαδοχικών δε διαιρείται με το 4. Στην κατανόηση της απόδειξης βοήθησα κι εγώ, αλλά και η εξήγηση της Σοφίας, για τη διαιρετότητα του 4ν με το 4: «Διαιρείται το 4ν γιατί πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με το 4 και αν το διαιρέσουμε με το 4, θα μας βγει πάλι (ο ίδιος αριθμός)». Η Ελπίδα πρόσθεσε ότι το 6 δε διαιρείται με το 4.

Εν τω μεταξύ, αργότερα η Σοφία μας αποκάλυψε πως είχε βρει ένα μοτίβο! Βρήκε ότι «όλα τα πηλίκα των διαιρέσεων βγαίνουν συνέχεια 0,5, 2,5 όλα σε κόμμα 5». Έτσι προσπάθησα να τους εξηγήσω γιατί συμβαίνει αυτό, αν και το θεώρησα λίγο δύσκολο να το καταλάβουν.

Δασκάλα: Έχουμε 4ν+6. Το 4ν το κρατάω, γιατί διαιρείται με το 4. Το 6 γιατί δε διαιρείται με το 4; Γιατί είναι 4+2 έτσι;

Σοφία: Ναι

Δασκάλα: Άρα αν είχαμε 4ν+4, τότε όλο αυτό θα διαιρούνταν με το 4. γιατί και αυτό(4ν) και αυτό (4) θα διαιρούνταν με το 4. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε;

Σοφία: Συμφωνώ.

Δασκάλα: Τώρα τι έχουμε όμως; Έχουμε +2. που αυτό τι είναι;

Σοφία: Μισό.

Δασκάλα: Μπράβο! Γι' αυτό μας βγαίνει συνέχεια το μισό.

Ομοίως εργάστηκαν και οι μαθητές για τον έλεγχο της υπαρκτικής εικασίας για το άθροισμα των 6 διαδοχικών να διαιρούνται με το 6, όπου τώρα είχαν μια ***άνεση στη χρήση συμβόλων.*** Η Σοφία όμως κατάφερε να εξηγήσει πάλι μέσα από τα σύμβολα γιατί ισχύει το ίδιο μοτίβο, μετατρέποντας την παράσταση 6ν+15 σε 6ν+12+3. Έκανε ένα λάθος μόνο στη διατύπωση που αφορούσε τη διαιρετότητα του 3 με το 6.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

Ως προς το γνωστικό αντικείμενο

Αρχικά, οι μαθητές δεν θυμόντουσαν ή ξεχνούσαν να χρησιμοποιήσουν τους ορισμούς των εννοιών, παρόλο που τους είχαν διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις. Στη διάρκεια των παρεμβάσεων όμως, κατάλαβαν πως για να απαντήσουν σε κάποια ερωτήματα, θα έπρεπε να ανατρέξουν στους ορισμούς των εννοιών και να τους χρησιμοποιήσουν, αφού μερικές φορές δίνανε οι ίδιοι την απάντηση στο ερώτημα. Έτσι μέσα από τα πρωτόγνωρα γι' αυτούς ερωτήματα για τις πράξεις και σχέσεις των αριθμών, έγινε υπενθύμιση αλλά κυρίως, βαθύτερη κατανόηση των ορισμών και των ιδιοτήτων. Ακόμη, διευρύνθηκε το πεδίο παραδειγμάτων των μαθητών ειδικά για τους πρώτους αριθμούς τους οποίους νόμιζαν ότι είναι μόνο μικροί αριθμοί, ενώ επίσης ξεκαθαρίστηκαν κάποιες λανθασμένες πεποιθήσεις ως προς τα πολλαπλάσια και τους διαιρέτες.

Τέλος, οι μαθητές είδαν κι άλλες μορφές αναπαράστασης αριθμού, όπως η ανάλυση σε πρώτους ή μια αλγεβρική παράσταση, κι ενώ μέχρι πρότινος θεωρούνταν ως 'εκφράσεις' ή 'ασκήσεις' παρά ως αριθμοί, κατάφεραν να τους δουν ως ολότητα αλλά και να εξετάζουν τις ιδιότητές τους με βάση τα επιμέρους στοιχεία. Έτσι, αντιλήφθηκαν τις ιδιότητες που προσδίδει στον αριθμό ως προς τη διαιρετότητά του, η αναπαράσταση του σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, αλλά και μπόρεσαν μέσα από συμβολικό χειρισμό, να καταλήξουν σε αλγεβρική αναπαράσταση ενός αθροίσματος π.χ. 4 διαδοχικών αριθμών (4ν+6) και να εξηγήσουν μέσα από αυτή την αναπαράσταση γιατί δεν διαιρείται το άθροισμα 4 διαδοχικών με το 4.

Ως προς τα αποδεικτικά σχήματα των μαθητών

Οι μαθητές χρησιμοποιούσαν ως επί το πλείστον εμπειρικές δοκιμές για να απαντήσουν τα ερωτήματα. Σιγά-σιγά όμως, εμπλούτισαν και διέκριναν τα αποδεικτικά σχήματα που απαιτούνται ανάλογα με το αν αφορά επιβεβαίωση ή απόρριψη μιας υπαρκτικής ή καθολικής πρότασης. Είδαν ότι ένα αντιπαράδειγμα αρκεί να απορρίψει μια καθολική πρόταση, αλλά όχι μια υπαρκτική. Αντίστοιχα, ένα παράδειγμα ισχύος δεν είναι αρκετό να επιβεβαιώσει μια καθολική πρόταση, ενώ

επιβεβαιώνει μια υπαρκτική. Για παράδειγμα, για την απόρριψη της υπαρκτικής εικασίας «υπάρχουν 4 διαδοχικοί αριθμοί που το άθροισμά τους διαιρείται με το 4;» δημιουργήθηκε στους μαθητές η ανάγκη για μαθηματική απόδειξη, αφού τα λίγα αντιπαραδείγματα που βρήκαν δεν τους προσέφεραν κάτι και οι ίδιοι κατάλαβαν πως θα ήταν κουραστικό και ενδεχομένως μάταιο να συνεχίσουν με τις δοκιμές.

Ως προς τη δυνατότητα και την κατανόηση του συμβολικού χειρισμού

Από την 1η κιόλας συνεδρία με τους μαθητές, στο ερώτημα «τι αριθμός είναι το γινόμενο πρώτων» εισήχθη με επιφύλαξη ο συμβολισμός, λόγω του ότι οι μαθητές μπορούσαν να εξηγήσουν για συγκεκριμένα παραδείγματα, αλλά δεν μπορούσαν να το εξηγήσουν γενικά. Ο συμβολισμός, όμως φάνηκε τελικά πως βοήθησε τους μαθητές να δώσουν μια γενική αιτιολόγηση, ενώ επίσης η επίτευξη αυτή χαροποίησε τους μαθητές και τον χρησιμοποίησαν, ακόμα και αυτοβούλως, και σε άλλα ερωτήματα. Σε αρκετές περιπτώσεις μάλιστα η παρατήρηση των παραδειγμάτων, βοήθησε τους μαθητές στο συμβολισμό, αλλά και στον μετέπειτα χειρισμό. Σε τέτοιες περιπτώσεις το παράδειγμα λειτουργούσε σαν απαγωγικό βήμα και είχαμε την λεγόμενη γνωστική ενότητα (Pedemonte, 2007). Για παράδειγμα, στο ερώτημα «το άθροισμα 5 διαδοχικών διαιρείται με το 5;», μια μαθήτρια σε μια δοκιμή που έκανε (8+9+10+11+12), παρατήρησε πως αν κρατήσουμε τον πρώτο αριθμό ως έχει, τότε οι επόμενοι γράφονται με βάση αυτόν +1. Έτσι, ο μετασχηματισμός που έγινε στο αριθμητικό παράδειγμα (8+8+1+8+2+8+3+8+4), χρησιμοποιήθηκε άμεσα στην μαθηματική απόδειξη με σύμβολα (α+α+1+α+2+α+3+α+4).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Μέσα από αυτές τις διδακτικές παρεμβάσεις που έγιναν φαίνεται να πετυχαίνονται οι στόχοι που τέθηκαν. Οι μαθητές είχαν μια πρωτόγνωρη εμπειρία με τα μαθηματικά και παρόλο που είχαν κάποια γνωστικά κενά, κατάφεραν να ανταπεξέλθουν στις δραστηριότητες, συμπληρώνοντας τα κενά που είχαν, αλλά και αυξάνοντας τις μεταγνωστικές τους δεξιότητες. Οι ίδιοι οι μαθητές αξιολογούσαν ο ένας τα επιχειρήματα του άλλου και αντιλήφθηκαν το ρόλο των εμπειρικών δοκιμών, των ορισμών και ιδιοτήτων των αριθμών και των αποδείξεων μέσω συμβολικού χειρισμού. Στην αρχή δεν ήταν οικείοι με τον χειρισμό αλγεβρικών παραστάσεων, και είναι γεγονός πως χρειάστηκαν βοήθεια, όμως προσπαθούσαν και κατάφεραν στο τέλος ακόμα και μόνοι τους να πραγματοποιούν μαθηματικές αποδείξεις, ενώ μάλιστα οι πιο καλοί μαθητές/τριες ερμήνευαν και κάποια αποτελέσματα των εμπειρικών δοκιμών, με βάση αυτές.

Εν κατακλείδι, φάνηκε πως οι μαθητές είναι σε θέση και κυρίως τους αρέσει πολύ να διερευνήσουν και να ανακαλύψουν μέσα από τη διερεύνηση μαθηματικές προτάσεις. Το θέμα είναι να γνωρίζουμε κι εμείς πώς να χειριστούμε μία τέτοια κατάσταση και να διευκρινίζουμε ή αλλιώς να αξιολογούμε κάθε φορά την καταλληλότητα της αιτιολόγησης των μαθητών, έχοντας πάντα στο μυαλό ότι η διερεύνηση οδηγεί στην ανακάλυψη, αλλά η απόδειξη στην επιβεβαίωση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: aspects of the complexity of a constructivist approach of mathematics learning. In: Von Glasersfeld E. (ed.) *Radical constructivism in Mathematics Education*(pp.89-110) Dordrecht : Kluwer Academic Publisher. doi: 10.1007/0-306-47201-5_5

Borasi, R. (1996). *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors*. USA: Ablex Publishing Corporation

Lakatos, I. (1976). Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery. Cambridge University Press, Cambridge

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 23-41. doi:10.1007/s10649-006-9057-x

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1-20. doi:10.1007/s10649-006-9038-0

Τσιτσιρίγκα, Ι. (2012). *Διαμόρφωση και αιτιολόγηση εικασιών από μαθητές Δημοτικού και ο ρόλος τους στην απόδειξη*, (Διπλωματική Εργασία) Π.Μ.Σ. Διδακτικής και Μεθοδολογίας και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών. Αθήνα.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ : ΜΙΑ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Τσουρέλη Δήμητρα
29ο Δ. ΣΧ. Περιστερίου
dimtsoureli@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το πρόγραμμα "Μαθηματικά και Λογοτεχνία" είναι μια πρόταση διδασκαλίας που ευνοεί τη δημιουργική και ευχάριστη συνάντηση της γλώσσας και των μαθηματικών στο μαγικό κόσμο των παραμυθιών. Το παραμύθι σ΄αυτό το πρόγραμμα αποτελεί ένα εργαλείο που υποστηρίζει και διευκολύνει εναλλακτικούς ελκυστικούς τρόπους διδασκαλίας των Μαθηματικών, αλλά και την ανάπτυξη της Γλώσσας, μέσω της διαρκούς μεταξύ τους αλληλεπίδρασης.

1. ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο προβληματισμός για το πώς μπορεί ένας εκπαιδευτικός να συνδυάσει την οικοδόμηση γνώσεων με την ευχαρίστηση και τη δημιουργικότητα στα πλαίσια της διαθεματικότητας ,οδήγησε στο προτεινόμενο σχέδιο εργασίας. Οι λόγοι αξιοποίησης της λογοτεχνίας για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών είναι παιδαγωγικοί, ψυχολογικοί και διδακτικοί. «Τα ενδιαφέροντα λογοτεχνικά έργα παρέχουν συχνά τη λειτουργική βάση στην οποία τα μαθηματικά μπορεί να είναι λίγο πιο διασκεδαστικά και πιθανώς πιο ρεαλιστικά» **(**van de Walle, 2005, σ. 285). Εκτός από την ευχαρίστηση που προσφέρει η ανάγνωση ή η ακρόαση ενός λογοτεχνικού κειμένου, η λογοτεχνία συμβάλλει στη γλωσσική, νοητική και κοινωνική ανάπτυξη του παιδιού, στην ανάπτυξη της φαντασίας και της δημιουργικότητάς του και στην εξοικείωση των μαθητών με τα λογοτεχνικά κείμενα. Το παραμύθι ως ένα ξεχωριστό λογοτεχνικό είδος προσφέρεται ιδιαίτερα γιατί με τη προσιτή του γλώσσα σε αντίθεση με τη μαθηματική, τη λιτή και απλή πλοκή του και τη παιγνιώδη φύση του κατακτά τον μαθητή, τον μαγεύει, προκαλεί την περιέργειά του, κινητοποιεί το ενδιαφέρον του, και προωθεί την κριτική σκέψη, την κατανόηση και κατάκτηση μαθηματικών εννοιών μέσα από μαθηματικές δραστηριότητες που εντάσσονται σε γλωσσικά συμφραζόμενα (Τρέσσου & Μητακίδου, 2002).

2. ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ: ΤΟ ΠΑΡΑΜΥΘΙ «Ο ΆΡΗΣ Ο ΤΣΑΓΚΑΡΗΣ» ΤΟΥ Ε. ΤΡΙΒΙΖΑ

Η επιλογή του παραμυθιού γίνεται με κριτήρια τα οποία διαμορφώνονται με βάση τους παιδαγωγικούς και διδακτικούς στόχους και τις γνωστικές περιοχές που θέλουμε να συνδυαστούν. Αν θέλει να λειτουργήσει ενοποιητικά (Ανέστη & Τριανταφυλλίδης, 2005, Γιαννικοπούλου, 2002) μεταξύ Γλώσσας και Μαθηματικών

το γενικό κριτήριο είναι οι ευκαιρίες που προσφέρει και για εισαγωγή και επεξεργασία μαθηματικών εννοιών. Επιπλέον κριτήρια για την επιλογή του παραμυθιού (Μαλαφάντης, 2007, σ. 47-48) είναι τα τεχνικά χαρακτηριστικά όπως, η έκταση, η γλώσσα και η εικονογράφηση τα οποία επιλέγονται ανάλογα με το γλωσσικό επίπεδο και την ηλικία των μαθητών.

Το εικονογραφημένο παραμύθι του Τριβιζά «Άρης ο τσαγκάρης» επιλέχθηκε γιατί με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα της Α΄ τάξης, ενσωματώνει μαθηματικές έννοιες στην αφηγηματική του δομή και λειτουργεί ως αφετηρία, ως πεδίο δράσης και ως πλαίσιο μάθησης για τη ενασχόληση των παιδιών με μαθηματικές δραστηριότητες όπως οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Λεμονίδης & al, 2006) .

Αφού γίνει η επιλογή του παραμυθιού ορίζονται οι στόχοι. Γενικός στόχος κάθε φορά είναι η ενεργητική, ευχάριστη και δημιουργική μάθηση που ενθαρρύνει την φαντασία του μαθητή, ενεργοποιεί την ευφυΐα του και ξεδιπλώνει όλες του τις ικανότητες. Ειδικότερα σ΄αυτό το σχέδιο εργασίας στόχος ήταν οι μαθητές της Α΄τάξης να εφαρμόσουν ή να ανακαλύψουν τις μαθηματικές έννοιες του συνόλου και του υποσυνόλου, την πρόσθεση, την αφαίρεση τον πολλαπλασιασμό και το σύμβολο του μηδενός. Να νιώσουν τα παιδιά ότι τα μαθηματικά που διδάσκονται έχουν νόημα γι' αυτά.

Με βάση τους στόχους σχεδιάζονται οι δραστηριότητες οι οποίες δίνουν την ευκαιρία στο μαθητή να καταπιαστεί με κέφι και ενδιαφέρον με τις ασκήσεις και τα προβλήματα που προκύπτουν μέσα από το παραμύθι. Καθώς επίσης και δραστηριότητες μέσα από τις οποίες θα εξερευνήσει και θα ενεργοποιήσει ο ίδιος ο μαθητής μαθηματικά σενάρια ανάλογα με το κείμενο αφετηρίας (Καλογήρου, 2005, σσ15-17, 69-63) όπως η διαμόρφωση της συνέχειας του παραμυθιού.

Πιο συγκεκριμένα δραστηριότητες του προγράμματος με βάση το θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε παραπάνω, ήταν οι εξής:

Ανάγνωση του παραμυθιού με ταυτόχρονη προβολή των εικόνων του σε παιδιά της (Α΄) πρώτης τάξης Δημοτικού. Η ιστορία αναφέρεται σε έναν τσαγκάρη που έφτιαχνε παπούτσια στα ζώα. Κάθε ζώο παράγγελνε διαφορετικό αριθμό παπουτσιών ανάλογα με τον αριθμό των ποδιών του, ο οποίος αύξανε σταδιακά επειδή κάθε φορά εμφανιζόταν ζώο με όλο και περισσότερα πόδια. Ενώ έφτιαχνε παπούτσια για το καινούριο ζώο εμφανιζόταν το προηγούμενο το οποίο μέσα από μία αστεία περιπέτεια έχανε ένα παπούτσι. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή τα δεδομένα αλλάχτηκαν σκόπιμα, έτσι ώστε το ζώο που στην αυθεντική ιστορία έχανε μόνο ένα παπούτσι στη νέα εκδοχή έχανε περισσότερα για να γίνει αφαίρεση με μεγαλύτερο αριθμό.

Αφού τα παιδιά παρακολούθησαν την ανάγνωση με μεγάλο ενδιαφέρον, στη συνέχεια επεξεργαστήκαμε τις ασκήσεις του κειμένου. Κάναμε πράξεις και λύσαμε προβλήματα για να διαχειριστούμε αριθμητικά δεδομένα με βάση τα ζώα και τον ήρωα (τον Άρη τον τσαγκάρη) που εμφανίζονται στο παραμύθι. Μέσα στο ίδιο το

παραμύθι τα παιδιά καλούνταν να υπολογίσουν, πόσα παπούτσια έφτιαξε συνολικά ο τσαγκάρης, πόσα έμειναν αφού πήρε το πρώτο ζώο αυτά που είχε χάσει και πόσα έμειναν αφού πήρε και το άλλο ζώο τα υπόλοιπα που ήταν τα δικά του (δηλαδή μηδέν). Τα παιδιά υπολόγισαν τον αριθμό των παπουτσιών, κάνοντας τη σωστή πράξη πρόσθεση ή αφαίρεση.

Υπολόγισαν νοερά τον πληθικό αριθμό του συνόλου των ζώων όταν έπρεπε να απαντήσουν π.χ. «για πόσα ζώα έχουμε μιλήσει μέχρι τώρα;». Υπολόγισαν επίσης τον αριθμό των παπουτσιών, δηλαδή το σύνολο, που έφτιαχνε κάθε φορά ο τσαγκάρης με αναφορά τα υποσύνολα (τα παπούτσια που ήταν ξεχωριστά για κάθε ζώο). Έκαναν αντιστοίχιση του αριθμού των ποδιών του ζώου με τον αριθμό των παπουτσιών που του ήταν απαραίτητα όταν ζήτησα από τα παιδιά να τα ζωγραφίσουν. Κλήθηκαν να απαντήσουν μέσα από εικόνες ζώων και ανθρώπων «ποιος χρειάζεται πιο πολλά παπούτσια». Τους δόθηκε η ευκαιρία να διερευνήσουν την έννοια του πολλαπλασιασμού καθώς έπρεπε να υπολογίσουν: «πόσα παπούτσια χρειάζονται δύο πάπιες».

Μια δραστηριότητα που προσφέρει επίσης την ευκαιρία της αξιολόγησης της διαδικαστικής γνώσης των μαθητών (van de Walle, 2005,σ 107) είναι π.χ. να βρουν λύσεις προχωρώντας πέρα από την απλή γνώση της εκτέλεσης του αλγορίθμου αφού τους ζητείται να επιδείξουν την ύπαρξη κάποιας εννοιολογικής βάσης γι' αυτή τη διαδικασία. Όπως το να φτιάξουν ένα μικρό παραμύθι σαν κι' αυτό που αναγνώστηκε το οποίο να έχει την πρόσθεση 4+2 ή να έχει την αφαίρεση 8-3 ή να βρουν ποια από τις δύο πράξεις απαντάει σωστά στην ερώτηση: «Πόσα παπούτσια έμειναν όταν πήρε τα δικά της η πάπια» 8-2 ή 8-4.

3. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Το παραμύθι εμπλουτισμένο με αριθμητικά στοιχεία δημιούργησε ένα κατάλληλο πλαίσιο για μαθηματικές δραστηριότητες με νόημα, όπου συμμετείχαν με χαρά και ενδιαφέρον τα παιδιά και στις οποίες συμμετείχαν ενεργά. Η αξιολόγηση ως προς την επίτευξη των στόχων έγινε κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων.

Καταλήγοντας θα ήθελα να τονίσω ότι κάθε εκπαιδευτικός με φαντασία και γνώση μπορεί να πραγματοποιήσει μια παρόμοια παρέμβαση και να προσφέρει την ευκαιρία στον ίδιο και τα παιδιά να κάνουν τη μάθηση πολύ πιο ευχάριστη και ενδιαφέρουσα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ανέστη, Δ. & Τριανταφυλλίδης, Τ. Α. (2005). Η διαμόρφωση μιας κοινότητας μάθησης μέσα από τη διδακτική σύνδεση λογοτεχνίας και μαθηματικών. Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή της Πανελλήνιας Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών, Αθήνα (σ. 259-268).

Γιαννικοπούλου, Α. (2002). Λογοτεχνία και Μαθηματικά (σ. 71-101). Στο Καϊλά Μ. Καλαβάσης, Φ. και Πολεμικός Ν. (Επιμ.) *Μύθοι, Μαθηματικά, Πολιτισμοί: Αποσιωπημένες Σχέσεις στην Εκπαίδευση*, Αθήνα: Εκδόσεις Ατραπός.

Καλογήρου Τ., 2005, Τέρψεις και Ημέρες Ανάγνωσης Τόμος Α', Παλλήνη: Εκδόσεις Σχολής Ι.Μ. Παναγιωτόπουλου

Μαλαφάντης Κ. (2007). *Το παραμύθι στην εκπαίδευση. Ψυχοπαιδαγωγική διάσταση και αξιοποίηση,* Αθήνα: Εκδόσεις Ατραπός

Τρέσσου Ε., Μητακίδου Σ. (2002). *Η διδασκαλία της Γλώσσας και των Μαθηματικών, Εκπαίδευση Γλωσσικών Μειονοτήτων*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Παρατηρητής, (σ.123)

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α., Πνευματικός Δ. (2006). *Μαθηματικά Α' Δημοτικού – Μαθηματικά της φύσης και της ζωής –Βιβλίο του δασκάλου,* ΟΕΔΒ, Αθήνα

Van de Walle, J. (2005) . *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Μια εξελικτική διδασκαλία.* Τριανταφυλλίδης Τ. (Επιμ), Αθήνα: Εκδόσεις ΤΥΠΩΘΥΤΩ

ΜΑΘΑΙΝΩ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑΙΖΟΝΤΑΣ: Η ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗΣ ΔΑΠΕΔΟΥ ΣΤΗΝ Α' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Άννα Φωτίου

Δασκάλα Αρσακείου Δημοτικού Σχολείου Θεσσαλονίκης

Κάτοχος Μεταπτυχιακού διπλώματος Παιδαγωγικής Σχολής Φλώρινας

fotiuanna@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Βασικός σκοπός της διδακτικής παρέμβασης που πραγματοποιήθηκε πέρυσι στην Α' δημοτικού του Αρσακείου σχολείου Θεσσαλονίκης ήταν η εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών (όπως αυτές ορίζονται από το Αναλυτικό πρόγραμμα του Υπουργείου), καθώς και η χρήση των νοερών υπολογισμών με αρωγό την αριθμογραμμή (και συγκεκριμένα την αριθμογραμμή δαπέδου).

Η ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗΣ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ

Σύμφωνα με τη φιλοσοφία των νέων Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ, 2003), βασικός σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης στο δημοτικό σχολείο είναι η απόκτηση μαθηματικής σκέψης και η καλλιέργεια της ικανότητας του μαθητή να εφαρμόζει μαθηματικές γνώσεις, μεθόδους και διαδικασίες σε προβλήματα της καθημερινής ζωής. Οι μαθητές ωθούνται να εμπλέκονται ενεργά σε δραστηριότητες, οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν στη μαθηματική διερεύνηση. Τέτοια μέσα για την ενεργοποίηση των μαθητών, είναι τα χειραπτικά υλικά, τα ψηφιακά εργαλεία και οι συνθετικές εργασίες.

Ένα από τα χειραπτικά εργαλεία είναι και η αριθμητική ευθεία ή κοινώς γνωστή ως αριθμογραμμή. Πρόκειται για μία ευθεία, οριζόντια ή κάθετη, στα σημεία της οποίας αντιστοιχίζονται αριθμοί. Σημειώνουμε το 0 στην ευθεία και το θεωρούμε ως αρχή της διαδικασίας μας, από το οποίο η ευθεία εκτείνεται στο άπειρο και προς τις δυο κατευθύνσεις. Ο αριθμός 1 αντιστοιχεί στο σημείο που ορίζει τη μονάδα μήκους της ευθείας. Θεωρούμε μια ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στους πραγματικούς αριθμούς και στα σημεία της γραμμής αυτής. Πρόκειται για ένα διάγραμμα στο οποίο τα σημεία του κωδικοποιούν ποσοτικές πληροφορίες στον οριζόντιο ή κάθετο άξονα (Diezmann - Lowrie, 2006).

Στα διδακτικά εγχειρίδια της Α', δίνεται έμφαση και χρησιμοποιείται η αριθμητική γραμμή στο πλαίσιο της αρίθμησης και της μάθησης των αριθμών. Τονίζεται η σημασία της προφορικής αρίθμησης και της απαρίθμησης επάνω στην αριθμογραμμή.

Τα παιδιά μέσα από τη χρήση της αναπτύσουν τις ικανότητές τους που αφορούν τόσο στους αριθμούς, όσο και στις πράξεις (Λεμονίδης, 2012). Για τους αριθμούς, οι μαθητές είναι σε θέση να πραγματοποιούν πάνω στην αριθμητική ευθεία:

- αρίθμηση από οποιοδήποτε αριθμό, ευθέως ή αντιστρόφως (π.χ. ξεκινάμε από το 5 και ανεβαίνουμε, ή ξεκινάμε από το 9 και κατεβαίνουμε),
- τοποθέτηση αριθμού σε σχέση με τους άλλους. Πρόκειται για μια πολύ σημαντική διαδικασία, γιατί πέρα από τον προσδιορισμό της θέσης του αριθμού σε σχέση με τους άλλους, βοηθά αργότερα στους νοερούς υπολογισμούς,
- προσδιορισμό των αλμάτων από έναν αριθμό ανα 2, 5, 10…, ή από έναν δεδομένο αριθμό (π.χ. ξεκίνημα από το 12 και αρίθμηση ανά 10), αλλά και επισήμανση των δεκάδων πάνω στην αριθμογραμμή. Κατά τη διδασκαλία των αλμάτων, αναλύεται η δομή των αριθμών και ανακαλύπτονται οι σχέσεις μεταξύ των αλμάτων και των αριθμών. Πρόκειται για φυσική συνέχεια της διαδικασίας της αρίθμησης και προετοιμάζει τους μαθητές για τις αριθμητικές πράξεις.

Όσον αφορά στην πρόσθεση, διακρίνονται τρεις στρατηγικές:

- Αρχικά εφαρμόζεται η στρατηγική της αρίθμησης όλων (counting all method), όπου ο μαθητής – βγάζει και μετρά 3 δάχτυλα ή αντικείμενα, μετρά 5 δάχτυλα ή αντικείμενα και μετά τα μετρά όλα από την αρχή, στην περίπτωση της πρόσθεσης «3+5».
- Η δεύτερη στρατηγική ονομάζεται μέτρηση από τον πρώτο. Ο μαθητής ξεκινά από το 3 και μετρά ακόμη 5.
- Στην τρίτη στρατηγική, ο μαθητής ξεκινά από το μεγαλύτερο προσθετέο, το 5, και προχωρά ακόμη 3 θέσεις.

Όσον αφορά στην αφαίρεση, διακρίνονται οι εξής τρεις στρατηγικές:

- Αντίστροφη αρίθμηση από: βάσει αυτής της στρατηγικής, τα παιδιά αριθμούν αντίστροφα, ξεκινώντας από το μεγαλύτερο από τους δυο όρους της αφαίρεσης και κάνουν τόσα βήματα προς τα κάτω, όσος είναι ο μικρότερος όρος. Ο τελευταίος αριθμός που προφέρεται σ' αυτήν την αντίστροφη αρίθμηση είναι η απάντηση.
- Αντίστροφη αρίθμηση μέχρι: κι εδώ πραγματοποιείται αντίστροφη αρίθμηση, ξεκινώντας από το μεγαλύτερο από τους δύο όρους, μέχρι να φτάσουμε στον αριθμό που εκφράζει το μικρότερο όρο. Αριθμώντας τα βήματα αυτής της αρίθμησης βρίσκεται η απάντηση.
- Πρόσθεση: οι μαθητές εκτελούν πρόσθεση αντί για αφαίρεση. Ξεκινούν από το μικρότερο όρο της αφαίρεσης και αριθμούν ευθέως μέχρι να φτάσουν το μεγαλύτερο αριθμό. Μετρώντας τα βήματα που έκαναν σ' αυτή την αρίθμηση έχουν την απάντηση.

Η διαδικασία εκτέλεσης πρόσθεσης ή αφαίρεσης με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής συνιστά λειτουργική γνώση (Ernest, 1985). Αυτή η γνώση με την πάροδο του χρόνου θα εξασθενήσει και θα αντικατασταθεί από άλλες μεθόδους, όπως η

εκτέλεση των πράξεων από μνήμης με τη βοήθεια άλλων γνωστών πράξεων ή με κάποια άλλη φυσιολογική διαδικασία μέτρησης.

Όσον αφορά στον πολλαπλασιασμό, (η διδασκαλία του οποίου πραγματοποιείται στο τέλος της σχολική χρονιάς), η αναπαράστασή του πάνω στην αριθμογραμμή περιλαμβάνει την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Για παράδειγμα, στον πολλαπλασιασμό 2Χ3, παίρνουμε αρχικά, (ξεκινώντας από το 0), με ένα άλμα 3 σημεία και μετά άλλα 3 και φθάνουμε στον αριθμό 6.

ΜΑΘΑΙΝΩ ΠΑΙΖΟΝΤΑΣ: ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗ ΔΑΠΕΔΟΥ



Στην τάξη χρησιμοποιούμε διάφορες μορφές αριθμογραμμής.



- Για μεγαλύτερη αμεσότητα κατά τη διάρκεια των μαθηματικών εξερευνήσεων χρησιμοποιούμε την ατομική αριθμογραμμή σε κάθε θρανίο ώστε να αποτελεί μόνιμα σημείο αναφοράς για τα παιδιά.
- Φυσικά είναι αναρτημένη η αριθμογραμμή πάνω στον πίνακα (βαθμολογημένη και κενή με μόνο τις Δεκάδες σημειωμένες) για να την βλέπουν συνέχεια οι μαθητές.
- Τέλος έχουμε την αριθμογραμμή δαπέδου. Με τη βοήθειά της τα παιδιά «μαθαίνουν κάνοντας» (learning by doing). Με παιγνιώδεις δραστηριότητες, μαθαίνουν τη θέση και την αξία των αριθμών, ποιος βρίσκεται μπροστά και ποιος πίσω, πόσα βήματα θα κάνουν για να φτάσουν σε έναν συγκεκριμένο αριθμό, κ.λ.π.

Στην τάξη μου πέρυσι είχα 21 μαθητές (10 αγόρια και 11 κορίτσια). Όλοι ήρθαν στο δημοτικό από το νηπιαγωγείο του σχολείου μας, οπότε ήδη γνώριζαν τους αριθμούς και τις 4 πράξεις μέχρι το 10.

Κατασκευάσαμε μια αριθμογραμμή δαπέδου, η οποία είναι αριθμημένη από το 1 έως το 20. Οι περισσότερες δραστηριότητες που πραγματοποιήθηκαν στην ατομική τους αριθμητική ευθεία, έγιναν διαδραστικά εδώ. Η αριθμογραμμή δαπέδου είναι ένα φυσικό μέσα που αρέσει στα παιδιά καθώς την ανεβαίνουν και την κατεβαίνουν σαν σκάλα. Παράλληλα εισάγονται και στα τακτικά αριθμητικά: πρώτο, δεύτερο, τρίτο, κ.λ.π.

Συγκεκριμένα με τη βοήθεια της αριθμογραμμής δαπέδου, έλαβαν χώρα οι εξής δράσεις:

- Οι μαθητές διάβαζαν τους αριθμούς ως το 10, παίζοντας ότι ανέβαιναν τη σκάλα του σχολείου, έβρισκαν τον αριθμό που τους ζητούσα, μετρούσαν ανεβαίνοντας ή κατεβαίνοντας έως τον αριθμό που τους υποδείκνυα.
- Για την αξία θέσης, τους ζητούσα να μου δείξουν έναν αριθμό, π.χ. το 6, και αναφερόμενη σε έναν άλλον (π.χ. στο 16), τους ρωτούσα αν θα προχωρήσουν μπροστά ή πίσω και πόσα βήματα θα κάνουν.
- Όσον αφορά στη διάταξη των αριθμών, ποιος αριθμός είναι πριν ή μετά, αλλά και ποιος βρίσκεται ανάμεσα, η αριθμογραμμή δαπέδου στάθηκε χρήσιμη αρωγός

στην κατανόηση της θέσης, π.χ. ποιος αριθμός βρίσκεται πριν και μετά το 8, ή ποιος αριθμός υπάρχει ανάμεσα στο 5 και στο 7.

- Με διάφορες ιστορίες – παραμύθια αναλύσαμε αριθμούς. Για παράδειγμα, ένα βατραχάκι ήταν στο νούφαρο με το νούμερο 0 και ήθελε να πάει στο νούφαρο με τον αριθμό 7. Πόσα πηδηματάκια θα κάνει πάνω στα ενδιάμεσα νούφαρα; (εδώ ακούστηκαν διάφορες απαντήσεις καθώς αναλύθηκε ο αριθμός σε όλους του τους συνδυασμούς).
- Κατά τη διαδικασία της σύγκρισης των αριθμών (κυρίως γι' αυτούς που είναι πάνω από το 10 έως το 20) οι μαθητές χρησιμοποίησαν αρκετά την αριθμογραμμή δαπέδου για να επιβεβαιώσουν τη σκέψη τους. Για παράδειγμα το 12 είναι πριν το 15 άρα είναι μικρότερο.
- Ο ακροβάτης μου βρίσκεται στον αριθμό 7 και θέλει να προχωρήσει 2 μπροστά. Σε ποιον αριθμό θα φτάσει;
- Είσαι στο 3. Πόσα βήματα θα κάνεις για να φτάσεις στο 7; Θα πας μπροστά ή πίσω;
- Από το 6 έφτασες στο 10. Πόσα βήματα έκανες;
- Ένας βάτραχος βρίσκεται στο νούφαρο με τον αριθμό 0 και θέλει να πάει στο νούφαρο με τον αριθμό 6. Με πόσους τρόπους μπορεί να πάει;
- Επειδή χτύπησε το κουδούνι, βιαζόμαστε να φτάσουμε στο κυλικείο και πρέπει να ανεβούμε 2-2 τα σκαλιά μέχρι το 20.
- Ένα μυρμήγκι βρίσκεται στο 6 και κάνει άλλα 12 βήματα, ένα ένα, για να φτάσει στο 18. Μια ακρίδα, ξεκινώντας και αυτή από το 6 πώς θα φτάσει πιο σύντομα στο 18; (κάνοντας ένα μεγάλο άλμα του 10 και μετά δυο μικρά βηματάκια στο17 και στο 18)

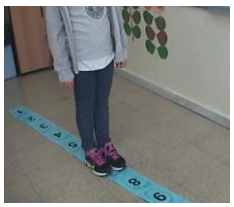


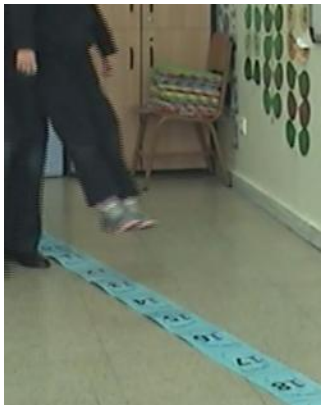
Ο «ακροβάτης»...





Ανεβαίνουμε 2-2 τα σκαλία





Η «ακρίδα» που κάνει 10 βήματα

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Οι μαθητές διασκέδασαν πιο πολύ καθώς η διδασκαλία είχε πάρει τη μορφή παραμυθιού και παιχνιδιού (learning by doing). Τους άρεσε πιο πολύ καθώς την είδαν ως σκάλα που την ανεβαίνουν και την κατεβαίνουν, με αποτέλεσμα να ασκούνται στην ανοδική και καθοδική αρίθμηση με άμεσο και βιωματικό τρόπο.

Κατά τη διάρκεια ενασχόλησης κάποιων μαθητών με την αριθμογραμμή δαπέδου, οι υπόλοιποι μαθητές πραγματοποιούσαν τη μαθηματική δραστηριότητα στην ατομική τους αριθμογραμμή, δείχνοντας με το δαχτυλάκι τους την πορεία που θα ακολουθήσουν εκείνοι για να φτάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Οι δραστηριότητες αυτές τους έδωσαν την ευκαιρία να σκέφτονται και να υπολογίζουν. Τα παιδιά παίζοντας, αναγνώρισαν σχέσεις μεταξύ των αριθμών, έδωσαν εξηγήσεις. Ανέπτυξαν μεθόδους να εξερευνούν την πρόσθεση, την αφαίρεση και τον ελλείποντα προσθετέο. Ό,τι ανακάλυψαν μόνοι τους, τους έμεινε και το χρησιμοποίησαν ξανά σε παρόμοια δραστηριότητα. Πραγματοποίησαν πρόσθεση και αφαίρεση με ποικίλους τρόπους χωρίς να ονομάσουμε την πράξη.

Η αριθμογραμμή δαπέδου αποδείχτηκε άριστο διδακτικό μέσο για την ανάδειξη του μαθηματικού συλλογισμού των μαθητών. Προοδευτικά συνέβαλλε στην παραστατική και αφηρημένη αρίθμηση και στην επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης με τις ενδεικνυόμενες κάθε φορά στρατηγικές. Με αυτές και στις δραστηριότητες που έλαβαν χώρα τα παιδιά ανακάλυψαν ενεργά τους αριθμούς και τις ποσότητες, επικοινώνησαν στην μαθηματική γλώσσα και ανέπτυξαν την αριθμητική τους σκέψη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Diezmann, C. M., & Lowrie, T. (2006). Primary students' knowledge of and errors on number lines. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Vol. 1, pp. 171-178), Sydney: MERGA.

Ernest. P. (1985). The number line as a teaching aid. Educational studies in mathematics, vol.16, issue 4, p.p.41-421.

Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303Β/13-3-2003.

Λεμονίδης, Χ., (2012). Καινοτομίες στη διδασκαλία της Α' τάξης. http://www.uowm.gr/mathslife/index.php?option=com_docman&task=cat_view&Itemid=5&gid=907&orderby=dmdate_published (27-12-2012)

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ: ΜΙΑ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ (ΣΤ΄ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ)

Αμαραντίδου Κυριακή, Αρβανιτάκης Ιωάννης, Καππάτου Αναστασία

Πρότυπο Πειραματικό Δημοτικό Σχολείο Φλώρινας

kikiamarantidou@yahoo.gr , iorvanit@gmail.com , NatassaKF@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα ανακοίνωση αναφέρεται σε μια διδακτική πρόταση, η οποία στοχεύει στο να κατανοήσουν οι μαθητές την αφηρημένη έννοια της μεταβλητής μέσα από βιωματικές καταστάσεις. Αρκετές έρευνες έχουν καταδείξει ότι η νοητική σύλληψη της έννοιας αυτής δυσκολεύει ιδιαίτερα τους μαθητές, ωστόσο η κατάκτησή της είναι sine qua non για την επίλυση εξισώσεων και αποτελεί θεμελιακό κομμάτι της μαθηματικής γνώσης. Αξιοποιώντας, παράλληλα, την πρότερη εξοικείωση των μαθητών με το εκπαιδευτικό λογισμικό Scratch και τη μεταβλητή όπως χρησιμοποιείται στα δεδομένα πλαίσια του συγκεκριμένου περιβάλλοντος, επιδιώκεται η εμπέδωση και επέκταση της νέας γνώσης.

Α. ΣΤΟΧΟΙ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Κύριος διδακτικός στόχος

Να γίνει κατανοητή η έννοια της μεταβλητής στους μαθητές.

Επιμέρους διδακτικοί στόχοι

Οι μαθητές να είναι ικανοί:

1. να χρησιμοποιούν μεταβλητές για να εκφράσουν τις σχέσεις στις εκφράσεις, τις ισότητες, τις ανισότητες και τις γεωμετρικές σχέσεις
2. να επιλέγουν μεταβλητές και να σχηματίζουν αριθμητικές παραστάσεις
3. να ορίζουν και να χρησιμοποιούν μεταβλητές σε αριθμητικές παραστάσεις
4. να βρίσκουν το αποτέλεσμα των αριθμητικών παραστάσεων αντικαθιστώντας τη μεταβλητή με τον αριθμό που εκφράζει την τιμή της
5. να συνεργάζονται σε ομάδες και κατά ζεύγη για την επίλυση μιας προβληματικής κατάστασης
6. να συνδέουν καταστάσεις από την Ιστορία με μαθηματικά δεδομένα (διαθεματικότητα με την Ιστορία)
7. να «εξοικειωθούν» με τη νέα γλώσσα της άλγεβρας που έχει τη δική της δομή, αρχές και κανόνες
8. να εξασκηθούν ακόμη περισσότερο στη χρήση του εκπαιδευτικού λογισμικού Scratch

9. να δημιουργήσουν τον γενικό κανόνα (τύπο) που ορίζει την τιμή μιας μεταβλητής

Β. ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Ουσιαστικά οι μαθητές για πρώτη φορά έρχονται σε επαφή με την έννοια της μεταβλητής στο μάθημα των Μαθηματικών. Η συγκεκριμένη έννοια συνιστά μια από τις πιο σημαντικές έννοιες στην άλγεβρα και ενέχει ιδιαίτερη δυσκολία για τους μαθητές, διότι αποτελεί ένα καίριο σημείο όπου γίνεται το πέρασμα από την αριθμητική στη στοιχειώδη άλγεβρα (Λεμονίδης, 1996a). Μάλιστα έχει χαρακτηριστεί ως «μια περίοδος επιστημολογικής ρήξης», η οποία απαιτεί την απόκτηση ενός νέου αναπαραστατικού κώδικα (Λεμονίδης, 1996b). Για τον λόγο αυτό είναι απαραίτητο να αξιοποιηθούν οι άτυπες στρατηγικές των μαθητών, πάνω στις οποίες θα δομηθούν οι τυπικές μέθοδοι επεξεργασίας των αριθμητικών παραστάσεων.

Επιδιώκοντας να ανασύρουμε αναπαραστάσεις για την έννοια της μεταβλητής που είναι οικείες στους μαθητές, αξιοποιούμε τόσο τα γνωστικά εφόδια που έχουν αποκομίσει από το μάθημα της Ιστορίας, όσο και δεξιότητες που έχουν αποκτήσει από εφαρμογές που έχουν στο παρελθόν δημιουργήσει στο εκπαιδευτικό λογισμικό Scratch.

Γ. ΠΟΡΕΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Φάση 1η. Έλεγχος προαπαιτούμενων και προϋπαρχουσών γνώσεων

Καλούμε τους μαθητές να «ταξιδέψουν» νοερά σε μια αρχαία αγορά και να ανακαλέσουν στη μνήμη τους τον τρόπο που γίνονταν οι εμπορικές συναλλαγές (ανταλλακτικό εμπόριο). Τους δίνουμε μια υποθετική λίστα προϊόντων και την ανταλλακτική τους αξία σε αγαθά, π.χ. πέντε σακιά αλεύρι = 1 κατσίκα. Η δραστηριότητα αυτή (βλ. ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1) στοχεύει στο κέντρισμα του ενδιαφέροντος των μαθητών και, παράλληλα, στην ενεργοποίηση του μηχανισμού εναλλακτικού μαθηματικού τρόπου σκέψης απαλλαγμένου από αριθμούς. Επίσης, επιδιώκεται η παρώθηση των μαθητών να αντιληφθούν και να ερμηνεύσουν το σύμβολο " = " ως έκφραση ισοδυναμίας και όχι απλά ως «το ζητούμενο αποτέλεσμα» των όρων που βρίσκονται συνήθως αριστερά του συμβόλου. Αυτή η ερμηνεία για το σύμβολο της ισότητας δίνεται από τους μαθητές κυρίως λόγω της αντίληψης που είναι κυρίαρχη στο Δημοτικό, όπου πολλές φορές τούς ζητείται να υπολογίσουν το αποτέλεσμα πράξεων πχ. "5+3=", αλλά και να επιλύσουν απλές εξισώσεις της μορφής "x+3=8". Επιπρόσθετα, αυτή η αντίληψη ενισχύεται και από την καθημερινή τους εμπειρία με τη χρήση υπολογιστών τσέπης, όπου το αποτέλεσμα των πράξεων προκύπτει πατώντας πλήκτρο με το σύμβολο της ισότητας (Λεμονίδης, 1996a, Αραμπατζής, 2010). Κατά την εισαγωγή τους, λοιπόν, στην

άλγεβρα, οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι το σύμβολο αυτό αποτελεί μια έκφραση ισοδυναμίας (πχ. σε σχέσεις όπως 7+3=6+4). Η ζυγαριά θεωρείται ένα κατάλληλο εργαλείο για να εξηγήσει αυτή την ισοδυναμία, καθώς η έννοια της ισορροπίας στη ζυγαριά παραβάλλεται με την έννοια της ισότητας σε μια εξίσωση.

Φάση 2η. Εισαγωγική δραστηριότητα

Οι μαθητές προσεγγίζουν βιωματικά μια προβληματική κατάσταση και αντιλαμβάνονται την αξιοποίηση των μεταβλητών για επικοινωνιακούς σκοπούς. Ακόμη, συνειδητοποιούν ότι η έννοια του αγνώστου που εμφανίζεται στις εξισώσεις πρώτου βαθμού μιας μεταβλητής, συναντάται συχνά σε ρεαλιστικές καταστάσεις. Τέλος, αντιλαμβάνονται ότι μια ποσότητα μπορεί να εκφραστεί εναλλακτικά (με γράμμα ή σύμβολο) κι όχι απαραίτητα με αριθμητικό ψηφίο. Συγκεκριμένα, οι μαθητές καλούνται να παραστήσουν τους σερβιτόρους στο εστιατόριο «Ο Φαγάνας», με αποστολή να καταγράφουν και να ερμηνεύουν τις παραγγελίες των πελατών σύμφωνα με τον «Κώδικα του Εστιατορίου». Ο κώδικας αυτός δεν είναι τίποτε άλλο παρά η εξυπνάδα του σερβιτόρου αντί να καταγράφει όλη την παραγγελία, να μένει στην καταγραφή μόνο του πρώτου γράμματος. Για παράδειγμα, η παραγγελία Τηγανητά αυγά σημειώνεται μόνο με **Τ**, ενώ το πιάτο της Ημέρας, που περιλαμβάνει σήμερα τηγανητά αυγά, λουκάνικο και αναψυκτικό, ως **Η**. (βλ. ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2). Εφόσον ο χρόνος επαρκεί, οι μαθητές καλούνται κατά ομάδες να καταγράψουν και να υπολογίσουν την παραγγελία της αρεσκείας τους.

Φάση 3η. Επισημοποίηση νέας γνώσης

Στο σημείο αυτό παρουσιάζουμε τον ορισμό της έννοιας της μεταβλητής συνδέοντάς τον με τα γράμματα που χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη δραστηριότητα, τονίζοντας και πάλι ότι η μεταβλητή μπορεί να παρασταθεί με οποιοδήποτε γράμμα ή σύμβολο. Είναι γνωστό πως οι έννοιες σχηματίζονται με δύο τρόπους, α. τον φυσικό τρόπο, κατά τον οποίο η αφομοίωση της έννοιας γίνεται μέσα από παραδείγματα και β. τον κατηγορικό τρόπο, κατά τον οποίο η έννοια περιγράφεται με τη βοήθεια ενός ορισμού, συνοδευόμενου επίσης από παραδείγματα. Συνδυάζοντας τους δύο τρόπους παρουσίασης των εννοιών –με το να δίνουμε παραδείγματα από την καθημερινή ζωή προτρέποντας τους μαθητές να τα μεταφράζουν στη μαθηματική γλώσσα- επιτυγχάνουμε τη γεφύρωση του χάσματος μεταξύ της φυσικής και της μαθηματικής γλώσσας, για να μπορέσουν έτσι οι μαθητές να μεταβούν από το επίπεδο της άτυπης γνώσης, που είναι συνδεδεμένη με τις άμεσες εμπειρίες των παιδιών, στο επίπεδο της τυπικής μαθηματικής γνώσης.

Φάση 4η. Ασκήσεις εφαρμογής-εμπέδωσης – Φάση 5η. Αξιολόγηση

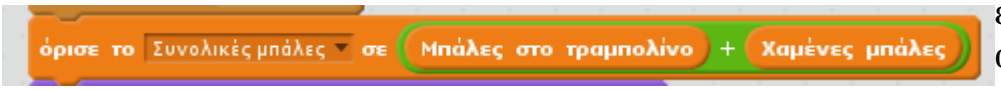
Όπως προαναφέρθηκε, οι μαθητές έχουν έρθει ήδη σε επαφή με την έννοια της μεταβλητής μέσω του εκπαιδευτικού λογισμικού Scratch, όπου έχουν πραγματοποιήσει αρκετές δραστηριότητες στις οποίες χρησιμοποιούν μεταβλητές για

τον έλεγχο της ροής των προγραμμάτων τους. Για τον λόγο αυτό καλούνται να επισκεφθούν το εργαστήρι της Πληροφορικής, όπου πραγματοποιούν την ακόλουθη δραστηριότητα: http://scratch.mit.edu/projects/15341281. Πρόκειται για μια παιγνιώδη εργασία στην οποία οι μαθητές πετώντας μπάλες στο τραμπολίνο έρχονται αντιμέτωποι με μια προβληματική κατάσταση με δυο μεταβλητές: εκείνη που μετρά τις κερδισμένες μπάλες και εκείνη που μετρά τις χαμένες μπάλες. Οι μαθητές καλούνται έπειτα από το πέρας της δραστηριότητας να σημειώσουν πόσες μπάλες είναι κερδισμένες, αφαιρώντας στην ουσία από τη μεταβλητή «μπάλες» τις χαμένες. Στη συνέχεια τους δίνεται φύλλο εργασίας με τις ακόλουθες ερωτήσεις (βλ. ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3):

-Από τι εξαρτάται κάθε φορά ο συνολικός αριθμός από τις μπάλες;

-Αν x είναι οι συνολικές μπάλες, να γράψετε την αριθμητική παράσταση που χρειάζεται κάθε φορά να λύνουμε για να βρίσκουμε το αποτέλεσμα (αναμενόμενη απάντηση → x = μπάλες στο τραμπολίνο + χαμένες μπάλες).

Το τελευταίο κομμάτι της δραστηριότητας επικεντρώνεται στον ορισμό μιας μεταβλητής και του κανόνα που καθορίζει την τιμή της. Οι μαθητές καλούνται να παρέμβουν στις εντολές της εφαρμογής και να δημιουργήσουν μια νέα μεταβλητή με το όνομα «συνολικές μπάλες». Η μεταβλητή αυτή θα εμφανίζει στην οθόνη αυτόματα το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των άλλων δύο, ώστε να μη χρειάζεται να κάνουμ πλέον την πράξη στο μυαλό τους. Για να το πετύχουν αυτό θα πρέπει να διδάξουν στον υπολογιστή τον γενικό κανόνα που ακολουθεί η μεταβλητή «συνολικές μπάλες», προκειμένου να αναλάβει πλέον αυτός να εκτελεί κάθε φορά την πράξη και να εμφανίζει το αποτέλεσμα.



ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΑΙ ΙΣΤΟΓΡΑΦΙΑ

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.

Booth, L. R. (χ.χ.). Children's Difficulties in Beginning Algebra, *Algebraic Thinking, Grades K-12*, 299-306. Τελευταία ανάκτηση: 26/1/2014. http://elementaryalgebra.cmswiki.wikispaces.net/file/view/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf.

DeFrancisco, C. (2001). Dr. Seuss Comes to Middle School Math Class, *Math Solutions*, 1. Τελευταία ανάκτηση: 26/1/2014.http://mathsolutions.com/documents/Dr.Suess_Math_Class.pdf.

Αραμπατζής, Κ. (2010). *Εννοιολογική αλλαγή στα Μαθηματικά: Το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα*. Διπλωματική εργασία στο Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Π.Μ.Σ. «Διδακτική

και Μεθοδολογία των Μαθηματικών», Αθήνα. Τελευταία ανάκτηση: 26/1/2014. http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_arampatzis.konstantinos.pdf.

Δ.Ε.Π.Π.Σ.-Α.Π.Σ. Μαθηματικών. Τελευταία ανάκτηση: 26/1/2014. http://ebooks.edu.gr/courses/DSDIM101/document/4bd845e1lx8o/4bd845e1moqe.pdf, 273.

Δεμίρη Ε., Μαρκέτος Α., Μπαρμπάς Γ. (1992). Οι αντιλήψεις των μαθητών της ΣΤ' δημοτικού για τη μεταβλητή. *Διάσταση 3-4*, 1992, Θεσσαλονίκη.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., Οικονόμου, Θ. (2007). Η έννοια της μεταβλητής, *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού* (Βιβλίο Δασκάλου), 7η έκδ., 72-73.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., Οικονόμου, Θ. (2012). Η έννοια της μεταβλητής, *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού* (Βιβλίο Μαθητή), 2η έκδ., 61-62.

Λεμονίδης, Χ. (1996[a]). Δυσκολίες και αντιλήψεις των μαθητών κατά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. *ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ* Γ', τόμ. 13, τχ 45, 61-70.

Λεμονίδης, Χ. (1996[b]). Εμπειρική έρευνα στην ικανότητα επίλυσης εξισώσεων Α' βαθμού από μαθητές Γυμνασίου. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, τχ 1, 14-35.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΜΙΑΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΠΑΡΑΜΥΘΙΟΥ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Χούντα Αναστασία
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας – Παιδαγωγική Σχολή Φλώρινας
Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
sasahun@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αφορά στην παρατήρηση και αξιολόγηση μίας διδασκαλίας στο γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών με την αξιοποίηση των δυνατοτήτων της Λογοτεχνίας και πιο συγκεκριμένα με τη χρήση του παραμυθιού: «Η Φιφή και η Φωφώ, οι φαντασμένες φάλαινες». Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στην Γ' τάξη Δημοτικού σχολείου του νομού Δράμας. Αναλύονται οι φάσεις της διδασκαλίας έτσι όπως αυτή αναπτύχθηκε από την εκπαιδευτικό καθώς και οι διδακτικές πρακτικές που εφάρμοσε. Στη συνέχεια, παρατίθενται παρατηρήσεις και σχόλια της ερευνήτριας για τα αποτελέσματα του παραπάνω εγχειρήματος βασισμένα στις συνεντεύξεις που έδωσαν οι μαθητές μετά το πέρας της διδασκαλίας προκειμένου να διαπιστωθεί πώς βίωσαν τη συγκεκριμένη διδακτική προσέγγιση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πραγματοποιήθηκε διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών στην Γ΄ τάξη Δημοτικού Σχολείου αγροτικής περιοχής του νομού Δράμας με τη χρήση του παραμυθιού του Ευγένιου Τριβιζά με τίτλο: «Η Φιφή και η Φωφώ, οι φαντασμένες φάλαινες»[i]. Η διδασκαλία διήρκεσε περίπου 1,5 διδακτική ώρα.

Το δυναμικό της τάξης ήταν 13 παιδιά εκ των οποίων 7 κορίτσια και 6 αγόρια. Ένα παιδί παρακολουθεί το τμήμα ενισχυτικής διδασκαλίας στα Μαθηματικά.

Η εκπαιδευτικός της τάξης είναι απόφοιτος Παιδαγωγικού Τμήματος με 19 χρόνια διδακτικής εμπειρίας. Διδάσκει για πρώτη χρονιά σε αυτό το τμήμα.

Η ερευνήτρια κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας λειτούργησε ως μη συμμετοχικός παρατηρητής στο πίσω μέρος της αίθουσας καταγράφοντας τα διαδραματιζόμενα στην τάξη.

ΤΟ ΠΑΡΑΜΥΘΙ: «Η ΦΙΦΗ ΚΑΙ Η ΦΩΦΩ, ΟΙ ΦΑΝΤΑΣΜΕΝΕΣ ΦΑΛΑΙΝΕΣ»

Πρόκειται για έργο του Ευγένιου Τριβιζά. Ανήκει στη σειρά χιουμοριστικών εκπαιδευτικών παραμυθιών: «Τα παραμύθια με τους αριθμούς» και πραγματεύεται τις έννοιες του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Μέσα από την ιστορία δύο φαλαινών δίνεται η δυνατότητα στα παιδιά να έρθουν σε επαφή με τις έννοιες του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης.

Το συγκεκριμένο παραμύθι προτείνεται στο βιβλίο του δασκάλου ως εισαγωγική δραστηριότητα στο 4ο κεφάλαιο του πολλαπλασιασμού και της προπαίδειας και στο 6ο κεφάλαιο του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Στην παρούσα φάση η συγκεκριμένη διδασκαλία αποτέλεσε αφορμή για επανάληψη στις συγκεκριμένες έννοιες και όχι για την εισαγωγή τους σε αυτές.

Το παραμύθι ως εναλλακτική διδακτική πρόταση μετατρέπεται σε ισχυρό εργαλείο τόσο για την παροχή κινήτρων στους μαθητές όσο και για την εδραίωση της μαθηματικής γνώσης[ii]. Παράλληλα κεντρίζει τα ενδιαφέροντα των παιδιών για το περιεχόμενο του μαθήματος[iii] με αποτέλεσμα να γίνεται το πλαίσιο για μία μη συμβατική προσέγγιση των μαθηματικών καθώς η πλοκή τα καθηλώνει, εξάπτει τη φαντασία τους ενώ παράλληλα δεν τα εκλαμβάνουν ως εργασία[iv].

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ

Α΄ Φάση - Εισαγωγή:

Προκειμένου να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών η εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε το εξής σενάριο: Την προηγούμενη ημέρα στο σπίτι της προσπάθησε να διαβάσει το παραμύθι «Η Φωφώ και η Φιφή, οι φαντασμένες φάλαινες» αλλά δυστυχώς λόγω κακής εκτύπωσης υπήρχαν κενά και δε μπορούσε να καταλάβει.

Τα παιδιά αμέσως ενεργοποιήθηκαν προτείνοντας λύσεις και προθυμοποιήθηκαν να τη βοηθήσουν. Στη συνέχεια η εκπαιδευτικός ξεκίνησε την ανάγνωση του παραμυθιού.

Β΄ Φάση – Κυρίως μέρος:

Χρησιμοποιήθηκε η διδακτική μέθοδος των ερωταποκρίσεων σε όλη τη διδασκαλία. Η χρήση της μεθόδου αυτής συμβάλλει στη διέγερση του ενδιαφέροντος και της προσοχής των μαθητών, δημιουργεί κλίμα επικοινωνίας και συμμετοχής και βοηθά των εκπαιδευτικό να αντιληφθεί το βαθμό κατανόησης των μαθητών ως προς το αντικείμενο μάθησης[v].

Κατά τη διάρκεια της ανάγνωσης και στα «ελαττωματικά» σημεία του παραμυθιού η εκπαιδευτικός έδινε λάθος νούμερα ώστε να βεβαιωθεί πως τα παιδιά είχαν αντιληφθεί τι υπολόγιζαν και δεν ανέφεραν τυχαία νούμερα. Έπρεπε μέσω της

πράξης του πολλαπλασιασμού να οδηγηθούν στο συγκεκριμένο αποτέλεσμα όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί:

Έχει προηγηθεί το επεισόδιο του παραμυθιού όπου η φάλαινα κατάπιε 4 σκούνες με 3 πριγκίπισσες η κάθε μία. Τα παιδιά έπρεπε να βρουν πόσες πριγκίπισσες κατάπιε η φάλαινα συνολικά.

Εκπαιδευτικός: Δηλαδή αυτή τη στιγμή που μιλάμε Φωφώ μου βρίσκονται στα ενδότερά μου τέσσερις πειρατικές σκούνες […] και έντεκα πριγκίπισσες σαν τα κρύα τα νερά.

Τα παιδιά αντιδρούν λέγοντας πως κατάπιε 12 και όχι 11 πριγκίπισσες και η εκπαιδευτικός με ερωτήσεις προσπαθεί να διαπιστώσει κατά πόσο τα παιδιά κατανόησαν πώς προέκυψε το αποτέλεσμα αυτό.

Όταν τα παιδιά άρχισαν να κουράζονται από το επαναλαμβανόμενο μοτίβο του παραμυθιού και να αδιαφορούν η εκπαιδευτικός ενσωμάτωσε στο παραμύθι μία ιστορία που αυτοσχεδίασε εκείνη τη στιγμή. Εισήγαγε στην ιστορία μία αόρατη «κακιά» φάλαινα η οποία από στιγμή σε στιγμή θα χτυπούσε τα παράθυρα της τάξης, με αποτέλεσμα να κεντρίσει εκ νέου το ενδιαφέρον τους. Τα παιδιά έπρεπε να υπολογίσουν γινόμενα με διψήφιους αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα τους δόθηκε το εξής πρόβλημα: Η αόρατη φάλαινα έφαγε 6 βάρκες όπου κάθε βάρκα είχε από 3 ψαράδες και κάθε ψαράς από 2 βοηθούς. Επιπλέον κάθε ψαράς ψάρεψε 12 κιλά τσιπούρες. Ζήτησε από τα παιδιά να υπολογίσουν πόσοι ήταν οι ψαράδες συνολικά. Στη συνέχεια πόσοι ήταν όλοι οι βοηθοί και τέλος πόσα κιλά ψάρια είχαν ψαρέψει στο σύνολο οι ψαράδες. Έγραψε στον πίνακα τα στοιχεία του προβλήματος και σηκώθηκαν 2 μαθητές για να βρουν τα αποτελέσματα των πράξεων 18x2 και 18x12 αντίστοιχα χρησιμοποιώντας τον γραπτό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού. Ταυτόχρονα οι υπόλοιποι εργάστηκαν ατομικά στο πρόχειρο τετράδιο για να διασταυρώσουν το αποτέλεσμα που θα βρουν με αυτό του μαθητή στον πίνακα. Να σημειωθεί ότι η εκπαιδευτικός δε σχολίασε αν ήταν σωστό ή όχι το αποτέλεσμα που βρήκε κάθε μαθητής και άφησε τα υπόλοιπα παιδιά να το επιβεβαιώσουν.

Μετά το διάλειμμα με την αόρατη φάλαινα η εκπαιδευτικός συνέχισε κανονικά το παραμύθι όπου πλέον έγινε μετάβαση στην έννοια της διαίρεσης. Οι φάλαινες έπρεπε να μοιραστούν δίκαια το φαγητό τους. Και εδώ κυριάρχησε ανάλογο επαναλαμβανόμενο μοτίβο όπου οι μαθητές όφειλαν να αντιληφθούν ότι η μία φάλαινα μοίραζε άνισα το φαγητό μέσω της διαδικασίας της διαίρεσης και να προτείνουν το σωστό.

Γ΄ Φάση – Επέκταση:

Η εκπαιδευτικός ζήτησε από τους μαθητές να ζωγραφίσουν στο σπίτι τις δύο φάλαινες και να φανταστούν το πιο περίεργο αντικείμενο που θα μπορούσαν να είχαν φάει χωρίς να το αποκαλύψουν στους συμμαθητές τους. Στη συνέχεια έπρεπε να τα

μοιράσουν άνισα στις 2 φάλαινες αλλά να είναι σε θέση να γνωρίζουν και πώς θα έπρεπε να τα μοιράσουν δίκαια όπως χαρακτηριστικά τόνισε η εκπαιδευτικός:

Εκπαιδευτικός: «(…) Θα το μοιράσετε όπως η Φωφώ αλλά θα ξέρουμε να πούμε και τη σωστή μοιρασιά, μην περάσει η αόρατη φάλαινα από το τζάμι και μας πιάσει… »

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η εκπαιδευτικός με το σενάριο της «κακής εκτύπωσης» του βιβλίου κατάφερε να κερδίσει το ενδιαφέρον των μαθητών. Έδωσε μεγάλη βαρύτητα στη δημιουργία κλίματος συναισθηματικής ασφάλειας και ειλικρινών διαπροσωπικών σχέσεων με ζωντανές περιγραφές και αρκετή δόση χιούμορ ιδιαίτερα όταν διατυπώνονταν λάθος απαντήσεις από τους μαθητές με αποτέλεσμα να εκτονώνεται συναισθηματικά η ατμόσφαιρα, να ενισχύεται η αυτοπεποίθησή τους, ώστε να αντιμετωπίσουν τα λάθη τους πιο ανάλαφρα και να προσπαθήσουν ξανά, καθώς επίσης και η επίτευξη έντονης και διαρκούς αλληλεπίδρασης τόσο μεταξύ των μαθητών όσο και μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικού.

Επιπλέον η εκπαιδευτικός φρόντιζε να μην υπάρχουν ασάφειες από τυχόν άγνωστες λέξεις στο κείμενο πριν προχωρήσουν παρακάτω. Παράλληλα, έδινε χρόνο στους μαθητές να σκεφτούν πριν απαντήσουν προκειμένου να βοηθηθούν ακόμα και οι πιο αδύναμοι να βρουν τη λύση αλλά και για να σιγουρευτεί και η ίδια πως είχαν καταλάβει τι αντιπροσωπεύουν τα γινόμενα που έβρισκαν. Κρατώντας ουδέτερη στάση περίμενε να απαντήσουν οι περισσότεροι, ζητούσε από τους μαθητές να επιβεβαιώσουν το αποτέλεσμα, ώστε να συμφωνήσουν όλοι για την ορθότητα της απάντησης.

Αναφορικά με το επαναλαμβανόμενο μοτίβο της ιστορίας η εκπαιδευτικός φρόντισε να κάνει μικρά «διαλείμματα», σχολιάζοντας την ιστορία ή συσχετίζοντάς την με την καθημερινότητά τους, δίνοντας την ευκαιρία στα παιδιά να ξεκουραστούν. Παράλληλα προσπαθούσε να τους ευαισθητοποιήσει απέναντι στα Μαθηματικά, να τους κάνει να συνειδητοποιήσουν ότι πρόκειται για προβλήματα που θα συναντούν κάθε μέρα στη ζωή τους υπενθυμίζοντάς τους σε τι προβληματικές καταστάσεις ενδέχεται να εμπλακούν εάν δεν μπορούν να υπολογίζουν και να μοιράζουν σωστά.

Τέλος, με την εργασία που ανέθεσε η εκπαιδευτικός στο σπίτι ενεργοποίησε τη φαντασία των παιδιών και ενίσχυσε τη δημιουργική τους σκέψη. Τόνισε στους μαθητές ότι σκοπός της εργασίας σε πρώτη φάση είναι να βρουν το πιο περίεργο αντικείμενο που θα μπορούσε να καταπιεί μια φάλαινα και μάλιστα να μην το αποκαλύψουν στους φίλους τους και σε δεύτερη φάση να μοιράσουν άνισα αυτά τα αντικείμενα προσεγγίζει την έννοια της διαίρεσης με ένα μη συμβατικό τρόπο. Η άνιση μοιρασιά προϋποθέτει την κατανόηση της ίσης μοιρασιάς από τα παιδιά και άρα της έννοιας της διαίρεσης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από τις συνεντεύξεις που ακολούθησαν φάνηκε πως η παραπάνω διδακτική προσέγγιση ήταν επιτυχημένη. Οι μαθητές έκαναν επανάληψη στις έννοιες του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με μη συμβατικό τρόπο. Το παραμύθι ως πλαίσιο λειτούργησε υποστηρικτικά και διευκόλυνε τη μετατροπή της διδασκαλίας σε «ζωντανό δρώμενο»[vi] το οποίο οι μαθητές δήλωσαν πως τους άρεσε και ότι προτιμούν τη διδασκαλία με τη χρήση παραμυθιού.

Η θετική ανταπόκριση από τους μαθητές επιβεβαιώνει τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών αναφορικά με τα πλεονεκτήματα της σύζευξης Λογοτεχνίας και Μαθηματικών[vii]. Η Λογοτεχνία παρακινεί τα παιδιά να μάθουν. Τα παιδιά λατρεύουν τις ιστορίες η πλοκή των οποίων τους καθηλώνει, εξάπτει τη φαντασία τους ενώ παράλληλα δεν τις αντιμετωπίζουν ως εργασία.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

[i] Τριβιζάς (2002)
[ii] Perger (2011)
[iii] Μητακίδου - Τρέσσου (2005)
[iv] Moseley (2010)
[v] Τριλιανός (2003)
[vi] Ματσαγγούρας (2007)
[vii] Βλ. ενδεικτικά: Καϊάφα (2012), Perger (2011), Λέρη (2008)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Καϊάφα, Ι. (2012). Ανάπτυξη, εφαρμογή και αξιολόγηση κειμένου μαθηματικής λογοτεχνίας για τη διδασκαλία των κλασμάτων. *Διπλωματική Εργασία.* Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Π.Τ.Δ.Ε., Φλώρινα

Λέρη, Β. (2008). Η αξιοποίηση της «Μαθηματικής Λογοτεχνίας» ως μέσο βελτίωσης των στάσεων των μαθητών για τα Μαθηματικά. *Διπλωματική Εργασία.* Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών, Αθήνα – Κύπρος

Ματσαγγούρας, Η. (2007). *Στρατηγικές Διδασκαλίας. Η Κριτική Σκέψη στη Διδακτική Πράξη. Θεωρία και Πράξη της Διδασκαλίας. Τ. Β΄.* Αθήνα: Gutenberg

Μητακίδου, Σ., & Τρέσσου, Ε.(2005). *Διδάσκοντας Γλώσσα και Μαθηματικά με Λογοτεχνία*. Θεσ/νίκη: Επίκεντρο.

Τριβιζάς, Ε. (2002). *Η Φιφή και η Φωφώ, οι φαντασμένες φάλαινες*. (5η εκδ.). Αθήνα: ΜΙΝΩΑΣ

Τριλιανός, Θ. (2003). *Μεθοδολογία της Σύγχρονης Διδασκαλίας τόμ. Α΄*. Αθήνα: Ατραπός

Moseley, C. (2010). Stories for primary mathematics. *Mathematics Teaching*, *219*, 16–18.

Perger, P. (2011). Identifying mathematics in children's literature: Year seven student's results, (2006), 608–616. *Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*

ΝΕΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΑΠΟΠΕΙΡΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Α.Κλώθου[1], Π.Αποστολίδου, Χ.Γεωργιάδου, Β.Γκοντζίδου, Α.Κουγιουρούκη, Γ.Κούσουλα, Σ.Κυριμαλάκη, Φ.Μπρούτζου, Α.Πετρίδου, Λ.Χατζοπούλου

[1]aklothou@eled.duth.gr

Στο πλαίσιο της πιλοτικής εφαρμογής του νέου Προγράμματος Σπουδών (ΠΣ) των Μαθηματικών στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα κατά το σχολικό έτος 2011-2012, εκπαιδευτικοί που ανήκαν σε σχολική μονάδα πιλοτικής εφαρμογής ασχολήθηκαν με τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών, καθώς διαπίστωσαν ότι οι μαθητές τους συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, της σύγκρισης και της διάταξης των αριθμών και των αλγόριθμων των πράξεων στο σύνολο των ρητών. Θεωρώντας ότι τα κλάσματα συνιστούν το δυσκολότερο κεφάλαιο των Μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (καθώς το σύνολο των ρητών αριθμών δεν είναι απλώς μεγαλύτερο από τους φυσικούς αριθμούς, έχει και διαφορετική δομή) σχεδίασαν και υλοποίησαν μια σειρά μαθημάτων αξιοποιώντας την ιδέα της «τροχιάς» που διανύει μια μαθηματική έννοια, καθώς και τις διδακτικές προτάσεις που προτείνονται από το νέο ΠΣ των Μαθηματικών.

1. ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΜΕ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Οι εκπαιδευτικοί της συγκεκριμένης πιλοτικής σχολικής μονάδας διαπίστωσαν ότι πολλοί μαθητές τους δυσκολεύονταν στην κατανόηση και στον αποτελεσματικό χειρισμό των κλασμάτων, καθώς δεν αντιλαμβάνονταν την αφηρημένη φύση τους, την ποικιλία των ερμηνειών τους, την ιδιαίτερη γλώσσα και τους αλγόριθμους που απαιτεί η αριθμητική τους. Στη βιβλιογραφία αναφέρονται τέσσερις διακριτές ερμηνείες του κλάσματος (ως εμβαδόν μιας περιοχής, ως υποσύνολο ενός συνόλου, ως αποτέλεσμα διαίρεσης και ως σημείο της αριθμογραμμής), οι οποίες δυσκολεύουν πολλούς μαθητές, ακόμη και μετά το τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Οι δυσκολίες αυτές είναι μεγαλύτερες κατά την ερμηνεία του κλάσματος ως υποσυνόλου και ακόμη περισσότερο ως σημείου της αριθμογραμμής (π.χ. van de Walle, 2007). Οι μαθητές συχνά παρανοούν ότι ένα κλάσμα δεν αφορά το μέγεθος του συνόλου ή το μέγεθος των μερών, αλλά δίνει τη σχέση μέρους-όλου, ενώ μεταφέρουν τις εμπειρίες τους από τους φυσικούς αριθμούς στη σύγκριση κλασμάτων και στη θέση τους στην αριθμογραμμή. Επίσης, οι μαθητές, επειδή μαθαίνουν μηχανικά τους κανόνες των πράξεων, ξεχνούν ορισμένα σημεία τους και τότε επινοούν δικές τους στρατηγικές. Συχνά, αυτές οι στρατηγικές παραπέμπουν σε γνώσεις που αφορούν στους φυσικούς ή σε άλλους αριθμούς και σε διαδικασίες με

τις οποίες οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι, ωστόσο δεν είναι έγκυρες στο πλαίσιο των κλασματικών αριθμών (π.χ. το γινόμενο των κλασματικών αριθμών σε αντίθεση με το γινόμενο των φυσικών αριθμών μπορεί να δίνει αποτέλεσμα μικρότερο από τους παράγοντες που πολλαπλασιάζονται).

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στο πλαίσιο της πιλοτικής εφαρμογής του νέου ΠΣ των Μαθηματικών σε σχολική μονάδα της Θράκης συμμετείχαν εννέα εκπαιδευτικοί, οι οποίες εργάζονταν στο συγκεκριμένο σχολείο, τέσσερις ήταν απόφοιτες διετούς κύκλου σπουδών και παρακολούθησαν πρόγραμμα εξομοίωσης, πέντε ήταν απόφοιτες Παιδαγωγικού Τμήματος, ενώ η μία από αυτές ήταν και πτυχιούχος Σχολής Θετικών Επιστημών. Όλες είχαν αξιόλογη διδακτική εμπειρία (από 10 έως 25 χρόνια υπηρεσίας) και ενεργή εμπλοκή σε δράσεις επαγγελματικής ανάπτυξης (παρακολούθηση προγραμμάτων επιμόρφωσης και συμμετοχή σε ερευνητικά προγράμματα). Κατά την περίοδο διεξαγωγής της πιλοτικής εφαρμογής, οι τέσσερις εκπαιδευτικοί δίδασκαν σε μεγάλες τάξεις (Ε, ΣΤ), οι τρεις σε μεσαίες (Γ,Δ) και οι δύο σε μικρές τάξεις (Α, Β).

Η πιλοτική εφαρμογή είχε ως υπόβαθρο την έρευνα-δράση, ενώ αξιοποίησε τεχνικές της προσέγγισης Lesson study (Taylor, 2005). Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν επιχείρησαν να προσεγγίσουν εννοιολογικά την έννοια του κλασματικού αριθμού και οργάνωσαν μαθήματα με εστίαση στην πυκνότητα του συνόλου, στις κλάσεις ισοδυναμίας, στη σύγκριση κλασματικών αριθμών και στις πράξεις με κλασματικούς αριθμούς. Ειδικότερα: (α) ο κάθε εκπαιδευτικός οργάνωσε, σε συνεργασία με τους υπολοίπους και, στη συνέχεια, υλοποίησε ένα μάθημα που αφορούσε στα κλάσματα, αξιοποιώντας το ΠΣ και ειδικότερα το «κομμάτι» της τροχιάς ανάπτυξης της έννοιας του κλάσματος που αναλογούσε στην τάξη του (στην πορεία, σχεδόν όλα τα μαθήματα των Μαθηματικών οργανώθηκαν με τον ίδιο τρόπο), (β) κατά τη διάρκεια των μαθημάτων οι μισοί περίπου εκπαιδευτικοί παρακολουθούσαν το μάθημα και κρατούσαν σημειώσεις σε ένα φύλλο παρατήρησης με συγκεκριμένους άξονες. Σε αυτό το πλαίσιο οι εκπαιδευτικοί αφιέρωναν χρόνο για να συλλέξουν δεδομένα, συμπληρώνοντας φύλλα παρατήρησης, γεγονός που τους επέτρεπε να προβληματιστούν για το αν το μάθημα «*πήγε καλά*» ή αν «*θα πρέπει να το κάνουμε διαφορετικά για να έχουμε ένα καλύτερο αποτέλεσμα*», «*να δούμε τι έμαθαν σε σχέση με τον στόχο, αν κατάλαβαν τη διδασκαλία*». Η εστίαση της παρατήρησης ήταν στη μάθηση και στον ίδιο τον μαθητή και όχι στον εκπαιδευτικό (αυτό συνιστούσε μια ασφαλή συνθήκη για τον εκπαιδευτικό, ο οποίος δεν ένοιωθε να αξιολογείται). Μέσω της παρατήρησης οι εκπαιδευτικοί εξασφάλισαν σε έναν βαθμό το ότι θα μπορούσαν να συζητήσουν γι'αυτό που συνέβη πραγματικά στην τάξη, διατυπώνοντας απόψεις όπως: «*με αυτήν την παρατήρηση μπορείς να "συλλάβεις" μαθηματικές συμπεριφορές*», «*είναι διαφορετικό να παρατηρείς από την έδρα και διαφορετικό να είσαι κάτω, μεταξύ των παιδιών…είναι διαφορετικά τα δεδομένα που συλλέγεις*», (γ) οι διδασκαλίες βιντεοσκοπούνταν, (δ) ο εκπαιδευτικός που πραγματοποιούσε τη

διδασκαλία συμπλήρωνε ένα ημερολόγιο για να αναστοχαστεί σε σχέση με τις διδακτικές πρακτικές του και να προτείνει βελτιώσεις στο περιεχόμενο του νέου ΠΣ των Μαθηματικών, (ε) στη συνέχεια, πραγματοποιούνταν συναντήσεις για να συζητηθεί η κάθε νέα διδασκαλία, αξιοποιώντας τις σημειώσεις που κρατούσαν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διάρκεια της παρατήρησης. Σε αυτές τις συναντήσεις γινόταν προσπάθεια να ομαδοποιηθούν οι ατομικές παρατηρήσεις των εκπαιδευτικών που είχαν παρακολουθήσει το μάθημα σε συνδυασμό με τις σημειώσεις του ημερολογίου που συμπλήρωνε εκ των υστέρων ο εκπαιδευτικός που έκανε το μάθημα, ώστε να διευκολυνθεί η συζήτηση (Murata, 2002), (ε) κατά τη διάρκεια της πιλοτικής εφαρμογής του νέου ΠΣ των Μαθηματικών, οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνθηκαν, παράλληλα με την οργάνωση των μαθημάτων, να συμμετέχουν σε ενδοσχολικές συναντήσεις που πραγματοποιούνταν σε ώρες εκτός σχολικού ωραρίου και ήταν σε επαφή τουλάχιστον μία φορά την εβδομάδα με τον σύμβουλο προώθησης του νέου ΠΣ, ο οποίος παρακολουθούσε τα μαθήματά τους, ενώ συμμετείχαν μέχρι το τέλος της σχολικής χρονιάς σε περισσότερες από πέντε επίσημες συναντήσεις και σε 15, περίπου, άτυπες συναντήσεις (Lewis, 2003).

Οι εκπαιδευτικοί συνεργάστηκαν μεταξύ τους και αυτό είναι «*κάτι που δεν μπορείς να το κάνεις μόνος σου, χρειάζεσαι μια κοινότητα, έναν χώρο όπου θα μπορείς να αλληλεπιδράς*». Οι εκπαιδευτικοί που συμμετείχαν στην πιλοτική εφαρμογή του νέου ΠΣ των Μαθηματικών λάμβαναν ενήμερες (informed) αποφάσεις, οι οποίες βασίζονταν σε αυτά που συνέβαιναν στην τάξη και αφορούσαν στους μαθητές (AERA, 2000). Στο τέλος της διαδικασίας το ερώτημα που κυριαρχούσε, συνήθως, ήταν: «*θα διδάσκω με έναν συγκεκριμένο τρόπο ή πρέπει να αλλάξω τις πρακτικές μου;*».

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η συμμετοχή των εκπαιδευτικών στην πιλοτική εφαρμογή επέφερε μια σειρά από οφέλη τόσο για τους ίδιους όσο και για τους μαθητές τους.

Σε επίπεδο επαγγελματικής ανάπτυξης, οι εκπαιδευτικοί είχαν τη δυνατότητα να αλληλεπιδράσουν, να αναπτύξουν τη σκέψη τους και να προβληματιστούν σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση, αναλαμβάνοντας σε έναν βαθμό οι ίδιοι την ευθύνη για την ατομική τους επαγγελματική εξέλιξη.

Ειδικότερα για τα κλάσματα, οι εκπαιδευτικοί υποστηρίχθηκαν ώστε να κατανοήσουν βαθύτερα την έννοια του κλάσματος (γνώση περιεχομένου-τι διδάσκω), και ειδικότερα την έννοια της πυκνότητας του συνόλου (το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι διακριτό, δηλαδή, ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς υπάρχει πεπερασμένο πλήθος φυσικών αριθμών, ενώ, αντίθετα, το σύνολο των ρητών είναι «πυκνό», δηλαδή, ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι ρητοί), την έννοια των κλάσεων ισοδυναμίας (κάθε αριθμός του συνόλου μπορεί να εκφραστεί με άπειρους τρόπους) και, επιπλέον, ότι ένα κλάσμα

αναπαριστά μια σχέση μεταξύ ενός μέρους και του όλου του και ο διαμελισμός του αφορά σε ίσα μέρη, σε αντίθεση με έναν φυσικό αριθμό που αναπαριστά ένα όλο (τα μαθήματα σχεδιάστηκαν με εστίαση στην κατανόηση των παραπάνω εννοιών).
Οι εκπαιδευτικοί εμπλούτισαν τις διδακτικές πρακτικές τους (πώς διδάσκω) και είχαν την ευκαιρία να αξιολογήσουν τα αποτελέσματα αυτής της διδακτικής απόπειρας (τι κατάλαβαν οι μαθητές). Ουσιαστικά, μέσω της προσέγγισης που ακολουθήθηκε στην πιλοτική εφαρμογή, όπου ο εκπαιδευτικός σχεδίαζε διδασκαλίες, τις δοκίμαζε και σκεφτόταν σχετικά με αυτές, ενισχύθηκε η ιδέα του αναστοχαζόμενου εκπαιδευτικού. Παράλληλα, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να προσεγγίσουν τις σχετικές μαθηματικές ιδέες με τρόπους που ενθάρρυναν τη διερεύνηση και τη διαπραγμάτευση.
Παρακάτω παρατίθενται σκέψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τα οφέλη που αποκόμισαν οι ίδιοι και οι μαθητές τους τόσο σε γνωστικό επίπεδο όσο και σε επίπεδο επαγγελματικής ανάπτυξης, καθώς και την προοπτική που πιστεύουν ότι μπορεί να έχει μια τέτοια προσέγγιση:

> *Η πιλοτική εφαρμογή του νέου προγράμματος σπουδών για τα Μαθηματικά μού έδωσε τη δυνατότητα να αναπτύξω τη σκέψη μου σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση των κλασμάτων, ένα σύνολο αριθμών με πολλές ιδιαιτερότητες στη δομή του (Εκπαιδευτικός, Ε τάξη, 12 χρόνια διδακτικής εμπειρίας)*

> *Γνωρίζουμε πλέον καλύτερα το αντικείμενο. Ανατρέξαμε σε σχετική βιβλιογραφία, η οποία μας βοήθησε να κατανοήσουμε την έννοια του κλάσματος και να γίνουμε περισσότερο ευέλικτοι στον τρόπο χειρισμού της έννοιας ώστε αυτή να γίνει κατανοητή από τους μαθητές. Παράλληλα, αντιληφθήκαμε ότι η εννοιολογική κατανόηση στα Μαθηματικά είναι σημαντική και ότι με τις κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες ο μαθητής οδηγείται ευκολότερα στην κατάκτηση της έννοιας. Επισημάναμε ότι το ένα και μοναδικό σχολικό εγχειρίδιο δεν είναι και δεν θα πρέπει να αποτελεί τη μοναδική πηγή δραστηριοτήτων (Εκπαιδευτικός, ΣΤ τάξη, 17 χρόνια διδακτικής εμπειρίας)*

> *Το γεγονός ότι συνεργάστηκα με τους συναδέλφους μου στον σχεδιασμό της δικής μου διδακτικής παρέμβασης, αλλά και των δικών τους, με βοήθησε να κατανοήσω ευκολότερα την πορεία της έννοιας του κλάσματος, καθώς και τους βασικούς της σταθμούς, ανά τάξη….Οι ατέλειωτες συζητήσεις, με ανταλλαγή απόψεων και ιδεών για την οργάνωση των συγκεκριμένων διδακτικών παρεμβάσεων, ανατροφοδότησε τις διδακτικές μου πρακτικές...Η παρακολούθηση διδασκαλιών άλλων συναδέλφων και οι συζητήσεις που ακολούθησαν στην ομάδα, βοήθησαν πολύ τον αναστοχασμό μου (Εκπαιδευτικός, Ε τάξη, 12 χρόνια διδακτικής εμπειρίας)*

Σύμφωνα με τους εκπαιδευτικούς οι μαθητές υποστηρίχθηκαν στην κατανόηση του εννοιολογικού σκέλους της μαθηματικής γνώσης μέσω δραστηριοτήτων στις οποίες εμπλέκονταν ενεργά.

> *Οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να εμπλακούν σε μια πρωτόγνωρη διαδικασία όπου το μάθημα ήταν σχεδιασμένο αποκλειστικά γι' αυτούς. Είχαν την ευκαιρία να συζητήσουν, να χρησιμοποιήσουν χειραπτικά υλικά και διαφορετικά μοντέλα. Δεν*

θεώρησαν ότι έκαναν «μαθηματικά», αλλά μπήκαν σε μια διαδικασία πολύ διαφορετική από τη συνηθισμένη (Εκπαιδευτικός, Α τάξη, 11 χρόνια διδακτικής εμπειρίας)

Τέλος, οι προοπτικές αυτής της προσέγγισης προσδιορίστηκαν από τους εκπαιδευτικούς ως εξής:

Οι προοπτικές που έχει αυτή η προσέγγιση είναι η μεγαλύτερη αυτονομία του εκπαιδευτικού. Αυτό όμως που είναι απαραίτητο είναι η εποπτεία και η συνεχής επιμορφωτική βοήθεια στην πράξη (Εκπαιδευτικός, ΣΤ τάξη, 17 χρόνια διδακτικής εμπειρίας)

Θεωρώ ότι η προοπτική τώρα αρχίζει. Αν συνεχίσουμε να ψάχνουμε, να μελετούμε και να επιλέγουμε με βάση τους στόχους που θέτουμε, μπορούμε να φέρουμε τους μαθητές πιο κοντά στην επιστήμη των Μαθηματικών (Εκπαιδευτικός, ΣΤ τάξη, 21 χρόνια διδακτικής εμπειρίας)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

American Educational Research Association. (2000). *Lesson study: The Core of Japanese Professional Development*. New Orleans, DC: AERA.

Lewis, C. et al. (2003). Lesson study and teachers' knowledge development: collaborative critique of a research model and methods. *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, Chicago.

Murata, A. & Takahashi, A. (2002). Vehicle to connect theory research and practice: How teachers thinking changes in district level Lesson study on Japan. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Taylor, A. et al. (2005). Lesson study: A professional Development Model for Mathematics Reform. *The rural educator* (Winter), 17-22.

Van de Walle, J. (2005*). Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία* (μετάφραση). Αθήνα: Τυπωθήτω – Γ. Δαρδάνος.

ΠΡΟΤΑΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΕ ΑΡΙΘΜΟΜΗΧΑΝΕΣ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Μαρία Παπαθεοδώρου, μεταπτυχιακή φοιτήτρια, εκπαιδευτικός ΠΕ70
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας - Φλώρινα
mariapapateo@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή έχει δημιουργηθεί ένα μικρό αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών που επικεντρώνεται στην εισαγωγή των αριθμομηχανών στο μάθημα των μαθηματικών, παρουσιάζοντας την όχι μόνο ως υπολογιστικό βοήθημα αλλά αναδεικνύοντας και την διδακτική λειτουργία που μπορεί να έχει. Η ανάλογη έρευνα έχει στόχο να αναδείξει τα οφέλη από τη χρήση της αριθμομηχανής στο μάθημα των μαθηματικών. Να γνωρίσει στους δασκάλους του δημοτικού σχολείου ένα νέο τρόπο σκέψης επίλυσης των προβλημάτων και στρατηγικές για τη λύση των νοερών υπολογισμών. Μέσα από την εισαγωγή νέων δραστηριοτήτων ή και συμπληρωματική παρέμβαση σε δραστηριότητες του βιβλίου με αντικατάσταση, ή τροποποίησή τους ο εκπαιδευτικός επιλέγει μόνος του πως θα εργαστεί ανάλογα με τους στόχους του κάθε μαθήματος.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΟΜΗΧΑΝΩΝ ΣΤΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αφού μελετήθηκαν και αναλύθηκαν τα αναλυτικά προγράμματα της Ολλανδίας, του Ηνωμένου Βασιλείου και της Ελλάδας, σχεδιάστηκε η παρούσα πειραματική πρόταση. Επιλέχθηκαν δραστηριότητες και ασκήσεις που να συμβαδίζουν με τα σχολικά εγχειρίδια, κάποιες τροποποιήθηκαν και άλλες συμπληρώθηκαν με γνώμονα πάντοτε την ύλη που διδάσκεται ο μαθητής στο ελληνικό σχολείο, λαμβάνοντας υπόψη τις θέσεις, τις προτάσεις, τους στόχους και τους σκοπούς του ΔΕΠΠΣ.

Η πειραματική πρόταση - εισαγωγή των αριθμομηχανών στο Αναλυτικό πρόγραμμα ακολουθεί τις εξής Τροχιές:

1. Αριθμοί και πράξεις: πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση, κλάσματα, δεκαδικοί αριθμοί.
2. Μετρήσεις.
3. Επίλυση προβλήματος.
4. Γεωμετρία.
5. Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων.
6. Λόγοι και αναλογίες.
7. Εξισώσεις.

Οι Τροχιές ως ενότητες περιεχομένου εξελίσσονται μέσα από έξι (6) Επίπεδα μάθησης, τα οποία αντικατοπτρίζουν τις έξι τάξεις του ελληνικού Δημοτικού σχολείου, αλλά όχι με απόλυτο τρόπο. Σε κάθε τροχιά έχουμε τα Επίπεδα Μάθησης που αναμένεται να αποκτήσουν οι μαθητές και καθορίζουν τις ικανότητες τους.

Τα Επίπεδα περιέχουν στόχους και δραστηριότητες για κάθε ενότητα και είναι δομημένα με ιεραρχικό τρόπο, προχωρούν προοδευτικά και τα όριά τους είναι δυσδιάκριτα. Η πλήρης κάλυψη ενός Επιπέδου μπορεί να γίνει σε δυο ή περισσότερες τάξεις, προσφέροντας την ευελιξία στον εκπαιδευτικό να επιτύχει τους στόχους του με ένα ελαστικό χρονοδιάγραμμα. Οι δραστηριότητες να μπορούν να διαφοροποιηθούν ανάλογα με το επίπεδο και τις ιδιαιτερότητες των μαθητών, τους στόχους του μαθήματος, τα ενδιαφέροντα των μαθητών, την κρίση του εκπαιδευτικού. Μπορεί μέσα στην Τροχιά να έχουμε παρόμοιες δραστηριότητες αλλά να τις συναντούμε σε διαφορετικό Επίπεδο Μάθησης.

Παράδειγμα 1

Τροχιά 1: Αριθμοί και Πράξεις: πρόσθεση και αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση
Διαίρεση ακέραιων αριθμών με ή χωρίς υπόλοιπο

Τάξη Γ’

Ενότητα 1η Κεφάλαιο 6 Από το Τετράδιο Εργασιών Άσκηση 5

Στόχοι: 1.1 1.2 1.3 1.4 1.12 1.20 1.21 1.22
1.1 Καθαρίζουν την οθόνη και μνήμη πριν από την έναρξη ενός υπολογισμού.
1.2 Αναγνωρίζουν τη λειτουργία των βασικών πλήκτρων της αριθμομηχανής, αριθμούς και σύμβολα [+], [-], [=].
1.3 Εξοικειώνονται με την εισαγωγή και τη μετατροπή των αριθμών στην αριθμομηχανή
1.4 Χρησιμοποιούν μια σταθερή ακολουθία σε μια αριθμομηχανή για να προσθέτουν ή να αφαιρούν επανειλημμένα
1.12 Κατανοούν τη σημαντικότητα της αξία θέσης των αριθμών και στην αριθμομηχανή
1.20 *Παρακολουθούν τους υπολογισμούς και καταγράφουν τη μέθοδο που χρησιμοποίησαν*
1.21 Χρησιμοποιούν μια σταθερή ακολουθία για να προσθέτουν ή να αφαιρούν επανειλημμένα, είναι τρόπος για να προκύψουν τα πολλαπλάσια και βοηθάει τα παιδιά στον προσδιορισμό του τρόπου διεξαγωγής των αριθμών στην προπαίδεια
1.22 Κατανοούν ότι η συνεχής αφαίρεση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξει ότι η διαίρεση είναι επαναλαμβανόμενες αφαιρέσεις

Στο τετράδιο εργασιών οι μαθητές λύνουν το Πρόβλημα :
« Ο Γιώργος έχει 27 αυτοκινητάκια. Τα μοιράζει εξίσου σε 3 κουτιά. Πόσα αυτοκινητάκια θα έχει το κάθε κουτί;» ζητούμε να λύσουν το πρόβλημα από την αρχή με την αριθμομηχανή, χωρίς τη χρήση του πλήκτρου (÷), αφού δεν το έχουμε διδάξει.
Στην άσκηση αυτή θα πρέπει να καταγράψουν στο τετράδιό τους τις πράξεις που κάνουν ταυτόχρονα με τους υπολογισμούς στην αριθμομηχανή.

27	-	9	=	18	-	9	=	9	-	9	=	0

Θα πρέπει να δημιουργήσουν το παρακάτω σχήμα:
πριν πατήσουν το [=] μπορούμε να ζητούμε να υπολογίζουν νοερά το αποτέλεσμα
Εμείς μπορούμε να τους δείξουμε και τον εξής πιο σύντομο τρόπο:

27	-	9	=	18	=	9	=	0

Τους ζητούμε να προσέξουν το εξής: *Όσα είναι τα κουτιά που μοιράσατε τα αυτοκινητάκια τόσες είναι και οι φορές που πατήσατε το [=], τι σημαίνει αυτό;*

- Ο δάσκαλος μπορεί να τροποποιήσει το πρόβλημα και να διδάξει και τη διαίρεση με υπόλοιπο, π.χ. «Ο Γιώργος έχει 30 αυτοκινητάκια. Μοιράζει από 9 σε κάθε κουτί. Πόσα κουτιά θα χρησιμοποιήσει; Θα του περισσέψει κανένα;» Σε αυτή την περίπτωση θα δημιουργηθεί το εξής σχήμα:

30	-	9	=	21	-	9	=	12	-	9	=	3

Τάξη: Στ’

Τροχιά 1: Αριθμοί και Πράξεις: πρόσθεση και αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση

Στόχοι: 1.4 1.12 1.16 1.18 1.20 1.22 1.23 1.27 8.4

1.4 Χρησιμοποιούν μια σταθερή ακολουθία σε μια αριθμομηχανή για να προσθέτουν ή να αφαιρούν επανειλημμένα
1.12 Κατανοούν τη σημαντικότητα της αξία θέσης των αριθμών και στην αριθμομηχανή
1.16 Αναγνωρίζουν τη λειτουργία των πλήκτρων της αριθμομηχανής [x], [÷]
1.18 Μαθαίνουν να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά μια αριθμομηχανή για τον υπολογισμό και αναγνωρίζουν το πώς και πότε πρέπει να το πράξουν
1.20 *Παρακολουθούν τους υπολογισμούς και καταγράφουν τη μέθοδο που χρησιμοποίησαν*
1.22 Κατανοούν ότι η συνεχής αφαίρεση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξει ότι η διαίρεση είναι επαναλαμβανόμενες αφαιρέσεις
1.23 Επικεντρώνονται στην επίλυση του προβλήματος και όχι στην διαδικασία εκτέλεσης των πράξεων
1.27 Κατανοούν τη διαφορά μεταξύ του να καταγράφουν τη μέθοδο που χρησιμοποίησαν και να περιγράφουν τα βήματα που έκαναν με την αριθμομηχανή
8.4 Ασκούνται στη διαίρεση με υπόλοιπο και στον υπολογισμό της επαλήθευσής της, σύμφωνα με τον τύπο της εξίσωσης $\Delta = \delta \times \pi + \upsilon$

Ο Δάσκαλος δίνει ανάλογο πρόβλημα με αυτό της Γ' τάξης:
«Το δημοτικό σχολείο θα πάει τους 275 μαθητές του εκδρομή στο βουνό. Έτσι το τουριστικό γραφείο έστειλε λεωφορεία. Το κάθε λεωφορείο χωράει 52 μαθητές. Πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν για την εκδρομή;»
Αρχικά θα ζητήσουμε να το λύσουν μόνοι τους οι μαθητές με την αριθμομηχανή, το πιθανό λάθος τους θα είναι να κάνουν απευθείας τη διαίρεση που θα τους δώσει δεκαδικό αριθμό:
275 : 52 = 5,2884615
Συζητούμε στην τάξη για το αποτέλεσμα και ψάχνουμε να βρούμε σωστό τρόπο λύσης με τη χρήση της αριθμομηχανής. Ταυτόχρονα τους ζητούμε να το καταγράψουν και στο τετράδιο τους. Έτσι θα δημιουργηθεί το σχήμα:

275	-	52	=	223	-	52	=	171	-	52	=	119	-	52	=	67	-	52	=	15

Ως επαλήθευση τους δείχνουμε το σύντομο τρόπο:

275	-	52	=	223	=	171	=	119	=	67	=	15

- Επιπλέον άσκηση για τη διαίρεση με υπόλοιπο είναι να κάνουν εξισώσεις με τον τύπο $\Delta = \delta \times \pi + \upsilon$.
  Δίνουμε τα παραδείγματα: …. : 8 = 11, υπόλοιπο 5 76: … = 25, υπόλοιπο 1

Παράδειγμα 2

Τροχιά 1: Αριθμοί και Πράξεις: πρόσθεση και αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση
Το παιχνίδι της σπασμένης Αριθμομηχανής

Τάξη Γ' και Τάξη Στ'

Στόχοι: 1.12 1.13 1.17 1.20
1.12 Ενισχύεται η εξάσκηση τους στη χρήση των νοερών υπολογισμών
1.13 Ενισχύεται η εξάσκηση τους στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς
1.17 Αναλύουν αριθμούς και αξιοποιούν την ανάλυση για να κάνουν υπολογισμούς
1.20 *Παρακολουθούν τους υπολογισμούς και καταγράφουν τη μέθοδο που χρησιμοποίησαν*

Αυτό το παιχνίδι μπορεί να έχει πολλές παραλλαγές και πολλούς τρόπους επίλυσης.

1ο Παράδειγμα: Έστω ότι χάλασε το πλήκτρο 2 της αριθμομηχανής, πώς θα κάνετε τις παρακάτω πράξεις μόνο με την αριθμομηχανή; Να σημειώσετε στο τετράδιο σας πως σκεφτήκατε:
222 x 4 = 424 x 8 = 116 x 2 = 620 + 222 = 2200 x 3 =
525 x 3 = 138 + 1200 = 3200 : 40 = 282 + 540 =
Ανάλογα με την τάξη που έχει ο δάσκαλος διαμορφώνει και το επίπεδο δυσκολίας των πράξεων.
2ο Παράδειγμα:
Η αριθμομηχανή είναι σπασμένη.
Μόνο αυτά τα πλήκτρα μπορούν να λειτουργήσουν.
Μπορείς να σχηματίσεις κάθε αριθμό από το 1 έως το 25;

2	5	6	x	-	+	=

Παράδειγμα 3

Τροχιά 2: Μετρήσεις Μέτρηση νομισμάτων
Τάξη Γ’
Στόχοι: 3.1 3.2 3.3 3.4 3.1 Εξασκούνται στη χρήση των κερμάτων του ευρώ στη δεκαδική μορφή τους 3.2 Ενισχύεται η εξάσκηση τους στη χρήση των νοερών υπολογισμών 3.3 Κατανοούν την απουσία του «0» (μηδέν) ως τελευταίου ψηφίου στους δεκαδικούς αριθμούς στην οθόνη της αριθμομηχανής 3.4 Εξοικειώνονται με την εισαγωγή και τη μετατροπή των αριθμών σε δεκαδική μορφή στην αριθμομηχανή
Μαθαίνουν πώς να χειρίζονται τις δεκαδικές υποδιαιρέσεις του ευρώ: Από το παράρτημα του βιβλίου τους οι μαθητές κόβουν τα χρήματα και νομίσματα που απεικονίζονται. Τους ζητούμε να έχουν μπροστά τους κάποια από αυτά (π.χ. ένα 5-ευρω, 2-ευρω, 20-λεπτο, 2-λεπτο) τους ρωτούμε «Πόσα ευρώ είναι;» και αφού το λύσουν με το νου τους, ζητούμε να το επαληθεύσουν με την αριθμομηχανή. Το πιο πιθανό είναι να δυσκολευτούν οι μαθητές γιατί δεν γνωρίζουν ακόμη ότι τα λεπτά του ευρώ γράφονται με δεκαδική μορφή. Το αναμενόμενο λανθασμένο αποτέλεσμα που μπορεί να δώσουν είναι: «Έχω 29 ευρώ». Θα προσπαθήσουν λοιπόν, να κατανοήσουν ότι τα κέρματα μικρότερης αξίας του ευρώ θα πρέπει να τα χειριστούν με άλλον τρόπο. Έτσι με την καθοδήγηση του δάσκαλου που θα τους εξηγήσει για τις υποδιαιρέσεις και τη χρήση της δεκαδικής υποδιαστολής θα μπορέσουν να φτάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 4

Τροχιά 4 : Επίλυση Προβλήματος
Λύνουν μεγαλύτερα και σύνθετα προβλήματα: Επειδή κάποια προβλήματα είναι σύνθετα και μεγάλα, προτείνεται η χρήση της αριθμομηχανής ώστε οι μαθητές να επικεντρωθούν στο πρόβλημα και όχι στους υπολογισμούς. Όσο βασική, όμως, και αν είναι η παρουσία των αριθμομηχανών σε τέτοια προβλήματα, τα παιδιά πρέπει πρώτα να ακολουθήσουν το παρακάτω: ▪ Αναλύω την κατάσταση (Ποιο είναι το πρόβλημα) ▪ Οργανώνω τους υπολογισμούς (Τι πρέπει να γίνει) ▪ Καταγράφω το σχέδιο των υπολογισμών (Ποιοι είναι οι απαραίτητοι χειρισμοί) ▪ Πραγματοποιώ τους υπολογισμούς Σε κάθε περίπτωση οι μαθητές θα πρέπει να καταγράψουν στο τετράδιό τους τον τρόπο λύσης που θα ακολουθήσουν με ένα σχηματικό τρόπο. Διαφορετικά υπάρχει περίπτωση να χαθεί ο στόχος τους κατά τη διάρκεια των υπολογισμών. Το προηγούμενο βασίζεται στο σχήμα: 

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Τύπας, Γ. (2005). *Διδακτικό Πακέτο Μαθηματικών στο Επιμόρφωση Σχολικών Συμβούλων και Εκπαιδευτικών Πρωτοβάθμιας και Προσχολικής Εκπαίδευσης στο ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ.* Αθήνα, Π.Ι.

ΦΕΚ 1336, τ.Β΄, (2001). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Δημοτικού – Γυμνασίου, Εθνικό Τυπογραφείο, Αθήνα.

Cabanilla-Pedro L. A. (2006), Using Calculators in Primary Mathematics. *Seameo Recsam*, Penang, Malaysia. www.recsam.edu.my/html/online

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM (2003). The use of technology in the learning and teaching of mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shiel,G., Perkins, R., Close, S., Oldham, E. (2007). PISA Mathematics: A Teacher's Guide. *Department of Education and Science*.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). *Children Learn Mathematics*. Εκδόσεις: Sence Publishers.

Van de Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Μια Εξελικτική Διδασκαλία.* Επιμελητής: Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος. Εκδόσεις: Τυπωθήτω. Αθήνα.

http://pi-schools.sch.gr/dimotiko/

http://nationalstrategies.standards.dcsf.gov.uk/primary/primaryframework/mathemati/

http://curriculum.qcda.gov.uk/new-primary-curriculum/index.aspx

http://blog.personalisededucationnow.org.uk/2009/11/25/dcsf-new-primary-curriculum-from-2010/

http://www.nap.pi.ac.cy/

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΤΟΥ PASCAL: ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΤ΄ ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Κοτσακώστα Μαρία
Σχολ. Σύμβουλος Π.Ε. 11ης Περιφ. Ν. Θεσ/νίκης
M.A. in Mathematics Education
maria25482000@yahoo.com

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη συγκεκριμένη εργασία παρουσιάζεται μια διδακτική πρόταση για ένα σχέδιο εργασίας, που μπορεί να πραγματοποιηθεί στα πλαίσια του μαθήματος των Μαθηματικών και της Ευέλικτης Ζώνης. Αξιοποιώντας την Ιστορία των Μαθηματικών και τα κεφάλαια του σχολικού εγχειριδίου που αναφέρονται στα «Μοτίβα»[1] τα παιδιά μπορούν να ασχοληθούν με το τρίγωνο του Pascal, να ανακαλύψουν σχέσεις και μοτίβα, να γνωρίσουν τον Blaise Pascal και το έργο του και μέσα από αυτή τη διερεύνηση να ανακαλύψουν τη γοητεία των Μαθηματικών.

1. ΣΚΟΠΟΣ & ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ

Γενικός Σκοπός: Να αγαπήσουν τα Μαθηματικά και να διαισθανθούν τη γοητεία τους.

Επιμέρους Στόχοι:

✓ Να γνωρίσουν το Γάλλο Μαθηματικό Blaise Pascal, τη βιογραφία και το έργο του.

✓ Να γνωρίσουν τον τόπο καταγωγής του, αλλά και τις πόλεις της Γαλλίας, στις οποίες έζησε. Να γνωρίσουν τις εξελίξεις και τα γεγονότα που συνέβησαν στην Ευρώπη την εποχή εκείνη.

✓ Να γίνουν οι ίδιοι μικροί ερευνητές και να ανακαλύψουν «ξανά» τις ιδιότητες του τριγώνου του Pascal.

✓ Να γνωρίσουν την «Πασχαλίνα», την πρώτη αριθμομηχανή που επινόησε ο ίδιος και να διαισθανθούν την αξία της για τους υπολογισμούς.

✓ Να ασκηθούν στην επικοινωνία (ομιλία, ακρόαση, ανάγνωση και γραφή) τόσο με την ελληνική όσο και με την αγγλική γλώσσα.

✓ Να ασκηθούν στην ικανότητα επίλυσης προβλήματος.

✓ Να αναπτύξουν τη δεξιότητα χρήσης του διαδικτύου, καθώς και την ικανότητα εξεύρεσης, αξιολόγησης και παρουσίασης, σχετικών με το θέμα, πληροφοριών.

✓ Να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά δεν είναι μια συμπαγής γνώση που προϋπήρχε, αλλά μια γνώση που ανακαλύφθηκε διαχρονικά και διαμορφώνεται συνεχώς.

✓ Να μάθουν να συνεργάζονται σε ομαδικές εργασίες.

2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ

Είδος διδακτικής πρακτικής: Σχέδιο εργασίας – project.

Μέθοδος διδασκαλίας: Ομαδοσυνεργατική. Στην παρούσα εργασία θα χωρίσουμε τους μαθητές μας σε 4 ομάδες.

Δραστηριότητες:

(Α΄ κύκλος εργασιών) Όλες οι ομάδες προσπαθούν να ανακαλύψουν το μοτίβο που διέπει το τρίγωνο του Pascal με σκοπό την περαιτέρω κατασκευή του. Τα παιδιά ανακαλύπτουν ή θυμούνται από τη Γ΄ τάξη, όπου έχουν συναντήσει το τρίγωνο του Pascal[3], ότι από την τρίτη γραμμή και κάτω κάθε αριθμός, εκτός από τις μονάδες, βρίσκεται όταν προσθέσουμε τους δύο αριθμούς της προηγούμενης γραμμής οι οποίοι είναι πιο κοντά του. Προσθέτουν τους αριθμούς σε κάθε γραμμή και διαπιστώνουν ότι όλα τα αθροίσματα είναι δυνάμεις του 2. Βρίσκουν ποιοι αριθμοί επαναλαμβάνονται στο τρίγωνο.(Φύλλο Εργασίας (Φ.Ε.) 1, Παράρτημα Ι). (Μαθηματικά – Ιστορία των Μαθηματικών)[2]

(Β΄ κύκλος εργασιών) Από το βιβλίο "Mathematicians are people, too" (Reimer, L. & Reimer, W., 1995, σελ. 53) δίνεται σε κάθε ομάδα ένα κείμενο στα αγγλικά, σχετικά με τη ζωή και το έργο του Pascal[4]. Τα παιδιά δουλεύουν ομαδικά και σε συνεργασία με τον/την καθηγητή/ρια των Αγγλικών. Κάθε ομάδα φτιάχνει μια περίληψη από το κείμενο που της δόθηκε, βάζει τίτλο και υπογραμμίζει με έντονο μαρκαδόρο λέξεις ή φράσεις που της έκαναν εντύπωση, όπως «Πατέρας της εποχής των υπολογιστών», γλώσσα Pascal, κ.ά. Τα παραπάνω ανακοινώνονται μέσα στην τάξη και αποφασίζουν να συγκεντρώσουν περισσότερο υλικό (αναζήτηση στο διαδίκτυο αλλά και σε έντυπο υλικό). (Γλώσσα – Ελληνικά – Αγγλικά)

Α΄ ομάδα: Ασχολείται με τη βιογραφία του Pascal. Οι μαθητές/ριες βρίσκουν εικόνες, επιπλέον πληροφορίες για τη ζωή και το έργο του και συνθέτουν τη βιογραφία του. Τα παιδιά καταγράφουν τη βιογραφία του σε χαρτί του μέτρου. Φτιάχνουν επίσης ένα κατάλογο με τα σημαντικότερα επιτεύγματά του.(Γλώσσα)

Β΄ ομάδα: Ασχολείται με τον τόπο καταγωγής του Pascal, το Κλερμόν της Γαλλίας. Επίσης συγκεντρώνει πληροφορίες για το Παρίσι και τη Ρουέν, πόλεις στις οποίες εγκαταστάθηκε σταδιακά ο Pascal. Στο τέλος φτιάχνουν το χάρτη της Γαλλίας τοποθετώντας τις πόλεις που γεννήθηκε και έζησε ο Pascal. (Γεωγραφία[5] – Ιστορία)

Γ΄ ομάδα: Ασχολείται με τα σημαντικότερα γεγονότα που συνέβησαν στην Ευρώπη κατά τους Νεότερους Χρόνους και ιδιαίτερα κατά το 17ο αιώνα. Οι μαθητές/τριες

μελετούν την Α΄ ενότητα από το βιβλίο της Ιστορίας τους και συγκεντρώνουν πληροφορίες. Σε συνεργασία με την Α΄ ομάδα φτιάχνουν μια ιστορική γραμμή που παραλληλίζει τη ζωή και τα επιτεύγματα του Pascal με σημαντικά γεγονότα που συνέβαιναν την εποχή εκείνη στην Ευρώπη. (Ιστορία –Ιστορία των Μαθηματικών)

Δ΄ ομάδα: Ασχολείται και συγκεντρώνει εικόνες και πληροφορίες για την «Πασχαλίνα», την πρώτη υπολογιστική μηχανή, που κατασκεύασε ο Pascal προκειμένου να βοηθήσει τον φοροεισπράκτορα πατέρα του με τους υπολογισμούς. Τα παιδιά μαθαίνουν πώς λειτουργούσε η αριθμομηχανή. Τους ζητείται να φτιάξουν το χρονοδιάγραμμα της εξέλιξης των υπολογιστικών μηχανών: Από τον άβακα στον σημερινό Ηλεκτρονικό Υπολογιστή. (Ιστορία των Μαθηματικών)

(Γ΄ κύκλος εργασιών) Όλες οι ομάδες ασχολούνται με το τρίγωνο του Pascal. Α΄ ομάδα: Τρίγωνο του Pascal – Φυσικοί αριθμοί(Φ. Ε. 2, Παράρτημα Ι). Β΄ ομάδα: Τρίγωνο του Pascal – Τρίγωνοι αριθμοί(Φ. Ε. 3, Παράρτημα Ι). Γ΄ ομάδα: Τρίγωνο του Pascal – Αριθμοί του Fibonacci(Φ. Ε. 4, Παράρτημα Ι). Δ΄ ομάδα: Τρίγωνο του Pascal – Πιθανότητες(Φύλλο Εργασίας 5, Παράρτημα Ι). (Ιστορία των Μαθηματικών - Μαθηματικά - Τεχνικά)

Στο τέλος κάθε κύκλου εργασιών παρουσιάζει η κάθε ομάδα το έργο της, ακολουθεί συζήτηση. Πραγματοποιείται διαμορφωτική αξιολόγηση για την πορεία των εργασιών του σχεδίου εργασίας επί του συνόλου, μεταξύ των ομάδων. Μετά την ολοκλήρωση του σχεδίου εργασίας πραγματοποιείται η τελική αξιολόγηση όπου τα παιδιά εκφράζουν τις εντυπώσεις τους, τι αποκόμισαν και τι ακόμα θα ήθελαν να διερευνήσουν.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1.Κεφάλαιο 53ο, 54ο και 55ο του σχολικού εγχειριδίου της Στ΄ τάξης του Δημοτικού. (Κασσώτη Ο. κ.ά.,2006)

2. Σε κάθε κύκλο εργασιών αναγράφονται τα εμπλεκόμενα γνωστικά αντικείμενα.

3. Λεμονίδης Χ. κ.ά.(2006), σελ. 117.

4. Το βιβλίο των Reimer, L. & Reimer, W. (1995) περιλαμβάνει ιστορίες από τη ζωή σπουδαίων Μαθηματικών, διασκευασμένες κατάλληλα για μικρά παιδιά. Ο/η εκπαιδευτικός χωρίζει την ιστορία σε 4 επιμέρους ενότητες και τις δίνει προς επεξεργασία στις ομάδες.

5. Στη Γεωγραφία της Στ΄ τάξης , στη Δ΄ ενότητα, οι μαθητές διδάσκονται για την ήπειρο της Ευρώπης.

6. Τα παιδιά έχουν ξανασυναντήσει τους τρίγωνους αριθμούς στην Ε΄ τάξη, στο Κακαδιάρης Χ. κ.ά. (2011), σελ.37. Τρίγωνοι ονομάζονται οι αριθμοί των οποίων οι μονάδες μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο.

7. Ο Pascal θεωρείται πατέρας της Στατιστικής και της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γαβρίλης, Κ. & Κολυβάς, Σ. (1996). Μερικές από τις ιδιότητες του αριθμητικού τριγώνου του Pascal. *Ευκλείδης Α΄*, κθ(20), 28-30.

Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ. & Χρονοπούλου Γ. (2011). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού. Τετράδιο εργασιών*. γ΄, Αθήνα, Π.Ι.: ΟΕΔΒ.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. & Οικονόμου Θ.(2006). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού*. Αθήνα, Π.Ι.:ΟΕΔΒ.

Καλλιανιώτης, Α., Κολιόπουλος, Ι., Μηνάογλου, Χ. & Μιχαηλίδης, Ι. (2012). *Ιστορία του νεότερου και σύγχρονου κόσμου*. Βιβλίο μαθητή, Αθήνα, Π.Ι.:ΟΕΔΒ.

Κουτσόπουλος, Κ., Σωτηράκου, Μ. & Ταστσόγλου, Μ. (2007). *Γεωγραφία Στ΄ Δημοτικού. Μαθαίνω τη Γη*. Αθήνα, Π.Ι.:ΟΕΔΒ.

Λεμονίδης Χ., Θεοδώρου Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι. & Σπανακά Α. (2006). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού. Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής*. Αθήνα, Π.Ι.:ΟΕΔΒ.

Παπαδάκη, Μ.(1995). Γεωμετρική παράσταση αριθμών. *Ευκλείδης Α΄*, κθ(18), 10-12.

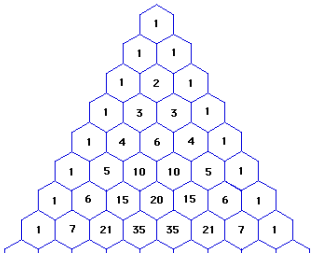
Παπούλια, Κ.(1997). Έτσι ξεκίνησαν οι υπολογιστές. *Ευκλείδης Α΄*, λα(25), 42-44.

Reimer, L. & Reimer, W. (1990). *Mathematicians are people, too*. New Jersey, USA: Dale Saymour Publications.

(http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/pascal_lessons.html)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Φύλλο Εργασίας 1 (http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/pascal_lessons.html)



1.Γνωρίζεις πως ονομάζεται αυτό το τρίγωνο (Σχήμα 1); Γιατί;

2.Μπορείς να συμπληρώσεις την επόμενη γραμμή του τριγώνου;

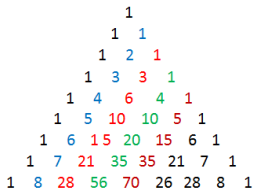
3.Βρήκες το μοτίβο; Μπορείς να το διατυπώσεις με λόγια ή με σχήμα;

Σχήμα1 (Απ'το http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/pascal_lessons.html)

4.Πρόσθεσε τους αριθμούς σε κάθε γραμμή. Τι παρατηρείς; Μπορείς να βρεις το μοτίβο των αθροισμάτων;

5.Υπάρχουν αριθμοί που επαναλαμβάνονται;

Φύλλο Εργασίας 2 (http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/pascal_lessons.html)



1.Παρατήρησε την πρώτη διαγώνια σειρά του τριγώνου του Pascal. Από ποιους αριθμούς αποτελείται;

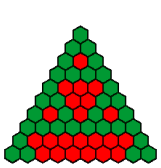
2.Παρατήρησε τη δεύτερη διαγώνια σειρά. Από ποιους αριθμούς αποτελείται; Ποιο μοτίβο διέπει αυτούς τους αριθμούς και πώς ονομάζονται;

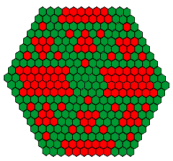
Σχήμα 2

3.Τώρα παρατήρησε τις διαγώνιες σειρές του από δεξιά προς τα αριστερά. Τι παρατηρείς; Μήπως κάποιες σειρές επαναλαμβάνονται;

4. Στους μαθητές μοιράζονται ατομικά φύλλα εργασίας με το τρίγωνο του Pascal (Σχήμα 1). Μπορείς να βάψεις με πράσινο χρώμα τα κελιά των μονών αριθμών και με κόκκινο τα κελιά των ζυγών αριθμών; Το άθροισμα δύο μονών αριθμών τι αριθμός είναι; (Παρατήρησε το τρίγωνο (Σχήμα 3) που μόλις έβαψες και λύσε το παραπάνω δουλεύοντας με χρώματα. Π.χ. το άθροισμα 2 πράσινων κελιών στο τρίγωνο τι αριθμός είναι;) Το άθροισμα δύο ζυγών αριθμών τι αριθμός είναι; Το άθροισμα ενός ζυγού και ενός μονού αριθμού τι αριθμός είναι; (Σχήμα 3)

5. Ζητείται από τους μαθητές της ομάδας να κόψουν τα χρωματισμένα τρίγωνα να τα ενώσουν και να φτιάξουν ένα εξάγωνο όπως στο σχήμα 4. Έτσι φτιάχνουν διάφορα διακοσμητικά με συμμετρικά σχήματα για να στολίσουν την τάξη τους.





Σχήμα 3 **Σχήμα 4** **(Από το http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/pascal_lessons.html)**

Φύλλο Εργασίας 3

1. Φτιάξε το τρίγωνο του Pascal και παρατήρησε την τρίτη διαγώνια σειρά του. Από ποιους αριθμούς αποτελείται; Θυμάσαι μήπως πώς ονομάζονται; Γιατί[6];

2.Μπορείς να παραστήσεις γεωμετρικά τους τρίγωνους αριθμούς όπως στο παράδειγμα (Σχήμα 5):

10 15 21



Σχήμα 5

4.Μπορείς να βρεις το μοτίβο που διέπει τους τρίγωνους αριθμούς; Παρατήρησε τους πρώτους τρίγωνους αριθμούς.(Σχήμα 5): 1ος τρίγωνος αριθμός 1

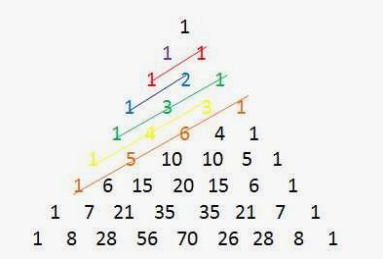
2ος τρίγωνος αριθμός: 1+2=3 3ος τρίγωνος αριθμός: 1+2+3=6

Τι παρατηρείς; Μπορείς να συνεχίσεις; 4ος τρίγωνος αριθμός:
5ος τρίγωνος αριθμός : 6ος τρίγωνος αριθμός:

5.Πόσες τελείες χρειάζονται για να σχηματιστεί ο 6ος τρίγωνος αριθμός από τον 5ο;

6.Πόσες τελείες χρειάζονται να προστεθούν στον 27ο τρίγωνο αριθμό για να σχηματιστεί ο 28ος τρίγωνος αριθμός;

Φύλλο Εργασίας 4



1.Υπολόγισε τα αθροίσματα των διαγώνιων γραμμών: 1, 1, 2, 3, 5, ___, ___, ___, ___, ___, …… Υπάρχει κάποιο μοτίβο που διέπει την ακολουθία των αριθμών; Μπορείς να το διατυπώσεις με λόγια;

Πολύ σωστά! Κάθε αριθμός είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων αριθμών της ακολουθίας!

Σχήμα 6

Αυτή η σειρά των αριθμών λέγεται αλλιώς ακολουθία των αριθμών του Fibonacci ή αριθμοί Fibonacci. Το ήξερες; Βρες πληροφορίες για τους αριθμούς του Fibonacci.

Φύλλο Εργασίας 5 (Γαβρίλης, Κ. & Κολυβάς, Σ., 1996)

1.Παίζουμε Κορώνα(Κ) ή Γράμματα (Γ);

α)Πετώντας ψηλά ένα νόμισμα μπορούμε να φέρουμε γράμμα (Γ) ή κορώνα-κεφάλι (Κ). Εδώ έχουμε δηλ. 2 περιπτώσεις- ενδεχόμενα, Γ ή Κ

1 1

β)Πετώντας ψηλά δύο νομίσματα διαφορετικά (π.χ. πενηντάλεπτο και εικοσάλεπτο) θα έχουμε: Γ, Γ ή Γ, Κ ή Κ, Κ

Κ,Γ

Περιπτώσεις: 1 2 1

γ)Μπορείς να συνεχίσεις το παιχνίδι με 3 και με 4 διαφορετικά νομίσματα; Τι παρατηρείς;

Σωστά! Βλέπουμε να σχηματίζεται μπροστά μας το τρίγωνο του Pascal. Το τρίγωνο αυτό μας δίνει τις πιθανότητες στο παιχνίδι Κορώνα-Γράμματα[7].Για παράδειγμα, όταν πετάμε ψηλά 2 διαφορετικά νομίσματα μπορούμε να έχουμε διάφορα ενδεχόμενα-περιπτώσεις. Συνολικά τα ενδεχόμενα είναι: 1+2+1=4. Η πιθανότητα να πάρουμε ΓΓ είναι 1 στις 4 ή 1/4. Η πιθανότητα να πάρουμε ΓΚ είναι 2 στις 4 ή 2/4 (ΓΚ, ΚΓ). Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε ΚΚ;

δ)Πετώντας 3 διαφορετικά νομίσματα ψηλά, ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε ΓΓΓ και ποια η πιθανότητα να πάρουμε ΚΚ;

Η ΑΝΑ-ΚΑΛΥΨΗ ΤΗΣ ΕΠΙ-ΚΑΛΥΨΗΣ: ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΤΟΥ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟΥ

Κουμουλέντζου Μαρίνα, Λευθεριώτη Μαρία, Παρτσάλη Ελένη, Χρονάκη Άννα

Παιδαγωγικό Τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

marinakki@windowslive.com, mleftherioti@uth.gr, eleni_partsali@yahoo.gr, chronaki@uth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος μας σε αυτή τη διδακτική παρέμβαση ήταν η δημιουργία ενός περιβάλλοντος για την εξοικείωση των παιδιών με την έννοια της επικάλυψης και για την διερεύνηση ερωτημάτων όπως: Τι σημαίνει "επικάλυψη"; Πότε και πού εμφανίζεται; Πώς δημιουργώ επικαλύψεις; Ποια σχήματα μας βοηθούν να φτιάχνουμε "καλές" επικαλύψεις; Μια σειρά από βιωματικές δράσεις οργανώθηκαν, οι οποίες αποσκοπούσαν στην από κοινού συζήτηση με τα παιδιά για τα παραπάνω. Οι δράσεις συγκροτήθηκαν γύρω από την θεματική της πλακόστρωσης μιας πλατείας, η οποία σχετίζεται άμεσα με την έννοια της επικάλυψης (η κάλυψη της επιφάνειας), και έδωσαν έμφαση σε ποικίλους πειραματισμούς με χειραπτικά και ψηφιακά υλικά. Η εφαρμογή της παρέμβασης αυτής μας έδωσε τη δυνατότητα να δούμε ότι τα παιδιά μπορούσαν να συμμετάσχουν ενεργητικά και να εκφράσουν τις ιδέες και τις ανακαλύψεις τους.

ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΣ...

Η σειρά δράσεων που θα παρουσιάσουμε παρακάτω σχεδιάστηκε στο πλαίσιο μαθήματος στο προπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών, το οποίο έχει στόχο την ανάπτυξη διδακτικών παρεμβάσεων, όπου χειραπτικά και ψηφιακά υλικά συνδέονται οργανικά για την βιωματική διερεύνηση μαθηματικών ιδεών με μικρά παιδιά. Η διδακτική μας παρέμβαση αφορά 3 φάσεις και εμπλέκει συνολικά 19 δράσεις εκ των οποίων οι 11 είναι με χειραπτικά υλικά και οι 8 με ψηφιακά. Παράλληλος στόχος μας είναι η διερεύνηση του δυναμικού εφαρμογής αυτών των δράσεων. Τι συμβαίνει όταν σχεδιαστικές ιδέες μπαίνουν σε εφαρμογή; Πώς ανταποκρίνονται τα παιδιά; Στα παρακάτω θα μιλήσουμε για μερικά σημαντικά επεισόδια της εμπειρίας μας.

ΤΙ ΘΑ ΜΠΟΡΟΥΣΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ Η ΕΠΙΚΑΛΥΨΗ; ΓΙΑΤΙ ΜΑΣ ΑΦΟΡΑ;

Βασικός στόχος που διέτρεχε το σύνολο της διδακτικής μας παρέμβασης ήταν να προσεγγιστεί η γνώση με τρόπο διερευνητικό μέσω της ενεργητικής διάδρασης των παιδιών με τα υλικά στα πλαίσιο συνεργατικών δράσεων. Παράλληλα, θεωρήσαμε από την αρχή την εμπλοκή μας ως δεδομένη για την έκβαση της παρέμβασης (ως ενορχηστρωτές αυτής της εμπειρίας). Τα παιδιά αλληλεπιδρώντας μεταξύ τους, αλλά και μαζί μας θα μπορούσαν να έρθουν σε

επαφή με κάποιες πτυχές της μαθηματικής γνώσης. Ελπίζαμε ότι μέσα από το σενάριο που περικλείει τις δράσεις αυτή η επαφή θα γινόταν με έναν τρόπο, που έχει νόημα γι' αυτά, εμπλέκοντάς τα πιο ενεργά με τη μαθησιακή διαδικασία (Αντωνόπουλος, Ζαχάρος και Ραβάνης, 2009, όπ. αναφ. στον Κασσάρα, 2012).

Ο στόχος της πρώτης μας συνάντησης ήταν η πρόκληση του ενδιαφέροντος των παιδιών για την έννοια της επικάλυψης. Συγκεντρώσαμε τα παιδιά στη γωνιά της συζήτησης και αφηγηθήκαμε ένα παραμύθι (βλ. εικόνα 1), το οποίο αναφερόταν σε τρία παιδιά, τα οποία δεν είχαν χώρο να παίξουν κι έπειτα από την άρνηση του δημάρχου να τους φτιάξει μια πλατεία, την έφτιαξαν μόνα τους. Η μυθοπλασία και η πραγματικότητα συναντήθηκαν, αφού τα παιδιά του συγκεκριμένου νηπιαγωγείου δεν είχαν πράγματι ένα διαμορφωμένο χώρο για να παίζουν, γεγονός που συνέβαλε στο να εμπλακούν με ενθουσιασμό και κίνητρο στις μετέπειτα δράσεις. Στη συνέχεια, παρουσιάσαμε στα παιδιά ένα φάκελο σταλμένο από τους τρεις ήρωες. Περιείχε ζωγραφισμένη την πλατεία του παραμυθιού, κάτι το οποίο λειτούργησε ως έναυσμα για συζήτηση. Τα παιδιά κλήθηκαν να παρατηρήσουν την πλατεία και να μιλήσουν για το πώς ήταν φτιαγμένη. Η ερώτηση που τέθηκε ήταν "πώς βάζουμε τις πλάκες;" Ένα παιδί απάντησε τοποθετώντας τα χέρια του το ένα επάνω στο άλλο και τότε διηγηθήκαμε στα παιδιά ένα φανταστικό περιστατικό, κατά το οποίο είχαμε σκοντάψει και είχαμε πέσει σε μια πλατεία, επειδή τα πλακάκια δεν ήταν τοποθετημένα έτσι ώστε το δάπεδο να είναι λείο.



Εικόνα 1

ΔΟΥΛΕΥΟΝΤΑΣ ΜΕ ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

Προκειμένου να διαμορφώσουμε από κοινού το περιεχόμενο της έννοιας της επικάλυψης, παρουσιάσαμε στα παιδιά τρεις εικόνες: μια πλακοστρωμένη πλατεία με λείο δάπεδο, μια πλατεία με αλληλοεπικαλύψεις και μια πλατεία όπου τα πλακάκια αφήνουν κενά (βλ. εικόνες 2, 3, 4). Κλήθηκαν να τις παρατηρήσουν, να τις συγκρίνουν και να αποφασίσουν σε ποια πλατεία, αν περπατούσαμε, δε θα σκοντάφταμε και γιατί. Τα παιδιά συμπέραναν πως μια ασφαλώς πλακοστρωμένη πλατεία, δηλαδή μια σωστά δομημένη επικάλυψη, δεν παρουσιάζει ούτε κενά ούτε αλληλοεπικαλύψεις.


Εικόνα 2


Εικόνα 3


Εικόνα 4

Στο σημείο αυτό προτείναμε στα παιδιά να φτιάξουν τις δικές τους πλακοστρωμένες πλατείες. Η πρώτη δραστηριότητα αφορούσε τη δημιουργία επικαλύψεων σε μια πλατεία με τη χρήση μιας πλάκας σχήματος ορθογώνιου παραλληλόγραμμου. Η δραστηριότητα αυτή αποτελούνταν από τρεις επιμέρους δράσεις, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν με τη χρήση χειραπτικού υλικού σε ζευγάρια και με τη χρήση ψηφιακών μικρόκοσμων σε ατομικό επίπεδο. Τα παιδιά δρούσαν χωρισμένα σε δύο ομάδες που δούλευαν ταυτόχρονα και πέρασαν από όλες τις δράσεις. Η πρώτη δράση αφορούσε την αναπαραγωγή μιας δοσμένης επικάλυψης (βλ. εικόνα 5), η δεύτερη τη συνέχιση ενός μοτίβου (βλ. εικόνα 6) και η τρίτη τη δημιουργία μιας επικάλυψης της αρεσκείας των παιδιών (βλ. εικόνα 7).


Εικόνα 5


Εικόνα 6


Εικόνα 7

Στόχοι της δραστηριότητας αυτής ήταν τα παιδιά να αντιλαμβάνονται και να αναπαράγουν δοσμένα/δεδομένα γεωμετρικά μοτίβα, να χρησιμοποιούν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο για τη δημιουργία επικαλύψεων και να δημιουργούν επικαλύψεις με τη χρήση χειραπτικού υλικού και δραστηριοποιούμενα σε ψηφιακούς μικρόκοσμους επιλέγοντας και μετακινώντας έτοιμα γεωμετρικά σχήματα (Ενότητα: Παιδί και Μαθηματικά και Παιδί και Πληροφορική, ΔΕΠΠΣ, 2003). Ενθαρρύναμε τα παιδιά με κάθε ευκαιρία να ξαναθυμούνται τα γνωρίσματα μιας ασφαλώς πλακοστρωμένης πλατείας, για την καλύτερη εμπέδωση αυτών και για τη διευκόλυνση των δράσεων δημιουργίας επικάλυψης.

Επινοήθηκε ένα παιχνίδι, κατά το οποίο αξιοποιήθηκαν πλαστικά ορθογώνια τούβλα μεγάλου μεγέθους για τη δημιουργία επικάλυψης (βλ. εικόνα 8).



Εικόνα 8

Ένα περιστατικό, το οποίο μας έκανε θετική εντύπωση και θεωρούμε πως καταδεικνύει την αποτελεσματικότητα της διδακτικής μας παρέμβασης, ήταν το γεγονός ότι μια μαθήτρια αφού είχε πειραματιστεί με τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα χαρτονάκια, κατευθύνθηκε αυθόρμητα σε έναν πίνακα και ζωγράφισε ορθογώνια σχήματα τοποθετημένα το ένα πλάι στο άλλο και είπε;

Μαθήτρια: Πιστεύω ότι θα τα καταφέρω!

κατά την αναμονή της να πραγματοποιήσει τη δεύτερη δράση της (συνέχιση μοτίβου) στον υπολογιστή. Τα λόγια της θεωρούμε ότι φανερώνουν μια αίσθηση σιγουριάς που της προσέφερε η εμπλοκή της στις προηγούμενες δράσεις.

ΕΠΙΚΑΛΥΨΕΙΣ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟ, ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ, ΚΥΚΛΟ ΚΑΙ ΕΞΑΓΩΝΟ…

Κατά την έναρξη της δεύτερης συνάντησης πραγματοποιήθηκε μια συλλογική, αναστοχαστικού τύπου συζήτηση για τις δράσεις της προηγούμενης ημέρας. Κατά το Vygotsky, *"το μανθάνον υποκείμενο αντιλαμβάνεται τη νέα γνώση και τη συνδέει με την προϋπάρχουσα, λειτουργώντας σε αλληλεπίδραση με τα άλλα άτομα στην κατασκευή νοημάτων"* (Τζεκάκη, 2007, σελ. 68). Στο τέλος της συζήτησης είπαμε στα παιδιά πως ο τρόπος, με τον οποίο φτιάξαμε τις πλατείες, στα μαθηματικά ονομάζεται επικάλυψη.

Στη συνέχεια κλήθηκαν να διατυπώσουν προβλέψεις αναφορικά με το ποια από τα γνωστά γεωμετρικά σχήματα θα μας βοηθούσαν να φτιάξουμε μια καλή κι ασφαλή πλακόστρωση σε μια πλατεία. Με άλλα λόγια, ποια γεωμετρικά σχήματα μπορούν από μόνα τους να δημιουργήσουν επικάλυψη. Τα παιδιά ανέφεραν το τρίγωνο, το τετράγωνο, τον κύκλο και το ρόμβο.

Προκειμένου να επιβεβαιωθούν ή να διαψευσθούν οι υποθέσεις τους, τα παιδιά παροτρύνθηκαν να πειραματιστούν με το τρίγωνο, το τετράγωνο, τον κύκλο και το εξάγωνο. Τα παιδιά χωρισμένα σε δύο ομάδες δραστηριοποιήθηκαν εκ περιτροπής, στη γωνιά της συζήτησης πειραματιζόμενα με μικρά χαρτόνια σε σχήμα τετραγώνου, τριγώνου, κύκλου κι εξαγώνου για την επικάλυψη ενός φύλλου Α4 καθώς και στους υπολογιστές στα κατάλληλα διαμορφωμένα λογισμικά περιβάλλοντα σε ατομικό επίπεδο και στις δύο συνθήκες (βλ. εικόνες 9, 10, 11, 12).


Εικόνα 9


Εικόνα 10


Εικόνα 11


Εικόνα 12

Στόχοι της δραστηριότητας αυτής ήταν να χρησιμοποιήσουν γεωμετρικά σχήματα (τετράγωνο, τρίγωνο, κύκλο, εξάγωνο), για να διαπιστώσουν αν μπορούν αυτά να δημιουργήσουν επικάλυψη και να παρατηρήσουν και να αναγνωρίσουν ποια από τα γεωμετρικά σχήματα (τετράγωνο, τρίγωνο, κύκλος, εξάγωνο) δημιουργούν επικάλυψη. (Ενότητα: Παιδί και Μαθηματικά, ΔΕΠΠΣ, 2003).Όσον αφορά τη δραστηριοποίηση στους ψηφιακούς μικρόκοσμους στόχος ήταν τα παιδιά να επιλέγουν και να μετακινούν έτοιμα γεωμετρικά σχήματα, για να διαπιστώσουν αν μπορούν αυτά να δημιουργήσουν επικάλυψη. (Ενότητα: Παιδί και Πληροφορική, ΔΕΠΠΣ,2003). Κατά τη δραστηριοποίηση των παιδιών στους ψηφιακούς μικρόκοσμους παρατηρήθηκε ότι η στατικότητα των γεωμετρικών σχημάτων στο μικρόκοσμο λειτούργησε ως βοηθητικός παράγοντας στη διεξαγωγή αυτής της δράσης, πράγμα το οποίο δε συνέβαινε με τον ίδιο τρόπο όταν χρησιμοποιούσαν το χειραπτικό υλικό.

Έπειτα από την ολοκλήρωση του πειραματισμού με όλα τα σχήματα, τα παιδιά ενθαρρύνονταν να σκεφτούν εάν θα μπορούσαν να περπατήσουν σε μια πλατεία φτιαγμένη από τρίγωνα, τετράγωνα, εξάγωνα και κύκλους αντίστοιχα και γιατί. Τα παιδιά στην περίπτωση του τριγώνου, του τετραγώνου και του εξαγώνου ανέφεραν πως μπορούν να μας βοηθήσουν να φτιάξουμε μια ασφαλή πλατεία, ενώ στην περίπτωση του κύκλου αντιλαμβάνονταν πως η πλακόστρωση μιας πλατείας με τη χρήση του σχήματος αυτού δε θα ήταν εφικτή λόγω της ύπαρξης κενών. Η συζήτηση συνεχίστηκε,

Εκπαιδευτικός: Κι αν βάλουμε αλλιώς τους κύκλους για να γίνει μια πλατεία όπως τη θέλουμε;

Μαθητής: Δε γίνεται, γιατί θα έπεφτε ο ένας κύκλος επάνω στον άλλον.

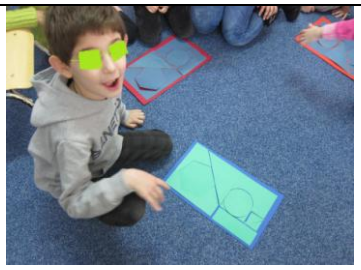
….κάτι το οποίο αντανακλούσε την κατανόηση της έννοιας της επικάλυψης από το παιδί. Στις περιπτώσεις που οι κατασκευές με τρίγωνο, τετράγωνο κι εξάγωνο είχαν κενά ή αλληλοεπικαλύψεις, τα παιδιά καλούνταν να φανταστούν και να πουν τι θα γινόταν σε περίπτωση που περπατούσαν επάνω στις πλατείες αυτές. Τα περισσότερα παιδιά κατάφερναν να ανακαλέσουν στη μνήμη τους τις αναγκαίες συνθήκες για τη δημιουργία μιας επικάλυψης κι έτσι προέβαιναν στη διόρθωση των αρχικών τους κατασκευών.

ΤΙ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΚΑΤΑΦΕΡΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΜΑΖΙ;

Στόχος της τρίτης συνάντησης ήταν τα παιδιά να διαπιστώσουν αν και πώς τα διάφορα σχήματα συνδυαζόμενα μεταξύ τους μπορούν να δημιουργήσουν επικάλυψη, να χρησιμοποιήσουν γεωμετρικά σχήματα, για να δημιουργήσουν επικάλυψη, να αναπαράγουν μια δεδομένη επικάλυψη και να δημιουργούν επικαλύψεις δραστηριοποιούμενα σε ψηφιακούς μικρόκοσμους. Για να πλαισιωθούν οι δράσεις που ακολούθησαν και για να αποκτήσουν νόημα για τα παιδιά τους είπαμε πως το προηγούμενο βράδυ ένα βαρύ φορτηγό είχε περάσει πάνω από την πλατεία του παραμυθιού και είχε παρασύρει κάποια κομμάτια της. Τα παιδιά κλήθηκαν να ανακατασκευάσουν την κατεστραμμένη πλατεία. Τους δόθηκαν η αναπαράσταση της πλατείας και τα γεωμετρικά σχήματα-κομμάτια που είχαν παρασυρθεί κατασκευασμένα από χαρτόνι, τα οποία τους ζητήθηκε να τοποθετήσουν στη θέση τους (βλ. εικόνα 13). Η δράση αυτή επαναλήφθηκε με την αξιοποίηση ενός κατάλληλα διαμορφωμένου λογισμικού περιβάλλοντος (βλ. εικόνα 14). Το περιβάλλον αυτό αναπαριστούσε τη σπασμένη πλατεία και τα κομμάτια που είχαν παρασυρθεί. Τα παιδιά κλήθηκαν να επιλέξουν και να τοποθετήσουν τα "παρασυρμένα" κομμάτια- γεωμετρικά σχήματα στην πλατεία.



Εικόνα 13



Εικόνα 14



Εικόνα 15

Όσον αφορά τη δράση/ ενασχόληση με το χειραπτικό υλικό, όταν η πλατεία είχε πλέον ανακατασκευαστεί, ζητήθηκε από τα παιδιά, έχοντας αυτή ως πρότυπο, να δημιουργήσουν μια νέα δράση στην οποία λίγα παιδιά κατάφεραν να ανταποκριθούν.

Η τελική δράση που υλοποιήθηκε αφορούσε τη δημιουργία μιας πλατείας-επικάλυψης μεγάλης έκτασης με τη χρήση σχημάτων μεγάλου μεγέθους από χαρτόνι στο χώρο της αυλής τους, στο φυσικό χώρο. Κάποια σχήματα είχαν ίσες κάποιες από τις πλευρές τους, ώστε να συνταιριάζουν μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα ήταν η δημιουργία επιμέρους μικρότερων επικαλύψεων κι όχι μιας ενιαίας, ωστόσο οι επισημάνσεις των ίδιων των παιδιών για την ύπαρξη κενών ή αλληλοεπικαλύψεων φανέρωναν την κατάκτηση του περιεχομένου της έννοιας (βλ. εικόνα 15). Τα παιδιά χειρίζονται με διαφορετικό τρόπο τα υλικά –και το μέγεθος έπαιξε σημαντικό ρόλο. Με την τελευταία δράση τα παιδιά παρατήρησαν τα αποτελέσματα της επικάλυψης, όχι ολιστικά, όπως γινόταν με τα χάρτινα ή τα ψηφιακά σχήματα, έχοντας την εποπτεία μιας κάτοψης πλατείας, αλλά από μια άλλη οπτική γωνία, όπου τα ίδια αποτελούσαν μέρος της. Για να αποκτήσουν μια πληρέστερη οπτική, περπάτησαν πάνω στην «πλατεία» που τα ίδια δημιούργησαν.

Η συνάντηση ολοκληρώθηκε προτρέποντας τα παιδιά να γράψουν με τη βοήθεια της νηπιαγωγού τους ένα γράμμα στο δήμαρχο ζητώντας του να τους φτιάξει ένα χώρο για να παίζουν με ασφάλεια, προτείνοντάς του τον τρόπο, με τον οποίο θα μπορούσε να κατασκευαστεί.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κασσάρα, Γ. (2012). *Ανάπτυξη δραστηριοτήτων μέτρησης του μήκους στην προσχολική εκπαίδευση*. Αδημοσίευτη Διπλωματική Εργασία. Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά μεγάλα μαθηματικά νοήματα: Προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία.* Αθήνα: Gutenberg.

ΔΕΠΠΣ, (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για το Νηπιαγωγείο. *Υ.Π.Ε.Π.Θ.-Π.Ι.*. Ανακτήθηκε από http://www.pi-schools.gr/programs/depps/.

ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗΣ ΤΟΥ GARDNER ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

[1]Ευαγγελία-Γιασμίνα Υμάι, [2]Κλειώ Σέμογλου

[1]Φοιτήτρια Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών, ΠΔΜ, [2]Ε.Ε.ΔΙ.Π. Ι, Παιδαγωγικής Σχολής Φλώρινας, ΠΔΜ

[1]giaevaima@outlook.com.gr, [2]ksemoglou@uowm.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται τη δυνατότητα εφαρμογής της θεωρίας της πολλαπλής νοημοσύνης στο νηπιαγωγείο. Σύμφωνα με τη θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης, κάθε άτομο διαθέτει περισσότερους από έναν τύπο νοημοσύνης. Οι οκτώ αναγνωρισμένοι τύποι νοημοσύνης κατά τον Gardner, περιλαμβάνουν τη λεκτική νοημοσύνη, τη λογικο-μαθηματική, τη σωματική/κιναισθητική, την οπτικο-χωρική, τη ρυθμική/μουσική, τη φυσιογνωστική/νατουραλιστική, την ενδοπροσωπική και τη διαπροσωπική νοημοσύνη (Gardner, 1999). Στόχος της εργασίας είναι η προσαρμογή μιας διδακτικής πρακτικής από τη μαθησιακή περιοχή των μαθηματικών του Νηπιαγωγείου, βάσει της θεωρίας της πολλαπλής νοημοσύνης και η παρουσίαση οκτώ διαφορετικών δραστηριοτήτων, μία για κάθε έναν από τους τύπους νοημοσύνης της θεωρίας του Gardner.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης διατυπώθηκε από τον ψυχολόγο Howard Gardner στις αρχές της δεκαετίας του 1980. Σύμφωνα με τον Gardner, η νοημοσύνη δεν αποτελεί μία σταθερή μεταβλητή και ένα μονοδιάστατο φαινόμενο (Gardner, 1983). Κάθε άτομο διαθέτει περισσότερους από έναν τύπο νοημοσύνης, οι οποίοι αλληλεπιδρούν συμπληρωματικά και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη δημιουργία και παραγωγή νέων ιδεών και προϊόντων, στην επίλυση προβλημάτων κτλ. (Gardner, 2006). Αρχικά, οι αναγνωρισμένοι τύποι νοημοσύνης κατά τον Gardner ήταν επτά και περιελάμβαναν *τη γλωσσική/λεκτική νοημοσύνη, τη λογικο-μαθηματική, τη σωματική/κιναισθητική, την οπτικο-χωρική, τη ρυθμική/μουσική, την ενδοπροσωπική, τη διαπροσωπική νοημοσύνη* και στη συνέχεια προστέθηκε και ο όγδοος τύπος νοημοσύνης, η *φυσιογνωστική (νατουραλιστική) νοημοσύνη* (Gardner, 1999). Αργότερα, ο ίδιος ο Gardner αναφέρθηκε στην πιθανότητα ύπαρξης και ένατου τύπου νοημοσύνης, της *υπαρξιακής νοημοσύνης*, η οποία όμως δε συγκαταλέγεται στους οκτώ αναγνωρισμένους τύπους της θεωρίας (Armstrong, 2009). Η θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης εστιάζεται στο γεγονός ότι όλοι οι τύποι νοημοσύνης είναι εξίσου σημαντικοί, αλλά όχι το ίδιο ανεπτυγμένοι σε κάθε άτομο. Δηλαδή, όλα τα άτομα κατέχουν όλους τους τύπους νοημοσύνης, αλλά σε διαφορετικό βαθμό και σ' ένα μοναδικό συνδυασμό. Κάθε ένας μπορεί να βελτιώσει κάθε μια από τις νοημοσύνες, αν και μερικά άτομα θα βελτιωθούν ευκολότερα σε μια

περιοχή νοημοσύνης απ' ό,τι σε άλλες (Gardner, 1999). Σύμφωνα με τον Gardner, το εκπαιδευτικό σύστημα επικεντρώνεται μόνο σε δύο τύπους νοημοσύνης, τη λεκτική και τη λογικομαθηματική, περιορίζοντας με αυτό τον τρόπο το ευρύ φάσμα της ανθρώπινης νοητικής λειτουργίας (Gardner & Moran, 2006).

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται τη δυνατότητα εφαρμογής της θεωρίας της πολλαπλής νοημοσύνης στο Νηπιαγωγείο σε μία διδακτική πρακτική από τη μαθησιακή περιοχή των μαθηματικών. Είναι γεγονός, ότι στο Πρόγραμμα Σπουδών του Νηπιαγωγείου προτείνεται η διαφοροποιημένη παιδαγωγική στην τάξη και «η διαφοροποίηση του περιεχομένου ανάλογα με τη μαθησιακή ετοιμότητα, τα ενδιαφέροντα και το μαθησιακό προφίλ των παιδιών» (σελ. 31). Στη συνέχεια, προτείνονται οκτώ διαφορετικές δραστηριότητες με τον ίδιο μαθησιακό στόχο, αλλά κάθε μία από αυτές προσανατολισμένη σε κάθε έναν από τους τύπους νοημοσύνης της θεωρίας του Gardner. Βέβαια, όπως αναφέρεται από τον Armstrong (2009), οι περισσότεροι μαθητές παρουσιάζουν δυνατότητες σε περισσότερους από έναν τομείς και μπορεί να ανταποκρίνονται στην περιγραφή τουλάχιστον δύο ή τριών τύπων νοημοσύνης. Παρόμοια, και κάθε μία από τις παρακάτω δραστηριότητες βασίζεται στο συγκεκριμένο τύπο νοημοσύνης που αναφέρεται, όμως σε κάθε περίπτωση εμπλέκονται, λιγότερο ή περισσότερο, και άλλοι τύποι.

Θέμα: "Τα βασικά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα" (Μαθηματικά-Χώρος, Γεωμετρία-Μέτρηση).

Διδακτικοί στόχοι (σύμφωνα με το Νέο πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά)

Τα παιδιά θα πρέπει να είναι ικανά να

1. Αναγνωρίζουν και ταξινομούν τα βασικά επίπεδα και στερεά σχήματα με βάση γενικά χαρακτηριστικά και σε ποικιλία θέσεων, μεγεθών και προσανατολισμών.
2. Περιγράφουν επίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα χρησιμοποιώντας στοιχεία και ιδιότητες.
3. Κατασκευάζουν επίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα με διάφορα μέσα.
4. Συνδέουν επίπεδα και στερεά σχήματα.
5. Συνθέτουν και αναλύουν απλά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε δύο ή περισσότερα μέρη.

ΛΕΚΤΙΚΗ/ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

Η δραστηριότητα έχει ως κεντρικό άξονα την εξοικείωση των παιδιών με την περιγραφή των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και τη χρήση στοιχείων και ιδιοτήτων που τα χαρακτηρίζει.

Ο Γεωμετρούλης και ο μαγικός μαρκαδόρος

Περιγραφή: Κατασκευάστηκε μια ιστορία με ήρωες τα γεωμετρικά σχήματα, μέσα από την οποία διαφαίνονται τα κύρια μορφολογικά χαρακτηριστικά των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων. Μετά την αφήγηση της ιστορίας, τα νήπια καλούνται να

απαντήσουν σε ερωτήσεις κατανόησης σχετικές με την πλοκή και τους κεντρικούς ήρωες και στη συνέχεια να σχηματίσουν τις διαδρομές που ακολούθησαν οι ήρωες σε κάθε στάδιο, οι οποίες ταυτίζονται με τον τρόπο σχηματισμού των γεωμετρικών σχημάτων.

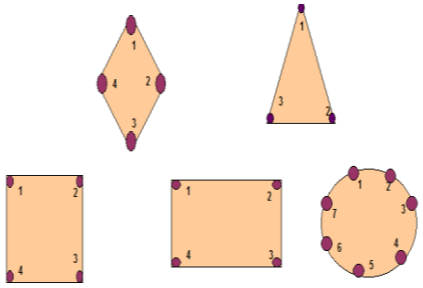
ΛΟΓΙΚΗ/ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

Η δραστηριότητα έχει ως κεντρικό άξονα την κατανόηση του σχηματισμού και την περιγραφή των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων.

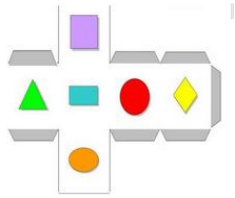
Ενώνω τις τελείες

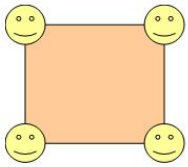
Υλικά: Φύλλα εργασίας

Περιγραφή: Τα παιδιά καλούνται να ενώσουν μοτίβα με αριθμούς, που σχηματίζουν διάφορα γεωμετρικά σχήματα στα φύλλα εργασίας. Στη συνέχεια, καλούνται να τα αντιγράψουν και να τα κατονομάσουν.



ΣΩΜΑΤΙΚΗ/ΚΙΝΑΙΣΘΗΤΙΚΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ





Η δραστηριότητα έχει ως κεντρικό άξονα την κιναισθητική αναπαράσταση των βασικών επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων.

Το ζάρι των σχημάτων

Υλικά: ένας κύβος (ζάρι) που φέρει ένα σχέδιο γεωμετρικού σχήματος σε κάθε έδρα

Περιγραφή: Τα νήπια χωρίζονται σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων. Κάθε φορά που ένας παίκτης κάθε ομάδας ρίχνει το ζάρι όλα τα μέλη της ομάδας του σχηματίζουν με το σώμα τους και όποιο τρόπο θέλουν (ξαπλωμένοι, καθισμένοι, με την χρήση των χεριών ή των ποδιών τους) το γεωμετρικό σχήμα που τους έτυχε στο ζάρι.

ΟΠΤΙΚΟ-ΧΩΡΙΚΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

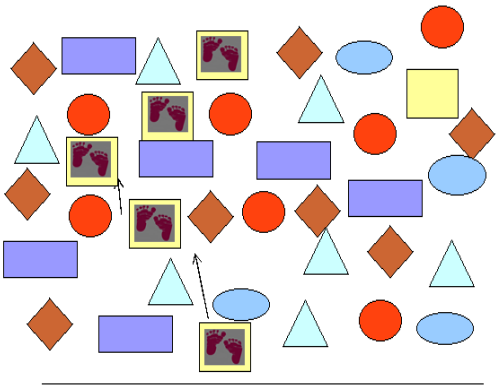
Η δραστηριότητα έχει ως κεντρικό άξονα την εύρεση των γεωμετρικών επίπεδων σχημάτων στον ευρύτερο χώρο, καθώς και άλλων παρόμοιων αντικειμένων.

Βρες το σχήμα σου

Υλικά: Μικρά και μεγάλα χαρτόνια κομμένα στα γεωμετρικά σχήματα

Περιγραφή: Τα νήπια χωρίζονται σε πέντε ομάδες, οι οποίες αντιπροσωπεύουν από ένα γεωμετρικό σχήμα. Στο χώρο βρίσκονται πέντε μεγάλα χαρτόνια κομμένα στα συγκεκριμένα σχήματα. Κάθε ομάδα που αντιπροσωπεύει το σχήμα αυτό πρέπει να τοποθετήσει επάνω στο χαρτόνι, αντικείμενα όμοια με την μορφολογία του σχήματός της. Στο χώρο βρίσκονται μικρότερα χαρτόνια με το ίδιο σχήμα. Τα παιδιά ψάχνουν για τα σχήματα, αλλά και αντικείμενα που μοιάζουν με αυτά. Στο τέλος, κάθε ομάδα περιγράφει τα αντικείμενα που βρήκε και αιτιολογεί κάθε επιλογή.

ΜΟΥΣΙΚΗ/ΡΥΘΜΙΚΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ



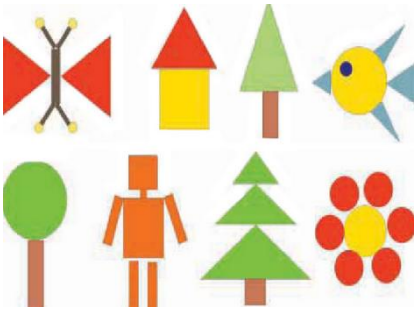
Στη δραστηριότητα αυτή τα νήπια καλούνται να διανύσουν μια διαδρομή από γεωμετρικά σχήματα.
Το ποταμάκι των σχημάτων
Υλικά: Χαρτί του μέτρου
Περιγραφή: Πάνω σε χαρτί του μέτρου σχεδιάζονται στη σειρά όλα τα γεωμετρικά σχήματα σε διαφορετικά χρώματα. Ο/η νηπιαγωγός με ένα ντέφι ή ταμπουρίνο, ζητά από τα παιδιά να διασχίζουν το 'ποτάμι', σύμφωνα με το ρυθμό, πατώντας κάθε φορά σε ένα συγκεκριμένο σχήμα (π.χ., μόνο στα τετράγωνα). Οι εντολές αλλάζουν συχνά, όπως και το τέμπο.

ΝΑΤΟΥΡΑΛΙΣΤΙΚΗ/ΦΥΣΙΟΓΝΩΣΤΙΚΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

Η δραστηριότητα, που μπορεί να είναι συνέχεια της προηγούμενης, έχει ως κεντρικό άξονα την σύνδεση της ύπαρξης των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων με το ευρύτερο φυσικό περιβάλλον.
Βρες έξω το σχήμα σου
Περιγραφή: Τα νήπια, κάθε ένα ξεχωριστά ή στις ομάδες που ήταν χωρισμένα στην προηγούμενη δραστηριότητα, βγαίνουν από την τάξη (στην αυλή, για έναν περίπατο) με στόχο να ανακαλύψουν των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων στο κοντινό φυσικό περιβάλλον του νηπιαγωγείου (ο/η νηπιαγωγός μπορεί να βοηθάει με ερωτήσεις π.χ., με τι μοιάζουν τα φύλλα αυτού του δέντρου, τι σχήμα έχουν οι ρόδες των αυτοκινήτων, το ταχυδρομικό κουτί, το σήμα της τροχαίας κτλ.)

ΔΙΑΠΡΟΣΩΠΙΚΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

Η δραστηριότητα έχει ως κεντρικό άξονα την εξοικείωση των παιδιών με την εύρεση των γεωμετρικών σχημάτων σε περιοδικά, εφημερίδες κτλ., και τη δημιουργία κολλάζ, σε συνεργασία.
Οι σχηματούλησες
Υλικά: εφημερίδες, περιοδικά κτλ.



Περιγραφή: Αρχικά, τα παιδιά πειραματίζονται με διάφορους συνδυασμούς σχημάτων (π.χ., αν τοποθετήσουμε πάνω από ένα τετράγωνο ένα τρίγωνο σχηματίζεται ένα σπιτάκι). Στη συνέχεια, χωρίζονται σε ομάδες και ψάχνουν να εντοπίσουν διάφορα γεωμετρικά σχήματα μέσα από εικόνες περιοδικών-εφημερίδων να τα κόψουν και να δημιουργήσουν νέα σχέδια χρησιμοποιώντας την δική τους φαντασία.

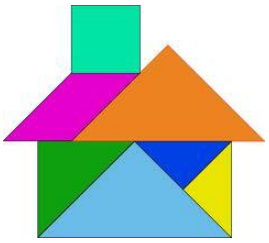
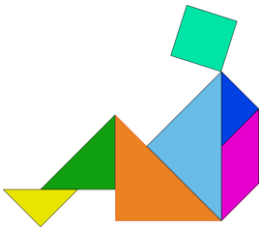
ΕΝΔΟΠΡΟΣΩΠΙΚΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

Η δραστηριότητα έχει ως κεντρικό άξονα την εύρεση των γεωμετρικών σχημάτων σε σχηματισμένες μορφές σχεδίων

Τάνγκραμ

Υλικά: καρτέλες με τάνγκραμ

Περιγραφή: Σε κάθε παιδί δίνεται μία καρτέλα στην οποία απεικονίζεται ένα σχέδιο-τάνγκραμ και τα αντίστοιχα κομμάτια που το αποτελούν. Κάθε παιδί καλείται να εντοπίσει τα γεωμετρικά σχήματα που απαρτίζουν το σχήμα, να δοκιμάσει να το αναπαραστήσει ή να το διαφοροποιήσει και να του δώσει έναν δικό του τίτλο.


Η θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης δεν είναι καινούρια. Εκατοντάδες βιβλία έχουν γραφτεί γύρω από αυτό το θέμα και εκατοντάδες σχολεία σε όλο τον κόσμο έχουν ενσωματώσει τις αρχές της στο πρόγραμμά τους (Scapens & Fraser, 2007). Αιτία αυτής της μαζικής αποδοχής αποτελεί, ενδεχομένως, το γεγονός ότι η θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης ξεπερνά την κλασική διαμάχη που εστιάζεται στο αν η νοημοσύνη είναι ένα εγγενές χαρακτηριστικό ή είναι αποτέλεσμα περιβαλλοντικών επιδράσεων, και προτείνει τη νοημοσύνη ως ένα συνδυασμό από κληρονομικές δυνατότητες και νέες δεξιότητες που μπορούν να αναπτυχθούν με διαφορετικούς τρόπους και πρακτικές (Gardner, 1983). Αξιοσημείωτο είναι το ότι δάσκαλοι που χρησιμοποίησαν πρακτικές βασισμένες στη θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης αναφέρουν βελτίωση στα κίνητρα των μαθητών, στη συμμετοχή τους στην τάξη και την αυτοπεποίθησή τους (Scapens & Fraser, 2007). Συμπερασματικά, η εκπαιδευτική προσέγγιση της θεωρίας της πολλαπλής νοημοσύνης μπορεί να παρέχει ένα πλαίσιο αναγνώρισης των ιδιαιτεροτήτων κάθε μαθητή και τη δυνατότητα χρήσης τεχνικών στην τάξη που μπορούν να κάνουν τη μάθηση πιο διασκεδαστική και αποτελεσματική για περισσότερους μαθητές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Armstrong, T. (2009). *Multiple Intelligences in the Classroom* (3rd ed.). Alexandria, VA: ASCD.

Gardner, H. (1983). *Frames of mind*. New York: Basic Books

Gardner, H. (1999). *Intelligence Reframed*. New York: Basic Books

Gardner, H. (2006). *Multiple intelligences: New horizons*. New York: Basic Books.

Gardner, H., & Moran, S. (2006). The science of multiple intelligences theory: A response to Lynn Waterhouse. *Educational Psychologist, 41(4),* 227-232.

Scapens, M., & Fraser, D. (2007). Multiple intelligences: fashionable or foundational? *Practical Research for Education*, *37*, 49–58.

Οδηγός Εκπαιδευτικού για το Πρόγραμμα Σπουδών του Νηπιαγωγείου (2011). «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο πρόγραμμα σπουδών, στους Άξονες Προτεραιότητας 1, 2, 3 - Οριζόντια Πράξη»

ΜΕΛΕΤΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΕΝΟΣ ΡΟΜΠΟΤ: ΠΡΟΣ ΜΙΑ 'ΑΒΙΑΣΤΗ' ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΙΔΕΕΣ

Μαρία Ζαχαράκη, Άννα Χρονάκη και Σπύρος Κούριας

Παιδαγωγικό Τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

zaharaki@sed.uth.gr, chronaki@ece.uth.gr, kourias@ece.uth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία στοχεύουμε να παρουσιάσουμε μια συλλογική προσπάθεια καταγραφής ενός διδακτικού πειράματος το οποίο επικεντρώνει στη δυναμική των αναδυόμενων μαθηματικών εννοιών που ενσαρκώνει η διαδικασία μελέτης της κίνησης ενός ρομπότ. Τα παιδιά μαζί με τους ενήλικες στο πλαίσιο μιας συνεργατικής προσπάθειας του προγραμματισμού και ελέγχου ενός ρομπότ, η οποία έχει στόχο την εκτέλεση μιας συγκεκριμένης αποστολής, έρχονται, θα λέγαμε, 'αβίαστα' σε επαφή με μαθηματικές ιδέες όπως αναπαράσταση, συμβολοποίηση, αλλά και μοντελοποίηση της κίνησης. Στο παρόν κείμενο στοχεύουμε να μιλήσουμε για αυτή την εμπειρία με μια τάξη νηπίων και προνηπίων σε δημόσιο σχολείο της πόλης του Βόλου.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Ο Seymour Papert και οι συνεργάτες του στο MIT κατά την δεκαετία των 1960ς ανέπτυξαν και προώθησαν τη γλώσσα προγραμματισμού Logo η οποία χρησιμοποιήθηκε στον έλεγχο της κίνησης μιας «χελώνας» με σκοπό να εισάγει μαθηματικές έννοιες της γεωμετρίας και των σχημάτων και η οποία έμελλε να αλλάξει τον τρόπο που σήμερα μιλάμε για την μάθηση των μικρών παιδιών και για τη δυνατότητά τους να εμπλέκονται ενεργά στον προγραμματισμό αξιοποιώντας μαθηματικές ιδέες. Τα τελευταία χρόνια έχοντας στη διάθεσή μας καινοτόμα εργαλεία και περιβάλλοντα όπως ποικίλες εκδοχές της Logo κατάλληλες για μικρά παιδιά και σύγχρονων εκδοχών της όπως η Scratch, περιηγητές εδάφους όπως το Roamer, BeeBot, Probot και περιβάλλοντα τεχνολογίας ελέγχου όπως Lego WeDo, Lego Mindstorms NXT, αλλά και περισσότερο ευέλικτων εργαλείων όπως το Arduino, ανοίγονται ευκαιρίες για την συμμετοχή παιδιών και ενηλίκων σε έργα τα οποία παλαιότερα έμοιαζαν απρόσιτα..

Η ενασχόληση με τα εν λόγω περιβάλλοντα εμπεριέχει μαθησιακές ευκαιρίες σε σχέση με τον προγραμματισμό και τα μαθηματικά καθώς και τα δύο ενσωματώνονται και απαιτούνται για την επίτευξη μιας κατασκευής. Θα πρέπει, ωστόσο, να τονιστεί ότι τόσο στις μικρές ηλικίες όσο και στο πλαίσιο ανοιχτών διαδικασιών όπως είναι μια «κατασκευή», τα μαθηματικά δεν διδάσκονται αλλά στην ουσία αναδύονται ως ανάγκη σε επιμέρους βήματα με στόχο το χειρισμό και τον έλεγχο. Αυτού του είδους η επαφή με τα μαθηματικά μοιάζει ακόμη πιο αναγκαία, αλλά ταυτόχρονα και

προκλητική, για τα μικρά παιδιά καθώς τα περισσότερα δεν διαθέτουν εμπειρίες οι οποίες εύκολα θα χαρακτηρίζονταν ως μαθηματικές με την 'αυστηρή' έννοια του όρου. Η διερεύνηση των προοπτικών της χρήσης προγραμματιζόμενων συσκευών όπως το Roamer, το Bee-Bot και το Lego WeDo και σύνθετων εκπαιδευτικών πακέτων όπως το Lego Mindstorms NXT και το Pico Cricket έχει απασχολήσει την ερευνητική κοινότητα και έχουμε σήμερα στη διάθεσή μας εκπαιδευτικές προτάσεις για σύνδεση με το αναλυτικό πρόγραμμα (Chambers et al, 2007) καθώς επίσης και προτάσεις διδακτικών πειραμάτων όπου περιγράφεται και αναλύεται εκτενώς η σχεδίαση δραστηριοτήτων, η επιδιωκόμενη γνώση προς κατάκτηση και το δυναμικό διδακτικής παρέμβασης εκ μέρους των εκπαιδευτικών (Bers et al, 2002; Comune di Reggio Emilia, 2001; Alimisis et al, 2007).

ΈΝΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΠΕΙΡΑΜΑ: ΣΤΟΧΟΙ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΤΑΓΡΑΦΗΣ

Αποτολμώντας τον πειραματισμό με την μύηση των μικρών παιδιών στο περιβάλλον ενός Lego NXT με σκοπό την απομυθοποίηση του ρομπότ και τη μύηση σε βασικές μαθηματικές και προγραμματιστικές ιδέες, σχεδιάσαμε διδακτική παρέμβαση μαθηματικών οργανωμένη με βάση τη μεθοδολογία του διδακτικού πειράματος (Χρονάκη, 2010). Η διδακτική μας παρέμβαση έδωσε έμφαση στη μετατόπιση των αντιλήψεων των μικρών παιδιών από τη μυθική διάσταση στην οποία τοποθετούσαν τα ρομπότ, δίνοντας τους ανθρώπινα χαρακτηριστικά, σε μια περισσότερο πραγματιστική στην οποία συνειδητοποιούσαν ότι ο έλεγχος ενός ρομπότ έχει σχέση με τον προγραμματισμό.

Οι επιμέρους στόχοι αυτού του διδακτικού πειράματος περιλαμβάνουν: 1) την συστηματική παρατήρηση και αναπαράσταση της κίνησης ενός ρομπότ (λεκτική, κιναισθητική και συμβολική), 2) το σχεδιασμό μιας διαδρομής και τον προγραμματισμό του ρομπότ για την επιτέλεση αυτής της κίνησης, και 3) την επέκταση μιας απλής κίνησης σε διαδρομή και την διόρθωση της με στόχο την ακριβή διαδρομή. Το διδακτικό πείραμα εφαρμόστηκε σε μια τάξη 20 νήπιων με πολύ διαφορετικές δεξιότητες στη χρήση τεχνολογίας, στα μαθηματικά, στην λεπτή κινητικότητα, στη συνεργασία στο πλαίσιο ομάδας και στην ικανότητα για αναστοχαστική σκέψη. Συνολικά εφαρμόστηκαν έξι (6) δραστηριότητες σε διάστημα τεσσάρων ημερών. Χρησιμοποιήθηκε το πακέτο Lego NXT και το λογισμικό Mindstorms.

ΠΩΣ ΚΙΝΕΙΤΑΙ ΕΝΑ ΡΟΜΠΟΤ;-ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΕ ΔΙΑΔΡΟΜΗ

Η πρώτη δράση με τα παιδιά ξεκίνησε με την παρακολούθηση ενός βίντεο το οποίο λειτούργησε ως κίνητρο για συζήτηση σχετικά με τα ρομπότ, για τη δημιουργία

ιχνογραφημάτων σχετικά με τα ρομπότ και την κίνησή τους, και τη συγκρότηση ενός συλλογικού εννοιολογικού χάρτη για το «τι ξέρουμε» για τα ρομπότ και «τι θέλουμε να μάθουμε» επιπλέον. Η δεύτερη δράση επικεντρώθηκε στην κίνηση των ρομπότ. Ερωτήσεις όπως: «ποιος κινεί τα ρομπότ και με ποιον τρόπο» τέθηκαν προς προβληματισμό. Χρησιμοποιήθηκε μια μαριονέτα (ως πρωτότυπο ρομπότ) για να δουν την κίνησή της ως αποτέλεσμα ενός ελέγχου που επιτελείται μέσω του χειρισμού με τα χέρια μας και η συζήτηση που ακολούθησε αφορούσε την αντιδιαστολή της άμεσης και της έμμεσης πρόκλησης κίνησης (π.χ. το σώμα μας, η μαριονέτα, το ρομπότ). Καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η επικοινωνία με τα ρομπότ είναι ιδιότυπη καθώς τα προγραμματίζουμε να κάνουν κάτι που εμείς θέλουμε και ότι ο υπολογιστής και το καλώδιο είναι απαραίτητα για να μπορέσει κανείς να επικοινωνήσει. Το ζήτημα της «γλώσσας» την οποία χρησιμοποιούμε για την ιδιότυπη αυτή επικοινωνία, σκοπίμως αφέθηκε ανοιχτό. Η τρίτη δράση αφορούσε τη γνωριμία με το προ-κατασκευασμένο ρομπότ Lego NXT το οποίο παρουσιάσαμε. Τα παιδιά παρακολούθησαν μια ήδη προγραμματισμένη κίνηση λίγων δευτερολέπτων και παρατήρησαν μέρη της αλληλουχίας των επιμέρους κινήσεων κατά την εκτέλεση διαφορετικών φάσεων οι οποίες στο σύνολό τους μπορούσαν να αποτελέσουν ένα λογικό διάγραμμα ροής ή/και ένα πρόγραμμα για την ίδια την κίνηση. Τα παιδιά κλήθηκαν να αναπαραστήσουν την κίνηση αυτή αποσκοπώντας στη διερεύνηση της ακρίβειας της περιγραφής και του συμβολισμού της κίνησης.



Εικόνα 1: Παρατήρηση της κίνησης της μαριονέτας



Εικόνα 2: Παρατήρηση της κίνησης ρομπότ.



Εικόνα 3: Αναπαράσταση της κίνησης του ρομπότ

ΣΥΜΒΟΛΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ: ΣΥΜΒΟΛΑ ΚΑΙ ΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΡΟΜΗΣ

Η τέταρτη δράση αποσκοπούσε στη μύηση των παιδιών στη γλώσσα επικοινωνίας με το ρομπότ. Οι καρτέλες βασίστηκαν στις εικονοεντολές του λογισμικού Lego NXT. Επιλέξαμε να εξηγήσουμε επαρκώς το «μπλοκ κίνησης» (γρανάζι) και τις υπόλοιπες ρυθμίσεις που αφορούσαν την παραμετροποίηση της κίνησης (κατεύθυνση κατά μήκος των αξόνων «δεξιά-αριστερά» και «μπρος πίσω», ταχύτητα και σταμάτημα κίνησης). Ακολούθως, προτρέψαμε τα παιδιά να συμμετάσχουν σε ένα παιχνίδι ρόλων αναλαμβάνοντας ρόλους «προγραμματιστή», ο οποίος θα σχεδίαζε την κίνηση με εντολές και ρόλους «ρομπότ» το οποίο θα εκτελούσε το πρόγραμμα με το σώμα

του, «περπατώντας» τις εντολές. Εμπλεκόμενα βιωματικά στη δράση, τα παιδιά, στην πλειοψηφία τους, συμμετείχαν ενθουσιωδώς και τα κατάφεραν περίφημα.

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΖΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ: ΜΙΚΡΟΙ ΚΑΙ ΜΕΓΑΛΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Κατά την διάρκεια της πέμπτης δράσης, τα παιδιά ήρθαν σε επαφή με το προγραμματιστικό μέρος του ρομπότ. Η έλλειψη χώρου μας οδήγησε στη δημιουργία μιας περισσότερο ήσυχης και προσωπικής γωνιάς στην αίθουσα του νηπιαγωγείου την οποία ονομάσαμε «γωνιά δοκιμών». Εκεί τοποθετήσαμε έναν φορητό υπολογιστή και το Lego NXT. Μικρές ομάδες παιδιών καλούνταν στη γωνιά δοκιμών και εκεί παρατηρούσαν και περιεργάζονταν το λογισμικό βασιζόμενα σε όσα είδαν και κατέκτησαν μέσω των δράσεων έως εκείνη τη χρονική στιγμή. Κρίθηκε απαραίτητη η εστίαση των παιδιών μόνο στο μπλοκ κίνησης με στόχο την επαρκή χρήση του και όχι στα υπόλοιπα μπλοκ (δηλ. αναμονής, αισθητήρων κλπ). Με κάθε ομάδα, δημιουργούσαμε επί τόπου ένα διαφορετικό εκτελέσιμο πρόγραμμα με στόχο να τεθεί το ρομπότ σε κίνηση. Εφόσον ζητούσαμε το σχεδιασμό συγκεκριμένης κίνησης υπήρξε η ανάγκη για διαδοχικές δοκιμές, για διόρθωση του λάθους, για διαδικασίες επαλήθευσης και εκτέλεσης. Σε αυτό το πλαίσιο τα παιδιά μπορούσαν να παρέμβουν δυναμικά επιλέγοντας άλλοτε μεγαλύτερους και άλλοτε μικρότερους αριθμούς. Ιδιαίτερη εντύπωση έκανε το γεγονός ότι παρόλο που τα παιδιά σε αυτή την ηλικία, τυπικά, δεν έχουν διδαχθεί μεγάλους αριθμούς ωστόσο μπορούσαν να τους βρουν και είχαν καλή αίσθηση για το ποιοι ήταν οι μεγάλοι αριθμοί. Επιτελώντας μια αποστολή- το ρομπότ διανύει διαδρομές.


Εικόνα 1: Εικονοεντολές


Εικόνα 2: Παιχνίδι ρόλων


Εικόνα 3: Γωνιά δοκιμών.

ΕΠΙΤΕΛΩΝΤΑΣ ΜΙΑ ΑΠΟΣΤΟΛΗ: ΤΟ ΡΟΜΠΟΤ ΔΙΑΝΥΕΙ ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ

Κατά την έκτη δράση το ρομπότ με βάση το παραμύθι «τα τρία γουρουνάκια» αναλαμβάνει μια αποστολή: τα γουρουνάκια έχασαν το δρόμο για τα σπίτια τους και το ρομπότ πρέπει να τα βοηθήσει να το ξαναβρούν. Τέσσερα παιδιά ανέλαβαν ρόλο «προγραμματιστών» και τα υπόλοιπα ρόλους «ελεγκτών», «παρατηρητών» ή

«βοηθών». Ο διαχωρισμός βασίστηκε συνειδητά στην έλλειψη του απαραίτητου χώρου για τον ταυτόχρονο πειραματισμό όλων των παιδιών με το λογισμικό. Η ομάδα των τεσσάρων παιδιών ανέλαβε αρχικά να προγραμματίσει το ρομπότ που θα οδηγήσει το κάθε γουρουνάκι στο σπίτι του. Την τετραμελή αυτή ομάδα αποτέλεσαν 2 αγόρια και 2 κορίτσια έτσι ώστε να αποφευχθεί η συνήθης έμφυλη διάκριση που παρατηρείται ανάμεσα στα παιδιά (βλ. Chronaki & Kourias, 2012). Ο καταμερισμός εργασιών με τη δυνατότητα εναλλαγής τους, απέδωσε τους εξής ρόλους: α) υπεύθυνος-η για τη σύνδεση του NXT με τον υπολογιστή και χειριστή του ρομπότ πάνω στη μακέτα, β) χειριστή-τριας του προγράμματος με στόχο την βελτίωση και τροποποίηση του εκτελέσιμου προγράμματος, γ) γραφέα με στόχο να πληκτρολογεί τις διάφορες τιμές ή/και να τις διορθώνει όποτε χρειαζόταν και τέλος, δ) βοηθού σε όλους τους παραπάνω ρόλους. Οι προτροπές και η ενθάρρυνση, κρίθηκαν απαραίτητα αν και τα παιδιά φάνηκαν εξοικειωμένα με την τεχνολογία και δεν δυσκολεύτηκαν μέσα από διαδικασίες «δοκιμής-λάθους» να βρουν δρώντας συνεργατικά τις κατάλληλες εντολές και να τις βάλουν στη σειρά.



Εικόνα 6: Χειριστής και γραφέας.



Εικόνα 5: Υπεύθυνος σύνδεσης.



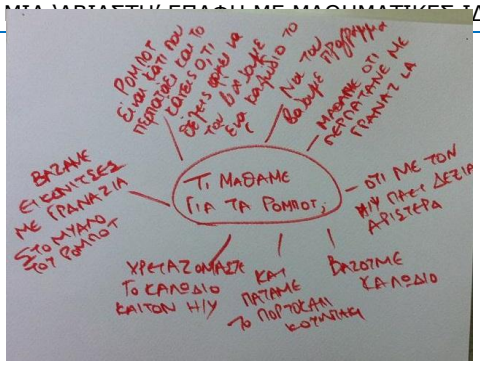
Εικόνα 4: Η μακέτα του παιχνιδιού.

ΑΒΙΑΣΤΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ;

Η συζήτηση ανασκόπησης οδήγησε στην δημιουργία του χάρτη της νέας γνώσης, «τι μάθαμε για τα ρομπότ» και οδήγησε σε μια σύνοψη της εμπειρίας. Ο χάρτης αυτός σε αντιδιαστολή με τον αρχικό χάρτη «τι ξέρουμε για τα ρομπότ;» αποκαλύπτει τη μετατόπιση των αρχικών ιδεών μυθοποίησης του ρομπότ σε πιο πραγματιστικές ιδέες οι οποίες δηλώνουν την κατανόηση του ρομπότ ως ελεγχόμενου από τον άνθρωπο. Η συζήτηση αποκάλυψε επίσης ότι τα παιδιά ήταν σε θέση να κατανοήσουν ότι η διαδικασία ελέγχου αυτή στηρίζεται στη συστηματική εφαρμογή μιας συμβολικής γλώσσας μέσω της οποίας πραγματοποιείται ο προγραμματισμός του ρομπότ από απόσταση. Τα μαθηματικά αποτέλεσαν αναπόσπαστο μέρος αυτής της εμπειρίας και η επαφή των παιδιών πραγματοποιήθηκε αβίαστα, καθώς ενεργοποιούσαν τόσο την γνώση όσο και την διαίσθησή τους όπως είδαμε παραπάνω μέσω της



Εικόνα 7: Αρχικός χάρτης «τι ξέρουμε για τα ρομπότ».



Εικόνα 8: Χάρτης της νέας γνώσης «τι μάθαμε για τα ρομπότ».

αναπαράστασης, των δοκιμών, των διορθώσεων. Η χρήση κανόνων δεν κρίθηκε απαραίτητη αφού τα παιδιά επιζητούσαν τη συμμετοχή τους με στόχο να κάνουν τις απαραίτητες δοκιμές για τις διορθώσεις που απαιτούσε η επίτευξη της ακρίβειας και η ανάγκη για μαθηματικά προέκυπτε σε κάθε βήμα, φυσικά και αβίαστα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Alimisis, D., Michele M., Arlegui, J., Pina, A. Frangou, S., Papanikolaou, K. (2007). Robotics & Constructivism in Education: the TERECoP project, In Ivan Kalas (ed.), Proceedings of the 11th European Logo Conference, 19 - 24 August 2007, Bratislava, Slovakia, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University, Bratislava, ISBN 978-80-89186-20-4

Bers, M. U., Ponte, I., Juelich, C., Viera, A., & Schenker, J. (2002). Teachers as designers: Integrating robotics in early childhood education. Information Technology in Childhood Education Annual, 123- 145.

Chambers, J. M., Carbonaro, M., & Rex, M. (2007). Scaffolding knowledge construction through robotics technology A middle school case study. Electronic Journal for the Integration of Technology in Education, 6, 55

Papert, S. (1991). Situating Constructionism. In S. Papert and I. Harel (eds.) Constructionism, Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Comune di Reggio Emilia (2001). Construction kits made of Atoms and Bits. Final Pedagogical Report on the last months of the research, Project CAB n◦29323, Del. n◦23, March 2001.

Χρονάκη, Α. (2010). Το «Διδακτικό Πείραμα»: Η ποιοτική μελέτη της μαθησιακής διαδικασίας στο πλαίσιο της διδακτικής πράξης. Στο Πουρκός Μ. Α., Δαφέρμος Μ. (επιμ.), Ποιοτική έρευνα στην Ψυχολογία και την Εκπαίδευση. Επιστημολογικά, μεθοδολογικά και ηθικά ζητήματα. Αθήνα: Εκδόσεις Τόπος.

Χρονάκη, Α. & Κούριας, Σ. (2011). Παιδιά, Ρομπότ και Lego Mindstorms: Καταγράφοντας το ξεκίνημα μιας αλληλεπιδραστικής σχέσης. 2ο Πανελλήνιο Συνέδριο «Ένταξη και χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία», Πάτρα, 28-30 Απριλίου 2011

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ:
ΜΑΘΑΙΝΩ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΒΙΩΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΝΕΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ

Χριστίνα Λούστα

4/θέσιο Δημοτικό Σχολείο Βώλακα Δράμας

crest_lou@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διδασκαλία αφορά μια πρόταση εμπέδωσης του μαθήματος «Η Συμμετρία» της Γ' τάξης. Σκοπό έχει να εμβαθύνει τις γνώσεις των μαθητών στον τομέα της συμμετρίας μέσα από βιωματικές δραστηριότητες αλλά και με τη χρήση νέων τεχνολογιών. Η διδασκαλία απαρτίζεται από φύλλα εργασίας με πρακτικές δραστηριότητες, από εργασία με λογισμικό ανοιχτού κώδικα και από ομαδικά παιχνίδια.

Τάξη εφαρμογής: Γ'

Κεφάλαιο 43: Η συμμετρία

Διάρκεια: 3-4 διδακτικές ώρες

Οργάνωση: Ατομική και ομαδική εργασία.

Υλικοτεχνική υποδομή: Φύλλα εργασίας, Λογισμικό "Revelation Natural Art", μολύβι, χάρακας, ψαλίδι (Προαιρετικά: βιντεοπροβολέας).

1. ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- Ως προς το γνωστικό αντικείμενο

Να είναι ικανοί οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα σχήματα που έχουν άξονα συμμετρίας και να είναι σε θέση να σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα.

- Ως προς τη χρήση Νέων Τεχνολογιών

Να εργασθούν οι μαθητές με το λογισμικό "Revelation Natural Art" και να κατανοήσουν τη χρηστικότητα αυτού.

**Κατηγορία λογισμικού/ Αιτιολόγηση επιλογής:*

Το λογισμικό ανοιχτού κώδικα "Revelation Natural Art" είναι ένα εποικοδομητικό εργαλείο γραφικών γενικής χρήσης με πολλαπλές σχεδιαστικές δυνατότητες, που προωθεί τη δημιουργική έκφραση, τον οπτικό αλφαβητισμό και την καλλιέργεια της οπτικής και συναισθηματικής εκπαίδευσης. Επιπλέον, παρέχει ένα δημιουργικό σχεδιαστικό περιβάλλον για τη συμμετρία.

- Ως προς τη μαθησιακή διαδικασία

Να αναπτυχθεί πνεύμα συνεργασίας μεταξύ των μαθητών αλλά και να ενισχυθεί η αυτενέργεια.

2. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ/ ΠΟΡΕΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

- Φύλλο εργασίας 1: Η αφόρμηση γίνεται με πίνακα ζωγραφικής. Οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν τη συμμετρία και κατόπιν να σχηματίσουν, κόβοντας με το ψαλίδι τους, το συμμετρικό μέρος.
- Φύλλο εργασίας 2: Οι μαθητές καλούνται να σχηματίσουν με μολύβι και χάρακα τα συμμετρικά κομμάτια τεσσάρων σχημάτων σε τετραγωνισμένο χαρτί που τους δίνεται και να τα χρωματίσουν κατάλληλα. Στη συνέχεια κόβουν περιμετρικά σχήματα με σκοπό διπλώνοντάς τα να βρουν τους άξονες συμμετρίας.
- Φύλλο εργασίας 3: Η εξάσκηση εδώ αφορά στη χρήση του λογισμικού "Revelation Natural Art". Το τελευταίο τους δίνει τη δυνατότητα να δημιουργήσουν συμμετρικές εικόνες ταυτόχρονα ως προς οριζόντιο και κάθετο άξονα, να αποθηκεύσουν και να εκτυπώσουν τις εργασίες τους.
- Ομαδικά παιχνίδια: «Συμμετρικά...αγάλματα», «Το κυνήγι της κρυμμένης...συμμετρίας» και «Σκιτσο...συμμετρία» είναι τα παιχνίδια που προτείνονται για να ενισχύσουν τη γνώση των μαθητών γύρω από τη συμμετρία.
- Φύλλο αξιολόγησης: Στο σημείο αυτό οι μαθητές αξιολογούν τον εαυτό τους σημειώνοντας Χ στο αντίστοιχο κουτάκι του πίνακα περιεχομένων φέρνοντας στην επιφάνεια, με αυτό τον τρόπο, έννοιες που δεν έγιναν κατανοητές.

Τι μπορώ να καταφέρω;	Είναι δύσκολο	Χρειάζομαι βοήθεια	Είναι εύκολο

Να αναγνωρίζω σχήματα που είναι συμμετρικά. Να αναγνωρίζω τον οριζόντιο και κάθετο άξονα συμμετρίας. Να βρίσκω τους άξονες συμμετρίας στα σχήματα.			
Να συμπληρώνω το άλλο μισό ενός σχήματος με άξονα συμμετρίας. Να σχεδιάζω συμμετρικά σχήματα στο χαρτί.			
Να σχεδιάζω συμμετρικά σχήματα στον υπολογιστή. Να αποθηκεύω τις εργασίες μου.			
Να εκτυπώνω τις εργασίες μου.			

3. ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

Η επίδοση των μαθητών στη συμμετρία ως προς άξονα συνδέθηκε με τα παρακάτω τέσσερα χαρακτηριστικά (όπως αναφέρουν οι Μαστρογιάννης, Α. και Κορδάκη, Μ., 2007):

Την κλίση του άξονα συμμετρίας, όπου τα παιδιά βρίσκουν πιο εύκολα τα συμμετρικά σχημάτων ως προς οριζόντιους/ κάθετους άξονες συμμετρίας, ενώ δυσκολεύονται όταν οι άξονες είναι πλάγιοι,

Την παρουσία/ απουσία πλέγματος (η παρουσία του βοηθά στην εκτίμηση μηκών και κατεύθυνσης χωρίς όμως να είναι σαφές αν προσφέρει κάτι στη συμμετρία),

Την πολυπλοκότητα του σχήματος (π.χ. το συμμετρικό μιας σημαίας είναι δυσκολότερο να κατασκευαστεί από ότι το συμμετρικό μιας τελείας), και,

Την κλίση του αντικειμένου (είναι ευκολότερο για τους μαθητές να κατασκευάζουν τα συμμετρικά σχημάτων τα οποία είναι κάθετα ή παράλληλα στον άξονα συμμετρίας).

Παιχνίδια

Εξαιτίας της σχέσης που έχει το παιχνίδι με το παιδί και των κινήτρων που προσφέρει είναι απαραίτητο να επικρατήσει στον τρόπο που οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν τις δραστηριότητες μάθησης (Τζεκάκη, Μ. και Χριστοδούλου, Ι. 2004).

Για την ορθή χρήση των παιχνιδιών σημαντικοί είναι ορισμένοι κανόνες όπως τους αναφέρει η Piggott J. (Alridge & Badham, 1993):

Βεβαιωθείτε ότι το παιχνίδι ταιριάζει με τον μαθηματικό σας στόχο.

Χρησιμοποιήστε τα παιχνίδια για ειδικούς σκοπούς, και όχι για να περάσει η ώρα.

Εντάξτε τον παράγοντα τύχη στο παιχνίδι σας, έτσι ώστε να επιτρέπεται στους αδύναμους παίκτες να αισθάνονται ότι έχουν την ευκαιρία να κερδίσουν.

Ορίστε σύντομο χρόνο ολοκλήρωσης του παιχνιδιού.

Χρησιμοποιήστε πέντε ή έξι βασικούς κανόνες παιχνιδιού, έτσι ώστε τα παιδιά να εξοικειωθούν με αυτούς και να επικεντρωθούν στα μαθηματικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Λεμονίδης Χ. κ.ά., *Μαθηματικά Γ' τάξης, Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής, Βιβλίο Δασκάλου*, ΟΕΔΒ, Αθήνα.

Μαστρογιάννης, Α. και Κορδάκη, Μ. (2007). Αμφίπλευρη συμμετρία: αντιλήψεις μαθητών δημοτικού. 2ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών, (σελ.358-367), Αλεξανδρούπολη, 23-25 Νοεμβρίου, 2007.

Τζεκάκη, Μ. και Χριστοδούλου, Ι (2004). Τα Μαθηματικά, ένα παιχνίδι. Στο Π. Χατζηκαμάρη & Μ. Κοκκίδου (επιμ.), *Το παιχνίδι στην εκπαιδευτική διαδικασία, Πρακτικά Διημερίδας,* 109-118. Θεσσαλονίκη: University Press.

Piggott, J., Meet the NIM Family, (http://nrich.maths.org/5794, τελευταία πρόσβαση στις 06/02/2014)

ΑΓΧΟΣ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Κυριακορεΐζη Αικατερίνη & Δεσλή Δέσποινα
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευση, Α.Π.Θ.
kyriakor@hotmail.com & ddesli@eled.auth.gr

Η επίδραση του άγχους στη μάθηση των μαθηματικών έχει εξεταστεί ερευνητικά, κυρίως με αναφορά σους μαθητές. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι αφενός η μελέτη του άγχους των υποψήφιων δασκάλων κατά την ενδεχόμενη επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος και αφετέρου η συσχέτιση του άγχους με τη στάση τους για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους στο δημοτικό σχολείο. Για το σκοπό αυτό πραγματοποιήθηκε έρευνα στην οποία συμμετείχαν 353 φοιτητές/ριες του Δ΄, Στ΄ και Η΄ εξαμήνου του Π.Τ.Δ.Ε. του Α.Π.Θ. Σχεδιάστηκε και χρησιμοποιήθηκε ερωτηματολόγιο το οποίο περιελάμβανε ερωτήσεις κλειστού και ανοικτού τύπου σχετικά με: α) τους λόγους για τους οποίους επιλέγουν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί να λύσουν ένα πρόβλημα έναντι κάποιου άλλου, καθώς και τα συναισθήματα που τους δημιουργούνται από τη διαδικασία λύσης των προβλημάτων, και β) τα συναισθήματα των υποψήφιων εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο βασικός λόγος που οδηγεί το 64% των μελλοντικών εκπαιδευτικών να επιλέγουν να λύσουν ένα πρόβλημα έναντι κάποιου άλλου είναι ο βαθμός δυσκολίας του προβλήματος. Αναφορικά με τα αρνητικά συναισθήματα που τους δημιουργεί η επίλυση προβλημάτων, το άγχος κυριαρχεί (52%) μόνο για τα προβλήματα που οι συμμετέχοντες θα «απέρριπταν» έναντι άλλων. Επιπλέον, η διδασκαλία των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο αγχώνει σε σημαντικά μεγαλύτερο βαθμό τις γυναίκες σε σχέση με τους άνδρες καθώς και τους φοιτητές των μικρότερων εξαμήνων σε σχέση με εκείνους των μεγαλύτερων εξαμήνων. Όσοι από τους συμμετέχοντες δεν είχαν διδάξει μαθηματικά στα πλαίσια πρακτικής άσκησης δήλωναν περισσότερα αρνητικά συναισθήματα γι’ αυτά και τη διδασκαλία τους σε σχέση με εκείνους που είχαν διδάξει. Οι φοιτητές που προέρχονται από κατευθύνσεις λιγότερο σχετικές με τα μαθηματικά εξέφραζαν συχνότερα αρνητικά συναισθήματα, όπως το άγχος, για τα μαθηματικά και δήλωναν στη συντριπτική τους πλειοψηφία ότι επιθυμούν να διδάξουν στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Αναδεικνύεται η ανάγκη να ενισχυθεί η σιγουριά των εκπαιδευτικών αναφορικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς κάτι τέτοιο θα επιδρούσε θετικά στη στάση των μαθητών τους απέναντι στα μαθηματικά.

ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΕΡΜΗΝΕΙΑΣ ΣΧΕΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΧΩΡΟΥ ΑΠΟ ΝΗΠΙΑ:ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Α. Δημητρίου & Α. Ρουσίδου

Τμήμα Επιστημών Εκπαίδευσης Προσχολικής Ηλικίας, Δ.Π.Θ.

anadim@otenet.gr, rouatha1991@gmail.com

Οι απεικονίσεις αποτελούν μεταξύ άλλων, μέσο για την άντληση πληροφοριών και δεδομένων σχετικά με το χώρο, ένα αντικείμενο ή ένα φαινόμενο. Επιπλέον, συμβάλλουν στην καλλιέργεια της δεξιότητας της επικοινωνίας, που συνιστά βασική επιστημονική διαδικασία, καθώς αποτελούν μέσον για τη μεταφορά μηνυμάτων και πληροφοριών μεταξύ ενός πομπού και ενός δέκτη. Η χρήση σχεδιαστικών αναπαραστάσεων είναι δυνατόν να καλλιεργήσει στα άτομα την ικανότητα να αντλούν πληροφορίες σχετικά με το αντικείμενο που αναπαριστούν και να τα επικοινωνούν, ανταλλάζοντας ιδέες, ερωτήματα, γνώσεις και εμπειρίες. Στο πλαίσιο αυτό, αποτελεί ενδιαφέρον η διερεύνηση της ικανότητας των νηπίων να ερμηνεύουν σχεδιαστικές αναπαραστάσεις. Για το σκοπό αυτό πραγματοποιήθηκε έρευνα στην οποία συμμετείχαν 24 νήπια ενός δημόσιου Νηπιαγωγείου στην Αλεξανδρούπολη. Στα παιδιά δόθηκε δισδιάστατη σχεδιαστική απεικόνιση του σχολείου τους - που κατασκευάστηκε ομαδικά στην αρχή της χρονιάς- και κλήθηκαν, με ημιδομημένη συνέντευξη, να : 1) αναγνωρίσουν το χώρο που απεικονιζόταν, 2) εντοπίσουν το χώρο στον οποίο βρίσκονταν τη στιγμή της συζήτησης (γραφείο νηπιαγωγού) και 3) να εντοπίσουν άλλους δύο χώρους (αυλή και τουαλέτες) υποδεικνύοντας τη σχετική διαδρομή ως αυτούς.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα παιδιά ανταποκρίθηκαν σε πολύ ικανοποιητικό βαθμό. Ειδικότερα, σχεδόν όλα τα παιδιά, εκτός δύο, αναγνώρισαν στο σχέδιο την απεικόνιση του σχολείου τους και αιτιολόγησαν την απάντησή τους αντλώντας πληροφορίες από αντικείμενα που περιλαμβάνονταν στη σχεδιαστική αναπαράστασή, όπως καρέκλες, τραπέζια, γραφείο. Από τα παιδιά που αναγνώρισαν την απεικόνιση του σχολείου τους, τα μισά από αυτά (11 παιδιά) εντόπισαν με επιτυχία και τους τρείς χώρους που τους ζητήθηκε, έξι (6) και πέντε (5) παιδιά εντόπισαν δύο και έναν αντίστοιχα. Αιτιολογώντας τις απαντήσεις τους, τα παιδιά, αναφέρθηκαν σε αντικείμενα που απεικονίζονταν στο σχέδιο, τα οποία υποδείκνυαν και στον πραγματικό χώρο. Όλα τα παιδιά, υπέδειξαν με επιτυχία, σημειώνοντας πάνω στο σχέδιο, τη σχετική διαδρομή ως τους χώρους που εντόπισαν, ξεκινώντας από το χώρο στον οποίο βρίσκονται τη στιγμή της συζήτησης. Εξηγώντας τις διαδρομές που σημείωναν αναφέρονταν σε κατασκευαστικά στοιχεία του χώρου που απεικονίζονταν ως ανοίγματα στο σχέδιο (πόρτες) ή κατείχαν κεντρική θέση (διάδρομοι). Τα αποτελέσματα υποστηρίζουν ότι τα παιδιά μπορούν σε ικανοποιητικό βαθμό να ερμηνεύουν σχεδιαστική αναπαράσταση ενός πραγματικού χώρου, με τον οποίο είναι εξοικειωμένα.

ΝΟΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΛΟΓΟΣ

Συμεωνίδης Νικόλαος, Καλδρυμίδου Μαρία & Τάτσης Κωνσταντίνος
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
nsimeonidis@sch.gr, mkaldrim@cc.uoi.gr, ktatsis@uoi.gr

Εφόσον η διδακτική διαδικασία των νοερών υπολογισμών ξεκινά και υποστηρίζεται από το διάλογο (Λεμονίδης, 2013), η ανάπτυξη επικοινωνιακών τακτικών (μαθηματικές γενικεύσεις, κριτική γλωσσική επίγνωση, ανάλυση λαθών για εντοπισμό της προέλευσης θεμελιωδών μαθηματικών παρανοήσεων, υποστήριξη ομαδικής εργασίας για συλλογική μάθηση και καθολική συμμετοχή), αλλά και γλωσσικών εργαλείων (χρήση αντωνυμιών, μονογλωσσικά και ετερογλωσσικά εργαλεία, χρονικά επιρρήματα, άρθρα, ρήματα, και χρόνους) αναμένεται να επιδρούν θετικά σε αυτή τη διαδικασία. Αυτή η υπόθεση ελέγχθηκε σε έρευνα με μαθητές της Δ΄ Δημοτικού και επιλέγοντας αρχικά ως επικοινωνιακή τακτική τις μαθηματικές γενικεύσεις και ως γλωσσικό εργαλείο τη χρήση των αντωνυμιών (Rowland, 1999). Συγκεκριμένα, εξετάσαμε αν οι μεν οδηγούν τους μαθητές σε σχετικές με αυτές νοερές στρατηγικές και αν η δε στη γενικότερη αντίληψη της επικράτησης τους σε σχέση με τον γραπτό αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού. Έτσι, στο μαθηματικό διάλογο που αναπτύχθηκε, προσπαθήσαμε να ενεργοποιήσουμε τη διαδικασία του υπολογισμού με νοερές στρατηγικές χρησιμοποιώντας εκφράσεις με αντωνυμίες που αντιστοιχούν σε αυτές. Ενδεικτικό απόσπασμα: «όσοι θέλετε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε *μερικούς* από *εκείνους* τους *δικούς σας* τρόπους, που νομίζετε ότι θα σας διευκολύνουν περισσότερο, μάλιστα στο τέλος μπορείτε να *τους* παρουσιάσετε και να *τους* αναδείξετε». Τα πρώτα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι περισσότεροι μαθητές (70%) οδηγήθηκαν στην εκτέλεση της κοινής για όλους πράξης πολλαπλασιασμού με στρατηγικές νοερών υπολογισμών, ορθά και σε λιγότερο χρόνο από εκείνους που χρησιμοποίησαν τον κάθετο αλγόριθμο, συμπεραίνοντας και ανακοινώνοντας ότι αποτέλεσε μία πιο εύκολη, λειτουργική και γρήγορη μέθοδο υπολογισμού σε σχέση με την παραδοσιακή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής. Νοεροί υπολογισμοί.* Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Rowland, T. (1999). Pronouns in mathematical talk: Power, vagueness, and generalisation. *For the Learning of Mathematics, 19*(2), 19–26.

ΜΑΘΗΤΕΣ ΠΟΥ ΔΥΣΚΟΛΕΥΟΝΤΑΙ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΚΟΝΣΤΡΟΥΚΤΙΒΙΣΤΙΚΗ Ή ΡΗΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ;

Μαρκάδας Σωτήρης
Δάσκαλος - Σχολικός Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
markadas@sch.gr

Ένα από τα ερωτήματα που απασχολεί πολλούς εκπαιδευτικούς και ερευνητές είναι κατά πόσο οι κονστρουκτιβιστικές διδακτικές προσεγγίσεις είναι κατάλληλες για μαθητές-τριες που δυσκολεύονται στα Μαθηματικά και παρουσιάζουν χαμηλές μαθηματικές δεξιότητες. Μια διδασκαλία μαθηματικών εννοιών που βασίζεται στην ενεργή συμμετοχή των διδασκόμενων και στην ανακαλυπτική διάσταση της μάθησης, έτσι ώστε να δομήσουν οι ίδιοι οι διδασκόμενοι τη μαθηματική γνώση (κονστρουκτιβιστική προσέγγιση), είναι πιο αποτελεσματική από μια σαφή, δομημένη παρουσίαση νέων γνωστικών μαθηματικών πεδίων από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό (ρητή διδασκαλία), όσον αφορά αδύναμους μαθησιακά μαθητές-τριες;

Προγράμματα σπουδών κονστρουκτιβιστικής κατεύθυνσης φαίνεται να ωφελούν περισσότερο τους μαθητές-τριες με επιδόσεις μέσου όρου αλλά όχι όσους έχουν χαμηλές (Woodward, & Baxter, 1997). Η ρητή διδασκαλία (explicit instruction) αναγνωρίζεται ως μια από τις πιο αποτελεσματικές προσεγγίσεις για τη διδασκαλία μαθητών-τριών που δυσκολεύονται στα Μαθηματικά (Gersten, Beckmann, et al., 2009· NMAP, 2008). Μελέτες που αφορούν διδακτικές παρεμβάσεις υπογραμμίζουν τις δυνατότητες της (Gersten, Chard, et al., 2009). Αν και οι περισσότερες από τις έρευνες σχετικά με την εφαρμογή της έχουν διεξαχθεί σε μικρές ομάδες, πρόσφατες μελέτες έχουν αρχίσει να δείχνουν ότι η ρητή διδασκαλία μπορεί να διαδραματίσει έναν κρίσιμο ρόλο στη διδασκαλία του συνόλου της τάξης (Doabler, & Fien, 2013).

Τα τρία χαρακτηριστικά της ρητής διδασκαλίας είναι: Α. Τα διδακτικά μοντέλα. Πρόκειται για σαφείς επιδείξεις που μπορεί να συνοδεύονται από έκφωνη σκέψη του δασκάλου-ας και εξηγήσεις. Τα αποτελεσματικά διδακτικά μοντέλα δείχνουν στους μαθητές ποιο ακριβώς περιεχόμενο μαθηματικών θα μάθουν και τι θα εφαρμόσουν. Τρεις στρατηγικές για τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας των διδακτικών μοντέλων είναι η χρήση σαφούς και συνεπούς ορολογίας, η συμμετοχή και των μαθητών-τριών σ' αυτά και η επιλογή κατάλληλου αριθμού μοντέλων. Β. Η καθοδηγούμενη πρακτική. Υποστηρίζει τους μαθητές-τριες κατά τα πρώτα στάδια της εκμάθησης μαθηματικών. Η υποστήριξη αποσύρεται συστηματικά, καθώς οι μαθητές-τριες γίνονται πιο ικανοί σε μια μαθηματική έννοια ή δεξιότητα. Ο δάσκαλος-α προσδιορίζει και διδάσκει, αν χρειαστεί, τις προαπαιτούμενες δεξιότητες. Επιλέγει τα εκπαιδευτικά παραδείγματα και τη σειρά τους. Χρησιμοποιεί λεκτικές προτροπές και πολλαπλές αναπαραστάσεις των μαθηματικών ιδεών. Παρέχει σωρευτική αξιολόγηση. Γ. Η ανατροφοδότηση. Χρησιμοποιείται για να επιβεβαιώσει και, όταν είναι απαραίτητο, να διορθώσει τις απαντήσεις των μαθητών-

τριών. Η συνεπής ανατροφοδότηση μειώνει την πιθανότητα για παρεξηγήσεις και βοηθάει στην εμβάθυνση και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων.

Στοιχεία μιας Ρητής Διδασκαλίας Μαθηματικών		
Ρόλος Δασκάλου	Καθοδηγούμενη εξάσκηση	Εκπαιδευτική Ανατροφοδότηση
▪ Σαφείς διατυπώσεις χωρίς διαφοροποιήσεις στην ορολογία ▪ Σαφείς εξηγήσεις και επιδείξεις ▪ Μεγαλόφωνη σκέψη	▪Επιλέξτε και καθορίστε την ακολουθία των διδακτικών παραδειγμάτων ▪Διδάξτε τις προαπαιτούμενες δεξιότητες ▪Λεκτικές παροτρύνσεις ▪Χρήση μοντέλων ▪Ανασκόπηση-ανακεφαλαίωση	▪ Συνεχής ανατροφοδότηση ▪ Έγκαιρη ανάδραση ▪Διορθωτική ανατροφοδότηση ▪ Θετική ενίσχυση

Υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις πως η ρητή διδασκαλία είναι πιο αποτελεσματική από την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση για μαθητές με χαμηλές επιδόσεις (Kroesbergen, Van Luit, & Maas, 2004). Οι Clarke, et al. (2011), αναφέρουν πως παιδιά νηπιαγωγείου που δυσκολεύονταν σε μαθηματικές έννοιες σημείωσαν σημαντική πρόοδο όταν υπήρξε παρέμβαση με ρητή διδασκαλία σε σχέση με άλλους συμμαθητές-τριες τους που αντιμετώπιζαν παρόμοιες δυσκολίες αλλά συμμετείχαν σε τυπικές ομάδες διδασκαλίας. Σε παρόμοια συμπεράσματα για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών στο νηπιαγωγείο καταλήγουν οι Dyson, Jordan και Glutting (2013). Μελέτη με παιδιά πρώτης Δημοτικού που παρουσίαζαν δυσκολίες εκμάθησης μαθηματικών έδειξε πως τα παιδιά στα οποία έγινε παρέμβαση με ρητή διδασκαλία αύξησαν περισσότερο τις ικανότητες τους στην πρόσθεση και αφαίρεση από αντίστοιχες περιπτώσεις παιδιών που συνέχισαν τη διδασκαλία τους στις τυπικές τάξεις (Bryant, et al., 2008). Σε άλλη έρευνα, η εφαρμογή μεθόδων ρητής διδασκαλίας βοήθησε μαθητές πρώτης Γυμνασίου που είχαν μεγάλα μαθηματικά γνωστικά ελλείμματα να προσεγγίσουν το μαθησιακό επίπεδο των άλλων συμμαθητών-τριών τους (Piper, Marchand-Martella, & Martella, 2010).

Η ποιότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης μπορεί να βελτιωθεί με μια διδασκαλία πιο ρητή και συστηματική (Doabler, & Fien, 2013· Baker, Gersten, & Lee, 2002). Η διδασκαλία των Μαθηματικών πρέπει να σχεδιάζεται με βάση τις διαφοροποιημένες ανάγκες των μαθητών-τριών. Η εισαγωγή μορφών ρητής διδασκαλίας στην καθημερινή σχολική πραγματικότητα φαίνεται πως μπορεί να ενισχύσει την εκπαιδευτική αποτελεσματικότητα και να βελτιώσει τις μαθηματικές δεξιότητες στο σύνολο των μαθητών-τριών. Η προσαρμογή διδακτικών μεθόδων της ρητής διδασκαλίας και η ενσωμάτωση στοιχείων της στις κυρίαρχες σήμερα κονστρουβιστικές προσεγγίσεις πρέπει να μελετηθεί και να διερευνηθεί (Hudson, Miller, & Butler, 2006).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Baker, S., Gersten, R., & Lee, S. (2002). A synthesis of empirical research on teaching mathematics to low- achieving students. *Elementary School Journal, 103*, 51–73.

Bryant, B. R., Bryant, D. P., Gersten, R. M., Scammacca, N. N., Funk, C., Winter, A., & Pool, C. (2008). The effects of tier 2 intervention on the mathematics performance of first-grade students who are at risk for mathematics difficulties. *Learning Disability Quarterly, 31*, 47–63.

Clarke, B., Smolkowski, K., Baker, S., Fien, H., Doabler, C., & Chard, D. (2011). The impact of a comprehensive tier 1 core kindergarten program on the achievement of students at-risk in mathematics. *Elementary School Journal, 111*, 561–584.

Doabler, C., & Fien, H. (2013). Explicit Mathematics Instruction: What Teachers Can Do for Teaching Students With Mathematics Difficulties. *Intervention in School and Clinic, 48*(5), 276-285.

Dyson, N. I., Jordan, N. C., & Glutting, J. (2013). A number sense intervention for low-income kindergartners at risk for math difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 46*, 166-181.

Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., March, L., Star, J. R., & Witzel, B. (2009). *Assisting students struggling with mathematics: Response to Intervention (RtI) for elementary and middle schools* (Practice Guide Report No. NCEE 2009-4060). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research, 79,* 1202–1242.

Hudson, P., Miller, S., & Butler, F. (2006). Adapting and Merging Explicit Instruction within Reform Based Mathematics Classrooms. *American Secondary Education, 35*(1), 19.

Kroesbergen, E., Van Luit, J., & Maas, C. (2004). Effectiveness of Explicit and Constructivist Mathematics Instruction for Low-Achieving Students in the Netherlands. *The Elementary School Journal , 104*(3), 233-251.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel.* Washington, DC: U.S. Department of Education.

Piper, L., Marchand-Martella, N., & Martella, R. (2010). Use of Explicit Instruction and Double-Dosing to Teach Ratios, Proportions, and Percentages to At-Risk Middle School Students. *The Journal of At-Risk Issues*, *15*(2), 9-17.

Woodward, J., & Baxter, J. (1997). The effects of an innovative approach to mathematics on academically low-achieving students in inclusive settings. *Exceptional Students*, *63*, 373- 388.

ΓΙΑΤΙ ΤΟ ΤΕΤΡΑΔΙΟ;

Ειρήνη Σπύρου
1ο Γενικό Λύκειο Αγίου Δημητρίου, Αθήνα
eirspyrou@sch.gr

Η συνεργασία και η ανταλλαγή πρακτικών μεταξύ εκπαιδευτικών που συμμετέχουν στο Εργαστήριο Άλγεβρας που έχει συσταθεί στην Ευαγγελική Σχολή, ανέδειξε μια σειρά από ζητήματα που αφορούν στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η χρήση και αξιοποίηση του τετραδίου του μαθητή ήταν μια από τις πρακτικές που κατατέθηκαν και αποτέλεσε το έναυσμα για τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας.

Η ΕΡΕΥΝΑ

Η μικρή αυτή έρευνα επιχειρεί να ανιχνεύσει αν η χρήση του τετραδίου από τους μαθητές, ανταποκρίνεται στις προσδοκίες του εκπαιδευτικού. Στο τέλος του 1ου τετραμήνου, συγκεντρώθηκαν και μελετήθηκαν προσεκτικά τα τετράδια των μαθητών μιας 25μελούς τάξης Α΄ Λυκείου, στην οποία η τήρηση του τετραδίου αποτελούσε σημαντικό κομμάτι του ‘διδακτικού συμβολαίου’. Επίσης στους μαθητές δόθηκε ερωτηματολόγιο, ώστε να καταγραφούν οι απόψεις τους για τη χρήση του τετραδίου. Η προσεκτική ανάγνωση του περιεχομένου των τετραδίων ανέδειξε 4 κατηγορίες χρήσης:

Πίνακας 1: Κατηγορίες χρήσης του τετραδίου	**Μαθητές**
1. Γράφουν και ζωγραφίζουν	2 (8%)
2. Γράφουν λιγότερα από τα αναγραφόμενα στον πίνακα	4 (16%)
3. Γράφουν ό,τι ακριβώς αναγράφεται στον πίνακα	13 (52%)
4. Γράφουν ό,τι ακριβώς αναγράφεται στον πίνακα και σχολιάζουν περαιτέρω	6 (24%)

Δυο από τα ερωτήματα του ερωτηματολογίου και οι απαντήσεις τους:

Πίνακας 2: Σας βοηθάει το τετράδιο;		**Πίνακας 3: Αν ναι με ποιο τρόπο;**	
Ναι	83%	Συμπληρωματικά με το βιβλίο	23%
Λίγο	13%	Για ασκήσεις και θεωρία	57%
Όχι	4%	Για θεωρία	20%

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα ευρήματα δείχνουν ότι για τους περισσότερους μαθητές το τετράδιο αποτελεί σημείο αναφοράς των πεπραγμένων της τάξης και σημαντικό εργαλείο για τον εκπαιδευτικό, ώστε μέσα από τη συστηματική μελέτη της χρήσης του να διαγνώσει τις ανάγκες των μαθητών προκειμένου να διαμορφώσει μια κοινή μαθηματική γλώσσα με αυτούς.